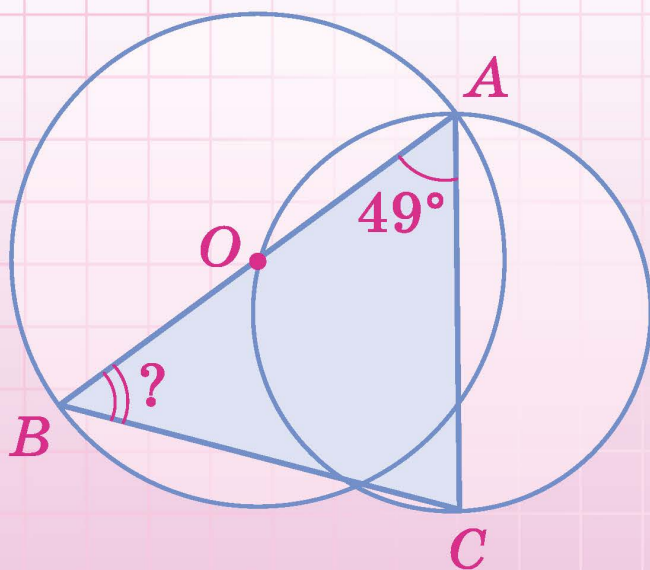


ЗБОРНИК ЗАДАЧ ПА ГЕАМЕТРЫІ

7.9



УДК 514(075.3=161.3)
ББК 22.151я721
З-41

Аўтары:

С. Г. Конанай, Т. А. Адамовіч, І. В. Яфімцава, Т. У. Ячэйка

Пераклад з рускай *Н. М. Алганавай*

Рэцэнзенты:

кафедра алгебры і геаметрыі факультэта матэматыкі і тэхналогіі праграміравання ўстановы адукацыі «Гомельскі дзяржаўны ўніверсітэт імя Ф. Скарыны» (доктар фізіка-матэматычных навук, дацэнт *М. В. Селькін*); настаўнік матэматыкі кваліфікацыйнай катэгорыі «настаўнік-метадыст» дзяржаўнай установы адукацыі «Сярэдняя школа № 1 г. Драгічына» *А. Б. Пратасевіч*

ISBN 978-985-03-4013-9

© Алганава Н. М., пераклад на беларускую мову», 2023

© Афармленне. Дзяржаўнае прадпрыемства «Народная асвета», 2023

Правообладатель Народная асвета

ЗБОРНІК ЗАДАЧ ПА ГЕАМЕТРЫІ

Вучэбны дапаможнік для **7–9** класаў
устаноў адукацыі,
якія рэалізуюць адукацыйныя праграмы
агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання і выхавання

*Данушчана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь*

Мінск «Народная асвета» 2023

Правообладатель Народная асвета

АД АЎТАРАЎ

Шаноўныя вучні! У дадзеным зборніку прапануюцца дадатковыя задачы да вучэбных дапаможнікаў «Геаметрыя» для 7-га класа, «Геаметрыя» для 8-га класа, «Геаметрыя» для 9-га класа аўтара В. У. Казакова.

Структура зборніка адпавядае структуры названых вучэбных дапаможнікаў. Задачы падобраны такім чынам, каб вы маглі не толькі больш глыбока засвоіць асновы тэорыі, выкладзеныя ў вучэбных дапаможніках, але і выпрацавалі навыкі іх практычнага прымянення. Асобныя заданні складзены так, што самі могуць дапамагчы вам правільна выбраць спосаб іх рашэння. Галоўнай мэтай зборніка з'яўляецца развіццё ў вас умення разважаць лагічна і здольнасці адстойваць свой пункт гледжання.

Прадстаўлены ў зборніку матэрыял можа быць скарыстаны вамі для самастойнай працы.

Задачы, адзначаныя сімвалам *, прызначаны для самастойнай пошукава-даследчай або праектнай дзейнасці вучняў (індывідуальнай або групавой), якая арганізуецца педагогічным работнікам.

Задачы, арыентаваныя на прымяненне ведаў на больш высокім (павышаным) узроўні, адзначаны сімвалам .

Рашэнне некаторых задач патрабуе нешаблоннага прымянення атрыманых ведаў, што будзе садзейнічаць развіццю ў вас матэматычнай культуры і мыслення. Каб вы маглі пераканацца ў правільнасці сваіх рашэнняў, у зборніку дадзены адказы да заданняў.

Для кантролю і самаправеркі ў зборнік уключаны раздзел «Выніковы самакантроль», які можа быць выкарыстаны пры падрыхтоўцы да экзаменаў.

Жадаем поспехаў!

7 клас

ПАЧАТКОВЫЯ ПАНЯЦЦІ ГЕАМЕТРЫІ

§ 1. Паўтарэнне геаметрычнага матэрыялу 5—6-х класаў

- 1.1.** а) Пабудуйце ў сшытку прамавугольнік, абазначце яго $ABCD$. На рысунку адзначце: адрэзак AC ; прамень CB ; прамую BD .
- б) Пабудуйце ў сшытку прамавугольнік, абазначце яго $MNPK$. На рысунку адзначце: адрэзак MP ; прамень PN ; прамую NK .
- 1.2.** Пабудуйце ў сшытку трохвугольнік і абазначце яго MNK , унутры трохвугольніка адзначце пункты A, B, C . Ці маюць агульныя пункты:
- а) адрэзак MN з адрэзкам AB ; адрэзак KN з прамой NC ; прамень MK з адрэзкам AC ; прамень KN з прамой NC ;
- б) адрэзак MK з адрэзкам AC ; прамая MN з адрэзкам AB ; прамень KN з адрэзкам NC ; прамень MK з прамой AC ?
- 1.3.** З дапамогай цыркуля пабудуйце акружнасць з цэнтрам:
- а) у пункце A і радыусам 3 см. Пабудуйце адрэзак $AB = 7$ см. Абазначце літарай C агульны пункт адрэзка AB і акружнасці. Знайдзіце даўжыню адрэзка CB і дыяметр гэтай акружнасці;
- б) у пункце M і радыусам 2 см. Пабудуйце адрэзак $MK = 5$ см. Абазначце літарай C агульны пункт адрэзка MK і акружнасці. Знайдзіце даўжыню адрэзка CK і дыяметр гэтай акружнасці.
- 1.4.** Пры дапамозе транспарціра пабудуйце:
- а) вугал FDC , роўны 50° , і вугал MNK , роўны 130° ;
- б) вугал ABC , роўны 70° , і вугал FKN , роўны 120° .

- 1.5. Побудуйте відрізок AB і відрізок CD різної довжини і виміряйте їх довжини.
- 1.6. При допомозі лінійки побудуйте з шматка відрізок MN , роўны 3 см 5 мм, і відрізок CK , роўны 2 дм 1 см.
- 1.7. Визначте, не виконуючи вимірювання:
- а) які прями, показані на рисунку 1, можуть бути перпендикулярними. Перевірте себе, використовуючи чертёжны трикутник і транспарент;

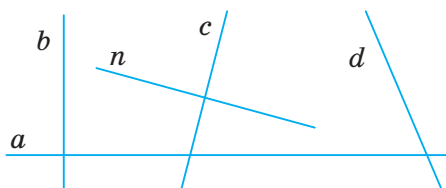


Рис. 1

- б) які прями, показані на рисунку 2, можуть бути паралельними. Перевірте себе, використовуючи лінійку і чертёжны трикутник.

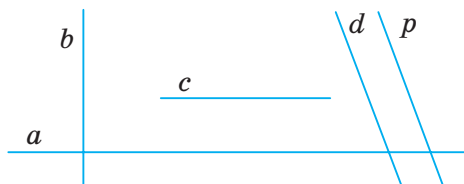


Рис. 2

- 1.8. а) Перенесіть з шматка рисунок 3. Побудуйте пряму c , яка проходить через точку A перпендикулярно прямій b .

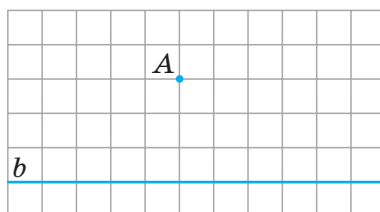


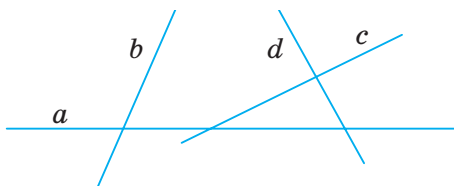
Рис. 3

б) Перамясьце ў сшытак рысунак 4. Пабудуйце прамую n , якая праходзіць праз пункт A паралельна прамой b .



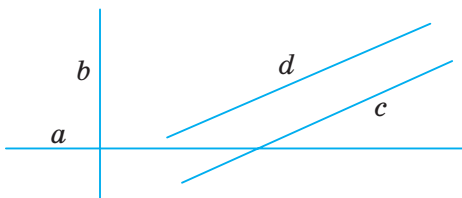
Рыс. 4

1.9. а) Якія прамыя, паказаныя на рысунку 5, могуць быць перпендыкулярнымі? Праверце сябе, выкарыстаўшы чарцёжны трохвугольнік.



Рыс. 5

б) Якія прамыя, паказаныя на рысунку 6, могуць быць паралельнымі? Праверце сябе, выкарыстаўшы чарцёжны трохвугольнік і лінейку.



Рыс. 6

1.10. Пабудуйце ў сшытку:

- дзве перпендыкулярныя прамыя. Вызначыце, колькі прамых вуглоў атрымалася;
- дзве прамыя, перпендыкулярныя трэцяй. Якое ўзаемнае размяшчэнне дзвюх першых прамых?

1.11. Пабудуйце ў сшытку:

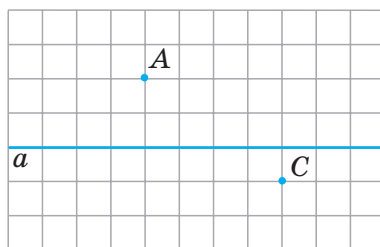
- а) вугал, роўны 80° . Адзначце на яго старане пункт, правядзіце праз яго прамую, паралельную другой старане вугла;
- б) вугал, роўны 120° . Адзначце на яго старане пункт, правядзіце праз яго прамую, паралельную другой старане вугла.

1.12. Пабудуйце ў сшытку дзве паралельныя прамыя і правядзіце трэцюю прамую, якая перасякае першыя дзве. Колькі вугоў атрымалася?

1.13. На які вугал трэба павярнуць прамень, каб яго пачатковае і канечнае становішчы:

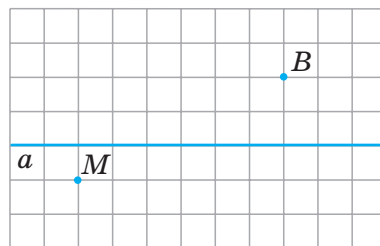
- а) утварылі прамую лінію;
- б) былі перпендыкулярнымі?

1.14. а) Перанясіце ў сшытак рысунак 7. Праз пункты A і C правядзіце прамыя, перпендыкулярныя прамой a .



Рыс. 7

б) Перанясіце ў сшытак рысунак 8. Праз пункты M і B правядзіце прамыя, паралельныя прамой a .



Рыс. 8

1.15. З дапамогай цыркуля пабудуйце акружнасць з цэнтрам:

а) у пункце O і радыусам 2 см. Вызначыце, якія з пунктаў, што знаходзяцца на адлегласцях $OA = 3$ см, $OB = 2$ см, $OC = 1,5$ см, $OK = 4$ см, ляжаць на акружнасці, а якія — па-за акружнасцю;

б) у пункце O і радыусам 3 см. Вызначыце, якія з пунктаў, што знаходзяцца на адлегласцях $ON = 4$ см, $OK = 1,5$ см, $OF = 1$ см, $OP = 3$ см, ляжаць на акружнасці, а якія — унутры акружнасці.

1.16. а) Які вугал будзе паміж пачатковым і канечным становішчамі гадзіннай стрэлкі праз 2 г, калі цяпер 13 г?

б) Які вугал будзе паміж пачатковым і канечным становішчамі мінутнай стрэлкі праз паўгадзіны, калі цяпер 12 г 15 мін?

§ 2. Прадмет геаметрыі

2.1. Асноўнымі геаметрычнымі фігурамі з'яўляюцца:

а) пункт, трохвугольнік, прамая;

б) пункт, прамая, плоскасць.

Выберыце правільны адказ.

2.2. Фігуры, якія вывучае планіметрыя, паказаны:

а) на рысунку 9; б) на рысунку 10.

Выберыце правільны адказ.



Рыс. 9

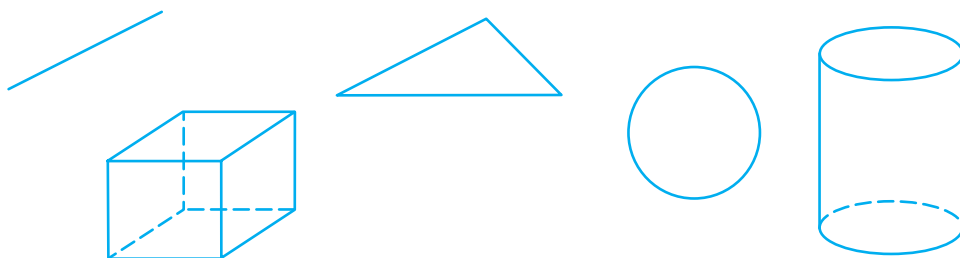


Рис. 10

2.3. Фігури, які вивчає стэрэаметрыя, паказаны:

а) на рысунку 11;

б) на рысунку 12.

Выберыце правільны адказ.

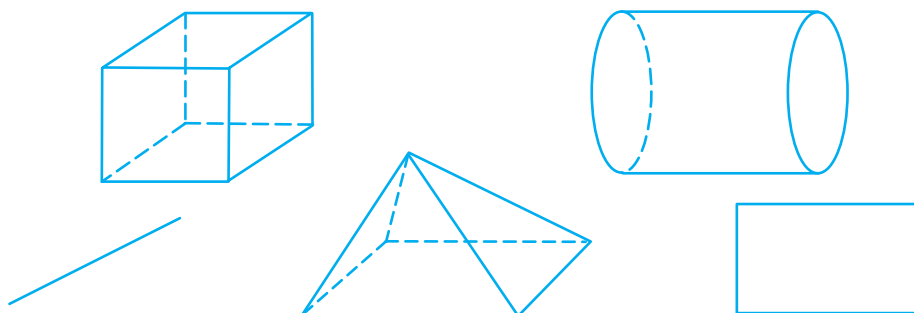


Рис. 11

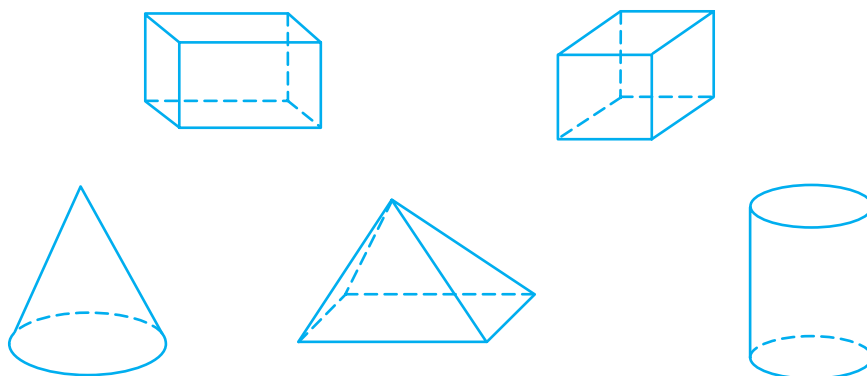
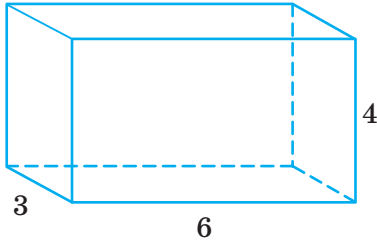


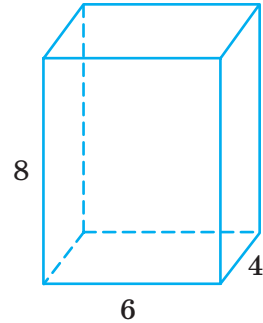
Рис. 12

2.4. Выкарыстаўшы даныя рысунка 13, вылічыце плошчу поўнай паверхні прамавугольнага паралелепіпеда.

2.5. Выкарыстаўшы даныя рысунка 14, вылічыце аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда.



Рыс. 13



Рыс. 14

2.6. а) Сума даўжынь адрэзкаў AB і MK роўна 10,8 см. Даўжыня адрэзка MK складае $\frac{5}{6}$ ад гэтай сумы. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB .

б) Рознасць даўжынь адрэзкаў AM і BK роўна 4,8 см. Даўжыня адрэзка AM складае $\frac{5}{4}$ ад гэтай рознасці. Знайдзіце даўжыню адрэзка BK .

2.7. а) Сума даўжынь усіх кантаў куба роўна 48 дм. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні куба.

б) Плошча адной грані куба роўна 36 дм². Знайдзіце плошчу поўнай паверхні куба.

2.8. а) Стораны прамавугольніка адносяцца як 5 : 6. Знайдзіце адносіну перыметра прамавугольніка да большай стараны.

б) Стораны прамавугольніка адносяцца як 2 : 5. Знайдзіце адносіну перыметра прамавугольніка да меншай стараны.

2.9. а) Скрынка мае форму прамавугольнага паралелепіпеда. Даўжыня скрынкі роўна 60 см, яе шырыня складае $\frac{2}{3}$ яе даўжыні, а вышыня — $\frac{3}{10}$ шырыні. Знайдзіце аб'ём скрынкі.

б) Скрынка мае форму прамавугольнага паралелепіпеда. Шырыня скрынкі роўна 20 см, даўжыня скрынкі складае $\frac{5}{2}$ яе шырыні, а вышыня — $\frac{13}{10}$ шырыні. Знайдзіце аб'ём скрынкі.

§ 3. Прамая. Прамень. Адрэзак. Ломаная

3.1. У спытку пакажыце відарыс:

- а) простаі незамкнёнай ломанай;
- б) простаі замкнёнай ломанай;
- в) няпростаі незамкнёнай ломанай.

3.2. а) На адрэзку AB , роўным 10 см, адзначаны пункт M . Адрэзак AM на 2 см большы за адрэзак MB . Знайдзіце даўжыню адрэзка MB .

б) На адрэзку PK , роўным 12 см, адзначаны пункт O . Адрэзак PO на 4 см меншы за адрэзак OK . Знайдзіце даўжыню адрэзка OK .

3.3. а) На адрэзку AB , роўным 30 см, адзначаны пункты M і K . Знайдзіце даўжыню адрэзка MK , калі адрэзак AM роўны 11 см, а адрэзак KB на 3 см меншы за адрэзак AM .

б) На адрэзку MN , роўным 20 см, адзначаны пункты C і D . Знайдзіце даўжыню адрэзка CD , калі адрэзак MC на 3 см большы за адрэзак DN , роўны 6 см.

3.4. Плошча прамавугольніка роўна $17,6 \text{ см}^2$. Даўжыня адной са старон прамавугольніка роўна 0,55 дм. Знайдзіце перыметр прамавугольніка і выразіце яго ў дэцыметрах.

3.5. Перыметр прамавугольніка роўны 17,6 см. Даўжыня адной са старон прамавугольніка роўна 0,45 дм. Знайдзіце плошчу прамавугольніка і выразіце яе ў дэцыметрах.

- 3.6.** а) Ці могуць тры пункты A , B і C ляжаць на адной прамой, калі $AC = 12$ см, $AB = 7$ см і $BC = 6$ см?
 б) Ці могуць тры пункты O , M і K ляжаць на адной прамой, калі $OK = 17$ см, $OM = 9$ см і $MK = 8$ см?
- 3.7.** У шасцізвённай ломанай самае маленькае звяно роўна 2 см. Кожнае наступнае звяно, пачынаючы з другога, на 2 см большае за папярэдняе. Знайдзіце:
 а) самае вялікае звяно ломанай;
 б) даўжыню ўсёй ломанай.
- 3.8.** У пяцізвённай ломанай самае вялікае звяно роўна 12 см. Кожнае наступнае звяно, пачынаючы з другога, на 2 см меншае за папярэдняе. Знайдзіце:
 а) самае маленькае звяно ломанай;
 б) даўжыню ўсёй ломанай.
- 3.9.** У шасцізвённай ломанай самае маленькае звяно роўна 2 см. Знайдзіце самае вялікае звяно, калі кожнае наступнае звяно, пачынаючы з другога, у 2 разы большае за папярэдняе.
- 3.10.** У пяцізвённай ломанай самае вялікае звяно роўна 80 см. Знайдзіце самае маленькае звяно, калі кожнае наступнае звяно, пачынаючы з другога, у 2 разы меншае за папярэдняе.

§ 4. Акружнасць і круг

- 4.1.** Пабудуйце акружнасць і адзначце на ёй пункты A , B і C . Запішыце дугі, якія пры гэтым утварыліся. Пазначце дугі:
 а) меншыя за 90° ;
 б) меншыя за паўакружнасць;
 в) большыя за паўакружнасць.
- 4.2.** Якую даўжыню павінны мець дзве хорды акружнасці радыусам R , каб пры любым іх размяшчэнні гэтыя хорды перасякаліся?

- 4.3. Знайдзіце радыус акружнасці, калі яе дыяметр роўны 5,6 дм.
- 4.4. Знайдзіце дыяметр акружнасці, калі яе радыус роўны 2,3 мм.
- 4.5. На акружнасці паслядоўна адзначаны чатыры пункты A , B , C , D так, што дугі AB і CD роўныя. Запішыце іншыя пары роўных дуг з канцамі ў дадзеных пунктах. Разгледзьце спецыяльныя выпадкі:
- а) пункт B з'яўляецца сярэдзінай AC ;
 - б) дугі AB , BC , CD і DA роўныя.
- 4.6. Знайдзіце даўжыню акружнасці:
- а) калі яе радыус роўны 4,1 см (лік π і вынік акругліце да сотых);
 - б) калі яе радыус роўны 2,1 дм (лік π і вынік акругліце да сотых).
- 4.7. Унутры дадзенага вугла пабудуйце пункты, роўнааддаленыя ад яго вяршыні. Якую фігуру ўтварае мноства ўсіх такіх пунктаў?
- 4.8. а) Знайдзіце плошчу круга, дыяметр якога роўны 6,2 см (лік π і вынік акругліце да сотых).
б) Знайдзіце плошчу круга, радыус якога роўны 3,6 см (лік π і вынік акругліце да сотых).
- 4.9. Дыяметр акружнасці $MP = 20$ см. Хорды MA , AB , BP роўны радыусу гэтай акружнасці. Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $MABP$.
- 4.10. а) Дыяметр кола роўны 120 см. Яно робіць 20 абаротаў за мінуту. Знайдзіце, якую адлегласць кола пройдзе за гэты час (лік π акругліце да сотых).
б) Радыус кола роўны 80 см. Яно робіць 15 абаротаў за мінуту. Знайдзіце, якую адлегласць кола пройдзе за гэты час (лік π акругліце да сотых).

4.11. Як запісаць умову таго, што:

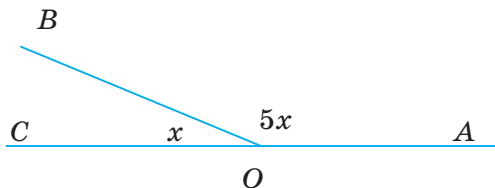
- а) пункт M ляжыць па-за або на акружнасці радыусам R з цэнтрам у пункце O ;
- б) пункт M ляжыць унутры або на акружнасці радыусам R з цэнтрам у пункце O ?

4.12*. Вызначыце:

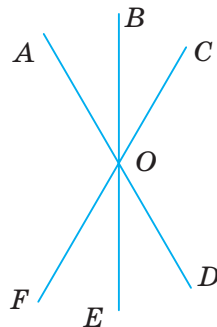
- а) які вугал (меншы за разгорнуты) утвараюць паміж сабой напрамкі на поўнач і паўднёвы захад;
- б) які вугал утвараюць паміж сабой гадзінная і мінутная стрэлкі будзільніка ў 3 г, у 13 г, у 16 г;
- в) на які вугал павернецца Зямля вакол сваёй восі за 2 г.

§ 5. Вугал. Віды вуглоў

- 5.1.** Вызначыце, якія вуглы вострыя, а якія тупыя, калі $\angle A = 35^\circ$; $\angle B = 75^\circ$; $\angle C = 135^\circ$; $\angle M = 180^\circ$.
- 5.2.** Вызначыце градусную меру вуглоў, паказаных на рысунку 15.
- 5.3.** Пакажыце відарыс двух роўных вуглоў $\angle AOB$ і $\angle COD$. Назавіце яшчэ адну пару роўных вуглоў на дадзеным чарцяжы.
- 5.4.** Назавіце ўсе пары вертыкальных вуглоў, паказаных на рысунку 16.



Рыс. 15



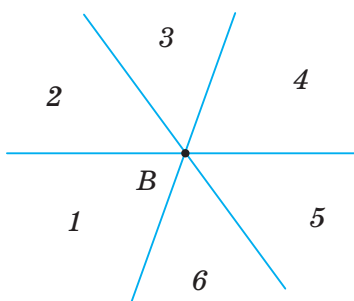
Рыс. 16

- 5.5.** Пры дапамозе лінейкі і транспарціра пабудуйце:
а) вугал AOB , роўны 80° ; б) вугал AOB , роўны 120° .
- 5.6.** Два вуглы велічынямі α і β маюць агульную старану. Чаму роўна велічыня вугла, утворанага старанамі гэтых вуглоў, якія не супадаюць?
- 5.7.** Ці можа прамень OM быць бісектрысай вугла AOB , роўнага 90° , калі:
а) $\angle MOB = 30^\circ$; б) $\angle AOM = 45^\circ$?
- 5.8.** Прамень OM з'яўляецца бісектрысай вугла AOB , знайдзіце:
а) вугал AOB , калі $\angle AOM = 35^\circ$;
б) вугал MOB , калі $\angle AOB = 120^\circ$.
- 5.9.** $\angle ACB = 160^\circ$. Унутры дадзенага вугла праведзены прамень CM . Унутры вуглоў ACM і MCB праведзены бісектрысы. Знайдзіце велічыню вугла паміж гэтымі бісектрысамі.
- 5.10.** Намалюйце адвольна некалькі прамых. Пры дапамозе чарцёжнага трохвугольніка апусціце на іх перпендыкуляры з пункта, які не належыць ніводнай з гэтых прамых.
- 5.11.** Выпішыце з прапанаванага спіса вуглоў 45° ; 126° ; 38° ; 147° ; 89° ; 95° ; 90° ; 211° ; 78° ; 180° :
а) вострыя вуглы; б) тупыя вуглы.
- 5.12.** Пабудуйце ў сшытку:
а) разгорнуты вугал; б) прамы вугал.
- 5.13.** Пабудуйце ў сшытку:
а) разгорнуты вугал і пры дапамозе транспарціра падзяліце яго на 3 роўныя часткі;
б) прамы вугал і пры дапамозе транспарціра падзяліце яго на 3 роўныя часткі.

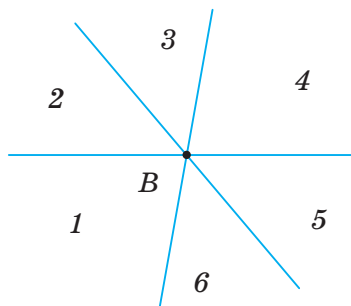
§ 6. Сумежныя вуглы. Вертыкальныя вуглы

- 6.1.** Ці могуць вуглы AOB і BOC быць сумежнымі, калі:
- $\angle AOB = 60^\circ$, а $\angle BOC = 70^\circ$;
 - $\angle AOB = 45^\circ$, а $\angle BOC = 135^\circ$?
- 6.2.** Знайдзіце вугал ABC , калі сумежны з ім вугал роўны:
- 120° ;
 - 56° .
- 6.3.** Адзін з двух сумежных вуглоў павялічылі на 10° . На колькі градусаў змянілася рознасць атрыманых сумежных вуглоў?
- 6.4.** а) Знайдзіце вугал, сумежны з вуглом ABC , роўным 150° .
 б) Знайдзіце вугал, сумежны з вуглом ABC , роўным 50° .
- 6.5.** Знайдзіце сумежныя вуглы, калі:
- адзін з іх меншы за другі на 40° ;
 - адзін з іх большы за другі на 100° .
- 6.6.** а) Ці могуць два сумежныя вуглы быць адначасова вострымі, прамымі, тупымі?
 б) Ці можа адзін з сумежных вуглоў быць тупым, а другі — прамым?
- 6.7.** Знайдзіце вуглы α і β , калі вядома, што яны сумежныя і $\alpha : \beta = 2 : 7$.
- 6.8.** Рознасць двух сумежных вуглоў роўна 90° . Знайдзіце велічыні гэтых вуглоў і пабудуйце іх пры дапамозе транспарціра.
- 6.9.** Вызначыце велічыню вугла паміж бісектрысамі двух сумежных вуглоў.
- 6.10.** а) Бісектрыса аднаго з двух сумежных вуглоў адсякае ад яго вугал, роўны 55° . Знайдзіце велічыню другога сумежнага вугла.
 б) Бісектрыса аднаго з двух сумежных вуглоў адсякае ад яго вугал, роўны 35° . Знайдзіце велічыню другога сумежнага вугла.

- 6.11.** а) Вуглы $МОК$ і $КОС$ — сумежныя, прычым вугал $КОС$ складае п'ятую частку вугла $МОК$. Знайдзіце градусную меру вугла, які разам з вуглом $МОК$ утварае пару вертыкальных вуглоў.
- б) Вуглы $АОВ$ і $ВОС$ — сумежныя, прычым вугал $ВОС$ складае чацвёртую частку вугла $АОВ$. Знайдзіце градусную меру вугла, які разам з вуглом $ВОС$ утварае пару вертыкальных вуглоў.
- 6.12.** Тры прамыя перасякаюцца ў пункце B (рыс. 17). З шасці атрыманых вуглоў $1, 2, 3, 4, 5, 6$ вядомы $\angle 1 = 70^\circ$ і $\angle 3 = 56^\circ$. Знайдзіце ўсе астатнія вуглы.
- 6.13.** Тры прамыя перасякаюцца ў пункце B (рыс. 18). З шасці атрыманых вуглоў $1, 2, 3, 4, 5, 6$ вядомы $\angle 5 = \angle 3 = 50^\circ$. Знайдзіце ўсе астатнія вуглы.



Рыс. 17



Рыс. 18

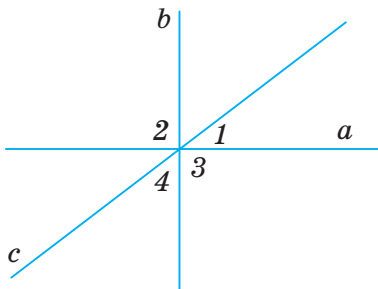
- 6.14.** а) Пры перасячэнні дзвюх прамых утварылася 4 вуглы. Вядома, што сума трох з іх роўна 250° . Знайдзіце велічыні ўсіх чатырох вуглоў.
- б) Пры перасячэнні дзвюх прамых утварылася 4 вуглы. Вядома, што сума двух з іх роўна 130° . Знайдзіце велічыні ўсіх чатырох вуглоў.
- 6.15*.** Дадзены чатыры прамыя, якія перасякаюцца парамі. Пры гэтым ніякія тры прамыя не перасякаюцца ў адным

пункце. Колькі вуглоў, меншых за 180° , утвараецца ў выніку ўзаемнага перасячэння гэтых прамых? Разгледзьце ўсе магчымыя варыянты.

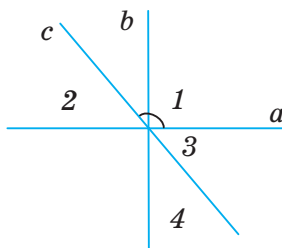
6.16. Ці можа сума двух вертыкальных вуглоў быць роўнай 180° ?

§ 7. Перпендыкулярныя прамыя

- 7.1.** а) На рысунку 19 прамыя a і b узаемна перпендыкулярныя. Знайдзіце вуглы 2, 3 і 4, калі $\angle 1 = 40^\circ$.
 б) На рысунку 20 прамыя a і b узаемна перпендыкулярныя. Знайдзіце вуглы 2, 3 і 4, калі $\angle 1 = 130^\circ$.

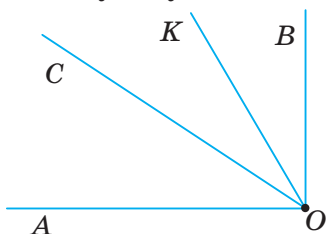


Рыс. 19

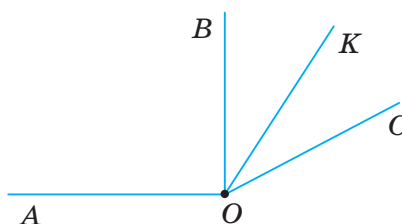


Рыс. 20

- 7.2.** З пункта O праведзены прамені OA , OB , OC і OK , прычым $OB \perp OA$, OK — бісектрыса вугла COB . Знайдзіце:
 а) вуглы AOK , AOC і KOB , калі вугал, утвораны бісектрысамі вуглоў AOB і BOC , роўны 20° (рыс. 21);
 б) вуглы AOK , BOK і AOC , калі вугал, утвораны бісектрысамі вуглоў AOB і BOC , роўны 75° (рыс. 22).

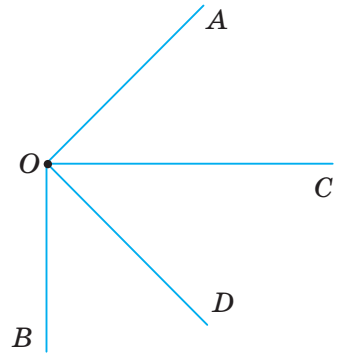


Рыс. 21



Рыс. 22

- 7.3.** Прямая a пересікае стораны вугла A ў пунктах B і C . Ці могуць абедзве прамыя AB і AC быць перпендыкулярнымі прамой a ?
- 7.4.** Дадзены два вуглы AOB і DOC з агульнай вяршыняй O . Стораны аднаго вугла перпендыкулярны старанам другога (рыс. 23). Знайдзіце вуглы AOB і DOC , калі рознасць іх градусных мер роўна 90° .



Рыс. 23

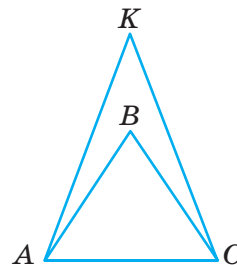
- 7.5.** Унутры вугла ABC праведзены прамень BK . Знайдзіце градусную меру вугла CBM , калі прамень BM перпендыкулярны праменю AB і $\angle ABK = 25^\circ$, што складае $\frac{5}{8}$ вугла CBK .
- 7.6.** Два роўныя тупыя вуглы маюць агульную старану, а дзве іншыя стараны ўзаемна перпендыкулярныя. Знайдзіце велічыню дадзеных тупых вуглоў.
- 7.7*.** З вяршыні разгорнутага вугла праведзены два прамені, якія дзеляць яго на тры роўныя часткі. Дакажыце, што бісектрыса сярэдняга вугла перпендыкулярна старанам разгорнутага вугла.

ПРЫМЕТЫ РОЎНАСЦІ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ

§ 8. Трохвугольнікі

- 8.1.** Выкарыстаўшы суадносіны паміж вугламі трохвугольніка ABC , запішыце ўмову таго, што гэты трохвугольнік:
- раўнабедраны;
 - роўнастаронні.

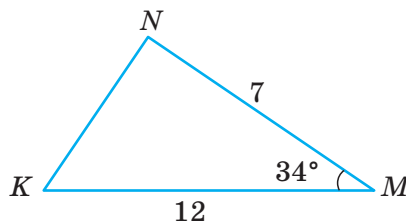
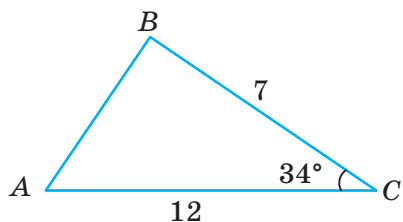
- 8.2. Выкарыстаўшы суадносіны паміж старанамі трохвугольніка ABC , запішыце ўмову таго, што гэты трохвугольнік:
а) раўнабедраны; б) роўнастаронні; в) рознастаронні.
- 8.3. Назавіце тып трохвугольніка, калі адзін яго вугал роўны суме двух іншых вуглоў.
- 8.4. Вядома, што перыметр раўнабедранага трохвугольніка ABC роўны 45 см, яго бакавая старана роўна 14 см. Знайдзіце аснову гэтага трохвугольніка.
- 8.5. На рысунку 24 $AB = BC = AC$, $AK = CK$. Перыметр трохвугольніка ABC роўны 24 см, а перыметр трохвугольніка AKC роўны 28 см. Знайдзіце даўжыні старон гэтых трохвугольнікаў.



Рыс. 24

§ 9. Першая і другая прыметы роўнасці трохвугольнікаў

- 9.1. Перыметр аднаго трохвугольніка большы за перыметр другога. Ці могуць быць роўнымі гэтыя трохвугольнікі?
- 9.2. а) Выкарыстаўшы даныя рысунка 25, вызначыце, ці з'яўляюцца трохвугольнікі ABC і MNK роўнымі. Растлумачце адказ.



Рыс. 25

- б) Выкарыстаўшы даныя рысунка 26, вызначыце, ці з'яўляюцца трохвугольнікі KLM і PQR роўнымі. Растлумачце адказ.

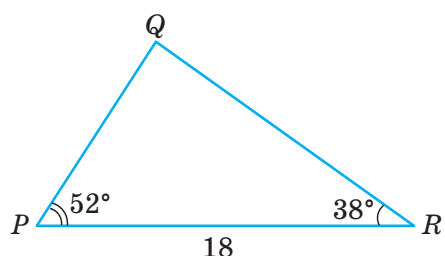
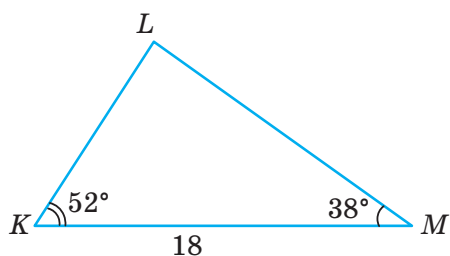


Рис. 26

9.3. а) Выкарыстаўшы даныя рысунка 27, знайдзіце NK пры ўмове, што трохвугольнікі ABC і MNK роўныя. Растлумачце адказ.

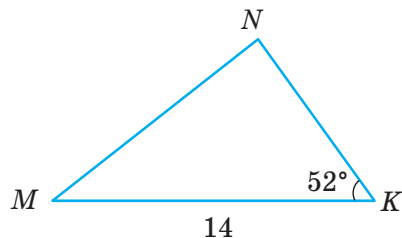
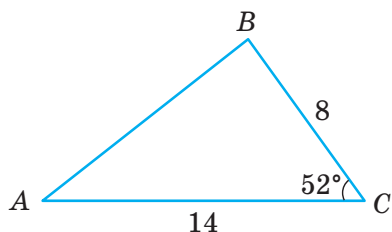


Рис. 27

б) Выкарыстаўшы даныя рысунка 28, знайдзіце вугал BCA пры ўмове, што трохвугольнікі ABC і MNK роўныя. Растлумачце адказ.

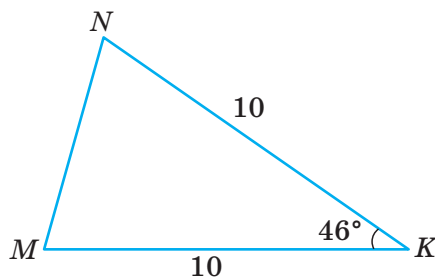
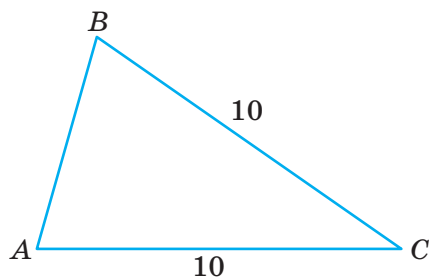
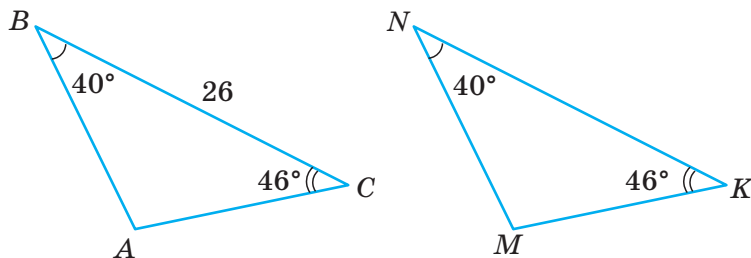


Рис. 28

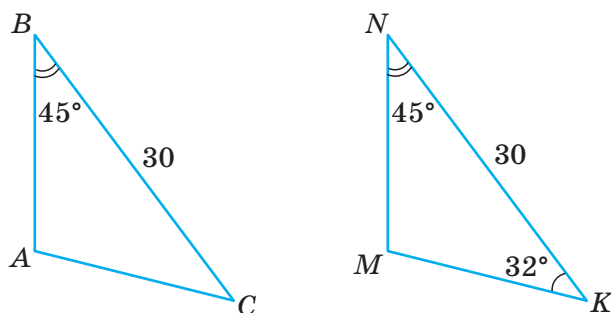
9.4. Адрэзкі AC і BD перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеліцца папалам. Дакажыце, што трохвугольнікі ABC і CDA роўныя.

- 9.5. а) Выкарыстаўшы даныя рысунка 29, знайдзіце NK пры ўмове, што трохвугольнікі ABC і MNK роўныя. Растлумачце адказ.



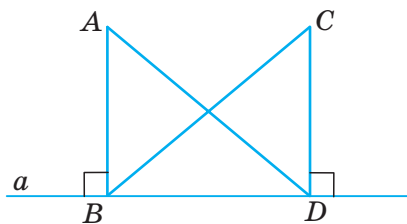
Рыс. 29

- б) Выкарыстаўшы даныя рысунка 30, знайдзіце вугал BCA пры ўмове, што трохвугольнікі ABC і MNK роўныя. Растлумачце адказ.



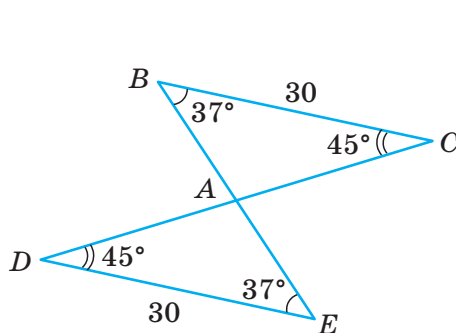
Рыс. 30

- 9.6. Пункты A і C ляжаць з аднаго боку ад прамой a . Перпендыкуляры AB і CD да прамой a роўныя (рыс. 31). Дакажыце, што трохвугольнікі ABD і CDB роўныя.

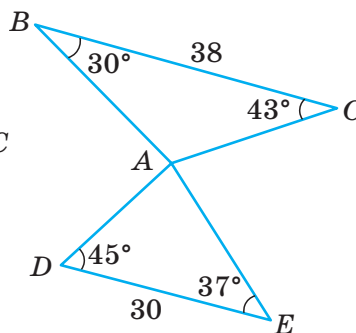


Рыс. 31

- 9.7. а) Па даных рысунка 32 вызначыце, ці з'яўляюцца роўнымі трохвугольнікі ABC і DAE . Растлумачце адказ.
 б) Па даных рысунка 33 вызначыце, ці з'яўляюцца роўнымі трохвугольнікі ABC і DAE . Растлумачце адказ.



Рыс. 32



Рыс. 33

- 9.8. Трохвугольнік ABC роўны трохвугольніку $A_1B_1C_1$. Дакажыце, што адпаведныя бісектрысы BK і B_1K_1 роўныя.
- 9.9. Трохвугольнік ABC роўны трохвугольніку $A_1B_1C_1$. Дакажыце, што адпаведныя вышыні AH і A_1H_1 роўныя.
- 9.10. Трохвугольнік ABC роўны трохвугольніку $A_1B_1C_1$. Дакажыце, што адпаведныя медыяны BM і B_1M_1 роўныя.
- 9.11*. Для трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ выконваюцца ўмовы: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. На старанах AB і A_1B_1 адзначаны пункты D і D_1 так, што $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Дакажыце, што трохвугольнікі BCD і $B_1C_1D_1$ роўныя.

§ 10. Вышыня, медыяна і бісектрыса трохвугольніка

- 10.1. Чым адрозніваецца бісектрыса вугла ад бісектрысы трохвугольніка?
- 10.2. Пабудуйце ў сшытку трохвугольнік ABC з тупым вуглом пры вяршыні C . Правядзіце вышыню з вяршыні B . Правядзіце медыяну з вяршыні C .

- 10.3.** Пабудуйце ў сшытку трохвугольнік MPT з тупым вуглом пры вяршыні P . Правядзіце вышыню з вяршыні M . Правядзіце медыяну з вяршыні T .
- 10.4.** Якія з адрэзкаў трохвугольніка (вышыні, медыяны, бісектрысы) заўсёды ляжаць унутры трохвугольніка? Якія з іх могуць супадаць з яго старанамі?
- 10.5.** Перанясіце рысункі 34, а), б) у сшытак. Правядзіце агульную вышыню для ўсіх трохвугольнікаў, паказаных на кожным з рысункаў. Для якога трохвугольніка вышыня ляжыць:
- 1) па-за трохвугольнікам; 2) унутры трохвугольніка?

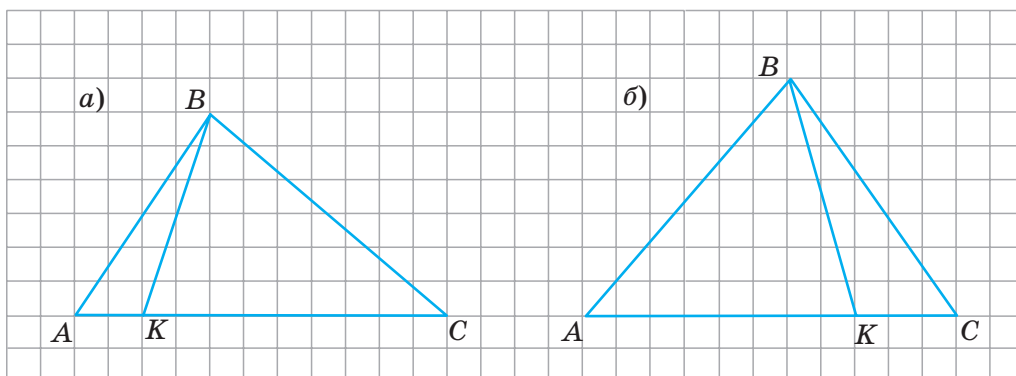


Рис. 34

- 10.6.** У трохвугольніку ABC $AB = BC$, BK — медыяна, $\angle ABK = 40^\circ$. Знайдзіце велічыні вуглоў ABC і KCB .
- 10.7.** На рысунку 35 паказаны адрэзкі $AB = BC$, $AD = DC$. Дакажыце, што BD — бісектрыса вугла ABC .
- 10.8.** Для адрэзкаў, паказаных на рысунку 36, выконваюцца ўмовы: $AB = BC$, $AD = DC$, DE — бісектрыса вугла BDC . Знайдзіце вугал ADE .
- 10.9.** На рысунку 37 паказаны трохвугольнік ABC , $\angle ADB = 90^\circ$, $AD = DC$. Дакажыце, што $\angle BAC = \angle BCA$.

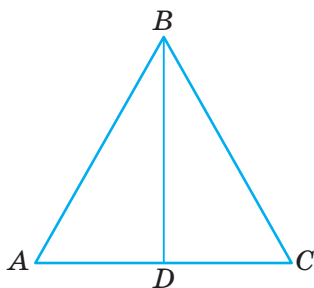


Рис. 35

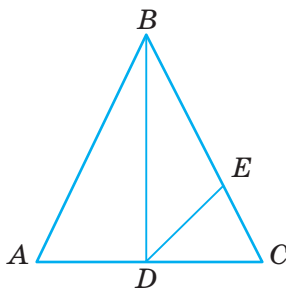


Рис. 36

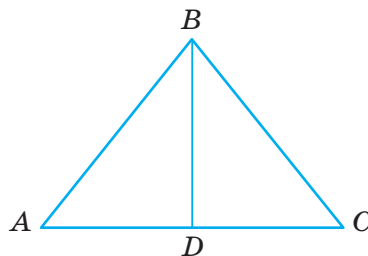


Рис. 37

10.10. У трикутнику ABC проведзені бісектриса BM і медіана BC . Виясно, що $AC = 16$ см, $\angle ABC = 100^\circ$. Знайдіть довжину відрізка AK і градусну міру кута ABM .

10.11. Вершини трикутника ABC лежать на окружності, причому AC — діаметр окружності (рис. 38). Яка довжина медіани BM трикутника ABC , коли $AC = 12$ см?

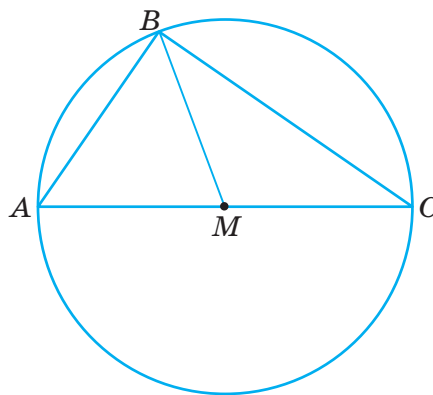


Рис. 38

10.12. У трикутнику ABC з кутом B , рівним 140° , проведзені висота BH і бісектриса BK , причому пункт H лежить між пунктами A і K . Знайдіть $\angle HBK$, коли $\angle ABH = 40^\circ$.

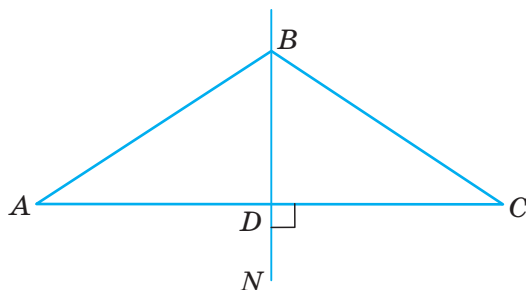
10.13. Медіана CM трикутника ABC ділить його на два трикутники ACM і BCM , периметри яких відповідно рівні 27 см і 33 см. Знайдіть довжину цієї медіани, коли периметр трикутника ABC рівний 50 см.

10.14. Куты 1 і 2 — суміжні. Знайдіть, чому рівен кут між бісектрисами цих кутів, коли:

- а) $\angle 1 = 60^\circ$; б) $\angle 2 = 140^\circ$.

§ 11. Раўнабедраны трохвугольнік

- 11.1.** а) Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік ABC з вострым вуглом пры вершыні C . Назавіце аснову і бакавыя стораны трохвугольніка ABC .
- б) Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік MPT з тупым вуглом пры вершыні T . Назавіце аснову і бакавыя стораны трохвугольніка MPT .
- 11.2.** Аснова раўнабедранага трохвугольніка ў 2 разы большая за праведзеную да яе вышыню. Вызначыце вуглы гэтага трохвугольніка.
- 11.3.** На рысунку 39 паказаны трохвугольнік ABC . $AB = BC$, $\angle NDC = 90^\circ$. Знайдзіце AC , калі $AD = 16$ см.



Рыс. 39

- 11.4.** Пабудуйце ў сшытку трохвугольнік, у якога:
- а) бакавыя стораны роўны 6 см кожная, а аснова — 8 см;
- б) бакавыя стораны роўны 8 см кожная, а аснова — 6 см.
- Знайдзіце яго перыметр.
- 11.5.** Прамая, перпендыкулярная бісектрысе вугла A , перасякае стораны вугла ў пунктах M і N . Дакажыце, што трохвугольнік AMN раўнабедраны.

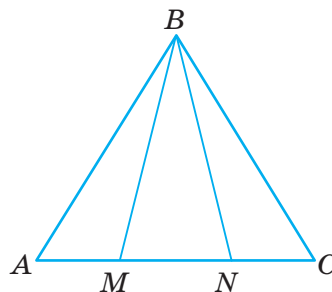
§ 12. Приметы раўнабедранага трохвугольніка

12.1. Што трэба ведаць аб вуглах трохвугольніка ABC , каб сцвярджаць, што ён:

- а) раўнабедраны;
- б) роўнастаронні?

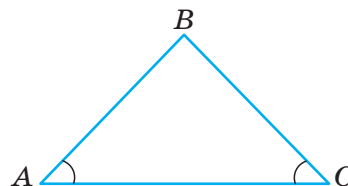
12.2. На рысунку 40 паказаны трохвугольнік ABC , $AM = NC$, $\angle BMC = \angle BNA$. Дакажыце, што:

- а) $\angle BAC = \angle BCA$;
- б) $\angle ABM = \angle CBN$.



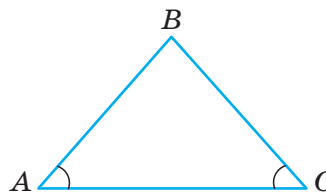
Рыс. 40

12.3. а) У трохвугольніку ABC (рыс. 41) $\angle BAC = \angle BCA$, $AC : BC = 3 : 2$. Знайдзіце даўжыню стараны AB , калі перыметр трохвугольніка ABC роўны 35 см.



Рыс. 41

б) У трохвугольніку ABC (рыс. 42) $\angle BAC = \angle BCA$, $BC : AC = 3 : 4$. Перыметр трохвугольніка ABC роўны 50 см. Знайдзіце даўжыню стараны AC .



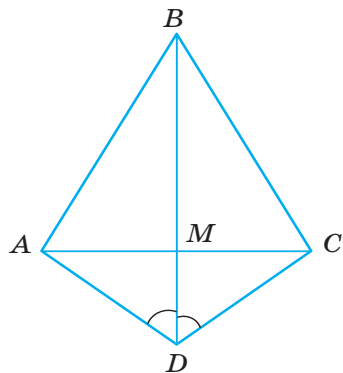
Рыс. 42

12.4. Ці можна сцвярджаць, што:

- а) роўнастаронні трохвугольнік з'яўляецца раўнабедраным;
- б) раўнабедраны трохвугольнік з'яўляецца востравугольным;
- в) прамавугольны трохвугольнік з'яўляецца роўнастароннім?

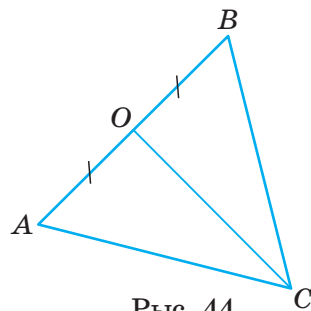
12.5. У трохвугольніку ABC вышыня BO дзеліць старану AC папалам. Дакажыце, што трохвугольнік ABC раўнабедраны.

12.6. На рысунку 43 $AD = DC$, $\angle ADB = \angle CDB$. Дакажыце, што $AM = MC$ і $\angle BAC = \angle BCA$.



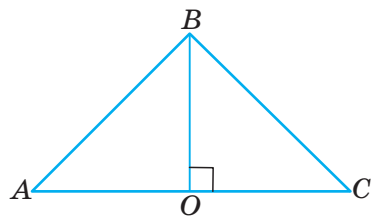
Рыс. 43

12.7. У трохвугольніку ABC (рыс. 44) бісектрыса CO дзеліць старану AB папалам. Знайдзіце градусную меру вугла ABC , калі $\angle BAC = 68^\circ$.



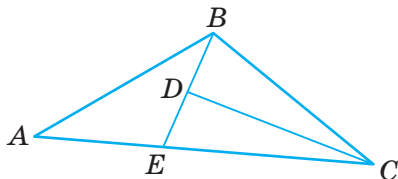
Рыс. 44

12.8. У трохвугольніку ABC (рыс. 45) вышыня BO дзеліць старану AC папалам. Знайдзіце градусную меру вугла BAC , калі $\angle BCA = 56^\circ$.



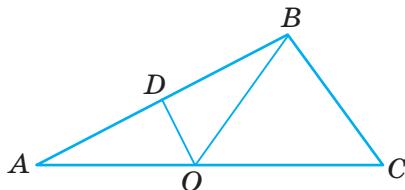
Рыс. 45

12.9. У трохвугольніку ABC (рыс. 46) $AB = BC = EC$. Знайдзіце градусную меру вугла DCE , калі $\angle BAC = 40^\circ$ і $BD = ED$.



Рыс. 46

12.10. У трохвугольніку ABC (рыс. 47) $OB = BC = AO$. Знайдзіце градусную меру вугла AOD , калі $\angle ACB = 64^\circ$ і $AD = BD$.



Рыс. 47

12.11. Дакажыце, што калі пункты K і M з'яўляюцца сярэдзінамі бакавых старон раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай AC (рыс. 48), то трохвугольнік KBM таксама з'яўляецца раўнабедраным.

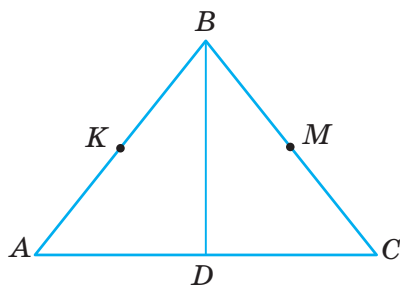


Рис. 48

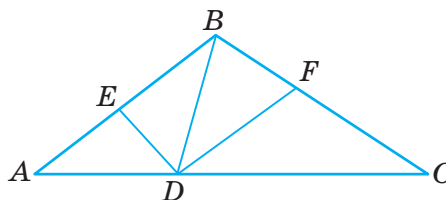


Рис. 49

12.12*. У трохвугольніку ABC (рис. 49) $AD = DB$, DF — бісектрыса трохвугольніка DBC , DE — медыяна трохвугольніка ADB . Дакажыце, што адрэзак DE перпендыкулярны адрэзку DF .

§ 13. Трэцяя прымета роўнасці трохвугольнікаў

13.1. У раўнабедраных трохвугольніках ABC і $A_1B_1C_1$ з асновамі AC і A_1C_1 адпаведна, пункт M — сярэдзіна стараны BC , пункт M_1 — сярэдзіна стараны B_1C_1 (рис. 50). Дакажыце, што:

а) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, калі $AB = A_1B_1$ і $AM = A_1M_1$;

б) $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$, калі $AB = A_1B_1$ і $AC = A_1C_1$.

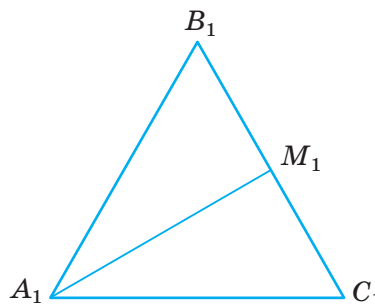
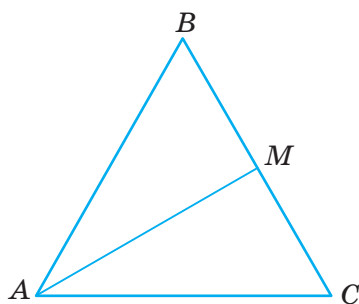
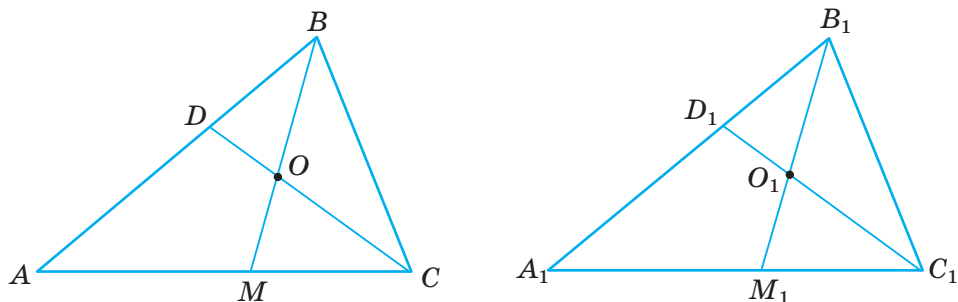


Рис. 50

13.2. У трохвугольніках ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя медыяны BK і B_1K_1 . Дакажыце, што $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, калі $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$.

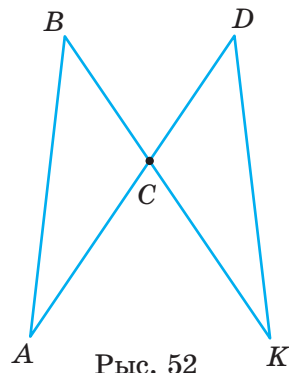


Рыс. 51

13.3. У трохвугольніках ABC і $A_1B_1C_1$ (рыс. 51) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Дакажыце, што $\triangle BOC = \triangle B_1O_1C_1$, дзе O — пункт перасячэння бісектрыс BM і CD трохвугольніка ABC , а O_1 — пункт перасячэння бісектрыс B_1M_1 і C_1D_1 трохвугольніка $A_1B_1C_1$.

13.4. Стораны AD і KB вуглоў BAD і DKB адпаведна перасякаюцца ў пункце C (рыс. 52). Дакажыце, што $\triangle ABC = \triangle KCD$, калі $AD = KB$, $AB = KD$.

13.5*. Вядома, што $\triangle ABC = \triangle MNK$ і $AB \neq MK$, $BC \neq MN$, $CA \neq KN$. Ці магчыма гэта?



Рыс. 52

§ 14. Сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка

14.1. У трохвугольніку ABC на старане AB (або яе прадаўжэнні) знайдзіце пункт, аднолькава аддалены ад вяршынь A і C .

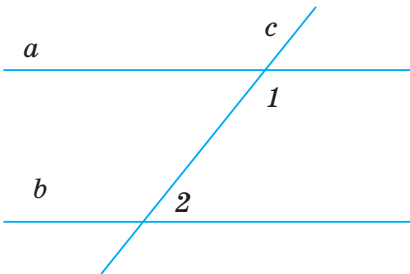
14.2. У раўнабедраным трохвугольніку ABC вышыні AM і CK , праведзеныя да бакавых старон, перасякаюцца ў пункце O . Дакажыце, што прмая OB з'яўляецца сярэдзінным перпендыкулярам да адрэзка AC .

- 14.3.** Сярэдзінны перпендыкуляр да бакавой стараны AB раўнабедранага трохвугольніка ABC перасякае старану BC у пункце K . Знайдзіце аснову AC , калі $AB = 12$ см, а перыметр трохвугольніка AKC роўны 22 см.
- 14.4.** Сярэдзінны перпендыкуляр AK да адрэзка BC перасякае яго ў пункце K . Знайдзіце градусную меру вугла ACK , калі $\angle ABK = 55^\circ$.
- 14.5.** Сярэдзінны перпендыкуляр AK да адрэзка BC перасякае яго ў пункце K . Знайдзіце перыметр трохвугольніка BAC , калі $AC = 5$ см, $CK = 3$ см.

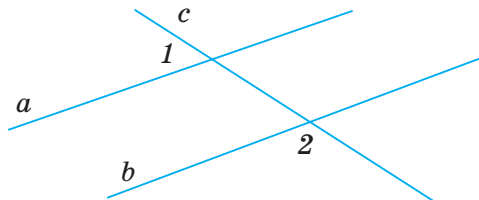
ПАРАЛЕЛЬНАСЦЬ ПРАМЫХ НА ПЛОСКАСЦІ

§ 15. Прыметы паралельнасці прамых

- 15.1.** Выкарыстаўшы даныя рысункаў 53 і 54, выберыце правільнае сцверджанне:
- а) $\angle 1$ і $\angle 2$ з'яўляюцца накрыжлеглымі;
 - б) $\angle 1$ і $\angle 2$ з'яўляюцца аднастароннімі;
 - в) $\angle 1$ і $\angle 2$ з'яўляюцца адпаведнымі;
 - г) $\angle 1$ і $\angle 2$ з'яўляюцца вертыкальнымі.



Рыс. 53



Рыс. 54

15.2. Прамая c перасякае прамыя a і b (рыс. 55). Лічбамі абазначаны ўтвораныя вуглы. Дайце назву кожнай з наступных пар вуглоў:

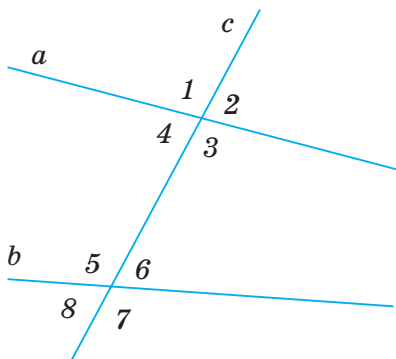
- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| а) $\angle 1$ і $\angle 3$; | б) $\angle 3$ і $\angle 5$; |
| в) $\angle 4$ і $\angle 5$; | г) $\angle 4$ і $\angle 8$; |
| д) $\angle 1$ і $\angle 4$; | е) $\angle 1$ і $\angle 8$. |

15.3. Выкарыстаўшы рысунак 55, назавіце вугал, які ўтварае з вуглом 1 пару:

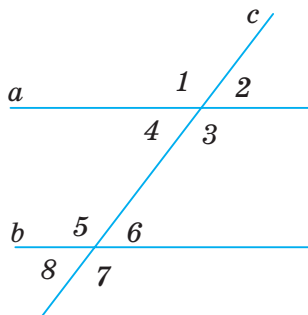
- вертыкальных вуглоў;
- сумежных вуглоў;
- унутраных накрывлеглых вуглоў;
- адпаведных вуглоў;
- унутраных аднастаронніх вуглоў.

15.4. Прамая c перасякае прамыя a і b (рыс. 56). Лічбамі абазначаны ўтвораныя вуглы. Вызначыце, ці будуць прамыя a і b паралельнымі, калі:

- $\angle 4 = 25^\circ$ і $\angle 5 = 135^\circ$;
- $\angle 2 = 32^\circ$ і $\angle 7 = 148^\circ$;
- $\angle 1 = 150^\circ$ і $\angle 8 = 30^\circ$;
- $\angle 1 = 142^\circ$ і $\angle 7 = 142^\circ$.



Рыс. 55



Рыс. 56

15.5. Знайдіть усі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих сікущою, калі адзін з двух знешніх аднастаронніх вуглоў на 48° большы за другі.

15.6. Ці паралельныя прамыя a і b , показаныя на рисунку 57, калі:

- а) $\angle 1 = \angle 3$;
- б) $\angle 1 = \angle 4$;
- в) $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$;
- г) $\angle 5 = \angle 6 = 90^\circ$?

15.7. Прямая c перасякае прамыя a і b (рис. 58). Лічбамі абазначаны ўтвораныя вуглы. Выкарыстаўшы рысунак, назавіце пару вуглоў, якія з'яўляюцца:

- а) унутранымі накрыжлеглымі;
- б) знешнімі накрыжлеглымі;
- в) унутранымі аднастароннімі;
- г) знешнімі аднастароннімі;
- д) адпаведнымі.

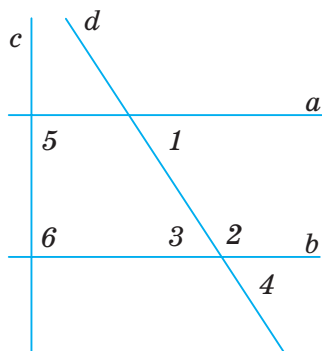


Рис. 57

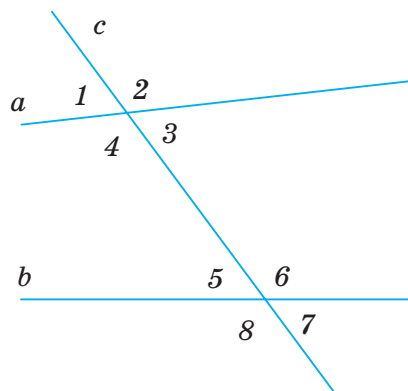


Рис. 58

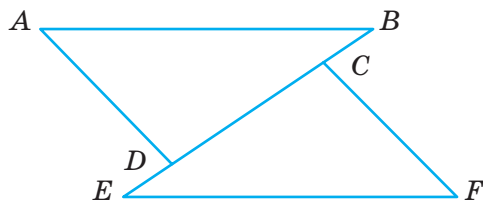


Рис. 59

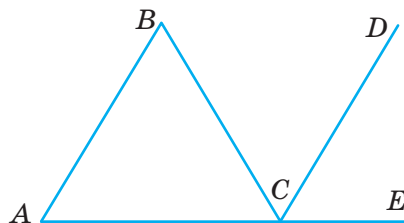


Рис. 60

- 15.8.** На рисунку 59 паказаны роўныя трохвугольнікі ABD і FEC , $AD = CF$. Дакажыце, што $AB \parallel EF$.
- 15.9.** На рисунку 60 $AB = BC$, $\angle BAC = 60^\circ$, CD — бісектрыса вугла BCE . Дакажыце, што $AB \parallel CD$.
- 15.10.** На рисунку 61 $AB = BC$, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle DCE = \frac{1}{5} \angle BCE$. Дакажыце, што $AB \parallel CD$.

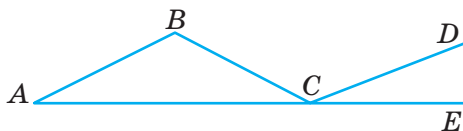


Рис. 61

- 15.11*.** Вызначыце ўзаемнае размяшчэнне дзвюх прамых, калі яны маюць:
- прынамсі адзін агульны пункт;
 - не больш за адзін агульны пункт.

§ 16. Аксіёма паралельных прамых

- 16.1.** Вызначыце ўзаемнае размяшчэнне дзвюх прамых, перпендыкулярных адной і той жа прамой.
- 16.2.** На рисунку 62 $a \parallel c$. Дакажыце, што $b \parallel c$.

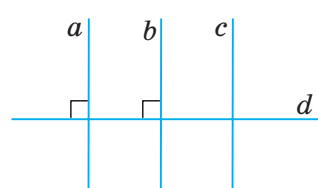


Рис. 62

16.3. Пункт K з'являється серединою сторони AC трикутника ABC . Проз пункт K проведена пряма a , паралельна прямою BC . Дакажьце, што пряма a і AB пересикаюцца.

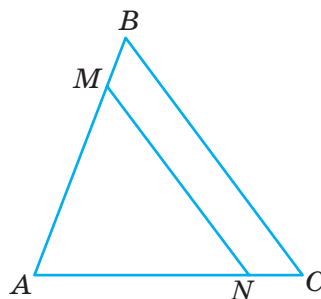


Рис. 63

16.4. На рисунку 63 $AM = AN$, $\angle MNC = 117^\circ$, $\angle ABC = 63^\circ$. Дакажьце, што $MN \parallel BC$.

16.5. Проз вершину C трикутника CDE з прямим кутом D проведена пряма CP , паралельна прямою DE . Знайдіть кут C трикутника, калі $\angle PCE = 29^\circ$.

16.6. Прямая b , d , c і e пересикаюцца ў пункце O , пряма a не праходзіць праз пункт O (рис. 64). Вызначьце, якая пряма паралельна прямою a , калі $e \perp a$, $e \perp d$.

16.7. Ці можа аказацца, што пры перасячэнні двох прамых трэцяй унутраныя накрыжлеглыя вуглы роўныя, а сума ўнутраных аднастаронніх вуглоў не роўна 180° ?

16.8. На рисунку 65 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Дакажьце, што пряма a паралельна прямою c .

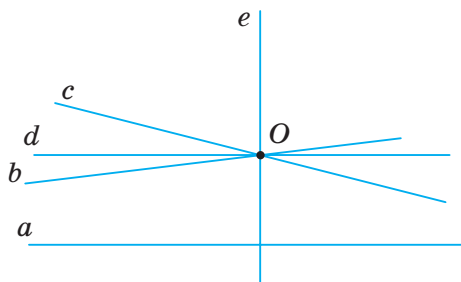


Рис. 64

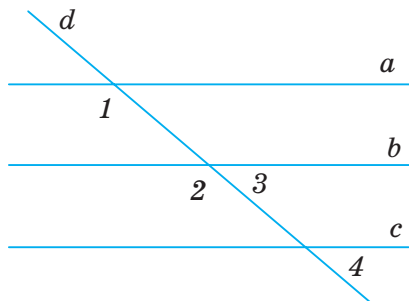
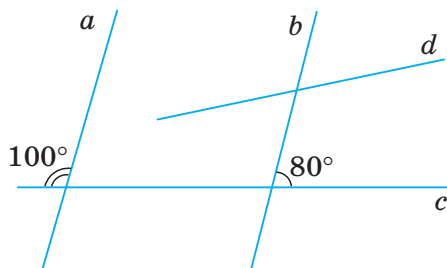


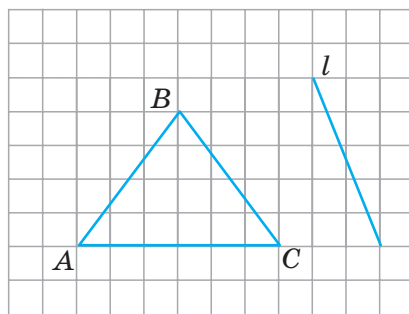
Рис. 65

16.9. На рысунку 66 прмая d перасякае прамую b . Ці перасячэ гэта прмая прамую a ? Растлумачце адказ.



Рыс. 66

16.10. На рысунку 67 прмая l не перасякае стараны трохвугольніка ABC і не паралельна ніводнай з іх. Перанясіце рысунак у сшытак. Праз вяршыні трохвугольніка A , B і C правядзіце прамыя a , b і c адпаведна, паралельныя прамой l . Вызначыце, ці паралельныя гэтыя прамыя паміж сабой і ці перасячэ прмая AC прамую l . Растлумачце адказ.

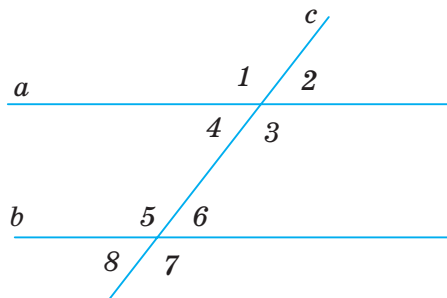


Рыс. 67

§ 17. Уласцівасці паралельных прамых

17.1. На рысунку 68 $\angle 3 = \angle 5$. Дакажыце, што:

- а) $\angle 4 = \angle 6$;
- б) $\angle 1 = \angle 5$;
- в) $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$;
- г) $\angle 1 + \angle 8 = 180^\circ$.

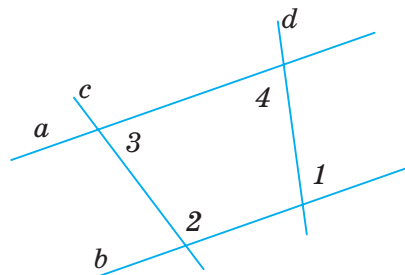


Рыс. 68

17.2. Ці можна сцвярджаць, што дзве прамыя паралельныя, калі пры перасячэнні іх сякачай дзе-небудзь утвараюцца роўныя вуглы?

17.3. Прямая a паралельна прямой b , прямая c і d — сякучыя (рыс. 69). Знайдзіце:

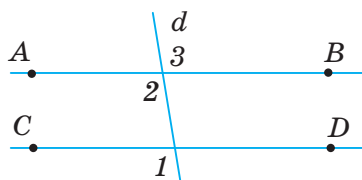
- а) $\angle 1$, калі $\angle 4 = 65^\circ$;
 б) $\angle 2$, калі $\angle 3 = 62^\circ$.



Рыс. 69

17.4. Прямая AB і CD паралельныя, прамая d — сякучая (рыс. 70). Знайдзіце:

- а) $\angle 2 + \angle 3$, калі $\angle 1 = 108^\circ$;
 б) $\angle 1 + \angle 3$, калі $\angle 2 = 110^\circ$.



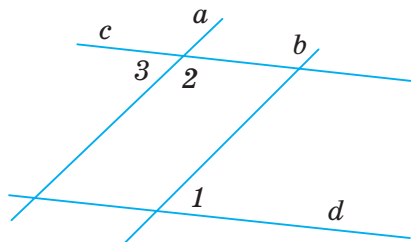
Рыс. 70

17.5. Ці могуць быць паралельнымі бісектрысы двух унутраных вуглоў трохвугольніка?

§ 18*. Вуглы з адпаведна паралельнымі і адпаведна перпендыкулярнымі старанамі

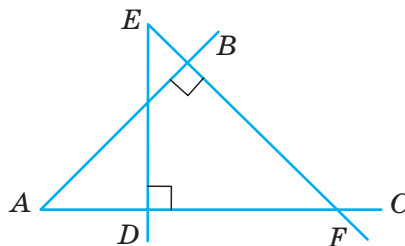
18.1. На рысунку 71 $a \parallel b$, $c \parallel d$. Знайдзіце:

- а) вугал 3, калі вугал 2 большы за вугал 1 на 70° ;
 б) вугал 1, калі вугал 3 меншы за вугал 2 на 82° .



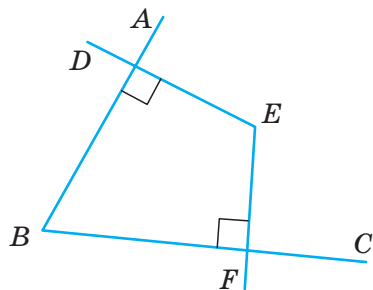
Рыс. 71

18.2. а) На рысунку 72 паказаны вострыя вуглы BAC і DEF з адпаведна перпендыкулярнымі старанамі. Вывядзіце, чаму роўны вугал DEF , калі $\angle BAC = 40^\circ$.



Рыс. 72

б) На рысунку 73 паказаны востры вугал ABC і тупы вугал DEF з адпаведна перпендыкулярнымі старанамі. Вызначыце, чаму роўны вугал DEF , калі $\angle ABC = 60^\circ$.



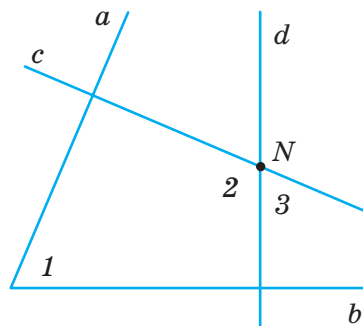
Рыс. 73

18.3. Дзве паралельныя прамыя перасечаны трэцяй. Пры якім становішчы гэтай прамой будуць роўнымі ўсе ўтвораныя вуглы?

18.4. Прамыя c і d перпендыкулярны старанам дадзенага вугла 1 (рыс. 74). Знайдзіце:

а) меншы з вуглоў, утвораных прамымі c і d , калі $\angle 1 = 80^\circ$;

б) большы з вуглоў, утвораных прамымі c і d , калі $\angle 1 = 62^\circ$.

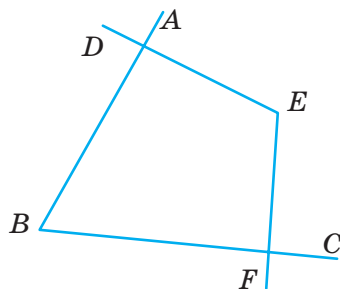


Рыс. 74

18.5. Стораны вуглоў ABC і DEF (рыс. 75) узаемна перпендыкулярныя. Знайдзіце гэтыя вуглы, калі:

а) адзін з іх на 48° большы за другі;

б) адзін з іх на 60° меншы за другі.



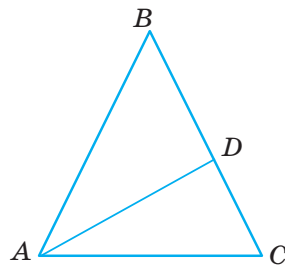
Рыс. 75

СУМА ВУГЛОЎ ТРОХВУГОЛЬНІКА

§ 19. Сума вуглоў трохвугольніка

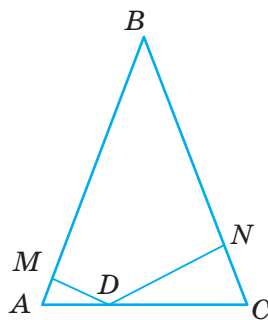
- 19.1.** Адзін з вуглоў раўнабедранага трохвугольніка роўны 96° . Знайдзіце астатнія вуглы трохвугольніка.
- 19.2.** Дадзены трохвугольнік ABC . Знайдзіце:
- а) вугал B , калі $\angle A = 40^\circ$, $\angle C = 70^\circ$;
 - б) вугал A , калі $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 85^\circ$.
- 19.3.** Для кожнай стараны аднаго трохвугольніка ёсць роўная ёй старана ў другім трохвугольніку. Ці можна сцвярджаць, што гэтыя трохвугольнікі роўныя?
- 19.4.** а) Вядома, што вугал пры вяршыні раўнабедранага трохвугольніка ў 4 разы большы за вугал пры аснове. Знайдзіце вуглы гэтага трохвугольніка.
- б) Вядома, што вугал пры аснове раўнабедранага трохвугольніка ў 2 разы большы за вугал пры вяршыні. Знайдзіце вуглы гэтага трохвугольніка.
- 19.5.** Чаму роўна сума двух вуглоў роўнастаронняга трохвугольніка?
- 19.6.** У трохвугольніку два вуглы адносяцца як $1 : 3$, а трэці вугал на 20° большы за суму першых двух. Знайдзіце градусныя меры вуглоў трохвугольніка.
- 19.7.** У трохвугольніку адзін з вуглоў у 5 разоў меншы за другі вугал і ў 3 разы меншы за трэці. Знайдзіце найбольшы вугал гэтага трохвугольніка.
- 19.8.** У роўнастароннім трохвугольніку ABC адрэзак BD — вышыня. Знайдзіце градусную меру вугла ABD .

19.9. У трохвугольніку ABC з вяршыні A праведзена бісектрыса AD (рыс. 76). Знайдзіце градусную меру вугла ADB , калі $\angle BCA = 70^\circ$, $AB = BC$.



Рыс. 76

19.10. На рисунку 77 паказаны трохвугольнік ABC , у якога $\angle ABC = 30^\circ$, $DM \perp AB$, а $DN \perp BC$. Знайдзіце $\angle MDN$.

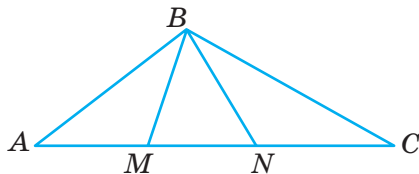


Рыс. 77

19.11. Знайдзіце градусныя меры вуглоў раўнабедранага трохвугольніка, калі:

- а) адзін з яго вуглоў роўны 96° ;
- б) адзін з яго вуглоў роўны 50° .

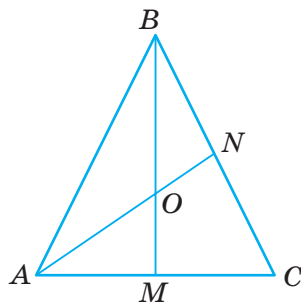
19.12. У трохвугольніку ABC праведзены адрэзкі BM і BN так, што $\angle BMN = 72^\circ$ і $\angle MNB = 68^\circ$ (рыс. 78). Знайдзіце градусную меру вугла ABC , калі $AM = MB$, $NC = NB$.



Рыс. 78

19.13. У трохвугольніку ABC праведзены бісектрысы AN і BM (рыс. 79). Знайдзіце вугал ACB , калі $\angle AOB = 124^\circ$.

19.14. У трохвугольніку ABC праведзена вышыня BD (рыс. 80). Знайдзіце вугал ABD , калі $AC = BC$ і $\angle BCA = 42^\circ$.



Рыс. 79

19.15. На рисунку 81 паказаны раўнабедраны трохвугольнік ABC

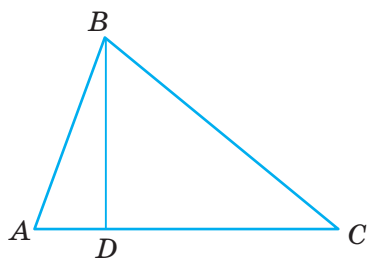


Рис. 80

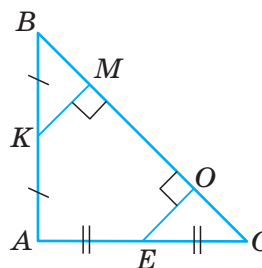


Рис. 81

з прамим вуглом A . З пунктаў K і E , якія з'яўляюцца сярэдзінамі бакавых старон ($K \in AB$; $E \in AC$), апущаны перпендыкуляры KM і EO на гіпатэнузу. Знайдзіце:

а) EO , калі $BM = 6$ см;

б) KM , калі $OC = 8$ см.

19.16. У трохвугольніку ABC адрэзак CK — бісектрыса. Знайдзіце вуглы трохвугольніка AKC , калі вядома, што $AK = BK$ і $\angle ABC = 40^\circ$.

19.17. Чаму роўна сума вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка?

§ 20. Знешні вугал трохвугольніка

20.1. Чаму роўна сума ўсіх знешніх вуглоў трохвугольніка?

20.2. Ці могуць быць роўнымі ўсе знешнія вуглы трохвугольніка?

20.3. На рысунку 82 $AC = BC$. Знайдзіце градусную меру вугла ABC , калі $\angle 1 = 110^\circ$.

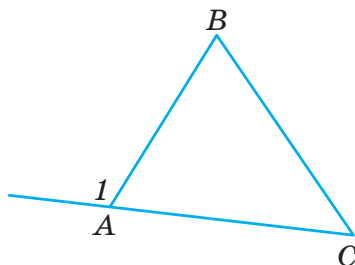
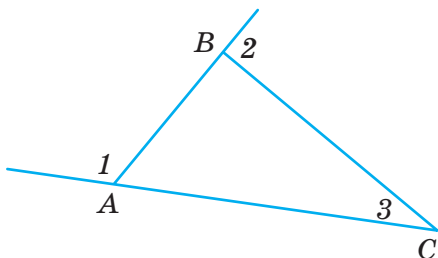


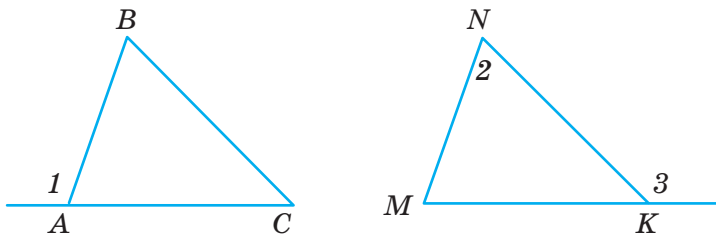
Рис. 82

- 20.4. На рысунку 83 $\angle 2 = 90^\circ$, $\angle 3 = 50^\circ$. Знайдзіце градусную меру вугла 1.



Рыс. 83

- 20.5. На рысунку 84 паказаны роўныя трохвугольнікі ABC і MNK ($\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle K$). Знайдзіце градусную меру вугла 1, калі $\angle 2 = 56^\circ$, $\angle 3 = 106^\circ$.



Рыс. 84

- 20.6. Дадзены трохвугольнік ABC . Пункт D ляжыць на старане AC . Ці правільнае сцверджанне, што $\angle ADB = \angle DBC + \angle DCB$?
- 20.7. У трохвугольніку ABC (рыс. 85) $AC = BC$. Знайдзіце:
 а) градусную меру вугла 1, калі $\angle ACB = 68^\circ$;
 б) градусную меру вугла C , калі $\angle 1 = 68^\circ$.
- 20.8. На рысунку 86 $AB \parallel CD$. Знайдзіце вугал BED , калі:
 а) $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle CDE = 40^\circ$;
 б) $\angle ABC = 20^\circ$, $\angle CDE = 50^\circ$.

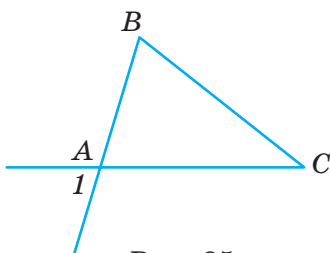


Рис. 85

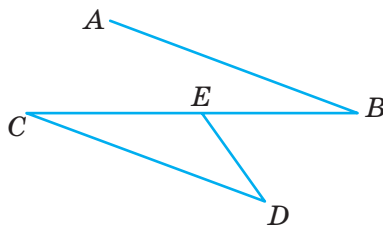


Рис. 86

20.9. На рисунку 87 $AC \parallel BD$, $AC = BA$. Знайдіть кут CBD , калі:

- а) $\angle 1 = 50^\circ$; б) $\angle 2 = 120^\circ$.

20.10. На рисунку 88 $AB = BC$. Знайдіть градусну меру кута 1, калі:

- а) $\angle ABC = 42^\circ$; б) $\angle BAC = 74^\circ$.

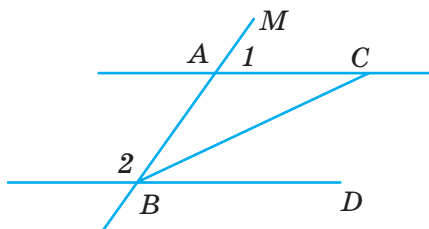


Рис. 87

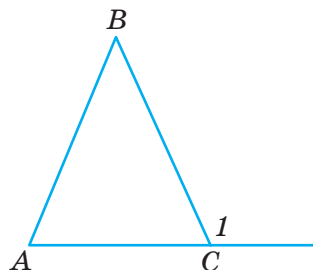


Рис. 88

20.11. а) На рисунку 89 $\angle ADB = 40^\circ$. Знайдіть суму кутів DBC і DCB .

б) На рисунку 90 $\angle ADB = 120^\circ$. Знайдіть суму кутів DBC і DCB .

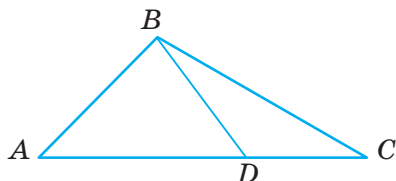


Рис. 89

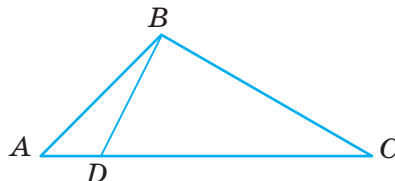


Рис. 90

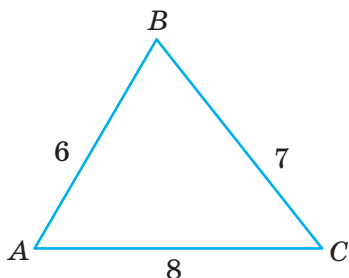
- 20.12.** Адзін са знешніх вуглоў трохвугольніка роўны 120° , а рознасць унутраных вуглоў, не сумежных з ім, роўна 40° . Знайдзіце градусныя меры ўнутраных вуглоў трохвугольніка.
- 20.13.** Колькі знешніх вуглоў пры розных вяршынях трохвугольніка могуць быць вострымі?
- 20.14*.** У трохвугольніку ABC праведзена бісектрыса CC_1 . Дакажыце, што вугал CC_1B роўны паўсуме вугла A і знешняга вугла B .

§ 21. Суадносіны паміж старанамі і вугламі трохвугольніка

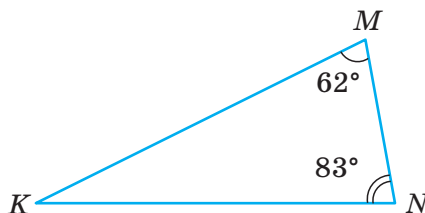
- 21.1.** Вядома, што вугал пры вяршыні раўнабедранага трохвугольніка:
- а) большы за 120° . Параўнайце даўжыні асновы трохвугольніка, бакавой стараны і медыяны, праведзенай да асновы;
 - б) меншы за 30° . Параўнайце даўжыні асновы трохвугольніка, бакавой стараны і вышыні, праведзенай да асновы.
- 21.2.** У трохвугольніку ABC $\angle A = 95^\circ$. Дакажыце, што BC — найбольшая старана трохвугольніка ABC .
- 21.3.** Дакажыце, што супраць сярэдняй па даўжыні стараны трохвугольніка ляжыць сярэдні па велічыні вугал.
- 21.4.** Дакажыце, што калі два прамавугольныя трохвугольнікі маюць па роўным катэце, то гіпатэнуза большая ў таго трохвугольніка, у якога другі катэт большы.
- 21.5.** У трохвугольніку ABC $\angle B = 60^\circ$. Унутры трохвугольніка адзначаны пункт O , роўнааддалены ад яго вяршынь. Дакажыце, што трохвугольнік AOC з'яўляецца тупавугольным.

21.6. а) Выкарыстаўшы даныя рысунка 91, назавіце найбольшы вугал трохвугольніка ABC .

б) Выкарыстаўшы даныя рысунка 92, назавіце найменшую старану трохвугольніка KMN .



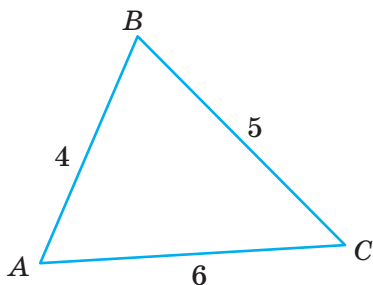
Рыс. 91



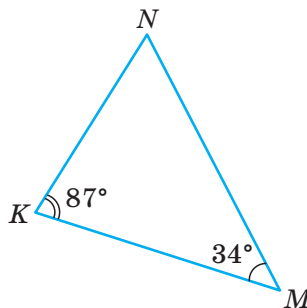
Рыс. 92

21.7. а) Выкарыстаўшы даныя рысунка 93, назавіце найменшы вугал трохвугольніка ABC .

б) Выкарыстаўшы даныя рысунка 94, назавіце найбольшую старану трохвугольніка KMN .



Рыс. 93



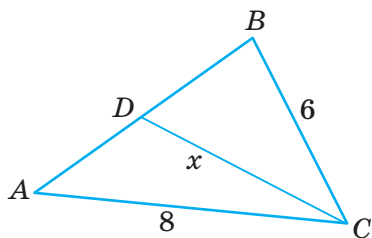
Рыс. 94

§ 22. Няроўнасць трохвугольніка

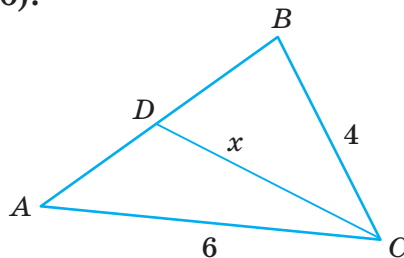
22.1. Ці існуе трохвугольнік са старанамі:

- а) 4 см; 6 см; 10 см;
- б) 5 см; 7 см; 15 см;
- в) 12 см; 18 см; 24 см?

- 22.2.** Знайдзіце перыметр раўнабедранага трохвугольніка, калі:
- дзве стараны трохвугольніка роўны 7 см і 14 см;
 - дзве стараны трохвугольніка роўны 5 см і 6 см.
- 22.3.** Адна са старон раўнабедранага трохвугольніка роўна 8 см, а другая — 17 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка.
- 22.4.** На старанах AB і AC трохвугольніка ABC адзначаны адпаведна пункты D і E так, што $AD = DB$, $AE = 12$ см, $DE = 1$ см. Ці можа адрэзак AB быць роўным 27 см?
- 22.5.** Трохвугольнікі ABD і BCD размешчаны па розныя бакі ад прамой BD , $\angle ABD = \angle BDC$, $\angle ADB = \angle DBC$. Дакажыце, што $BD + BC > AB$.
- 22.6.** На прадаўжэнні стараны AB трохвугольніка ABC за вяршыню B адзначаны пункт D . Ці можа адрэзак AD быць роўным 12 см, калі $AC = 18$ см, $BC = 5$ см?
- 22.7.** Унутры роўнастаронняга трохвугольніка ABC адзначаны пункт E . Дакажыце, што $EA > EB + EC$.
- 22.8*.** Па-за роўнастароннім трохвугольнікам ABC адзначаны пункт E , а ўнутры яго — пункт M . Дакажыце, што $MA < BE + EC$.
- 22.9*.** Дакажыце, што сума дзвюх медыян трохвугольніка большая за паўсуму дзвюх старон, да якіх гэтыя медыяны праведзены.
- 22.10*.** а) У якіх межах можа змяняцца цэлы лік x , які выражае даўжыню адрэзка CD (рыс. 95)?
 б) У якіх межах можа змяняцца цэлы лік x , які выражае даўжыню адрэзка CD (рыс. 96)?



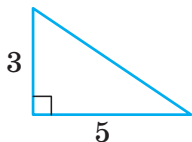
Рыс. 95



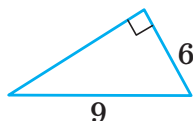
Рыс. 96

§ 23. Приметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў

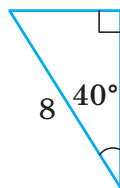
23.1. Визначыце, па якіх прыметах роўныя трохвугольнікі, паказаныя на рысунках 97—100.



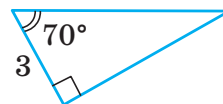
Рыс. 97



Рыс. 98



Рыс. 99



Рыс. 100

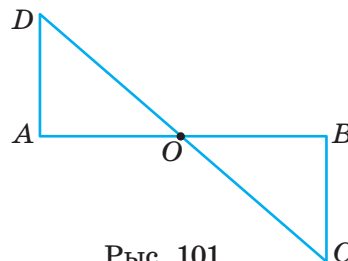
23.2. Ці можа медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, супадаць з яго вышынёй?

23.3. Ці можа бісектрыса вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка супадаць з яго медыянай, праведзенай з той жа вяршыні?

23.4. Катэты аднаго трохвугольніка меншыя за адпаведныя катэты другога трохвугольніка. Дакажыце, што гіпатэнуза першага трохвугольніка меншая за гіпатэнузу другога трохвугольніка.

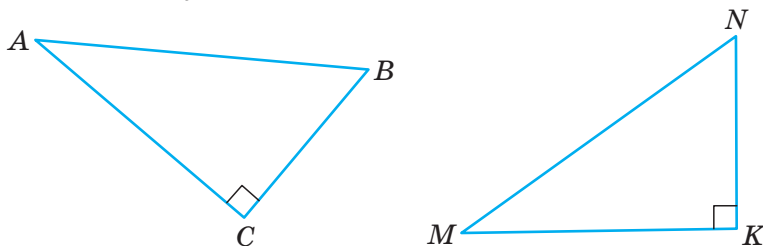
23.5. Адрэзкі AB і DC перасякаюцца ў пункце O , размешчаным на сярэдзіне адрэзка AB . Адрэзкі AD і BC перпендыкулярны адрэзку AB (рыс. 101). Дакажыце, што $\angle ADO = \angle BCO$.

23.6. Два прамавугольных трохвугольнікі ABC і ABD маюць агульную гіпатэнузу AB і ляжаць па розныя бакі ад яе. Вядома, што $AD = BC$. Дакажыце, што $\angle CAB = \angle DBA$.



Рыс. 101

23.7. На рысунку 102 паказаны два роўныя прамавугольныя трохвугольнікі ABC ($AC > BC$) і MNK ($MK > KN$). Знайдзіце велічыню вугла BAC , калі $\angle MNK = 35^\circ$.



Рыс. 102

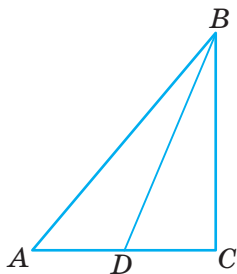
23.8. Ці можна сцвярджаць, што прамавугольныя трохвугольнікі ABC ($\angle B = 90^\circ$) і DEF ($\angle E = 90^\circ$) роўныя, калі:

- а) $AC = DF$, $\angle C = \angle D$;
- б) $AB = EF$, $\angle A = \angle F$;
- в) $AB = EF$, $\angle A = \angle D$?

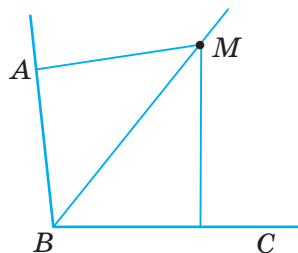
§ 24. Уласцівасць пунктаў бісектрысы вугла

24.1. У прамавугольным трохвугольніку ABC $\angle C = 90^\circ$, $CD = 6$ см, BD — бісектрыса вугла B (рыс. 103). Знайдзіце адлегласць ад пункта D да прамой AB .

24.2. Пункт M знаходзіцца на роўнай адлегласці ад старон вугла ABC , роўнага 100° (рыс. 104). Знайдзіце велічыню вугла AMB .

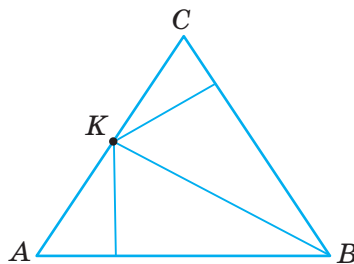


Рыс. 103



Рыс. 104

24.3. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ACB ($AC = BC$). На старане AC адзначаны пункт K , роўнааддалены ад прамых AB і BC (рыс. 105). Знайдзіце велічыню вугла C , калі $\angle ABK = 25^\circ$.



Рыс. 105

24.4. У трохвугольніку ABC бісектрысы вуглоў A і B перасякаюцца ў пункце M . Адлегласць ад пункта M да стараны AB роўна 4 см. Знайдзіце суму адлегласцей ад пункта M да дзвюх іншых старон трохвугольніка.

24.5. Якую фігуру ўтварае мноства ўсіх пунктаў плоскасці, роўнааддаленых ад дзвюх прамых, што перасякаюцца?

§ 25. Уласцівасць катэта прамавугольнага трохвугольніка, які ляжыць супраць вугла ў 30°

25.1. У прамавугольным трохвугольніку ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 2BC$. Знайдзіце градусныя меры вуглоў A і B .

25.2. У прамавугольным трохвугольніку ABC $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle BCA = 2\angle ABC$. Знайдзіце даўжыні старон AC і BC , калі $BC + AC = 18$ см.

25.3. У прамавугольным трохвугольніку ABC гіпатэнуза $BC = 12$ см, $\angle B = 60^\circ$. Знайдзіце катэт AB .

25.4. У прамавугольным трохвугольніку ABC гіпатэнуза $BC = 10$ см, катэт $AB = 5$ см. Знайдзіце градусную меру вугла C .

25.5. У прамавугольным трохвугольніку ABC $\angle B = 60^\circ$, катэт BC роўны 4 см. Знайдзіце даўжыню гіпатэнузы.

25.6. У трохвугольніку ABC $\angle C = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ$. Вышыня BB_1 роўна 2 см. Знайдзіце катэт BA .

25.7. У трохвугольніку ABC $\angle C = 90^\circ$, вышыня CC_1 роўна 5 см, $BC = 10$ см. Знайдзіце градусную меру вугла CAB .

- 25.8.** У трохвугольніку ABC $\angle C = 90^\circ$, знешні вугал пры вяршыні B роўны 150° , бісектрыса $AA_1 = 20$ см. Знайдзіце A_1C .
- 25.9.** У трохвугольніку ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 2BC$. Знайдзіце градусную меру знешняга вугла пры вяршыні B .
- 25.10.** У трохвугольніку ABC $\angle B = 90^\circ$, бісектрыса $CC_1 = 16$ см, $BC_1 = 8$ см. Знайдзіце градусную меру знешняга вугла пры вяршыні A .
- 25.11.** У трохвугольніку ABC $AB = BC = 20$ см, BK — вышыня, $\angle ABC = 60^\circ$. Знайдзіце AC і градусную меру вугла BCK .
- 25.12.** У раўнабедраным трохвугольніку ABC $\angle C = 30^\circ$, $AB = BC = 8$ см. Знайдзіце вышыню трохвугольніка, апущчаную з вяршыні B .
- 25.13.** У трохвугольніку ABC $\angle C = 90^\circ$, CD — вышыня, $BC = 2BD$. Дакажыце, што $AD = 3DB$.
- 25.14*.** У трохвугольніку ABC $\angle B = 90^\circ$, BD — вышыня, $AB = 2BD$. Дакажыце, што $3AC = 4AD$.

§ 26. Адлегласць паміж паралельнымі прамымі

- 26.1.** У трохвугольніку ABC старана $AB = 10$ см, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Праз вяршыню A праведзена прамая a , паралельная BC . Знайдзіце адлегласць ад прамой BC да прамой a .
- 26.2.** Пункт O — сярэдзіна адрэзка AB . Праз пункты A , O і B праведзены паралельныя прамыя a , b і c адпаведна так, што прамыя AB і a не з'яўляюцца ўзаемна перпендыкулярнымі. Дакажыце, што адлегласць ад прамой a да прамой c у 2 разы большая за адлегласць ад прамой b да прамой c .
- 26.3.** У трохвугольніку ABC $\angle C = 30^\circ$, $AC = 10$ см, $BC = 8$ см. Праз вяршыню A праведзена прамая a , паралельная BC . Знайдзіце адлегласць:
- ад пункта B да прамой AC ;
 - паміж прамымі a і BC .

- 26.4.** У трохвугольніку ABC $AC = 30$ см. Адлегласць ад пункта B да прамой AC роўна $\frac{1}{2}BC$. Праз пункт A праведзена прамая a , паралельная BC . Знайдзіце адлегласць паміж прамымі a і BC .
- 26.5.** Праз канцы A і B адрэзка AB праведзены паралельныя прамыя a і b адпаведна. Прамыя AB і b не з'яўляюцца ўзаемна перпендыкулярнымі. C — сярэдзіна адрэзка AB . Дакажыце, што:
- а) пункт C знаходзіцца на аднолькавай адлегласці ад прамых a і b ;
 - б) сума адлегласцей ад пункта C да прамых a і b роўна адлегласці паміж гэтымі прамымі.
- 26.6.** Пункт C — сярэдзіна адрэзка AB . Праз пункты C і B праведзены паралельныя прамыя c і b адпаведна так, што прамыя AB і b не з'яўляюцца ўзаемна перпендыкулярнымі. Дакажыце, што:
- а) адлегласць ад пункта A да прамой c роўна адлегласці ад пункта C да прамой b ;
 - б) адлегласць ад пункта A да прамой b у 2 разы большая за адлегласць паміж прамымі b і c .
- 26.7.** У трохвугольніку ABC $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$. Праз пункт E , які ляжыць на прамой AC так, што $EC = 14$ см, праведзена прамая a , паралельная BC . Знайдзіце адлегласць паміж прамымі a і BC .

ЗАДАЧЫ НА ПАБУДОВУ

§ 27. Аб задачах на пабудову

- 27.1.** Адзначце тры пункты A , B і C , якія не ляжаць на адной прамой, і правядзіце прамыя AB , BC і CA .

- 27.2.** Правядзіце тры прамыя так, каб кожныя дзве з іх перасякаліся. Абазначце ўсе пункты перасячэння гэтых прамых. Колькі атрымалася пунктаў? Разгледзьце ўсе магчымыя выпадкі.
- 27.3.** Начарціце прамую і адзначце на ёй пункты A і B . Пры дапамозе лінейкі адзначце пункты C і D так, каб пункт B быў сярэдзінай адрэзка AC , а пункт D — сярэдзінай адрэзка BC .
- 27.4.** Пабудуйце неразгорнуты вугал. Адзначце пункты A , B , M і N так, каб усе пункты адрэзка AB ляжалі ўнутры вугла, а ўсе пункты адрэзка MN ляжалі па-за вуглом.
- 27.5.** Пабудуйце адрэзак, даўжыня якога роўна суме даўжынь дадзеных адрэзкаў AB і CD .
- 27.6.** Пабудуйце прамень з пачаткам у пункце O . Адзначце на ім пункты A , B і C так, каб $OB = 3OA$, а $OC = 2OB$.
- 27.7.** Пабудуйце прамую a , адзначце на ёй пункт A . Пры дапамозе лінейкі адзначце на гэтай прамой пункт C так, каб даўжыня адрэзка AC была роўна 2 см. Колькі такіх пунктаў можна адзначыць на гэтай прамой?
- 27.8.** Пабудуйце адрэзак, даўжыня якога роўна рознасці даўжынь дадзеных адрэзкаў AB і CD .

§ 28. Пабудова трохвугольніка па трох старанах.

Пабудова вугла, роўнага дадзенаму

- 28.1.** Пабудуйце трохвугольнік ABC , у якога даўжыні старон звязаны суадносінамі $AB = \frac{3}{4}AC$, $BC = \frac{1}{2}AC$.
- 28.2.** Пабудуйце трохвугольнік ABC па адрэзках, даўжыні якіх роўны даўжыням стараны BC , медыяны BM і вышыні BH ($BC > BH$, $BM > BH$).

- 28.3.** Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік па аснове a і бакавой старане b .
- 28.4.** Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік па бакавой старане b і вышыні h , праведзенай да асновы.
- 28.5.** Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік па аснове a і вышыні h , праведзенай да асновы.
- 28.6.** Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік па аснове і вугле пры аснове дадзенага трохвугольніка.
- 28.7.** У трохвугольніку ABC вышыні перасякаюцца ў пункце O . Пабудуйце гэты трохвугольнік па адрэзках OA , BO , AB .
- 28.8.** Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік па бакавой старане і вугле, што ляжыць супраць асновы.
- 28.9.** Пабудуйце трохвугольнік па двох старанах і вышыні да адной з гэтых старон.
- 28.10.** Начарціце трохвугольнік ABC і пабудуйце трохвугольнік MNL , у якога $\angle M = \angle A$, $\angle N = \angle B$ і $MN = 2AB$.
- 28.11.** Начарціце адвольны вугал і адвольны прамень. З дапамогай цыркуля і лінейкі ад дадзенага праменя адкладзіце вугал, роўны дадзенаму.

§ 29. Пабудова бісектрысы вугла.

Пабудова сярэдзіны адрэзка

- 29.1.** Пабудуйце пункт перасячэння бісектрыс дадзенага трохвугольніка.
- 29.2.** Пабудуйце вугал, велічыня якога ў 4 разы меншая за велічыню дадзенага вугла.
- 29.3.** Пабудуйце трохвугольнік па старане, прылеглым да яе вугле і бісектрысе трохвугольніка, праведзенай з вяршыні гэтага вугла.
- 29.4.** Пабудуйце адрэзак, даўжыня якога складае $\frac{3}{4}$ даўжыні дадзенага адрэзка.

§ 30. Пабудова прамой, перпендыкулярнай дадзенай

- 30.1.** Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік па аснове і бісектрысе вугла пры вяршыні дадзенага трохвугольніка.
- 30.2.** Пабудуйце вуглы, велічыні якіх роўны 45° , 30° , 60° .
- 30.3.** Начарціце неразгорнуты вугал AOB і адзначце пункт C унутры вугла. Пабудуйце адрэзак, даўжыня якога роўна суме адлегласцей ад пункта C да старон вугла.
- 30.4*.** Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік па вугле пры вяршыні і бісектрысе да бакавой стараны.
- 30.5*.** Пабудуйце роўнастаронні трохвугольнік па яго вышыні.

§ 31. Геаметрычнае месца пунктаў

- 31.1.** Знайдзіце геаметрычнае месца пунктаў, роўнааддаленых ад дзвюх дадзеных паралельных прамых.
- 31.2.** Начарціце адвольную прамую s і адрэзак AB . Знайдзіце геаметрычнае месца пунктаў, аддаленых на адлегласць AB ад дадзенай прамой s .
- 31.3.** Пабудуйце пункт, роўнааддалены ад вяршынь роўнастаронняга трохвугольніка.
- 31.4.** Колькі існуе пунктаў, роўнааддаленых ад трох дадзеных пунктаў?
- 31.5*.** Адрэзак даўжынёй a перамяшчаецца так, што яго канцы застаюцца на старанах дадзенага прамога вугла. Знайдзіце геаметрычнае месца магчымых становішчаў сярэдзіны гэтага адрэзка.
- 31.6*.** Пабудуйце геаметрычнае месца пунктаў, роўнааддаленых ад дзвюх дадзеных непаралельных прамых.
- 31.7*.** Вяршыня вугла знаходзіцца за межамі даступнай часткі плоскасці. Як пабудаваць частку бісектрысы гэтага вугла?

8 клас

ЧАТЫРОХВУГОЛЬНІКІ

§ 1. Многавугольнікі

1.1. Выпішыце нумары выпуклых многавугольнікаў, паказаных на рысунку 106.

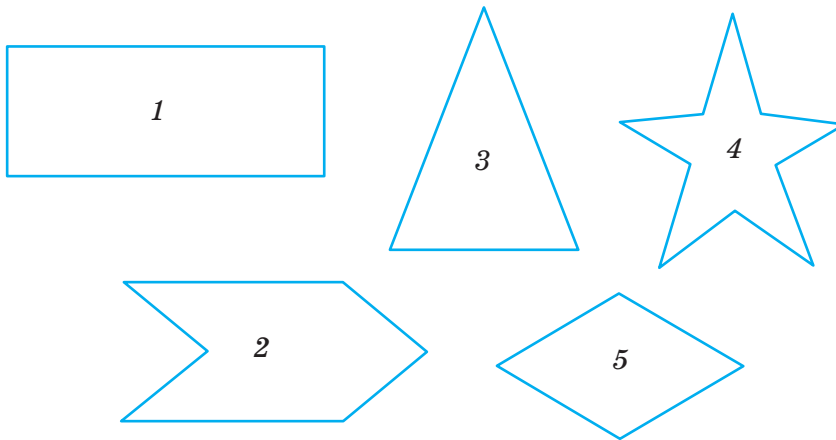


Рис. 106

1.2. Які з многавугольнікаў не можа быць нявыпуклым: трохвугольнік, чатырохвугольнік, пяцівугольнік?

1.3. Намалуйце ў сшытку выпуклы і нявыпуклы:

а) пяцівугольнік; б) сямівугольнік.

1.4. а) На якую найменшую колькасць трохвугольнікаў можна разбіць выпуклы 17-вугольнік?

б) Знайдзіце колькасць старон выпуклага многавугольніка, які можна разбіць як мінімум на 18 трохвугольнікаў.

- 1.5. а) Знайдзіце колькасць дыяганалей выпуклага 12-вугольніка.
 б) Знайдзіце колькасць старон выпуклага многавугольніка, у якога 9 дыяганалей.

1.6. Перанясіце табліцы ў сшытак. Запоўніце пустыя ячэйкі.

а)

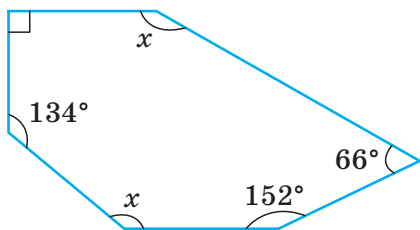
Колькасць старон выпуклага многавугольніка, n	6		5		8	9	
Сума ўнутраных вуглоў n -вугольніка				180°			1800°
Колькасць дыяганалей n -вугольніка		2					

б)

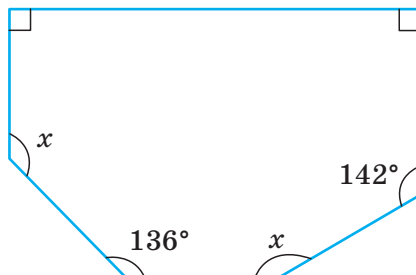
Колькасць старон выпуклага многавугольніка, n		4		6	7	10	11
Сума ўнутраных вуглоў n -вугольніка	180°						
Колькасць дыяганалей n -вугольніка			5				

- 1.7. Знайдзіце велічыню вугла x у кожным з многавугольнікаў на рысунках 107, а), б) пры ўмове, што вуглы, абазначаныя адной літарай, роўныя.

а)

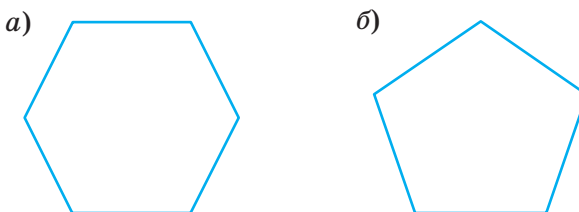


б)



Рыс. 107

- 1.8. а) У чатырохвугольніку велічыні вуглоў знаходзяцца ў адносіне $6 : 7 : 8 : 15$. Знайдзіце велічыню найменшага вугла чатырохвугольніка.
- б) У чатырохвугольніку велічыні вуглоў знаходзяцца ў адносіне $2 : 3 : 5 : 8$. Знайдзіце велічыню найбольшага вугла чатырохвугольніка.
- 1.9. Знайдзіце велічыні ўнутраных вуглоў многавугольнікаў, паказаных на рысунках 108, а), б), калі вядома, што ў кожнага з іх усе знешнія вуглы роўныя паміж сабой.



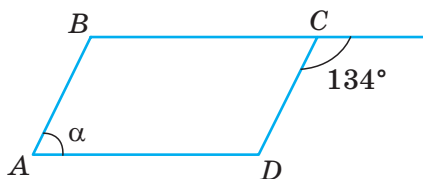
Рыс. 108

- 1.10. а) Сума вуглоў выпуклага многавугольніка роўна 1440° . Знайдзіце колькасць яго дыяганалей.
- б) Сума вуглоў выпуклага многавугольніка роўна 1980° . Знайдзіце колькасць яго ўнутраных вуглоў.
- 1.11. а) У выпуклага многавугольніка кожны знешні вугал роўны 18° . Знайдзіце колькасць дыяганалей дадзенага многавугольніка.
- б) У выпуклага многавугольніка кожны знешні вугал роўны 30° . Знайдзіце суму ўнутраных вуглоў многавугольніка.
- 🏠 1.12. Знайдзіце перыметр многавугольніка, калі:
- а) кожны яго ўнутраны вугал роўны 140° і кожная яго старана роўна 12 см;
- б) кожны яго знешні вугал роўны 10° і кожная яго старана роўна 10 см.

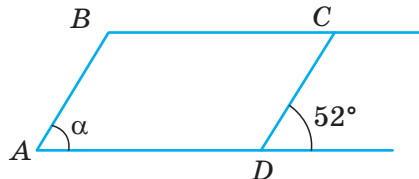
§ 2. Паралелаграм і яго ўласцівасці

2.1. $ABCD$ — паралелаграм. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 109, а)–г), знайдзіце велічыню вугла α .

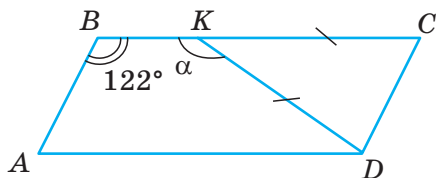
а)



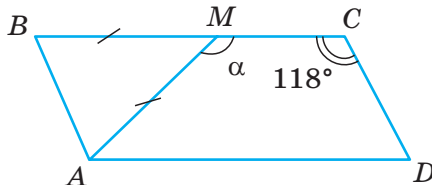
б)



в) $DK = KC$



г) $AM = MB$



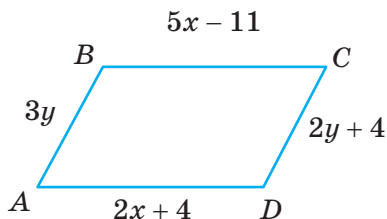
Рыс. 109

2.2. а) Адзін з вуглоў паралелаграма роўны 28° . Знайдзіце градусныя меры астатніх вуглоў паралелаграма.

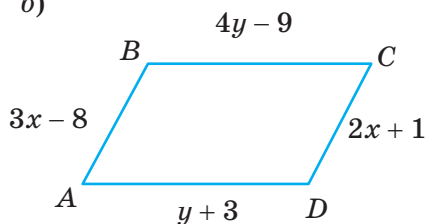
б) Адзін з вуглоў паралелаграма роўны 146° . Знайдзіце градусныя меры астатніх вуглоў паралелаграма.

2.3. $ABCD$ — паралелаграм. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 110, а), б), знайдзіце перыметр паралелаграма.

а)



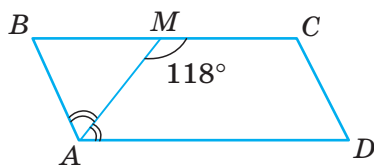
б)



Рыс. 110

- 2.4.** а) Периметр паралелограма роўны 48 см. Знайдзіце даўжыні старон паралелограма, калі іх адносіна роўна 3 : 5.
 б) Периметр паралелограма роўны 56 см, адна з яго старон роўна 4 см. Знайдзіце адносіну даўжынь старон паралелограма.
- 2.5.** а) У паралелограме $ABCD$ градусныя меры двух вуглоў адносяцца як 2 : 3. Знайдзіце велічыні ўсіх вуглоў паралелограма.
 б) У паралелограме $ABCD$ вугал A роўны 30° . Знайдзіце адносіну градусных мер вуглоў паралелограма.
- 2.6.** а) У паралелограме адзін вугал на 42° меншы за другі. Знайдзіце велічыні ўсіх вуглоў паралелограма.
 б) У паралелограме адзін вугал на 38° большы за другі. Знайдзіце велічыні ўсіх вуглоў паралелограма.
- 2.7.** Выкарыстаўшы даныя рысункаў 111, а), б), знайдзіце вуглы паралелограма $ABCD$.

а) AM — бісектрыса $\angle A$



б) BK — бісектрыса $\angle B$

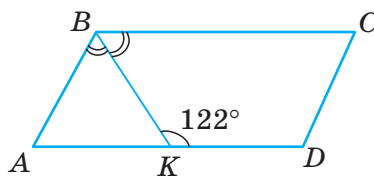


Рис. 111

- 2.8.** У паралелограме $ABCD$ $AB = 2BC$, пункт M — сярэдзіна AB . Дакажыце, што вугал CMD прамы.
- 2.9.** а) У паралелограме $ABCD$ бісектрыса AN дзеліць старану BC на адрэзкі BN і NC , роўныя адпаведна 12 см і 7 см. Знайдзіце перыметр паралелограма.

б) У паралелаграме $ABCD$ $CD = 17$ см, перыметр паралелаграма роўны 96 см, бісектрыса BM дзеліць старану AD на адрэзкі AM і MD . Знайдзіце даўжыні адрэзкаў AM і MD .

2.10. а) У паралелаграме $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O . Перыметр паралелаграма роўны 40 см, а рознасць перыметраў трохвугольнікаў AOD і AOB роўна 4 см. Знайдзіце стораны паралелаграма.

б) У паралелаграме $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O . Перыметр паралелаграма роўны 60 см, а рознасць перыметраў трохвугольнікаў BOC і COD роўна 6 см. Знайдзіце стораны паралелаграма.

2.11. У паралелаграме востры вугал роўны 60° , вышыня дзеліць процілеглую старану на адрэзкі, даўжыні якіх роўны 3 см і 8 см. Знайдзіце перыметр паралелаграма (разгледзьце ўсе магчымыя выпадкі).

2.12. а) У паралелаграме $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O . Знайдзіце адлегласць ад пункта O да стараны BC , калі вядома, што $\angle B = 150^\circ$ і $CD = 8$ см.

б) У паралелаграме $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O . Знайдзіце даўжыню стараны AB , калі адлегласць ад пункта O да стараны AD роўна 3 см і $\angle A = 30^\circ$.

2.13. а) У паралелаграме $ABCD$ бісектрысы вуглоў A і B дзеляць старану CD на два адрэзкі. Знайдзіце перыметр паралелаграма, калі старана $AB = 18$ см.

б) Перыметр паралелаграма $ABCD$ роўны 36 см, бісектрысы вуглоў A і D перасякаюцца ў пункце N , які належыць старане BC . Знайдзіце даўжыні старон паралелаграма.

2.14. а) У паралелаграме $ABCD$ бісектрысы вуглоў A і D дзеляць старану BC на тры адрэзкі. Знайдзіце даўжыні гэтых адрэзкаў, калі перыметр паралелаграма роўны 30 см, а старана $AB = 4$ см.

б) У паралелаграме $ABCD$ бісектрысы вуглоў C і D дзеляць старану AB на тры адрэзкі, даўжыні якіх роўны 7 см, 2 см і 7 см. Знайдзіце перыметр паралелаграма.

2.15. а) У паралелаграме $ABCD$ бісектрыса вугла A перасякае прамую CD у пункце M , а бісектрыса вугла B перасякае прамую CD у пункце N . Даўжыня адрэзка MN у 5 разоў большая за даўжыню стараны CD паралелаграма. Знайдзіце стараны паралелаграма, калі яго перыметр роўны 32 см.

б) У паралелаграме $ABCD$ бісектрыса вугла A перасякае прамую BC у пункце K так, што $BC : CK = 2 : 1$. Знайдзіце стараны паралелаграма, калі яго перыметр роўны 20 см.

2.16. У паралелаграме $ABCD$ на старанах AD і BC адзначаны пункты P і F адпаведна, пры гэтым $\angle AFB = \angle CPD$. Дакажыце, што чатырохвугольнік $AFCP$ — паралелаграм.

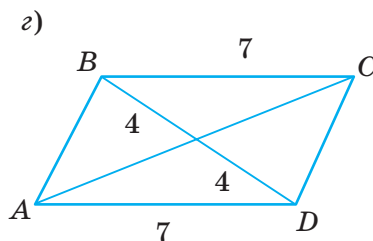
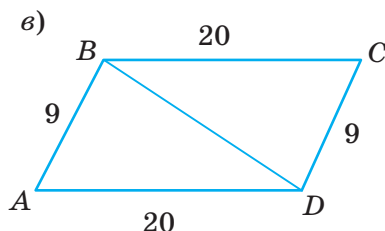
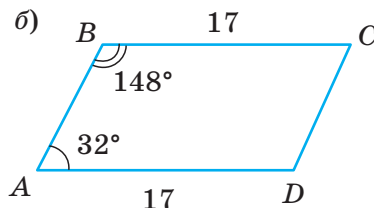
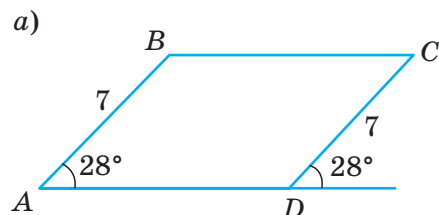
2.17. а) Перыметр паралелаграма ў 3 разы большы за адну з яго старон. Знайдзіце адносіну старон паралелаграма.

б) Перыметр паралелаграма ў 3 разы большы за рознасць даўжынь яго старон. Знайдзіце адносіну старон паралелаграма.

 **2.18.** На старанах паралелаграма $ABCD$ пабудаваны роўнастароннія трохвугольнікі APB і BKC . Дакажыце, што трохвугольнік PKD з'яўляецца роўнастароннім.

§ 3. Прыметы паралелаграма

3.1. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 112, а)–г), дакажыце, што чатырохвугольнік $ABCD$ — паралелаграм.



Рыс. 112

3.2. а) $ABCD$ — паралелаграм, пункты K і M дзеляць дыяганаль BD на тры роўныя часткі. Дакажыце, што $AKCM$ — паралелаграм.

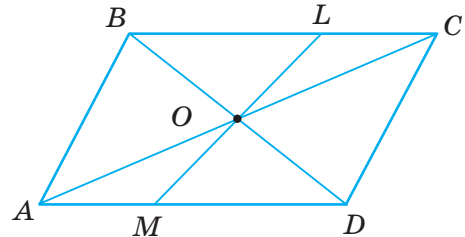
б) $ABCD$ — паралелаграм, пункты K , L і M дзеляць дыяганаль AC на роўныя адрэзкі AK , KL , LM і MC . Дакажыце, што $BMDK$ — паралелаграм.

3.3. а) Тры вяршыні паралелаграма маюць каардынаты $(6; 0)$, $(2; -3)$ і $(-4; 3)$. Знайдзіце каардынаты чацвёртай вяршыні, калі вядома, што гэта вяршыня знаходзіцца ў чацвёртай каардынатнай чвэрці.

б) Дзве вяршыні паралелаграма маюць каардынаты $(2; 0)$, $(-3; -7)$, пункт перасячэння дыяганалей мае каардынаты $(5; -3)$. Знайдзіце каардынаты дзвюх іншых вяршынь паралелаграма.

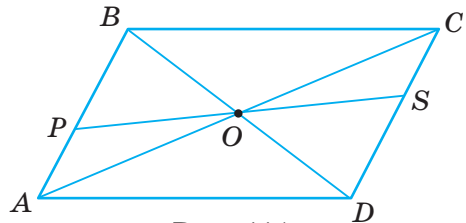
- 3.4. У паралелаграме $ABCD$ на дыяганалі BD адкладзены роўныя адрэзкі BF і DE , а на дыяганалі AC адкладзены роўныя адрэзкі AK і CP . Дакажыце, што $KFPE$ — паралелаграм.
- 3.5. У трохвугольніку ABC медыяну AM прадоўжылі за пункт M і на прадаўжэнні адзначылі пункт N так, што $AN = 2AM$. Дакажыце, што $ABNC$ — паралелаграм.
- 3.6. У раўнабедраным трохвугольніку ABC ($AB = BC$) вышыню BH прадоўжылі за пункт H і на прадаўжэнні адзначылі пункт P так, што $BH = HP$. Дакажыце, што $ABCP$ — паралелаграм.

- 3.7. а) На рысунку 113 паказаны паралелаграм $ABCD$, пункт перасячэння дыяганалей O належыць адрэзку LM з канцамі на старанах паралелаграма. Дакажыце, што $ALCM$ — паралелаграм.



Рыс. 113

- б) На рысунку 114 паказаны паралелаграм $ABCD$, пункт перасячэння дыяганалей O належыць адрэзку PS з канцамі на старанах паралелаграма. Дакажыце, што $PBSD$ — паралелаграм.



Рыс. 114

- 3.8. У паралелаграме $ABCD$ на старанах AD і BC адзначаны адпаведна пункты P і F , пры гэтым $FB = PD$. Дакажыце, што чатырохвугольнік $AFCP$ — паралелаграм.

- 3.9. а) Дадзены раўнабедраны трохвугольнік з асновай 14 см і перыметрам 50 см. Праз пункт, які належыць аснове, праведзены прамыя, паралельныя бакавым старонам трохвугольніка. Вызначыце від і знайдзіце перыметр атрыманага чатырохвугольніка.

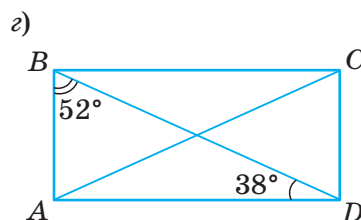
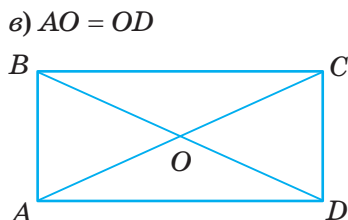
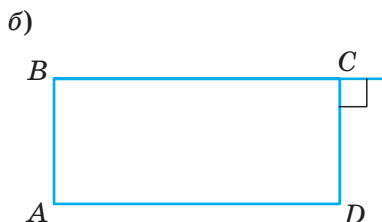
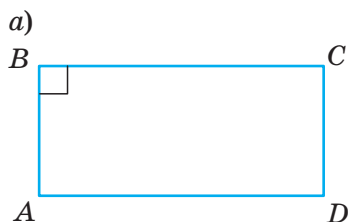
б) Пункт M належыць аснове раўнабедранага трохвугольніка ABC , $AB = BC = 8$ см. Праз пункт M праведзены прамыя, паралельныя старанам трохвугольніка AB і BC , якія перасякаюць стораны BC і AB адпаведна ў пунктах K і L . Дакажыце, што атрыманы чатырохвугольнік $MKBL$ з'яўляецца паралелаграмам, і знайдзіце яго перыметр.

3.10. а) У паралелаграме $ABCD$ бісектрыса вугла C перасякае старану AD у пункце K , а бісектрыса вугла D перасякае старану BC у пункце P . Знайдзіце перыметр паралелаграма $ABCD$, калі вядома, што $PK = 15$ см і $AK : AD = 2 : 5$.

б) У паралелаграме $ABCD$ бісектрыса вугла A перасякае старану BC у пункце M , а бісектрыса вугла B перасякае старану AD у пункце N . Знайдзіце перыметр паралелаграма $MCDN$, калі вядома, што $AB = 12$ см і $AN : ND = 3 : 4$.

§ 4. Прамавугольнік

4.1. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 115, а)–г), дакажыце, што паралелаграм $ABCD$ з'яўляецца прамавугольнікам.



Рыс. 115

- 4.2. а) Стороны прямоу́гольника относятся как $3 : 5$, разность длин этих сторон равна 30 см. Найдите периметр прямоу́гольника.
- б) Периметр прямоу́гольника равен 90 см, разность длин его сторон равна 15 см. Найдите стороны прямоу́гольника.
- 4.3. а) Диагональ прямоу́гольника $ABCD$ пересекается в точке O . В треугольнике BOC проведена медиана OM , $\angle OCM = 36^\circ$. Найдите угол AOM .
- б) Диагональ прямоу́гольника $ABCD$ пересекается в точке O . В треугольнике COD проведена биссектриса ON , $\angle OCN = 27^\circ$. Найдите угол AON .
- 4.4. а) В прямоу́гольнике $ABCD$ $BD = 16$ см, $\angle ACD = 60^\circ$. Найдите длину отрезка от точки пересечения диагоналей прямоу́гольника до его большей стороны.
- б) В прямоу́гольнике $ABCD$ $AC = 12$ см, $\angle ADB = 60^\circ$. Найдите периметр треугольника AOD .
- 4.5. а) Докажите, что паралелограмм $ABCD$, у которого $\angle CAD = \angle ADB$, является прямоугольником.
- б) Докажите, что паралелограмм $ABCD$, у которого $AO = OC = OD$, где O — точка пересечения диагоналей, является прямоугольником.
- 4.6. Найдите периметр прямоу́гольника, точка пересечения диагоналей которого удалена от его сторон на 5 см и 6 см.
-  4.7. а) В прямоу́гольнике $ABCD$ из вершины C проведены перпендикуляр CH к диагонали BD . Найдите длину отрезка BH , если $AC = 12$ см и $\angle ABD : \angle CBD = 2 : 1$.
- б) В прямоу́гольнике $ABCD$ из вершины B проведены перпендикуляр BF к диагонали AC . Найдите длину отрезка FC , если $FC = 12$ см и $\angle ACB : \angle ACD = 1 : 2$.

- 4.8. а) У прамавугольніку $ABCD$ дыяганаль $AC = 20$ см, старана $AB = 12$ см. Перыметр прамавугольніка роўны 56 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ACD .
- б) У прамавугольніку $ABCD$ дыяганаль $BD = 25$ см, старана $BC = 20$ см, перыметр прамавугольніка роўны 70 см. Знайдзіце даўжыню незамкнёнай ломанай $AODCB$, дзе O — пункт перасячэння дыяганалей прамавугольніка.
- 4.9. а) Дыяганалі прамавугольніка $ABCD$ перасякаюцца ў пункце O , перыметр трохвугольніка ABO роўны 36 см, перыметр трохвугольніка BOC роўны 50 см. Знайдзіце перыметр прамавугольніка $ABCD$, калі $BO = 13$ см.
- б) Дыяганалі прамавугольніка $ABCD$ перасякаюцца ў пункце O , перыметр трохвугольніка ADO роўны 54 см, перыметр трохвугольніка DOC роўны 48 см. Знайдзіце перыметр прамавугольніка $ABCD$, калі $OC = 15$ см.
- 4.10. Бісектрыса аднаго з вуглоў прамавугольніка дзеліць старану, якую перасякае, на адрэзкі 7 см і 8 см. Знайдзіце перыметр прамавугольніка. Разгледзьце ўсе магчымыя выпадкі.
- 4.11. а) У паралелаграме $ABCD$ бісектрысы ўсіх чатырох вуглоў пры перасячэнні ўтвараюць чатырохвугольнік $PKLM$. Знайдзіце адносіну даўжынь адрэзкаў PL і KM .
- б) У паралелаграме $KLMN$ бісектрысы ўсіх чатырох вуглоў пры перасячэнні ўтвараюць чатырохвугольнік $ABCD$. Знайдзіце рознасць градусных мер вуглоў A і B .
- 4.12. а) Знайдзіце перыметр прамавугольніка $ABCD$, калі бісектрысы яго вуглоў A і B дзеляць старану CD на два адрэзкі даўжынёй 7 см кожны.
- б) Знайдзіце перыметр прамавугольніка $ABCD$, калі бісектрысы яго вуглоў A і B дзеляць старану CD на тры адрэз-

кі даўжынёй 5 см кожны, пры гэтым пункт перасячэння бісектрыс ляжыць па-за прамавугольнікам.

4.13. а) У прамавугольніку $ABCD$ дыяганаль $AC = 12$ см, $\angle CAD = 30^\circ$. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні C да прамой AD .

б) У прамавугольніку $ABCD$ дыяганаль $BD = 16$ см, $\angle CDB = 15^\circ$. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні A да прамой BD .

4.14. а) У прамавугольніку $ABCD$ бісектрыса вугла A перасякае дыяганаль BD у пункце P , $\angle APB = 75^\circ$. Знайдзіце вугал паміж дыяганалямі прамавугольніка.

б) У прамавугольніку $ABCD$ бісектрыса вугла B перасякае дыяганаль AC у пункце K , $\angle AKB = 65^\circ$. Знайдзіце вугал паміж дыяганалямі прамавугольніка.

§ 5. Ромб

5.1. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 116, а)–г), дакажыце, што паралелаграм $ABCD$ — ромб.

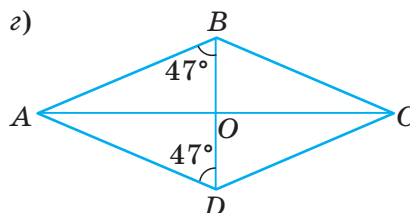
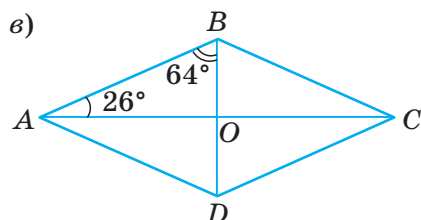
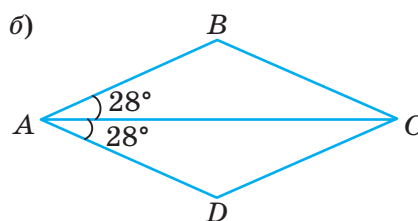
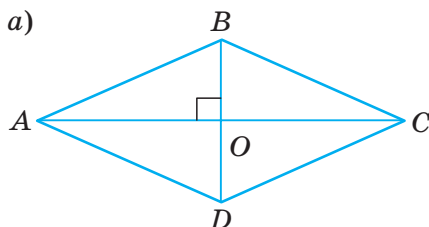
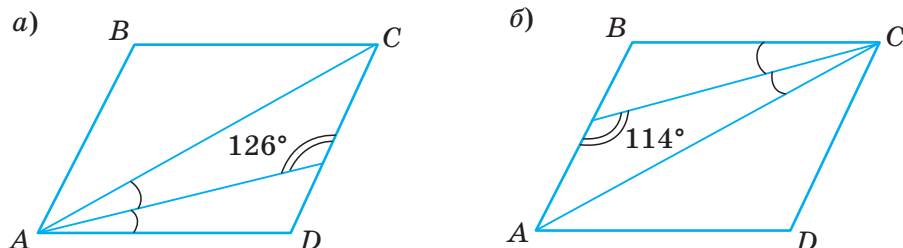


Рис. 116

5.2. $ABCD$ — ромб. Роўныя вуглы абазначаны аднолькавай колькасцю дуг (рыс. 117, а), б)). Знайдзіце вуглы ромба.



Рыс. 117

5.3. а) Адзін з вуглоў ромба роўны 60° , яго меншая дыяганаль роўна 10 см. Знайдзіце перыметр ромба.

б) Перыметр ромба роўны 12 дм, яго меншая дыяганаль роўна 3 дм. Знайдзіце градусныя меры вуглоў ромба.

5.4. а) Адзін з вуглоў ромба роўны 150° , яго вышыня роўна 7 см. Знайдзіце перыметр ромба.

б) Адзін з вуглоў ромба роўны 30° , яго перыметр роўны 24 см. Знайдзіце вышыню ромба.

5.5. а) Вышыня ромба адносіцца да яго стараны як $1 : 2$. Знайдзіце большы вугал ромба.

б) Адзін з вуглоў ромба роўны 30° . Знайдзіце адносіну вышыні ромба да яго перыметра.

5.6. а) Вышыня ромба дзеліць яго старану на роўныя адрэзкі даўжынёй 4 см. Знайдзіце даўжыню меншай дыяганалі ромба.

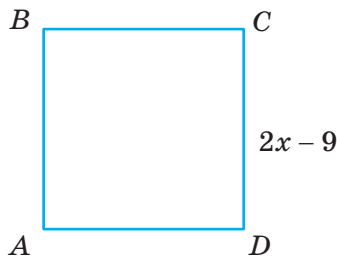
б) Вышыня ромба дзеліць яго старану на роўныя адрэзкі даўжынёй 5 см. Знайдзіце вугал паміж двума вышынямі, праведзенымі з адной вяршыні тупога вугла ромба.

- 5.7. а) Вугал паміж двума вышынямі, праведзенымі з адной вяршыні вострага вугла ромба, роўны 150° . Знайдзіце перыметр ромба, калі яго вышыня роўна 5 см.
- б) Вугал паміж двума вышынямі, праведзенымі з адной вяршыні вострага вугла ромба, роўны 150° . Знайдзіце вышыню ромба, калі яго перыметр роўны 48 см.
- 5.8. а) У паралелаграме $ABCD$ $\angle ACB = 75^\circ$, $\angle ACD = 75^\circ$. Знайдзіце вышыню паралелаграма, калі яго перыметр роўны 80 см.
- б) У паралелаграме $ABCD$ $\angle BAC = 75^\circ$, $\angle DAC = 75^\circ$. Знайдзіце перыметр паралелаграма, калі яго вышыня роўна 6 см.
- 5.9. У ромбе $ABCD$ прамая AB утварае з дыяганалямі вуглы, велічыні якіх адносяцца як $13 : 17$. Знайдзіце вуглы ромба.

§ 6. Квадрат

- 6.1. $ABCD$ — квадрат. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 118, а), б), знайдзіце значэнне x .

а) $P_{ABCD} = 28$ см



б)

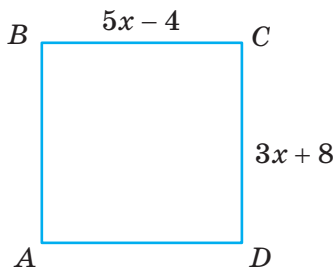


Рис. 118

- 6.2. а) Дзве вяршыні квадрата маюць каардынаты $(-3; -1)$ і $(5; -1)$. Знайдзіце каардынаты астатніх вяршынь квадрата. Разгледзьце ўсе магчымыя выпадкі.

б) Дзве вяршыні квадрата маюць каардынаты $(-4; -2)$ і $(6; -2)$, пункт перасячэння дыяганалей мае каардынаты $(1; 3)$. Знайдзіце каардынаты астатніх вяршынь квадрата.

6.3. а) Знайдзіце даўжыню стараны квадрата, перыметр якога роўны 1,04 м. Адказ выразіце ў сантыметрах.

б) Знайдзіце перыметр квадрата, старана якога роўна 2,03 м.

6.4. а) Перыметр роўнастаронняга трохвугольніка роўны 84 см, знайдзіце перыметр квадрата, старана якога роўна старане трохвугольніка.

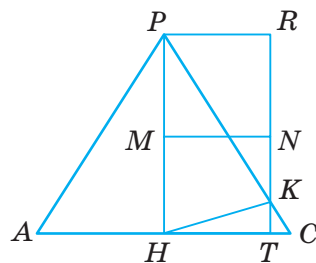
б) Перыметр квадрата роўны 72 см, знайдзіце перыметр роўнастаронняга трохвугольніка, старана якога роўна старане квадрата.

6.5. У квадраце $ABCD$ пункты M, N, P і Q — сярэдзіны старон. Дакажыце, што чатырохвугольнік $MNPQ$ — квадрат.

 **6.6.** а) На старанах роўнастаронняга трохвугольніка ABC пабудаваны квадраты $ANMC$ і $BKLC$. Знайдзіце велічыню вугла паміж прамымі MB і AL .

б) На старанах квадрата $ABCD$ пабудаваны роўнастароннія трохвугольнікі ALD і BKC . Знайдзіце велічыню вугла паміж прамымі LB і AK .

 **6.7.** У роўнастароннім трохвугольніку APC праведзена вышыня PH . Прамавугольнік $PRTN$ падзелены адрэзкам MN на два квадраты (рыс. 119). Знайдзіце велічыню вугла HKP .



Рыс. 119

§ 7. Тэарэма Фалеса

7.1. Прамыя $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B$. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 120, а), б), знайдзіце даўжыню адрэзка, абазначанага літарай x .

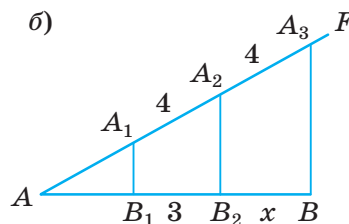
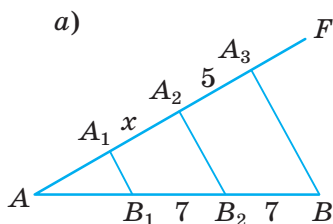


Рис. 120

7.2. Па даных рысункаў 121, а), б) знайдзіце даўжыню CB .

а) $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$

б) $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$

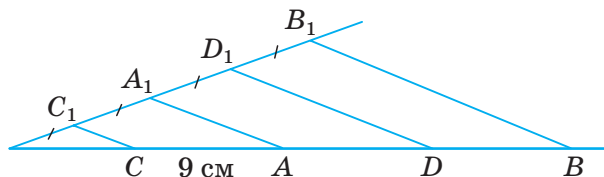
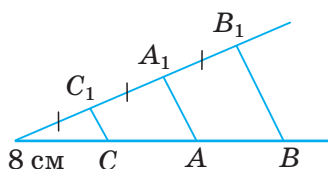


Рис. 121

7.3. Па даных рысункаў 122, а), б) знайдзіце даўжыню PB .

а) $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $FE = 12$ см

б) $\angle P = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 24$ см

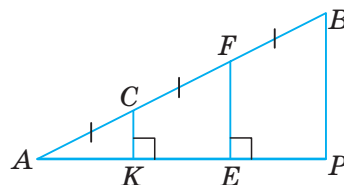
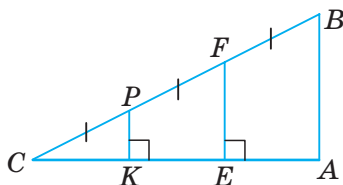


Рис. 122

7.4. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 123, а), б), знайдзіце градусную меру вугла BAC .

а) $\angle ACB = 32^\circ$, $\angle AMN = 101^\circ$

б) $\angle BNM = 57^\circ$, $\angle ABC = 48^\circ$

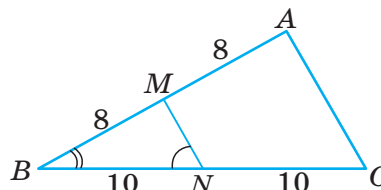
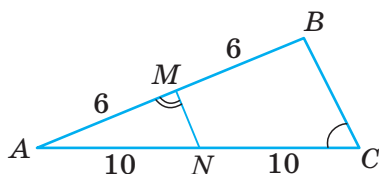


Рис. 123

7.5. а) У паралелаграме $ABCD$ дыяганаль $AC = 21$ см, пункт M — сярэдзіна стараны AD . Знайдзіце даўжыні адрэзкаў, на якія прамыя BM і DB падзялілі дыяганаль AC .

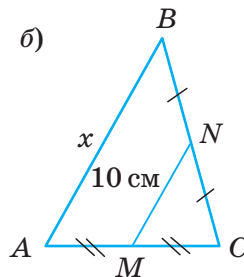
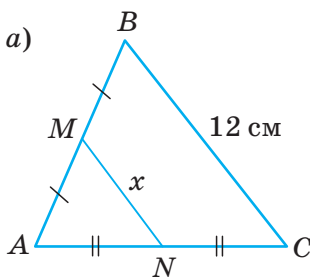
б) У паралелаграме $ABCD$ дыяганаль $BD = 27$ см, пункт K — сярэдзіна стараны CD . Знайдзіце даўжыні адрэзкаў, на якія прамыя CA і AK падзялілі дыяганаль BD .

7.6. а) У ромбе $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O . Праз вяршыню C і сярэдзіну адрэзка OD праведзена прмая, якая перасякае старану AD ромба ў пункце K . Знайдзіце даўжыню адрэзка AK , калі перыметр ромба роўны 60 см.

б) У ромбе $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O . Праз вяршыню B і сярэдзіну адрэзка AO праведзена прмая, якая перасякае старану AD ромба ў пункце K . Знайдзіце перыметр ромба, калі даўжыня адрэзка AK роўна 4 см.

§ 8. Сярэдняя лінія трохвугольніка

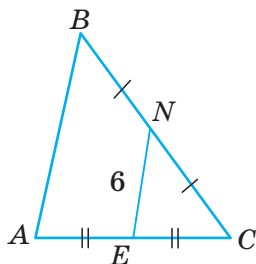
8.1. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 124, а), б), знайдзіце значэнне x .



Рыс. 124

8.2. Знайдзіце перыметры ўказаных чатырохвугольнікаў, выкарыстаўшы даныя рысункаў 125, а), б).

а) $P_{ENC} = 16$ см, P_{ABNE} — ?



б) $P_{AME} = 25$ см, P_{MBCE} — ?

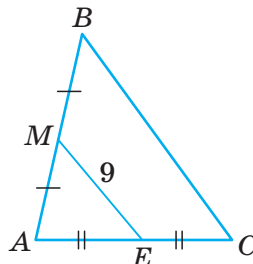


Рис. 125

- 8.3.** а) Сярэднія лініі трохвугольніка роўны 7 см, 8 см і 9 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка.
 б) Дзве сярэднія лініі трохвугольніка роўны 5 см і 8 см. Знайдзіце даўжыню трэцяй сярэдняй лініі, калі перыметр трохвугольніка роўны 40 см.
- 8.4.** а) Перыметр трохвугольніка роўны 120 см, а даўжыні старон знаходзяцца ў адносіне 5 : 12 : 13. Знайдзіце даўжыні старон трохвугольніка, вяршыні якога з'яўляюцца сярэдзінамі старон дадзенага трохвугольніка.
 б) Перыметр трохвугольніка роўны 130 см, а яго сярэднія лініі адносяцца як 7 : 8 : 11. Знайдзіце рознасць даўжынь найбольшай і найменшай старон трохвугольніка.
- 8.5.** а) У трохвугольніку ABC $AB = 12$ см, $BC = 8$ см, пункт M — сярэдзіна стараны AC . Праз пункт M праведзены прамыя, паралельныя старанам AB і BC . Вызначыце від атрыманага чатырохвугольніка і знайдзіце яго перыметр.
 б) У трохвугольніку ABC $AB = 20$ см, пункт T — сярэдзіна стараны AB . Праз пункт T праведзены прамыя, паралельныя старанам AC і BC . Перыметр атрыманага чатырохвугольніка роўны 24 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC .
- 8.6.** а) Старана прамавугольніка роўна 7 см і ўтварае вугал 60° з дыяганаллю. Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца сярэдзіны старон прамавугольніка.

б) Перыметр чатырохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца сярэдзіны старон прамавугольніка, роўны 40 см. Знайдзіце даўжыню дыяганалі прамавугольніка.

8.7. а) У паралелаграме $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O , пункт N — сярэдзіна стараны AB , $AN = 5$ см, $ON = 4$ см. Знайдзіце перыметр паралелаграма.

б) У паралелаграме $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O , пункт M — сярэдзіна стараны BC , $MC = 7$ см, перыметр паралелаграма роўны 48 см. Знайдзіце даўжыню адрэзка OM .

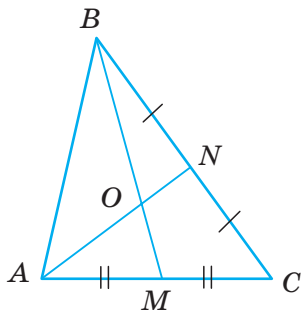
8.8. У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ дыяганалі $AC = 17$ см, $BD = 10$ см. Сярэдзіны старон чатырохвугольніка $ABCD$ — пункты K, L, M і N — з'яўляюцца вяршынямі чатырохвугольніка $KLMN$. Вызначыце від чатырохвугольніка $KLMN$ і знайдзіце яго перыметр.

8.9. Сума даўжынь дыяганалей выпуклага чатырохвугольніка роўна $16\sqrt{13}$ см. Знайдзіце перыметр многавугольніка, атрыманага пры паслядоўным злучэнні сярэдзін старон зыходнага чатырохвугольніка.

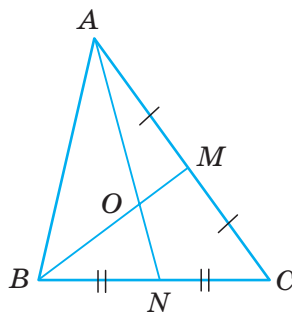
§ 9. Уласцівасць медыян трохвугольніка

9.1. Па даных рысункаў 126, а), б) знайдзіце даўжыню медыяны AN .

а) $AO = 10$ см



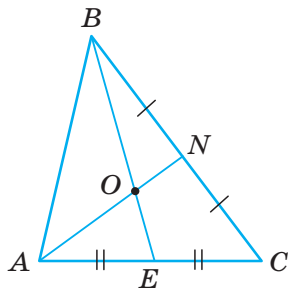
б) $ON = 5$ см



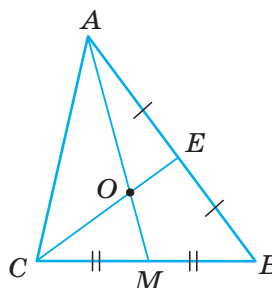
Рыс. 126

9.2. а) Па даных рысунка 127 знайдзіце даўжыню адрэзка BO , калі $OE = x$, $AO = 8x - 5$, $ON = 3x + 4$.

б) Па даных рысунка 128 знайдзіце даўжыню адрэзка CE , калі $OE = x$, $AO = x - 3$, $OM = 9 - x$.



Рыс. 127



Рыс. 128

9.3. Па даных рысунка 129 знайдзіце даўжыню адрэзка AM , калі:

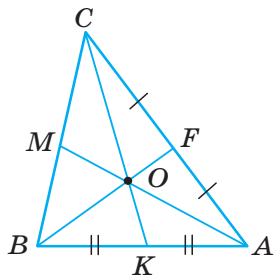
а) $OM = 6$ см;

б) $AO = 8$ см.

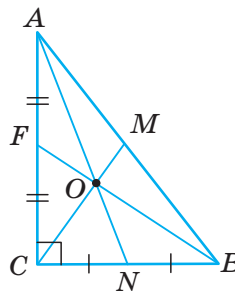
9.4. Па даных рысунка 130 знайдзіце даўжыню AB , калі:

а) $OM = 10$ см;

б) $OC = 8$ см.



Рыс. 129



Рыс. 130

9.5. а) У трохвугольніку ABC медыяны AM і BN перасякаюцца ў пункце O . Даўжыня адрэзка AO на 6 см большая за даўжыню адрэзка OM . Знайдзіце даўжыню медыяны AM .

б) У трохвугольніку ABC медыяны AL і CK перасякаюцца ў пункце O . Даўжыня адрэзка OK на 4 см меншая за даўжыню адрэзка CO . Знайдзіце даўжыню медыяны CK .

9.6. У паралелаграме $ABCD$ дыяганаль $BD = 24$ см, пункт M — сярэдзіна стараны BC . Знайдзіце даўжыню адрэзка PD , дзе P — пункт перасячэння прамых AM і BD .

б) У паралелаграме $ABCD$ пункт N — сярэдзіна стараны CD , K — пункт перасячэння прамых AC і BN , $KC = 8$ см. Знайдзіце даўжыню дыяганалі AC .

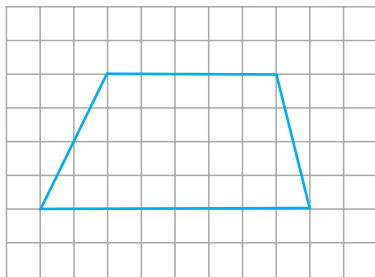
9.7. а) У паралелаграме $ABCD$ пункты M і N — сярэдзіны старон AD і CD адпаведна. Адрэзкі AN і CM перасякаюцца ў пункце K . Перыметр трохвугольніка MNK роўны 13 см. Знайдзіце даўжыню дыяганалі AC , калі $AN = 12$ см і $CM = 9$ см.

б) У паралелаграме $ABCD$ пункты K і L — сярэдзіны старон BC і CD адпаведна. Адрэзкі DK і BL перасякаюцца ў пункце P . Знайдзіце перыметр трохвугольніка PKL , калі $DK = 15$ см, $BL = 21$ см і $BD = 8$ см.

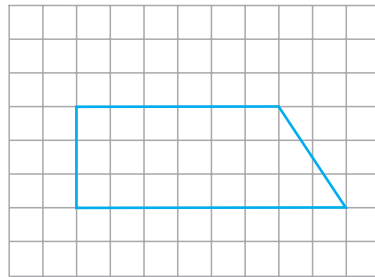
§ 10. Трапецыя. Сярэдняя лінія трапецыі

10.1. Па даных рысункаў 131, а), б) знайдзіце даўжыню сярэдняй лініі трапецыі, калі памер адной клеткі 2×2 см.

а)



б)



Рыс. 131

10.2. а) Знайдзіце сярэдняю лінію трапецыі, асновы якой роўны 9 см і 17 см.

б) Сярэдняя лінія трапецыі роўна 15 см, а даўжыня адной з асноў — 12 см. Знайдзіце даўжыню другой асновы трапецыі.

10.3. а) У трапецыі $ABCD$ з асновамі AD і BC вугал A ў 3 разы меншы за вугал B , а вугал C у 4 разы большы за вугал D . Знайдзіце градусныя меры вуглоў трапецыі.

б) У трапецыі $ABCD$ з асновамі AD і BC вугал B на 108° большы за вугал A , а вугал D на 120° меншы за вугал C . Знайдзіце градусныя меры вуглоў трапецыі.

10.4. а) Адрэзак AB размешчаны з аднаго боку ад прамой a . Адлегласці ад канцоў адрэзка да прамой a роўны 5 см і 12 см. Знайдзіце адлегласць ад сярэдзіны адрэзка AB да прамой a .

б) Пункты A і B ляжаць у розных паўплоскасцях ад прамой a . Адлегласці ад канцоў адрэзка да прамой a роўны 3 см і 17 см. Знайдзіце адлегласць ад сярэдзіны адрэзка AB да прамой a .

10.5. а) Меншая аснова трапецыі роўна 4 см, адрэзак, які злучае сярэдзіны яе дыяганалей, роўны 8 см. Знайдзіце даўжыню большай асновы трапецыі.

б) Сярэдняя лінія трапецыі роўна 17 см, а адрэзак, які злучае сярэдзіны яе дыяганалей, роўны 2 см. Знайдзіце даўжыні асноў трапецыі.

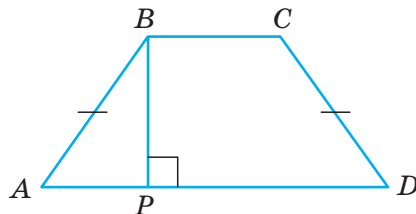
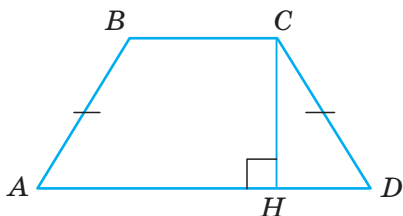
10.6. У трапецыі $ABCD$ аснова $BC = 10$ см, бакавыя стораны $AB = 8$ см, $CD = 12$ см. Бісектрысы вуглоў пры аснове BC перасякаюцца ў пункце P , які належыць аснове AD . Знайдзіце даўжыню сярэдняй лініі трапецыі.

§ 11. Раўнабедраная і прамавугольная трапецыі

11.1. Па даных рысункаў 132, а), б) знайдзіце даўжыні адрэзкаў, на якія вышыня дзеліць большую аснову трапецыі.

а) $AD = 17$ см, $BC = 9$ см

б) $AD = 19$ см, $BC = 5$ см

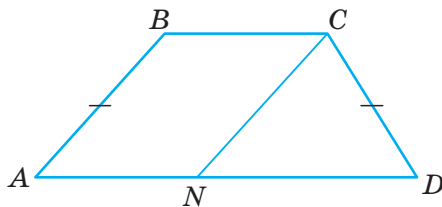
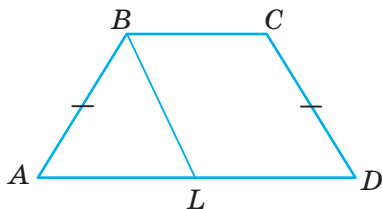


Рыс. 132

11.2. Па даных рысункаў 133, а), б) знайдзіце перыметр раўнабедранай трапецыі $ABCD$.

а) $BL \parallel CD$, $BC = 9$ см,
 $P_{ABL} = 15$ см

б) $AB \parallel CN$, $AN = 7$ см,
 $P_{CND} = 28$ см

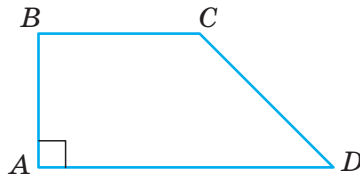
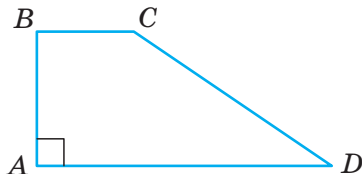


Рыс. 133

11.3. Па даных рысункаў 134, а), б) знайдзіце даўжыню меншай бакавой стараны трапецыі $ABCD$.

а) $CD = 8$ см, $\angle BCD = 150^\circ$

б) $BC = 6$ см, $AD = 10$ см, $\angle ADC = 45^\circ$



Рыс. 134

11.4. а) У раўнабедранай трапецыі $ABCD$ з асновамі AD і BC вугал A на 90° меншы за вугал B . Знайдзіце градусныя меры вуглоў трапецыі.

б) У раўнабедранай трапецыі $ABCD$ з асновамі AD і BC вугал C у 4 разы большы за вугал D . Знайдзіце градусныя меры вуглоў трапецыі.

 **11.5.** а) Пабудуйце на каардынатнай плоскасці раўнабедраную трапецыю, тры вяршыні якой маюць каардынаты $(-6; -3)$, $(-2; 7)$, $(8; -3)$. Знайдзіце даўжыню сярэдняй лініі атрыманай трапецыі, калі вядома, што яна паралельна восі абсцыс. За адзінкавы адрэзак прыміце дзве клеткі сшытка, г. зн. 1 см.

б) Пабудуйце на каардынатнай плоскасці раўнабедраную трапецыю, тры вяршыні якой маюць каардынаты $(-5; -2)$, $(-5; 5)$, $(2; -4)$. Знайдзіце даўжыню сярэдняй лініі атрыманай трапецыі, калі вядома, што яна паралельна восі ардынаты. За адзінкавы адрэзак прыміце дзве клеткі сшытка, г. зн. 1 см.

 **11.6.** а) Пабудуйце на каардынатнай плоскасці прамавугольную трапецыю, тры вяршыні якой маюць каардынаты $(-2; -1)$, $(9; -1)$, $(3; 6)$. Запішыце магчымыя каардынаты чацвёртай вяршыні і знайдзіце, чаму роўна вышыня атрыманай трапецыі, калі вядома, што яе сярэдняя лінія паралельна восі абсцыс. За адзінкавы адрэзак прыміце дзве клеткі сшытка, г. зн. 1 см.

б) Пабудуйце на каардынатнай плоскасці прамавугольную трапецыю, тры вяршыні якой маюць каардынаты $(-7; -3)$, $(-7; 2)$, $(3; 0)$. Запішыце магчымыя каардынаты чацвёртай вяршыні і знайдзіце, чаму роўна вышыня атрыманай

трапецыі, калі вядома, што яе сярэдняя лінія паралельна восі ардынаты. За адзінкавы адрэзак прыміце дзве клеткі сшытка, г. зн. 1 см.

11.7. а) Даўжыні бакавых старон прамавугольнай трапецыі адносяцца як $2 : 5$, а іх сума роўна 70 см. Знайдзіце вышыню трапецыі.

б) Даўжыні бакавых старон прамавугольнай трапецыі адносяцца як $3 : 5$, яе вышыня роўна 15 см. Знайдзіце перыметр трапецыі, калі яе сярэдняя лінія роўна 20 см.

11.8. а) У прамавугольнай трапецыі $ABCD$ ($\angle A = 90^\circ$) бакавая старана CD роўна 16 см, рознасць асноў роўна 8 см. Знайдзіце градусную меру вугла BCD .

б) У прамавугольнай трапецыі $ABCD$ ($\angle A = 90^\circ$) бакавая старана CD роўна 14 см, рознасць асноў роўна 7 см. Знайдзіце рознасць градусных мер вуглоў BCD і ADC .

11.9. а) Асновы раўнабедранай трапецыі роўны 5 см і 9 см, востры вугал роўны 60° . Знайдзіце перыметр трапецыі.

б) Сярэдняя лінія раўнабедранай трапецыі роўна 8,5 см, адлегласць паміж сярэдзінамі дыяганалей роўна 2,5 см, перыметр трапецыі роўны 27 см. Знайдзіце градусныя меры вуглоў трапецыі.

11.10. У раўнабедранай трапецыі $ABCD$ вышыня $BH = 5,5$ см, пункт H належыць аснове AD . Перыметр трохвугольніка BCD роўны 27 см, перыметр трохвугольніка ACD роўны 38 см. Знайдзіце вуглы трапецыі.

11.11. У раўнабедранай трапецыі даўжыні бакавых старон роўны даўжыні меншай асновы, а даўжыні дыяганалей — даўжыні большай асновы. Знайдзіце велічыні вуглоў дадзенай трапецыі.

§ 12. Центральная і восевая сіметрыя

12.1. З фігур, показаних на рисунках 135, 1)–9), виберіть те, що:

- а) з'являюцца центральна-сіметрычнымі;
- б) маюць вось (восі) сіметрыі.

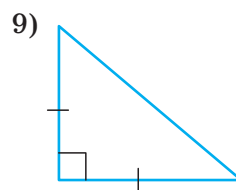
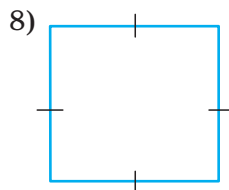
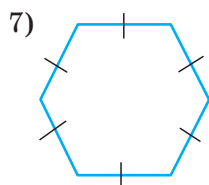
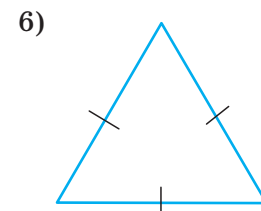
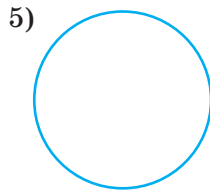
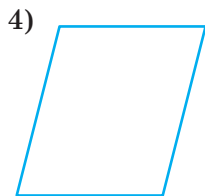
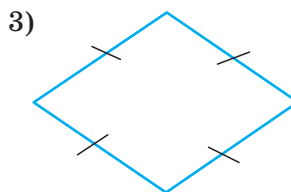
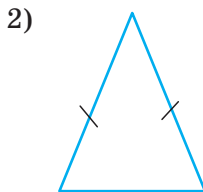
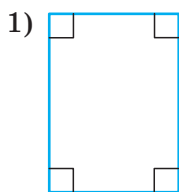


Рис. 135

12.2. З перелічених ніжэй літар виберіть те, що володаюць восевай сіметрыяй. Пакажыце схематычна відарысы гэтых літар і іх восі сіметрыі:

- а) Ф А П Р О Н Е Г Ш Ц З Х;
- б) W I U T V B C J S R N M.

12.3. а) Трохвугольнік ABC раўнабедранны, $\angle ABC = 120^\circ$. Пункт B_1 сіметрычны пункту B адносна прамой AC . Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $ABCB_1$, калі адлегласць паміж пунктамі B і B_1 роўна 6 см.

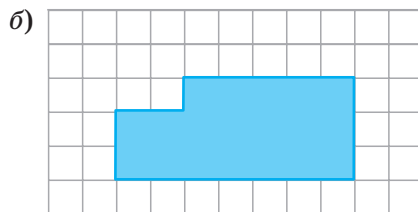
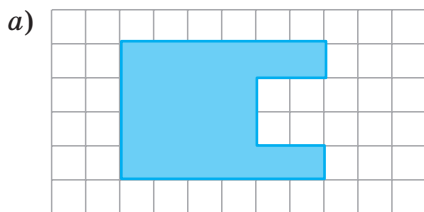
б) Трохвугольнік MNP раўнабедраны, $MN = 12$ см, $\angle MNP = 120^\circ$. Пункт M_1 сіметрычны пункту M адносна прамой NP . Знайдзіце вышыню трохвугольніка MPM_1 .

- 12.4.** а) Вядомы каардынаты трох вяршынь прамавугольніка: $(-2; 7)$, $(-2; -1)$, $(7; 7)$. Намалюйце дадзены прамавугольнік, вызначыўшы каардынаты яго чацвёртай вяршыні, і пабудуйце фігуру, сіметрычную дадзенай адносна восі абсцыс.
- б) Вядомы каардынаты трох вяршынь прамавугольніка: $(-3; 8)$, $(-3; -2)$, $(8; 8)$. Намалюйце дадзены прамавугольнік, вызначыўшы каардынаты яго чацвёртай вяршыні, і пабудуйце фігуру, сіметрычную дадзенай адносна восі ардынаты.

ПЛОШЧЫ МНОГАВУГОЛЬНІКАЎ

§ 13. Плошча квадрата, прамавугольніка

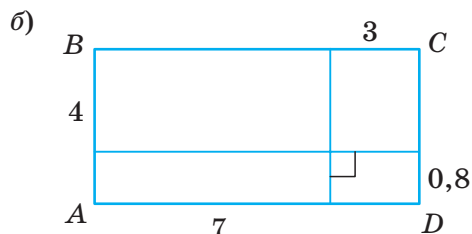
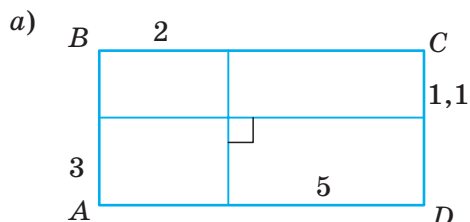
- 13.1.** Знайдзіце плошчы фігур, паказаных на рысунках 136, а), б), калі памер адной клеткі 1×1 см.



Рыс. 136

- 13.2.** а) Знайдзіце плошчу квадрата са стараной 3,2 дм і выразіце яе ў квадратных сантыметрах.
- б) Знайдзіце плошчу квадрата са стараной 2,1 м і выразіце яе ў квадратных сантыметрах.
- 13.3.** а) Знайдзіце перыметр квадрата, плошча якога роўна 64 см^2 .
- б) Знайдзіце плошчу квадрата, перыметр якога роўны 64 см.

13.4. Па даных рысункаў 137, а), б) знайдзіце плошчу прамавугольнага $ABCD$.

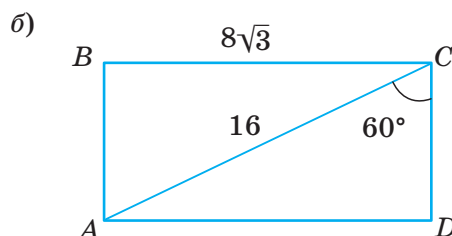
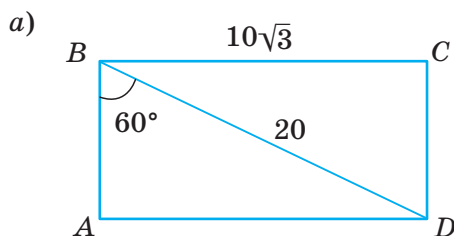


Рыс. 137

13.5. а) Перыметр ромба роўны 84 см, старана квадрата ў 3 разы меншая за старану ромба. Знайдзіце плошчу квадрата.

б) Перыметр квадрата ў 5 разоў большы за перыметр ромба са стараной 3 см. Знайдзіце плошчу квадрата.

13.6. Па даных рысункаў 138, а), б) знайдзіце плошчу прамавугольнага $ABCD$.

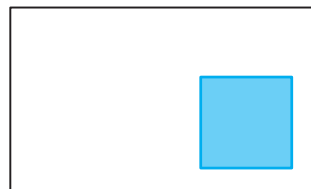


Рыс. 138

13.7. а) Плошча прамавугольнага роўна 126 см^2 , а даўжыні яго старон адносяцца як 2 : 7. Знайдзіце перыметр прамавугольнага.

б) Перыметр прамавугольнага роўны 154 см, а даўжыні яго старон адносяцца як 3 : 4. Знайдзіце плошчу прамавугольнага.

13.8. На рысунку 139 паказаны план садовага ўчастка прамавугольнай формы. У куце ўчастка размешчана квадратная клумба.



Рыс. 139

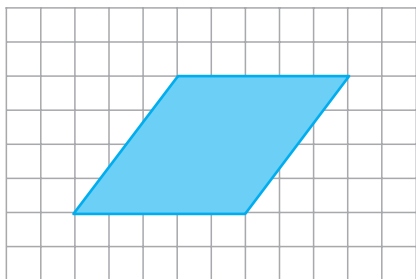
- а) Памеры ўчастка 40×15 м, а плошча клумбы ў 24 разы меншая за плошчу ўсяго ўчастка. Знайдзіце, колькі метраў бардзюрнай стужкі спатрэбіцца, каб аддзяліць ёю клумбу з усіх бакоў.
 б) Каб аддзяліць клумбу з усіх бакоў, спатрэбілася 24 м бардзюрнай стужкі. Якую частку ўчастка займае клумба, калі памеры ўчастка 40×18 м?

-  **13.9.** а) Прамавугольнік плошчай 48 см^2 састаўлены з роўных квадратаў плошчай 4 см^2 кожны. Знайдзіце перыметр прамавугольніка, разгледзьце ўсе магчымыя выпадкі.
 б) Прамавугольнік плошчай 64 см^2 састаўлены з роўных квадратаў перыметрам 8 см кожны. Знайдзіце перыметр прамавугольніка, разгледзьце ўсе магчымыя выпадкі.

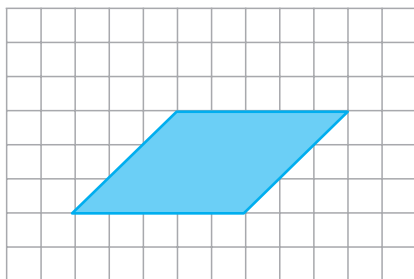
§ 14. Плошча паралелаграма

14.1. Знайдзіце плошчу паралелаграма (рыс. 140, а), б)), калі памер адной клеткі 3×3 см.

а)



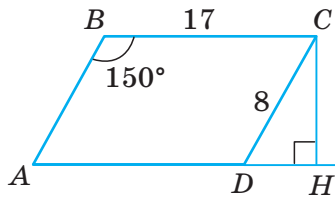
б)



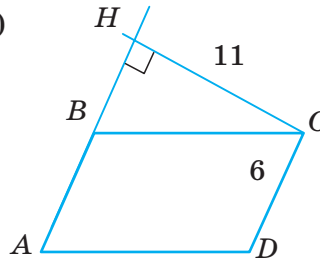
Рыс. 140

14.2. Знайдзіце плошчу паралелаграма $ABCD$ па даных рысункаў 141, а), б).

а)



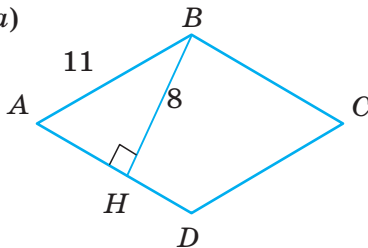
б)



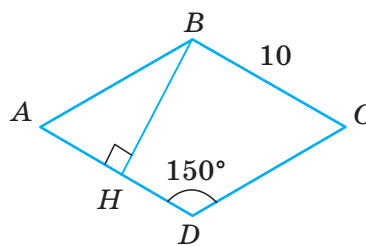
Рыс. 141

14.3. Знайдзіце плошчу ромба $ABCD$, выкарыстаўшы даныя рысункі 142, а), б).

а)



б)



Рыс. 142

14.4. а) Даўжыні старон паралелаграма роўны 8 см і 18 см, адзін з вуглоў роўны 150° . Знайдзіце плошчу паралелаграма.

б) У паралелаграме $ABCD$ праведзена вышыня BH , пункт H належыць адрэзку AD , прычым $BH = 4$ см і $HD = 12$ см, $\angle A = 45^\circ$. Знайдзіце плошчу паралелаграма.

14.5. а) У паралелаграме $ABCD$ праведзена вышыня BH , пункт H належыць адрэзку AD , прычым $AH = 4$ см і $HD = 5$ см. Плошча паралелаграма роўна 36 см^2 . Знайдзіце рознасць градусных мер большага і меншага вуглоў паралелаграма.

б) Плошча паралелаграма роўна 90 см^2 , а стораны — 20 см і 9 см . Знайдзіце рознасць градусных мер большага і меншага вуглоў паралелаграма.

14.6. а) Плошча паралелаграма роўна 24 см^2 , а стораны — 12 см і 4 см . Знайдзіце рознасць вышынь паралелаграма.

б) Плошча паралелаграма роўна 54 см^2 , а вышыні паралелаграма — 3 см і 9 см . Знайдзіце перыметр паралелаграма.

14.7. а) Знайдзіце плошчу ромба, перыметр якога роўны 24 см , а востры вугал — 30° .

б) Знайдзіце перыметр ромба, плошча якога роўна 128 см^2 , а большы вугал — 150° .

14.8. а) Даўжыні дзвюх вышынь паралелаграма роўны 3 см і 4 см , вугал паміж імі роўны 30° . Знайдзіце плошчу паралелаграма.

б) Даўжыні дзвюх вышынь паралелаграма адносяцца як $4 : 5$, вугал паміж імі роўны 30° . Перыметр паралелаграма роўны 72 см . Знайдзіце плошчу паралелаграма.

 **14.9.** а) Пабудуйце на каардынатнай плоскасці паралелаграм, у якога дзве стараны паралельныя восі ардынат і тры вяршыні маюць каардынаты $(2; 5)$, $(6; 8)$, $(2; -7)$. Знайдзіце плошчу атрыманага паралелаграма.

б) Пабудуйце на каардынатнай плоскасці паралелаграм, дзве стараны якога паралельныя восі абсцыс і тры вяршыні маюць каардынаты $(-1; 6)$, $(5; 6)$, $(-5; -1)$. Знайдзіце плошчу атрыманага паралелаграма.

§ 15. Площа трикутника, прямокутного трикутника, ромба

15.1. Знайдіть площу фігури (рис. 143, а)–е), калі памер адной клеткі 1×1 см.

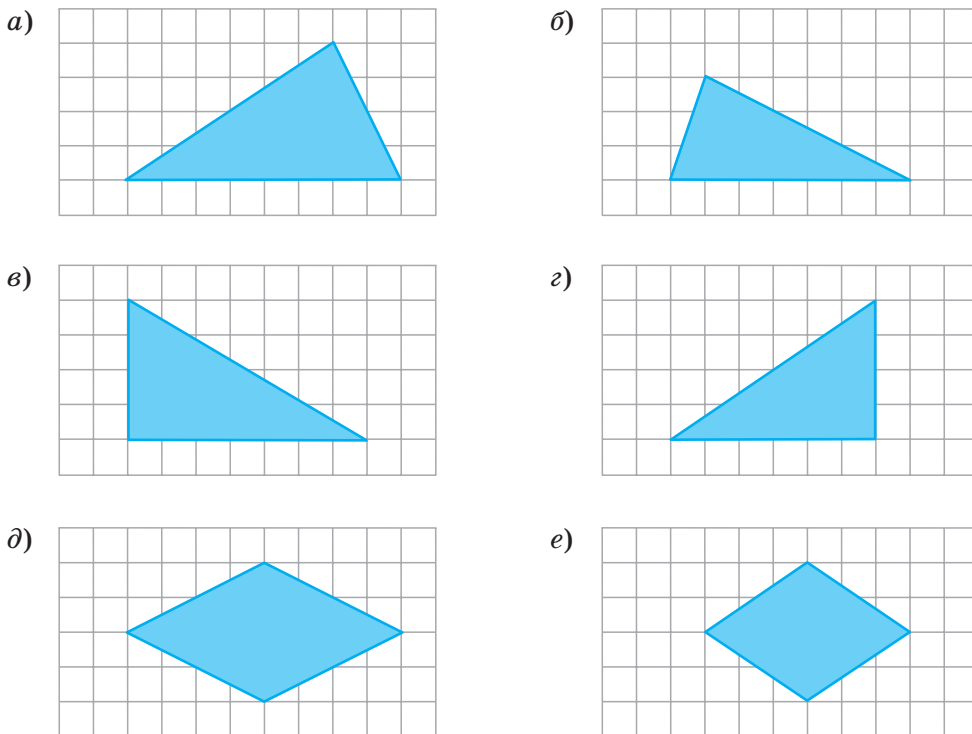


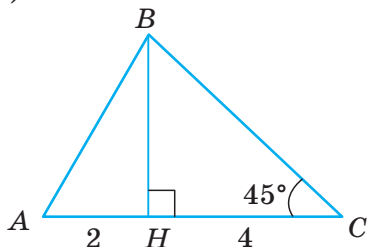
Рис. 143

15.2. а) Площа трикутника роўна 45 см^2 , а адна з яго старон — 10 см . Знайдзіце вышыню трикутника, праведзеную да дадзенай стараны.

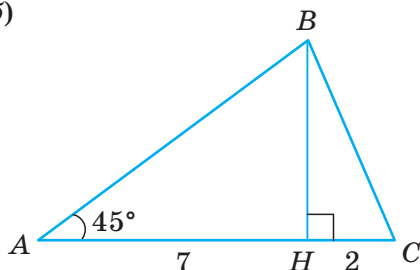
б) Площа трикутника роўна 30 см^2 , вышыня, праведзеная да адной з яго старон, роўна 5 см . Знайдзіце даўжыню гэтай стараны.

15.3. Па даных рысункаў 144, а), б) знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC .

а)



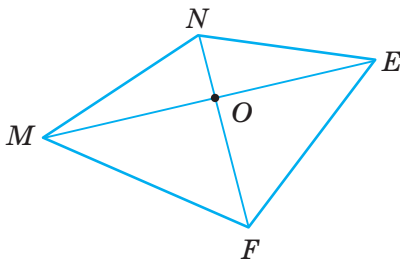
б)



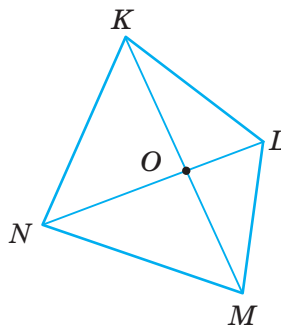
Рыс. 144

15.4. а) На рисунку 145 паказаны выпуклы чатырохвугольнік $MNEF$, у якога стораны $MN = NE$, $MF = FE$, дыяганалі ўзаемна перпендыкулярныя, O — пункт перасячэння дыяганалей, $MO = 5$ см, $NO = 2$ см, $\angle MEF = 45^\circ$. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $MNEF$.

б) На рисунку 146 паказаны выпуклы чатырохвугольнік $KLMN$, у якога стораны $KL = LM$, $MN = KN$, дыяганалі ўзаемна перпендыкулярныя, O — пункт перасячэння дыяганалей, $MO = 4$ см, $LO = 2$ см, $\angle MKN = 45^\circ$. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $KLMN$.



Рыс. 145



Рыс. 146

15.5. а) Знайдзіце плошчу ромба, дыяганалі якога роўны 7 см і 10 см.

б) Знайдзіце даўжыню другой дыяганалі ромба, плошча якога роўна 120 см^2 , а адна з дыяганалей — 10 см .

15.6. а) Дыяганалі ромба плошчай 168 см^2 адносяцца як $3 : 7$. Знайдзіце даўжыню большай дыяганалі ромба.

б) Рознасць даўжынь дыяганалей ромба роўна 9 см , а плошча ромба — 126 см^2 . Знайдзіце даўжыню меншай дыяганалі ромба.

 **15.7.** а) Намалюйце на каардынатнай плоскасці трохвугольнік, вяршыні якога маюць каардынаты $(0; 7)$, $(0; -7)$, $(-4; 0)$. Пабудуйце трохвугольнік, сіметрычны дадзенаму адносна восі ардынат. Знайдзіце плошчу атрыманага чатырохвугольніка.

б) Намалюйце на каардынатнай плоскасці трохвугольнік, вяршыні якога маюць каардынаты $(0; 7)$, $(-6; 0)$, $(6; 0)$. Пабудуйце трохвугольнік, сіметрычны дадзенаму адносна восі абсцыс. Знайдзіце плошчу атрыманага чатырохвугольніка.

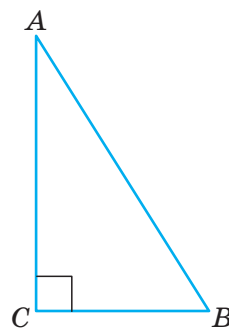
§ 16. Тэарэма Піфагора

16.1. а) У прамавугольным трохвугольніку ABC катэт $AC = 12 \text{ см}$, катэт $BC = 5 \text{ см}$ (рыс. 147). Знайдзіце гіпатэнузу AB .

б) У прамавугольным трохвугольніку ABC (гл. рыс. 147) катэт $AC = 15 \text{ см}$, катэт $BC = 8 \text{ см}$. Знайдзіце гіпатэнузу AB .

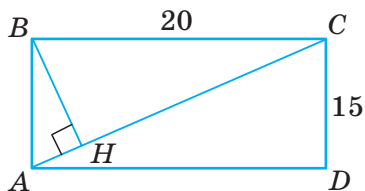
16.2. а) Катэт прамавугольнага трохвугольніка роўны 24 см , а гіпатэнуза — 25 см . Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

б) Катэт прамавугольнага трохвугольніка роўны 15 см , а гіпатэнуза — 17 см . Знайдзіце перыметр трохвугольніка.

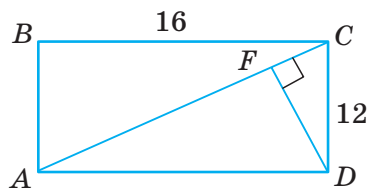


Рыс. 147

- 16.3.** а) Плошча роўнастаронняга трохвугольніка роўна $25\sqrt{3}$ см². Знайдзіце перыметр трохвугольніка.
 б) Перыметр роўнастаронняга трохвугольніка роўны 24 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.
- 16.4.** а) Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 6 см, бакавая старана — 5 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.
 б) Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 10 см, плошча трохвугольніка роўна 60 см². Знайдзіце перыметр трохвугольніка.
- 16.5.** а) У трохвугольніку адносіна велічынь вуглоў роўна $1 : 2 : 3$, а плошча трохвугольніка роўна $32\sqrt{3}$ см². Знайдзіце даўжыню найбольшай стараны трохвугольніка.
 б) У трохвугольніку адносіна велічынь вуглоў роўна $1 : 2 : 3$, а плошча трохвугольніка роўна $18\sqrt{3}$ см². Знайдзіце даўжыню найбольшай стараны трохвугольніка.
- 16.6.** а) Стораны прамавугольніка $ABCD$ роўны 20 см і 15 см, BH — вышыня трохвугольніка ABC (рыс. 148). Знайдзіце даўжыню BH .
 б) Стораны прамавугольніка $ABCD$ роўны 16 см і 12 см, DF — вышыня трохвугольніка ACD (рыс. 149). Знайдзіце даўжыню DF .



Рыс. 148



Рыс. 149

- 16.7.** а) Катэты прамавугольнага трохвугольніка плошчай 39 см² адносяцца як $2 : 3$. Знайдзіце даўжыню вышыні трохвугольніка, праведзенай з вяршыні прамога вугла.

б) Катэты прамавугольнага трохвугольніка плошчай 34 см^2 адносяцца як $1 : 4$. Знайдзіце даўжыню вышыні трохвугольніка, праведзенай з вяршыні прамога вугла.

16.8. а) У трохвугольніку ABC бісектрыса вугла A дзеліць старану BC на роўныя адрэзкі даўжынёй 15 см . Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC , калі яго перыметр роўны 64 см .

б) У трохвугольніку ABC медыяна, праведзеная да стараны AC , з'яўляецца бісектрысай вугла B . Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC , калі яго перыметр роўны 98 см , а даўжыня стараны AC на 2 см меншая за суму даўжынь астатніх старон.

16.9. а) Знайдзіце даўжыню бісектрысы роўнастаронняга трохвугольніка, плошча якога роўна $12\sqrt{3} \text{ см}^2$.

б) Плошча роўнастаронняга трохвугольніка роўна $3\sqrt{3} \text{ см}^2$. Знайдзіце даўжыню медыяны трохвугольніка.

16.10. а) Даўжыня бакавой стараны раўнабедранага трохвугольніка роўна 4 см , вышыня, праведзеная да асновы, роўна $\sqrt{7} \text{ см}$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

б) Даўжыня бакавой стараны раўнабедранага трохвугольніка роўна 6 см , вышыня, праведзеная да асновы, роўна $\sqrt{11} \text{ см}$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

16.11. а) Знайдзіце плошчу раўнабедранага трохвугольніка, бакавая старана якога роўна 18 см , а вугал пры аснове роўны 30° .

б) Знайдзіце плошчу раўнабедранага трохвугольніка, аснова якога роўна 12 см , а вугал пры аснове роўны 30° .

16.12. а) Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка роўна 8 см , яго перыметр роўны 30 см . Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

б) Знайдзіце плошчу раўнабедранага трохвугольніка, бакавая старана якога роўна 9 см , а перыметр — 34 см .

16.13. а) Старана прамавугольнага роўна 11 мм, а дыяганаль — 61 мм. Знайдзіце плошчу прамавугольнага і выразіце яе ў квадратных сантыметрах.

б) Старана прамавугольнага роўна 9 мм, а дыяганаль — 41 мм. Знайдзіце плошчу прамавугольнага і выразіце яе ў квадратных сантыметрах.

16.14. а) У паралелаграме $ABCD$ $AB = 7$ см, $BC = 25$ см, дыяганаль BD перпендыкулярна старане CD . Знайдзіце плошчу паралелаграма.

б) У паралелаграме $ABCD$ $AB = 8$ см, $BC = 17$ см, дыяганаль AC перпендыкулярна старане CD . Знайдзіце плошчу паралелаграма.

16.15. а) Знайдзіце плошчу трохвугольнага, стораны якога роўны 6 см, 8 см і $2\sqrt{7}$ см.

б) Знайдзіце плошчу трохвугольнага, стораны якога роўны 5 см, 7 см і $2\sqrt{6}$ см.

16.16. а) Востры вугал ромба роўны 60° , меншая дыяганаль роўна 10 см. Знайдзіце плошчу ромба.

б) Востры вугал ромба роўны 60° , меншая дыяганаль роўна 12 см. Знайдзіце плошчу ромба.

 **16.17.** а) Стораны трохвугольнага роўны $(a + 3)$ см, $(a + 4)$ см і $(2a - 13)$ см. Перыметр трохвугольнага роўны 30 см. Знайдзіце плошчу трохвугольнага.

б) Стораны трохвугольнага роўны $(a + 3)$ см, $3a$ см і $(3a + 2)$ см. Перыметр трохвугольнага роўны 40 см. Знайдзіце плошчу трохвугольнага.

 **16.18.** а) Знайдзіце даўжыню вышыні прамавугольнага трохвугольнага, апущанай на гіпатэнузу, калі катэты трохвугольнага роўны $(7 + \sqrt{15})$ см і $(7 - \sqrt{15})$ см.

б) Знайдзіце даўжыню вышыні прамавугольнага трохвугольніка, апущанай на гіпатэнузу, калі катэты трохвугольніка роўны $(5 + \sqrt{11})$ см і $(5 - \sqrt{11})$ см.

16.19. а) Знайдзіце плошчу ромба, калі яго перыметр роўны 72 см, а востры вугал — 45° .

б) Знайдзіце плошчу ромба, калі яго перыметр роўны 88 см, а востры вугал — 45° .

16.20. а) Дыяганаль квадрата роўна 10 см. Знайдзіце плошчу квадрата.

б) Плошча квадрата роўна 200 см^2 . Знайдзіце даўжыню дыяганалі квадрата.

 **16.21.** а) У прамавугольны раўнабедраны трохвугольнік упісаны квадрат так, што на гіпатэнузе ляжаць дзве яго вяршыні і на кожным катэце ляжыць па адной вяршыні квадрата. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі плошча квадрата роўна 144 см^2 .

б) У прамавугольны раўнабедраны трохвугольнік упісаны квадрат так, што на гіпатэнузе ляжаць дзве яго вяршыні і на кожным катэце ляжыць па адной вяршыні квадрата. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі плошча квадрата роўна 196 см^2 .

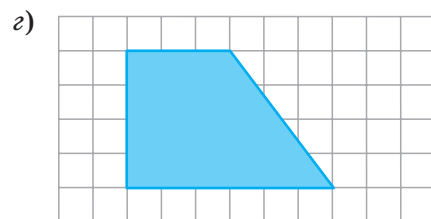
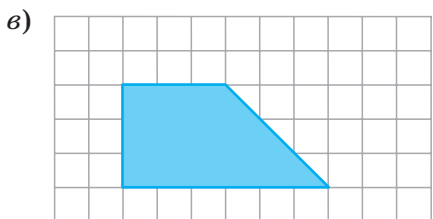
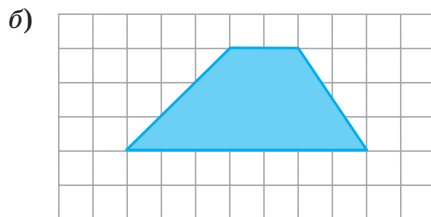
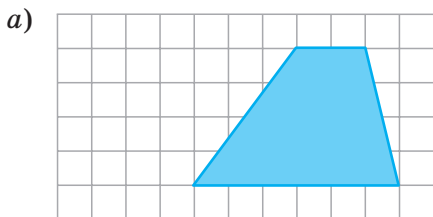
 **16.22.** а) Плошча квадрата роўна $(12 - 8\sqrt{2}) \text{ см}^2$. Знайдзіце суму даўжынь стараны і дыяганалі квадрата.

б) Плошча квадрата роўна $(27 + 18\sqrt{2}) \text{ см}^2$. Знайдзіце рознасць даўжынь дыяганалі і стараны квадрата.

 **16.23.** У прамавугольны трохвугольнік з вострым вуглом 30° упісаны квадрат так, што на гіпатэнузе ляжаць дзве яго вяршыні і на кожным катэце ляжыць па адной вяршыні квадрата. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі плошча квадрата роўна 144 см^2 .

§ 17. Плошча трапецыі

17.1. Знайдзіце плошчу трапецыі (рыс. 150, а)—г)), калі памер адной клеткі 1×1 см.



Рыс. 150

17.2. а) Бакавыя стораны трапецыі роўны 4 см і 7 см, а вышыня — 3 см. Знайдзіце плошчу трапецыі, калі яе перыметр роўны 29 см.

б) Сярэдняя лінія трапецыі роўна 9 см, а вышыня — 2 см. Знайдзіце плошчу трапецыі.

17.3. а) Даўжыні асноў трапецыі знаходзяцца ў адносіне 2 : 5, вышыня трапецыі роўна 9 см, рознасць даўжынь асноў трапецыі роўна 18 см. Знайдзіце плошчу трапецыі.

б) Даўжыні асноў трапецыі знаходзяцца ў адносіне 3 : 7, вышыня трапецыі роўна 11 см. Знайдзіце рознасць даўжынь асноў трапецыі, калі яе плошча роўна 165 см^2 .

17.4. а) Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапецыі, у якой асновы роўны 19 см і 9 см, а бакавая старана роўна 13 см.

б) Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапецыі, у якой меншая аснова роўна 12 см, бакавая старана роўна 17 см, а вышыня — 15 см.

17.5. а) Знайдзіце плошчу прамавугольнай трапецыі, асновы якой роўны 15 см і 8 см, а большая бакавая старана — 25 см.

б) Знайдзіце плошчу прамавугольнай трапецыі, сярэдняя лінія якой роўна 13 см, а меншая бакавая старана — 5 см.

17.6. Знайдзіце плошчу прамавугольнай трапецыі, у якой сярэдняя лінія роўна большай бакавой старане і роўна 10 см, а рознасць асноў — 6 см.

17.7. Дыяганалі трапецыі ўзаемна перпендыкулярныя і роўны 10 см і 16 см. Знайдзіце плошчу трапецыі.

17.8. Дыяганалі раўнабедранай трапецыі ўзаемна перпендыкулярныя. Знайдзіце плошчу трапецыі, калі яе асновы роўны 10 см і 16 см.

17.9. Дыяганалі раўнабедранай трапецыі ўзаемна перпендыкулярныя. Знайдзіце плошчу трапецыі, калі яе сярэдняя лінія роўна 18 см.

17.10. а) Плошча раўнабедранай трапецыі роўна $12\sqrt{3}$ см², даўжыня адной з яе асноў у 2 разы большая за даўжыню другой. Дыяганаль трапецыі з'яўляецца бісектрысай вострага вугла. Знайдзіце перыметр трапецыі.

б) Перыметр раўнабедранай трапецыі роўны 30 см, даўжыня адной з яе асноў у 2 разы меншая за даўжыню другой. Дыяганаль трапецыі з'яўляецца бісектрысай вострага вугла. Знайдзіце плошчу трапецыі.

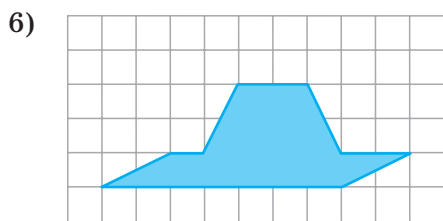
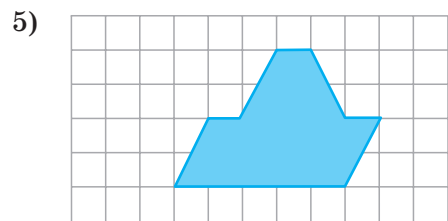
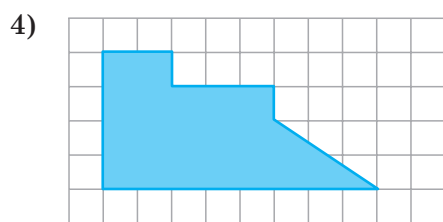
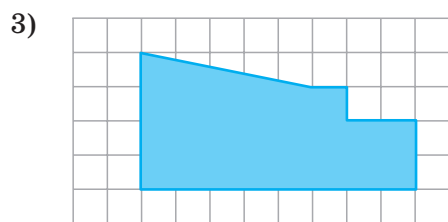
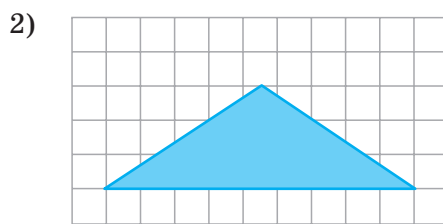
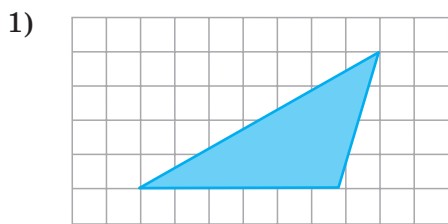
17.11. Знайдзіце перыметр прамавугольнай трапецыі, плошча якой роўна 576 см², большая аснова — 30 см, а вышыня — 24 см.

- 17.12. Знайдзіце плошчу трапецыі, асновы якой роўны 14 см і 15 см, а дыяганалі — 20 см і 21 см.

§ 18. Задачы па тэме «Плошчы многавугольнікаў»

- 18.1. Па даных рысункаў 151, 1)–6) знайдзіце фігуру, плошча якой:

- а) найбольшая; б) найменшая,
і запішыце значэнне гэтай плошчы. Памер адной клеткі 1×1 см.



Рыс. 151

- 18.2. а) Знайдзіце плошчу прамавугольнага трохвугольніка, катэт якога роўны 24 см, а гіпатэнуза — 26 см.

б) Знайдзіце плошчу прамавугольнага трохвугольніка, катэт якога роўны 16 см, а гіпатэнуза — 34 см.

18.3. а) У прамавугольным трохвугольніку адносіна даўжынь катэтаў роўна $2 : 5$, а плошча трохвугольніка роўна 20 см^2 . Знайдзіце даўжыню гіпатэнузы дадзенага трохвугольніка.

б) У прамавугольным трохвугольніку адносіна даўжынь катэтаў роўна $2 : 3$, а плошча трохвугольніка роўна 12 см^2 . Знайдзіце даўжыню гіпатэнузы дадзенага трохвугольніка.

18.4. а) Дыяганаль прамавугольніка роўна 12 см, вугал паміж дыяганаллю і старонай прамавугольніка роўны 30° . Знайдзіце перыметр і плошчу прамавугольніка.

б) Дыяганаль прамавугольніка роўна 18 см, вугал паміж дыяганаллю і старонай прамавугольніка роўны 60° . Знайдзіце перыметр і плошчу прамавугольніка.

 **18.5.** а) У раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік упісаны прамавугольнік так, што адна вяршыня прамавугольніка ляжыць на гіпатэнузе і адзін вугал у фігур агульны. Знайдзіце перыметр прамавугольніка, калі плошча трохвугольніка роўна 18 см^2 .

б) У раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік упісаны прамавугольнік так, што адна вяршыня прамавугольніка ляжыць на гіпатэнузе і адзін вугал у фігур агульны. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі перыметр прамавугольніка роўны 32 см.

 **18.6.** а) Знайдзіце плошчу трохвугольніка, перыметр якога роўны 24 см, а стораны роўны $(a + 1)$ см, $(a + 3)$ см і $2a$ см.

б) Знайдзіце плошчу трохвугольніка, перыметр якога роўны 40 см, а стораны роўны $(a + 1)$ см, $(2a + 1)$ см і $(2a + 3)$ см.

- 18.7.** а) У прамавугольным трохвугольніку з гіпатэнузай $\sqrt{65}$ см адносіна даўжынь катэтаў роўна $2 : 3$. Знайдзіце даўжыню медыяны, праведзенай да меншага катэта дадзенага трохвугольніка.
- б) У прамавугольным трохвугольніку з гіпатэнузай $\sqrt{34}$ см адносіна даўжынь катэтаў роўна $1 : 4$. Знайдзіце даўжыню медыяны, праведзенай да большага катэта дадзенага трохвугольніка.
- 18.8.** а) Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка мае даўжыню 4 см, а бісектрыса, праведзеная да асновы трохвугольніка, роўна $\sqrt{7}$ см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.
- б) Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка мае даўжыню 3 см, а медыяна, праведзеная да асновы трохвугольніка, роўна $\sqrt{5}$ см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.
- 18.9.** а) Знайдзіце перыметр роўнастаронняга трохвугольніка, плошча якога роўна $25\sqrt{3}$ см².
- б) Знайдзіце перыметр роўнастаронняга трохвугольніка, плошча якога роўна $9\sqrt{3}$ см².
- 18.10.** а) Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка роўна 12 см, вугал пры аснове роўны 30° . Знайдзіце плошчу трохвугольніка.
- б) Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка роўна 10 см, вугал пры аснове роўны 30° . Знайдзіце плошчу трохвугольніка.
- 18.11.** а) Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 16 см, вугал пры аснове роўны 45° . Знайдзіце плошчу трохвугольніка.
- б) Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 14 см, вугал пры аснове роўны 45° . Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

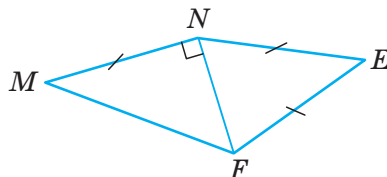
18.12. а) Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 8 см, а бісектрыса, праведзеная да асновы, роўна 9 см. Знайдзіце даўжыню вышыні, праведзенай да бакавой стараны трохвугольніка.

б) Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 10 см, а бісектрыса, праведзеная да асновы, роўна 8 см. Знайдзіце даўжыню вышыні, праведзенай да бакавой стараны трохвугольніка.

 **18.13.** а) Знайдзіце плошчу прамавугольнага трохвугольніка, катэты якога роўны $(x - 1)$ см і $4x$ см, а гіпатэнуза — $(5x - 9)$ см.

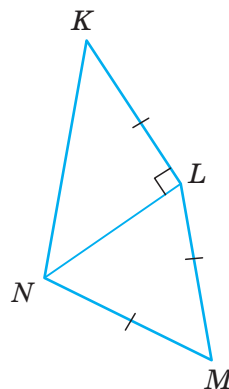
б) Знайдзіце плошчу прамавугольнага трохвугольніка, катэты якога роўны $(x + 2)$ см і $(3x + 5)$ см, а гіпатэнуза — $(3x + 7)$ см.

18.14. а) На рысунку 152 паказаны выпуклы чатырохвугольнік $MNEF$, у якога стараны $MN = NE = EF = 13$ см. Дыяганаль NF даўжынёй 10 см перпендыкулярна старане MN . Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $MNEF$.



Рыс. 152

б) На рысунку 153 паказаны выпуклы чатырохвугольнік $KLMN$, у якога стараны $KL = LM = MN = 17$ см. Дыяганаль LN даўжынёй 16 см перпендыкулярна старане KL . Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $KLMN$.



Рыс. 153

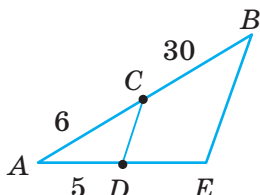
 **18.15.** Знайдзіце даўжыню бакавой стараны раўнабедранага трохвугольніка з вуглом пры аснове 15° , плошча якога роўна 1 см^2 .

ПАДОБНАСЦЬ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ

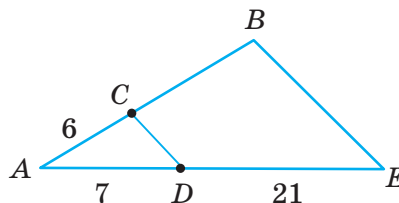
§ 19. Абагульненая тэарэма Фалеса

19.1. а) На рысунку 154 $CD \parallel BE$, $AC = 6$ см, $AD = 5$ см, $CB = 30$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AE .

б) На рысунку 155 $CD \parallel BE$, $AC = 6$ см, $AD = 7$ см, $DE = 21$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB .



Рыс. 154



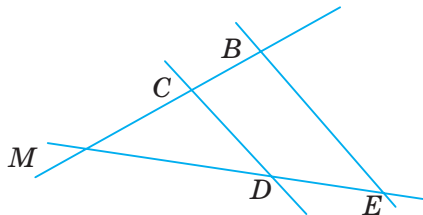
Рыс. 155

19.2. а) Пункт N дзеліць адрэзак AB у адносіне $AN : NB = 5 : 6$. Знайдзіце адносіну $AN : AB$.

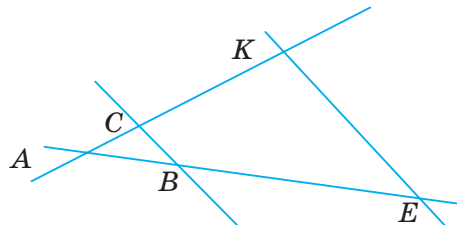
б) Пункт K дзеліць адрэзак AB у адносіне $AK : KB = 7 : 6$. Знайдзіце адносіну $AB : KB$.

19.3. а) На рысунку 156 $CD \parallel BE$, $MB = 20$ см, $MC = 12$ см, $MD = 18$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка DE .

б) На рысунку 157 $CB \parallel KE$, $AB = 6$ см, $AE = 42$ см, $AC = 4$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AK .



Рыс. 156



Рыс. 157

19.4. Па даных рысункаў 158, а), б) знайдзіце градусную меру вугла α .

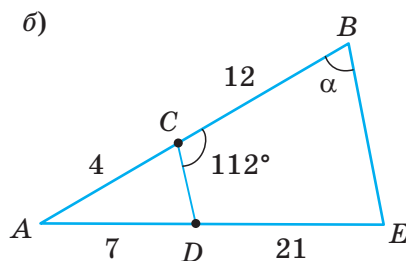
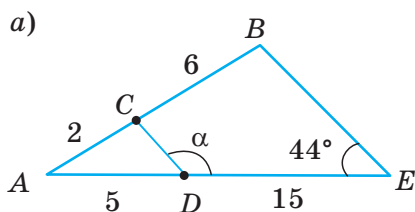


Рис. 158

19.5. Па даных рысункаў 159, а), б) знайдзіце значэнне x .

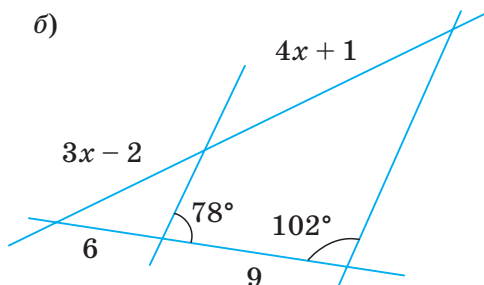
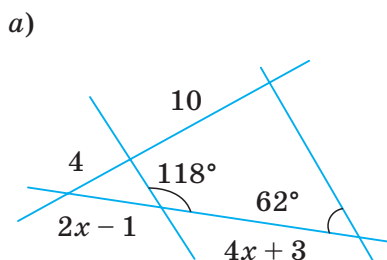


Рис. 159

19.6. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 160 а), б) і ўлічыўшы, што $a \parallel b \parallel c$, знайдзіце значэнне сумы $x + y$.

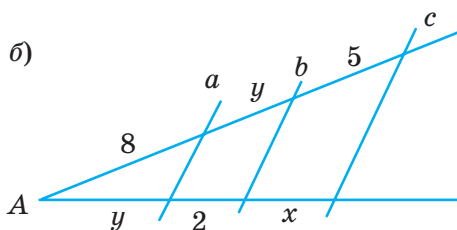
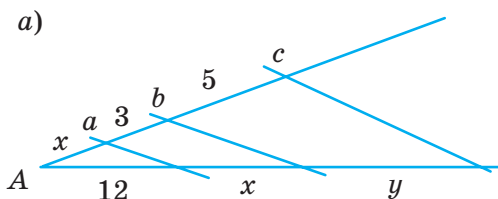


Рис. 160

19.7. а) У трохвугольніку ABC на старане AB адзначаны пункт X так, што адлегласць ад пункта A да пункта X на 3 см большая, чым ад пункта X да пункта B . Праз пункт X праведзена прамая, якая паралельна старане AC трохвугольніка і перасякае старану BC у пункце Y , $BY = 15$ см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC , калі $AB = 21$ см, $AC = 20$ см.

б) У трохвугольніку ABC на старане AC адзначаны пункт K так, што адлегласць ад пункта A да пункта K на 4 см меншая, чым ад пункта K да пункта C . Праз пункт K праведзена прамая, якая паралельна старане AB трохвугольніка і перасякае старану BC у пункце L , $CL = 15$ см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC , калі $AB = 21$ см, $AC = 20$ см.

19.8. а) У трапецыі з асновамі 7 см і 34 см бакавую старану падзялілі на тры роўныя адрэзкі і праз канцы адрэзкаў правялі прамыя, паралельныя асновам. Знайдзіце даўжыні адрэзкаў гэтых прамых, заключаных унутры трапецыі.

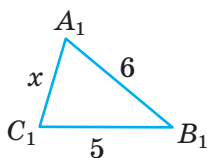
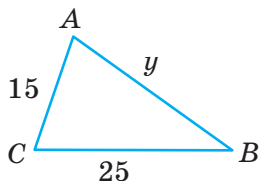
б) У трапецыі з асновамі 8 см і 35 см бакавую старану падзялілі на тры роўныя адрэзкі і праз канцы адрэзкаў правялі прамыя, паралельныя асновам. Знайдзіце даўжыні адрэзкаў гэтых прамых, заключаных унутры трапецыі.

 **19.9.** У трохвугольніку ABC на старане AB адзначаны пункт M так, што $AM = MB$, а на старане BC адзначаны пункт N так, што $BN : NC = 7 : 3$. Знайдзіце адносіну $CO : OM$, дзе O — пункт перасячэння прамых CM і AN .

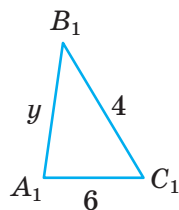
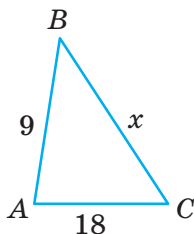
§ 20. Падобнасць трохвугольнікаў

20.1. Трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ падобныя. Па даных рысункаў 161, а), б) знайдзіце значэнне сумы $x + y$.

а)

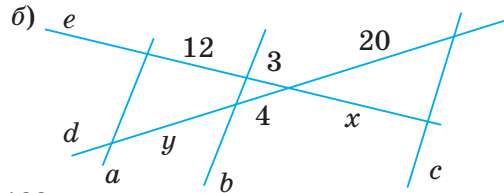
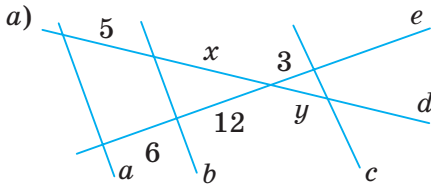


б)



Рыс. 161

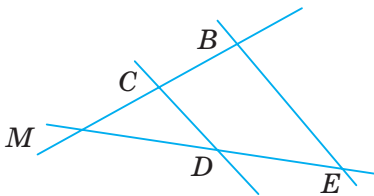
20.2. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 162, а), б) і ўлічыўшы, што $a \parallel b \parallel c$, знайдзіце значэнне сумы $x + y$.



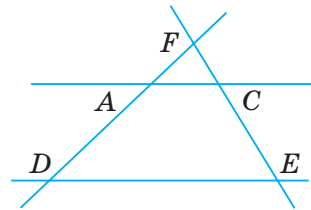
Рыс. 162

20.3. а) На рысунку 163 $CD \parallel BE$, $MB = 20$ см, $BE = 16$ см, $CD = 12$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка CB .

б) На рысунку 164 $AC \parallel DE$, $AC = 6$ см, $FD = 48$ см, $DE = 36$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AD .



Рыс. 163



Рыс. 164

20.4. а) Трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ падобныя. Старана AB роўна 8 см, адпаведная ёй старана A_1B_1 трохвугольніка $A_1B_1C_1$ роўна 24 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка $A_1B_1C_1$, калі перыметр трохвугольніка ABC роўны 17 см.

б) Трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ падобныя. Старана AB роўна 7 см, адпаведная ёй старана A_1B_1 трохвугольніка $A_1B_1C_1$ роўна 21 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC , калі перыметр трохвугольніка $A_1B_1C_1$ роўны 54 см.

20.5. а) Дадзены два падобныя раўнабедраныя трохвугольнікі. Дзве стараны аднаго з іх роўны 5 см і 10 см, а перыметр другога — 75 см. Знайдзіце даўжыню асновы другога трохвугольніка.

б) Дадзены два падобныя раўнабедраныя трохвугольнікі. Дзве стараны аднаго з іх роўны 7 см і 14 см, а перыметр другога — 70 см. Знайдзіце даўжыню асновы другога трохвугольніка.

20.6. а) У трохвугольніку ABC на старане AB адзначаны пункт P і на старане BC адзначаны пункт L так, што $AP = 6$ см, $PB = 4$ см, $PL = 12$ см і $\triangle PBL \sim \triangle ABC$. Знайдзіце даўжыню AC .

б) У трохвугольніку ABC на старане AC адзначаны пункт M і на старане BC адзначаны пункт N так, што $AM = 3$ см, $MC = 21$ см, $MN = 14$ см і $\triangle MNC \sim \triangle ABC$. Знайдзіце даўжыню AB .

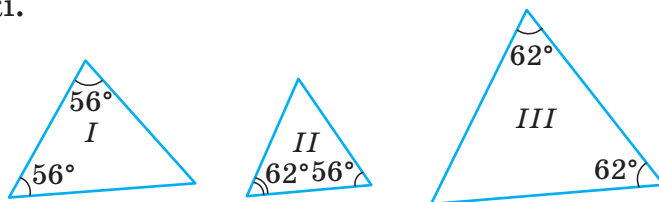
20.7. а) У трапецыі $ABCD$ з асновамі $BC = 2$ см і $AD = 8$ см знайдзіце даўжыню дыяганалі AC , калі вядома, што гэтая дыяганаль дзеліць трапецыю на два падобныя трохвугольнікі.

б) У трапецыі $ABCD$ з асновамі $BC = 3$ см і $AD = 27$ см знайдзіце даўжыню дыяганалі BD , калі вядома, што гэтая дыяганаль дзеліць трапецыю на два падобныя трохвугольнікі.

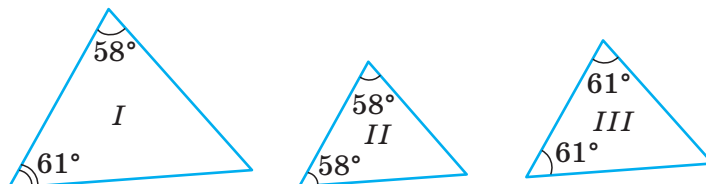
§ 21. Прыметы падобнасці трохвугольнікаў

21.1. Па даных рысункаў 165, а), б) знайдзіце падобныя трохвугольнікі.

а)

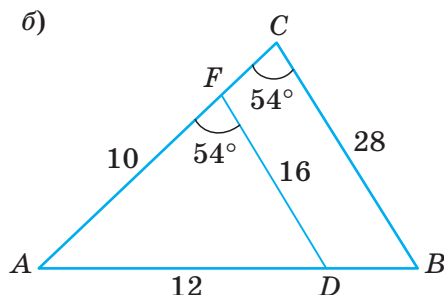
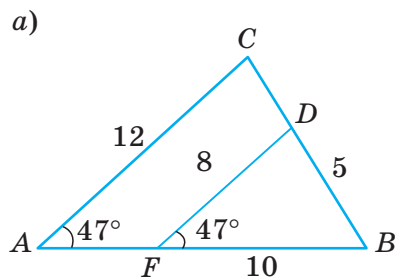


б)



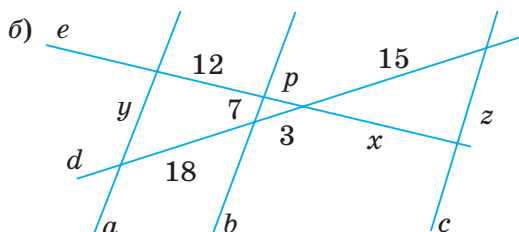
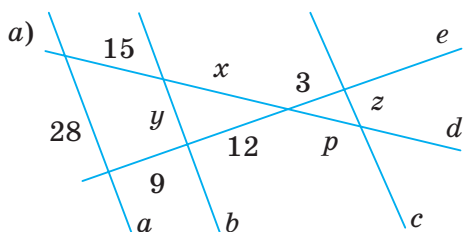
Рыс. 165

21.2. Па даных рысункаў 166, а), б) знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC .



Рыс. 166

21.3. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 167, а), б) і ўлічыўшы, што $a \parallel b \parallel c$, знайдзіце значэнне сумы $x + y + z + p$.

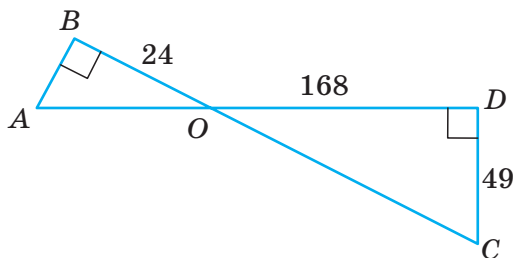


Рыс. 167

21.4. а) У трохвугольніку ABC старана AB падзелена трыма пунктамі на роўныя адрэзкі, праз гэтыя пункты праведзены прамыя, паралельныя старане BC . Знайдзіце даўжыні адрэзкаў гэтых прамых, заключаных унутры трохвугольніка, калі $BC = 24$ см.

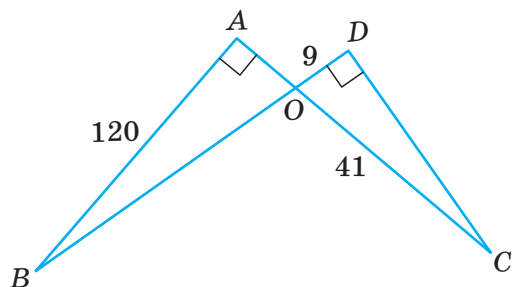
б) У трохвугольніку ABC старана BC падзелена трыма пунктамі на роўныя адрэзкі, праз гэтыя пункты праведзены прамыя, паралельныя старане AC . Знайдзіце даўжыні адрэзкаў гэтых прамых, заключаных унутры трохвугольніка, калі $AC = 18$ см.

21.5. а) Па даных рысунка 168 знайдзіце даўжыню адрэзка AD .



Рыс. 168

б) Па даных рысунка 169 знайдзіце даўжыню адрэзка BD .



Рыс. 169

21.6. а) У прамавугольным трохвугольніку вышыня дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі 18 см і 32 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

б) У прамавугольным трохвугольніку вышыня дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі 8 см і 18 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

21.7. Вяршыні квадрата ляжаць на старанах ромба, а стараны квадрата паралельны дыяганалям ромба. Знайдзіце перыметр квадрата, калі дыяганалі ромба роўны:

а) 8 см і 10 см; б) 10 см і 12 см.

21.8. а) У трапецыі $ABCD$ аснова $BC = 10$ см, а аснова $AD = 30$ см. Дыяганалі трапецыі перасякаюцца ў пункце O , прычым $OC = 6$ см. Знайдзіце даўжыню AC .

б) У трапецыі $ABCD$ аснова $BC = 15$ см, а аснова $AD = 30$ см. Дыяганалі трапецыі перасякаюцца ў пункце O , прычым $OD = 12$ см. Знайдзіце даўжыню BD .

21.9. а) У раўнабедранай трапецыі $ABCD$ аснова $BC = 17$ см, а аснова $AD = 34$ см. Дыяганалі трапецыі перасякаюцца ў пункце O , прычым $OD = 14$ см. Знайдзіце даўжыню AC .

б) У раўнабедранай трапецыі $ABCD$ аснова $BC = 11$ см, а аснова $AD = 33$ см. Дыяганалі трапецыі перасякаюцца ў пункце O , прычым $OC = 8$ см. Знайдзіце даўжыню BD .

21.10. а) У трохвугольніку ABC медыяна BM дзеліцца пунктам K у адносіне $BK : KM = 2 : 3$. Плошча трохвугольніка AKB роўна 30 см^2 . Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC .

б) У трохвугольніку ABC медыяна CN дзеліцца пунктам P у адносіне $2 : 3$, лічачы ад вяршыні C . Плошча трохвугольніка CPN роўна 12 см^2 . Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC .

21.11. а) У трапецыі $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O , $P_{\triangle AOD} = 5P_{\triangle BOC}$. Сярэдняя лінія трапецыі роўна 15 см. Знайдзіце адлегласць паміж сярэдзінамі дыяганалей трапецыі.

б) У трапецыі $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O , $P_{\triangle AOD} = 4P_{\triangle BOC}$. Сярэдняя лінія трапецыі роўна 15 см. Знайдзіце адлегласць паміж сярэдзінамі дыяганалей трапецыі.

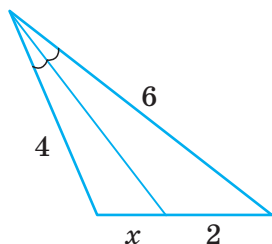
 **21.12.** а) У трохвугольнік з асновай 10 см і вышынёй 8 см упісаны прамавугольнік найбольшай плошчы. Знайдзіце перыметр гэтага прамавугольніка.

б) У трохвугольнік з асновай 20 см і вышынёй 10 см упісаны прамавугольнік найбольшай плошчы. Знайдзіце перыметр гэтага прамавугольніка.

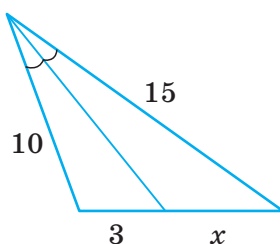
§ 22. Уласцівасць бісектрысы вугла трохвугольніка

22.1. Па даных рысункаў 170, а) — г) знайдзіце значэнне x .

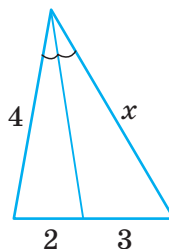
а)



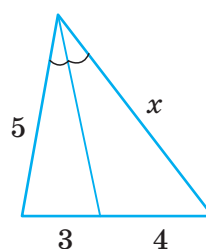
б)



в)



г)



Рыс. 170

22.2. а) У трохвугольніку ABC праведзена вышыня AH . Бісектрыса вугла B дзеліць вышыню AH у адносіне $17 : 8$, лічачы ад пункта A . Знайдзіце даўжыню вышыні AH , калі $AB = 34$ см.

б) У трохвугольніку ABC праведзена вышыня BH . Бісектрыса вугла A дзеліць вышыню BH у адносіне $13 : 5$, лічачы ад пункта B . Знайдзіце даўжыню вышыні BH , калі $AB = 26$ см.

22.3. а) BK — бісектрыса трохвугольніка ABC , яго стораны AB і BC роўны 5 см і 7 см адпаведна, плошча трохвугольніка BKC роўна $\sqrt{6}$ см². Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC .

б) AN — бісектрыса трохвугольніка ABC , яго стораны AB і AC роўны 7 см і 9 см адпаведна, плошча трохвугольніка ABN роўна $3\sqrt{5}$ см². Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC .



22.4. а) Дыяганаль ромба дзеліць яго вышыню, праведзеную з вяршыні тупога вугла, на адрэзкі даўжынямі 26 см і 10 см. Знайдзіце плошчу часткі ромба, заключанай паміж дзвюма вышынямі ромба, апушчанымі з вяршыні аднаго і таго ж тупога вугла.

б) Дыяганаль ромба дзеліць яго вышыню, праведзеную з вяршыні тупога вугла, на адрэзкі даўжынямі 34 см і 16 см. Знайдзіце плошчу часткі ромба, заключанай паміж двума вышынямі ромба, апущанымі з вяршыні аднаго і таго ж тупога вугла.

22.5. а) У прамавугольным трохвугольніку бісектрыса прамога вугла дзеліць адну з медыян на адрэзкі 5 см і 2 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

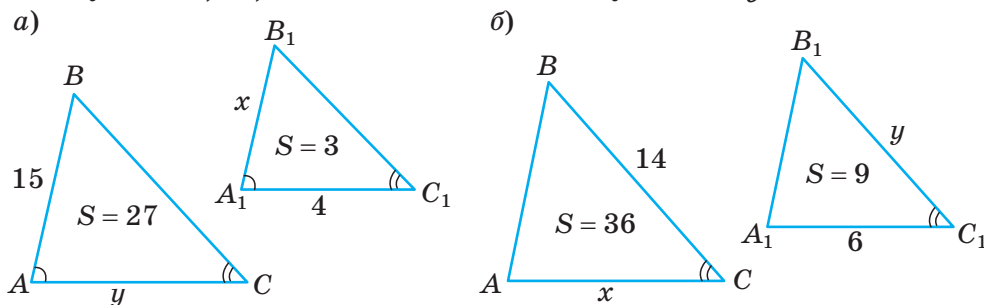
б) У прамавугольным трохвугольніку бісектрыса прамога вугла дзеліць адну з медыян на адрэзкі 4 см і 5 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

 **22.6.** а) Бакавыя стораны трапецыі роўны большай аснове, а дыяганалі дзеляцца пунктам перасячэння ў адносіне 11 : 25. Знайдзіце плошчу трапецыі, калі яе вышыня роўна 24 см.

б) Бакавыя стораны трапецыі роўны меншай аснове, а дыяганалі дзеляцца пунктам перасячэння ў адносіне 17 : 33. Знайдзіце плошчу трапецыі, калі яе вышыня роўна 15 см.

§ 23. Уласцівасць плошчаў падобных трохвугольнікаў

23.1. Трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ падобныя. Па даных рысункаў 171, а), б) знайдзіце значэнне сумы $x + y$.



Рыс. 171

23.2. У трохвугольніку ABC праведзена прамая, паралельная старане BC . Яна дзеліць гэты трохвугольнік на два многавугольнікі з роўнымі плошчамі. Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, заключанага ўнутры трохвугольніка, калі даўжыня стараны BC роўна 12 см.

23.3. а) Перыметры двух падобных трохвугольнікаў адносяцца як $3 : 2$. Плошча меншага трохвугольніка роўна 36 см^2 . Знайдзіце плошчу большага трохвугольніка.

б) Перыметры двух падобных трохвугольнікаў адносяцца як $5 : 3$. Плошча большага трохвугольніка роўна 225 см^2 . Знайдзіце плошчу меншага трохвугольніка.

23.4. а) Плошчы двух падобных трохвугольнікаў адносяцца як $9 : 4$. Перыметр меншага трохвугольніка роўны 72 см. Знайдзіце перыметр большага трохвугольніка.

б) Плошчы двух падобных трохвугольнікаў адносяцца як $16 : 9$. Перыметр большага трохвугольніка роўны 144 см. Знайдзіце перыметр меншага трохвугольніка.

 **23.5.** Трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ падобныя. Стараны трохвугольніка ABC роўны 5 см, 12 см і 13 см. У трохвугольніку $A_1B_1C_1$ вядомы дзве стараны: $\frac{6}{13}$ см, $\frac{1}{2}$ см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка $A_1B_1C_1$.

23.6. а) У трапецыі $ABCD$ аснова BC у 4 разы меншая за аснову AD , дыяганалі перасякаюцца ў пункце O . Знайдзіце плошчу трапецыі, калі плошча трохвугольніка COD роўна 12 см^2 .

б) У трапецыі $ABCD$ аснова AD у 5 разоў большая за аснову BC , дыяганалі перасякаюцца ў пункце O . Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABO , калі плошча трапецыі роўна 108 см^2 .

23.7. а) Вядома, што ў трапецыі $ABCD$ ($AD \parallel BC$) дыяганалі перасякаюцца ў пункце O так, што $AO : OC = 4 : 3$. Знайдзіце плошчу трапецыі, калі плошча трохвугольніка BOC роўна 18 см^2 .

б) Вядома, што ў трапецыі $ABCD$ ($AD \parallel BC$) дыяганалі перасякаюцца ў пункце O так, што $BO : OD = 3 : 5$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка AOD , калі плошча трапецыі роўна 256 см^2 .



§ 24. Задачы па тэме «Падобнасць трохвугольнікаў»

24.1. а) Адносіна перыметраў двух квадратаў роўна $\frac{1}{7}$, а сума іх плошчаў роўна 200 см^2 . Знайдзіце стораны квадратаў.

б) Адносіна плошчаў двух квадратаў роўна $\frac{1}{9}$, а сума іх перыметраў роўна 64 см . Знайдзіце стораны квадратаў.

24.2. Трохвугольнік $A_1B_1C_1$ падобны трохвугольніку ABC з каэфіцыентам падобнасці $\frac{1}{3}$, а трохвугольнік $A_2B_2C_2$ падобны трохвугольніку $A_1B_1C_1$ з каэфіцыентам падобнасці 4 . Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC , калі плошча трохвугольніка $A_2B_2C_2$ роўна 288 .

24.3. а) У трапецыі $ABCD$ AD і BC — асновы, O — пункт перасячэння дыяганалей. Плошча трохвугольніка AOD роўна 288 см^2 , $BC : AD = 3 : 4$. Знайдзіце плошчу трапецыі.

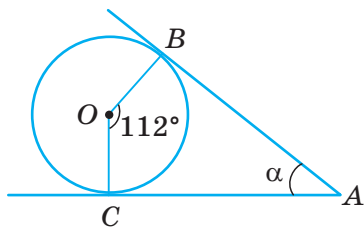
б) У трапецыі $ABCD$ AD і BC — асновы, O — пункт перасячэння дыяганалей. Плошча трохвугольніка BOC роўна 200 см^2 , $BC : AD = 2 : 5$. Знайдзіце плошчу трапецыі.

АКРУЖНАСЦЬ

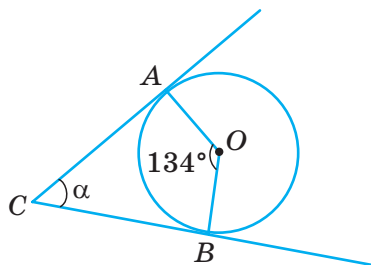
§ 25. Датычная да акружнасці

25.1. Па даных рысункаў 172, а), б) знайдзіце велічыню вугла α паміж двума датычнымі да акружнасці.

а)



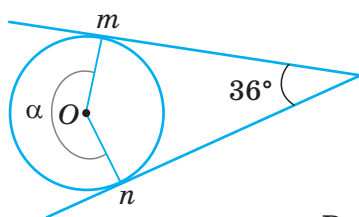
б)



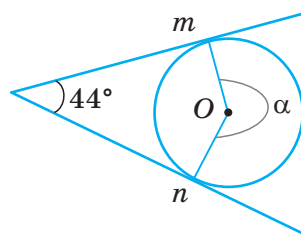
Рыс. 172

25.2. Па даных рысункаў 173, а), б) знайдзіце велічыню вугла α , калі прамыя m і n — датычныя да акружнасці.

а)

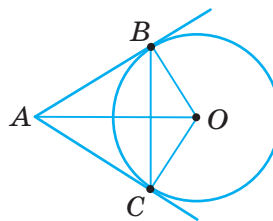
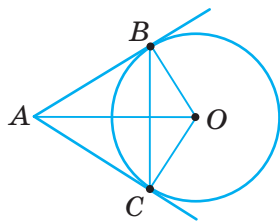


б)



Рыс. 173

25.3. Акружнасць датыкаецца да старон вугла A ў пунктах B і C . Выкарыстаўшы даныя рысункаў 174, а), б), знайдзіце велічыню вугла A .

а) $\angle BCO = 17^\circ$ б) $\angle CBO = 16^\circ$ 

Рыс. 174

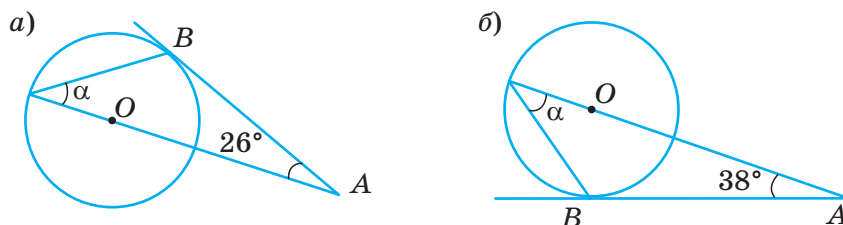
25.4. а) Акружнасць радыусам 10 см датыкаецца да старон вугла A . Знайдзіце адлегласць ад цэнтра акружнасці да вяршыні A , калі $\angle A = 120^\circ$.

б) Акружнасць радыусам 12 см датыкаецца да старон вугла B . Знайдзіце адлегласць ад вяршыні B да пункта дотыку, калі $\angle B = 60^\circ$.

25.5. а) Акружнасць датыкаецца да старон вугла $\angle C = 90^\circ$. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні C да пункта дотыку, калі адлегласць ад пункта C да цэнтра акружнасці роўна 12 см.

б) Акружнасць радыусам 8 см датыкаецца да старон вугла D . Знайдзіце адлегласць ад цэнтра акружнасці да вяршыні D , калі $\angle D = 90^\circ$.

25.6. Прамая AB — датычная да акружнасці. Па даных рысункаў 175, а), б) знайдзіце велічыню вугла α .

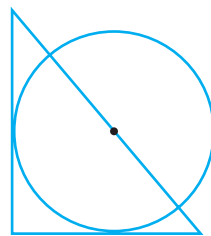


Рыс. 175

25.7. а) Акружнасці радыусамі 3 см і 5 см ляжаць у розных паўплоскасцях ад прамой l і датыкаюцца да гэтай прамой. Адрэзак, які злучае цэнтры акружнасцей, перасякае прамую l пад вуглом 30° . Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей.

б) Акружнасці радыусамі 7 см і 9 см ляжаць у розных паўплоскасцях ад прамой m і датыкаюцца да гэтай прамой. Адрэзак, які злучае цэнтры акружнасцей, перасякае прамую m пад вуглом 30° . Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі дотыку.

- 25.8.** Акружнасць датыкаецца да катэтаў прамавугольнага трохвугольніка, цэнтр акружнасці ляжыць на гіпатэнузе (рыс. 176). Дакажыце, што радыус акружнасці можна знайсці па формуле $\frac{ab}{a+b}$, дзе a і b — катэты прамавугольнага трохвугольніка.



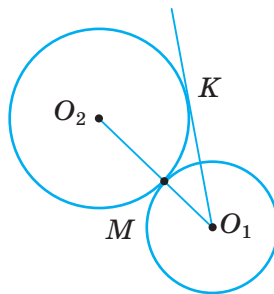
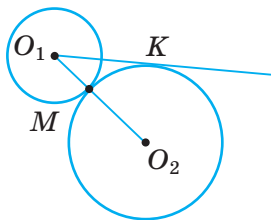
Рыс. 176

§ 26. Узаемнае размяшчэнне акружнасцей

- 26.1.** Па даных рысункаў 177, а), б) знайдзіце адлегласць O_1K , дзе O_1 і O_2 — цэнтры акружнасцей, M — пункт дотыку акружнасцей, прамая O_1K — датычная да акружнасці.

а) $O_1M = 3$ см, $O_2M = 4$ см

б) $O_1M = 4$ см, $O_2M = 5$ см



Рыс. 177

- 26.2.** а) У вугал упісаны дзве акружнасці радыусамі 8 см і 26 см. Адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей роўна 82 см. Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі дотыку, якія належаць адной і той жа старане вугла.
- б) У вугал упісаны дзве акружнасці радыусамі 76 см і 26 см. Адлегласць паміж пунктамі дотыку, якія належаць адной і той жа старане вугла, роўна 120 см. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей.
- 26.3.** а) Да дзвюх акружнасцей радыусамі 5 см і 7 см праведзена агульная датычная, M і N — пункты дотыку. Адлег-

ласць паміж цэнтрамі акружнасцей роўна 14 см. Знайдзіце адлегласць MN , разгледзеўшы ўсе магчымыя выпадкі.

б) Да дзвюх акружнасцей радыусамі 3 см і 4 см праведзена агульная датычная, A і B — пункты дотыку, $AB = 7$ см. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей, разгледзеўшы ўсе магчымыя выпадкі.

26.4. а) Тры акружнасці, радыусы якіх роўны 12 см, 8 см і 4 см, парамі датыкаюцца адна да адной знешнім чынам. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца цэнтры дадзеных акружнасцей.

б) Тры акружнасці, радыусы якіх роўны 2 см, 3 см і 10 см, парамі датыкаюцца адна да адной знешнім чынам. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца цэнтры дадзеных акружнасцей.

§ 27. Цэнтральны і ўпісаны вуглы

27.1. Па даных рысункаў 178, а), б) знайдзіце велічыню вугла α .

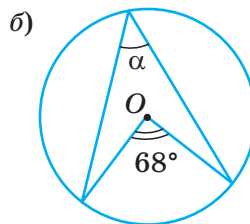
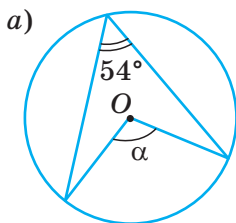


Рис. 178

27.2. Па даных рысункаў 179, а), б) знайдзіце велічыню вугла BAC , улічыўшы, што AC — дыяметр акружнасці.

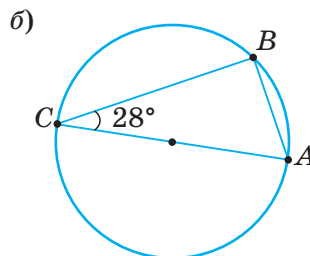
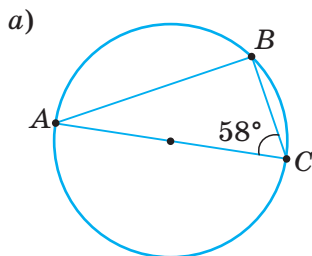
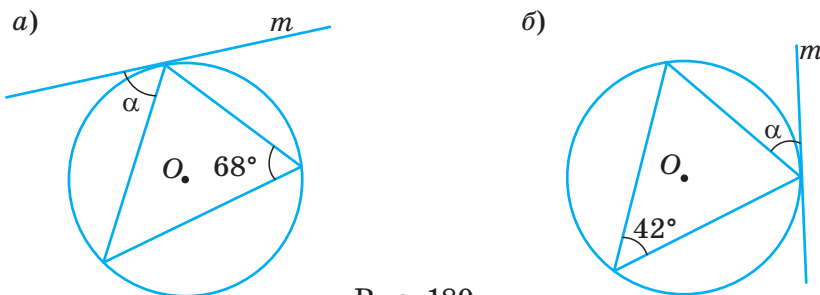


Рис. 179

27.3. Па даных рысункаў 180, а), б) знайдзіце велічыню вугла α , улічыўшы, што прамая m — датычная да акружнасці.



Рыс. 180

27.4. а) Радыус акружнасці роўны 12 см. Знайдзіце даўжыню хорды, якая сцягвае дугу ў 90° .

б) Даўжыня хорды, якая сцягвае дугу ў 60° , роўна 10 см. Знайдзіце радыус дадзенай акружнасці.

27.5. а) Вугал ABC , роўны 45° , упісаны ў акружнасць дыяметрам 12 см і абাপіраецца на дугу AC . Знайдзіце плошчу трохвугольніка AOC , дзе O — цэнтр акружнасці.

б) Вугал MNL , роўны 45° , упісаны ў акружнасць з цэнтрам O і абাপіраецца на дугу ML . Плошча трохвугольніка MOL роўна 32 см^2 . Знайдзіце радыус акружнасці.

 **27.6.** а) Вугал ABC , роўны 30° , упісаны ў акружнасць радыусам 13 см і абাপіраецца на дугу AC . Знайдзіце плошчу трохвугольніка AOC , дзе O — цэнтр акружнасці.

б) Вугал MNL , роўны 30° , упісаны ў акружнасць і абাপіраецца на дугу ML . Плошча трохвугольніка MOL , дзе O — цэнтр акружнасці, роўна $\frac{121\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2$. Знайдзіце дыяметр акружнасці.

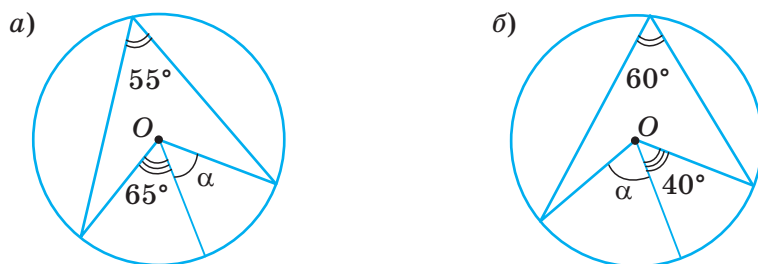
27.7. а) Адлегласць ад цэнтра акружнасці да хорды роўна 24 см, радыус акружнасці роўны 25 см. Знайдзіце даўжыню хорды.

б) Знайдзіце адлегласць ад цэнтра акружнасці радыусам 13 см да хорды, даўжыня якой роўна 10 см.

27.8. а) Центральны вугал AOC на 22° большы за адпаведны ўпісаны вугал ABC . Знайдзіце градусную меру ўпісанага вугла ABC .

б) Упісаны вугал ABC на 28° меншы за адпаведны цэнтральны вугал AOC . Знайдзіце градусную меру цэнтральнага вугла AOC .

27.9. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 181, а), б), знайдзіце градусную меру вугла α .

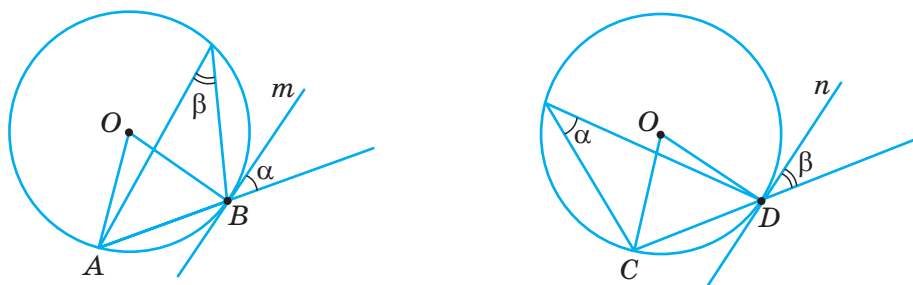


Рыс. 181

27.10. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 182, а), б), знайдзіце суму градусных мер вуглоў α і β .

а) m — датычная,
 $\angle ABO = 61^\circ$

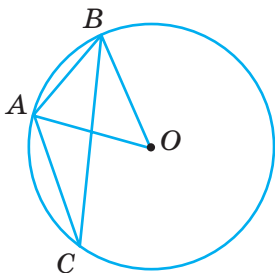
б) n — датычная,
 $\angle DCO = 57^\circ$



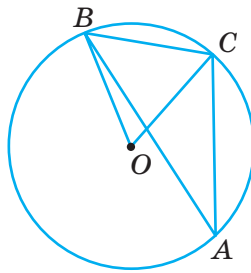
Рыс. 182

27.11. а) Выкарыстаўшы даныя рысунка 183, знайдзіце градусную меру вугла ACB , калі вядома, што $\angle ABO = 72^\circ$.

б) Выкарыстаўшы даныя рысунка 184, знайдзіце градусную меру вугла BAC , калі вядома, што $\angle BCO = 68^\circ$.



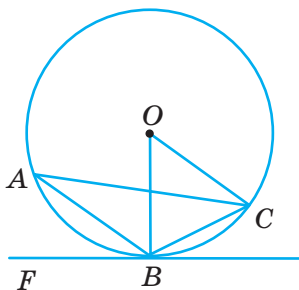
Рыс. 183



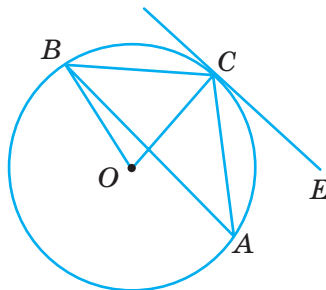
Рыс. 184

27.12. а) Па даных рысунка 185 знайдзіце градусную меру вугла ABC , калі вядома, што $\angle ABF = 30^\circ$, $\angle BOC = 50^\circ$ і BF — датычная да акружнасці.

б) Па даных рысунка 186 знайдзіце градусную меру вугла ACB , калі вядома, што $\angle ACO = 50^\circ$, $\angle BOC = 56^\circ$ і CE — датычная да акружнасці.



Рыс. 185

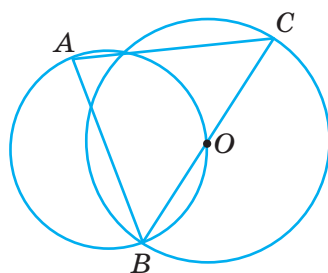


Рыс. 186

27.13. а) З аднаго пункта акружнасці праведзены дзве ўзаемна перпендыкулярныя хорды даўжынямі 5 см і 12 см. Знайдзіце радыус акружнасці.

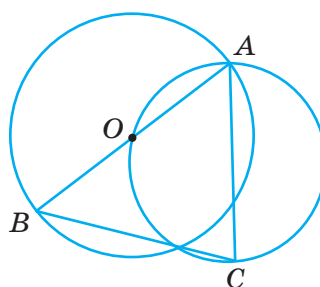
б) З аднаго пункта акружнасці праведзены дзве ўзаемна перпендыкулярныя хорды, даўжыня адной з хорд — 7 см, дыяметр акружнасці роўны 25 см. Знайдзіце даўжыню другой хорды.

27.14. а) Викарыстаўшы даныя рысунка 187, знайдзіце градусную меру вугла ACB , калі вядома, што $\angle ABC = 51^\circ$, адрэзак AC праходзіць праз пункт перасячэння акружнасцей і пункт O — цэнтр акружнасці большага радыуса.



Рыс. 187

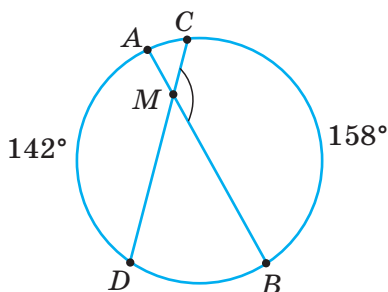
б) Викарыстаўшы даныя рысунка 188, знайдзіце градусную меру вугла ACB , калі вядома, што $\angle BAC = 49^\circ$, адрэзак BC праходзіць праз пункт перасячэння акружнасцей і пункт O — цэнтр акружнасці большага радыуса.



Рыс. 188

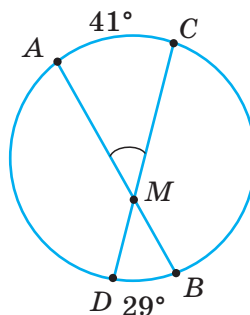
§ 28. Вуглы, утвораныя хордамі, сякучымі і датычнымі

28.1. а) Викарыстаўшы даныя рысунка 189, знайдзіце градусную меру вугла BMC , калі $\sphericalangle AD = 142^\circ$, $\sphericalangle BC = 158^\circ$.



Рыс. 189

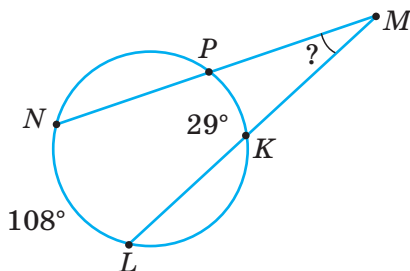
б) Викарыстаўшы даныя рысунка 190, знайдзіце градусную меру вугла AMC , калі $\sphericalangle AC = 41^\circ$, $\sphericalangle DB = 29^\circ$.



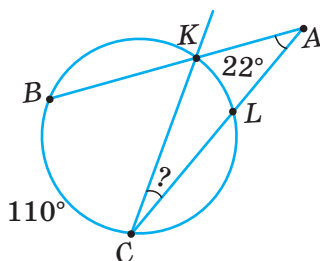
Рыс. 190

28.2. а) Выкарыстаўшы даныя рысунка 191, знайдзіце градусную меру вугла NML , калі $\cup NL = 108^\circ$, $\cup PK = 29^\circ$.

б) Выкарыстаўшы даныя рысунка 192, знайдзіце градусную меру вугла LCK , калі $\cup BC = 110^\circ$, $\angle BAC = 22^\circ$.

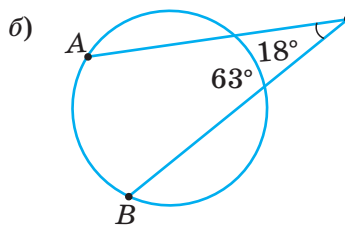
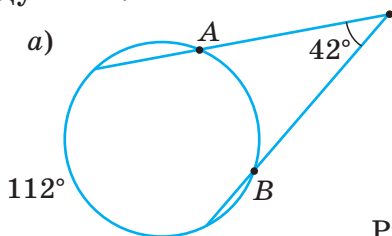


Рыс. 191



Рыс. 192

28.3. Па даных рысункаў 193, а), б) знайдзіце градусную меру дугі AB .

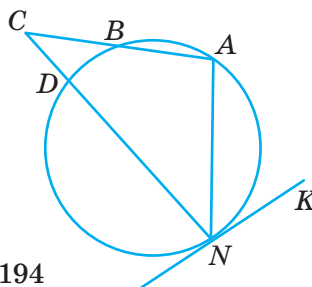
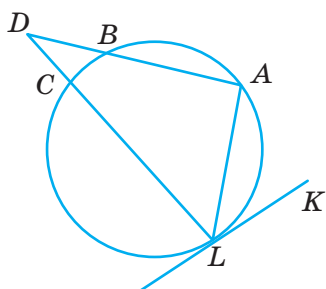


Рыс. 193

28.4. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 194, а), б), знайдзіце велічыню шуканага вугла.

а) $\angle ALK = 44^\circ$,
 LK — датычная,
 $\cup BC = 22^\circ$; $\angle BDC$ — ?

б) $\angle BCD = 38^\circ$,
 NK — датычная,
 $\cup BD = 28^\circ$; $\angle ANK$ — ?



Рыс. 194

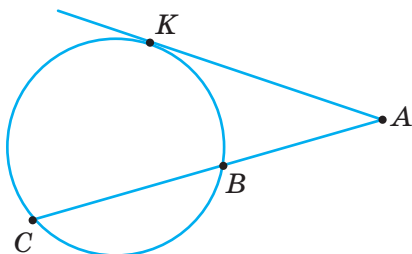
28.5. а) Вершини трикутника ABC лежать на окружности с центром O . У пункте C проведена дотычная да окружности, якая перасякаецца з прамой AB у пункте D . Знайдзіце велічыню вугла ADC , калі $\angle ACB = 80^\circ$, $\angle ABC = 70^\circ$.

б) Вершини трикутника MNL лежать на окружности с центром O . У пункте L проведена дотычная да окружности, якая перасякаецца з прамой MN у пункте K . Знайдзіце велічыню вугла MKL , калі $\angle MON = 140^\circ$, $\angle LON = 160^\circ$.

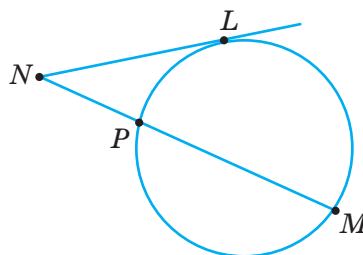
§ 29. Уласцівасць адрэзкаў хорд і дотычных

29.1. а) AK — дотычная да окружности (K — пункт дотыку). Знайдзіце AB , калі $AK = 6$ см, $BC = 9$ см (рыс. 195).

б) NL — дотычная да окружности (L — пункт дотыку). Знайдзіце NP , калі $NL = 10$ см, $PM = 21$ см (рыс. 196).



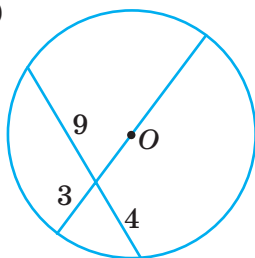
Рыс. 195



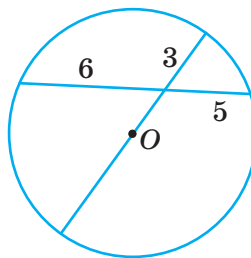
Рыс. 196

29.2. Па даных рысункаў 197, а), б) знайдзіце радыус окружности.

а)

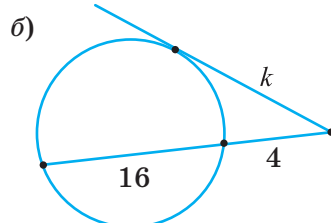
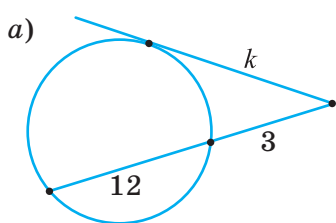


б)



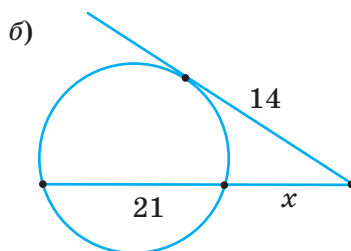
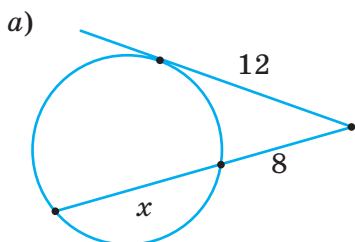
Рыс. 197

29.3. Па даных рысункаў 198, а), б) знайдзіце значэнне k .



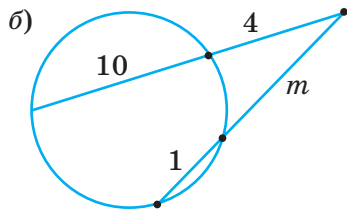
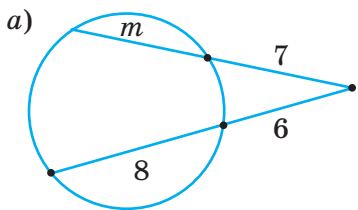
Рыс. 198

29.4. Па даных рысункаў 199, а), б) знайдзіце значэнне x .



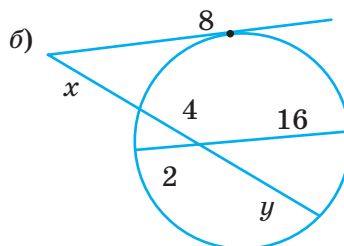
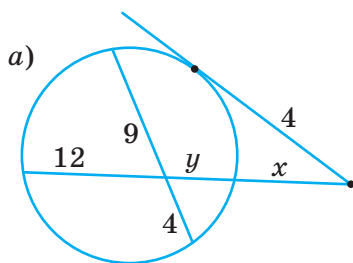
Рыс. 199

29.5. Па даных рысункаў 200, а), б) знайдзіце значэнне m .

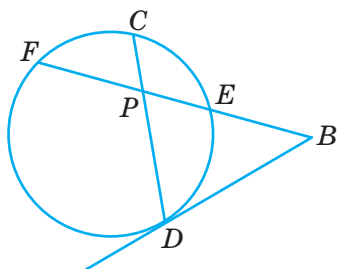


Рыс. 200

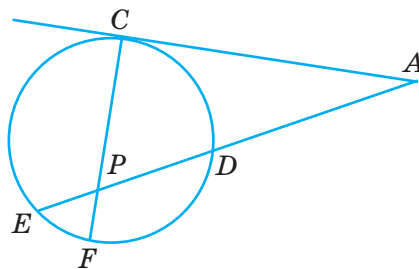
29.6. Па даных рысункаў 201, а), б) знайдзіце значэнне сумы $x + y$.



Рыс. 201



Рыс. 202

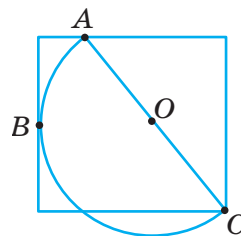


Рыс. 203

29.7. а) З пункта B да акружнасці праведзены датычная BD і сякучая BF (рыс. 202). З пункта дотыку D праведзена хорда CD , якая перасякае хорду FE ў пункце P . Адрэзак FP на 2 см большы за адрэзак PE , $EB = 8$ см, $CP = 2$ см, $PD = 12$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка датычнай BD .

б) З пункта A да акружнасці праведзены датычная AC і сякучая AE (рыс. 203). З пункта дотыку C праведзена хорда CF , якая перасякае хорду ED у пункце P . Адрэзак EP на 3 см меншы за адрэзак PD , $CP = 9$ см, $PF = 2$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AD , калі даўжыня адрэзка датычнай AC роўна 20 см.

29.8. Пункты A , B і C належаць старанам квадрата, плошча якога роўна 100 см^2 . Паўакружнасць дыяметрам AC датыкаецца да стараны квадрата ў пункце B (рыс. 204). Знайдзіце даўжыню AC .



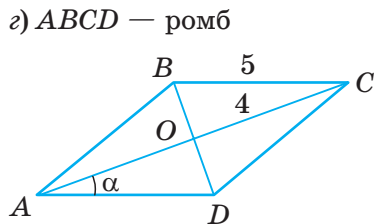
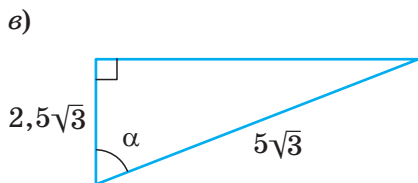
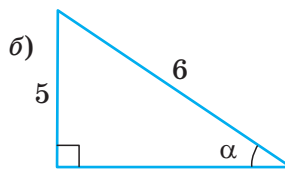
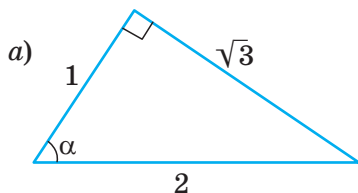
Рыс. 204

9 клас

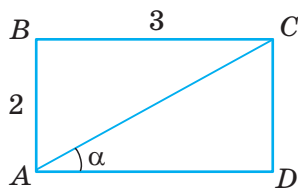
СУАДНОСІНЫ Ў ПРАМАВУГОЛЬНЫМ ТРОХВУГОЛЬНІКУ

§ 1. Сінус, косінус, тангенс і катангенс вострага вугла

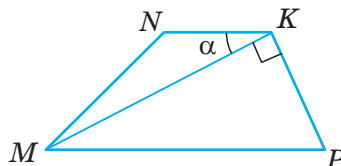
1.1. Па даных рысункаў 205, а)–е) знайдзіце $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.



д) $ABCD$ — прамавугольнік



е) $MNKP$ — трапецыя,
 $MP \parallel NK$, $MP : KP = 3 : 1$



Рыс. 205

1.2. а) У прамавугольным трохвугольніку медыяна, праведзеная да гіпатэнузы, роўна 1,2 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі сінус аднаго з вострых вуглоў гэтага трохвугольніка роўны $\frac{2}{3}$.

б) У прамавугольным трохвугольніку медыяна, праведзеная да гіпатэнузы, роўна 1,4 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі косінус аднаго з вострых вуглоў гэтага трохвугольніка роўны $\frac{3}{7}$.

1.3. а) Стораны трохвугольніка роўны $4\sqrt{3}$ см, $2\sqrt{5}$ см і $2\sqrt{7}$ см. Знайдзіце сінус, косінус, тангенс і катангенс найменшага вугла трохвугольніка.

б) Стораны трохвугольніка адносяцца як $1:\sqrt{5}:\sqrt{6}$. Знайдзіце сінус, косінус, тангенс і катангенс найменшага вугла трохвугольніка.

1.4. а) Стораны прамавугольніка адносяцца як 5 : 12. Знайдзіце косінус большага вострага вугла паміж дыяганаллю прамавугольніка і яго стараной.

б) Дыяганаль прамавугольніка адносіцца да адной з яго старон як 17 : 8. Знайдзіце косінус меншага вострага вугла паміж дыяганаллю прамавугольніка і яго стараной.

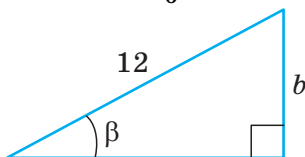
 1.5. а) Дакажыце, што $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, выкарыстаўшы прамавугольны трохвугольнік, адзін з вуглоў якога роўны 30° .

б) Дакажыце, што $\operatorname{tg} 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$, выкарыстаўшы раўнабедранны прамавугольны трохвугольнік.

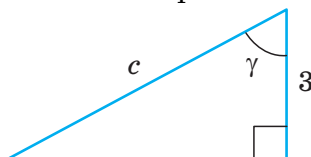
§ 2. Рашэнне прамавугольнага трохвугольніка

2.1. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 206, а)–г), знайдзіце невідомую велічыню.

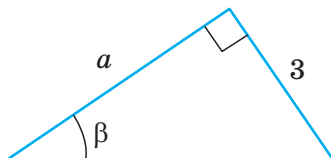
а) $\sin \beta = \frac{5}{6}$; $b = ?$



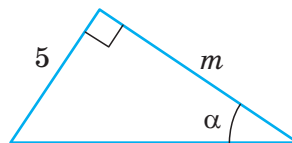
б) $\cos \gamma = \frac{3}{4}$; $c = ?$



в) $\operatorname{tg} \beta = 0,6$; $a = ?$

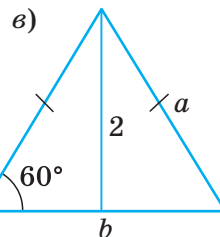
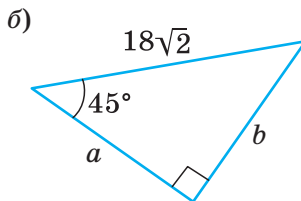
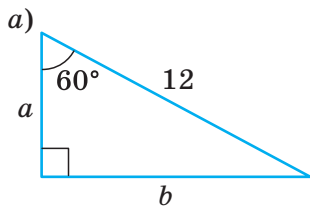


г) $\operatorname{ctg} \alpha = 1\frac{1}{3}$; $m = ?$



Рыс. 206

2.2. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 207, а)–в), знайдзіце даўжыні адрэзкаў a і b .



Рыс. 207

2.3. а) Тангенс вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка роўны $\frac{2}{9}$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі яго гіпатэнуза роўна $2\sqrt{85}$ см.

б) Катангенс вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка роўны $\frac{2}{3}$. Знайдзіце гіпатэнузу трохвугольніка, калі яго плошча роўна 39 см^2 .

2.4. а) Тангенс вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка роўны $\frac{4}{3}$, гіпатэнуза роўна 10 см. Знайдзіце медыяну трохвугольніка, праведзеную з вяршыні меншага вострага вугла.

б) Косінус вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка роўны $\frac{12}{13}$, гіпатэнуза роўна 26 см. Знайдзіце медыяну трохвугольніка, праведзеную з вяршыні большага вострага вугла.

2.5. а) Плошча прамавугольніка роўна $3\sqrt{3}$ см², а яго дыяганаль дзеліць вугал прамавугольніка ў адносіне 1 : 2. Знайдзіце перыметр прамавугольніка.

б) Тангенс аднаго з вострых вуглоў, на якія дыяганаль прамавугольніка дзеліць яго вугал, роўны 0,4. Знайдзіце плошчу прамавугольніка, калі яго перыметр роўны $14\sqrt{2}$ см.

 **2.6.** а) У трохвугольніку ABC $\angle C = 90^\circ$, $\operatorname{tg} \angle A = 1$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC , калі яго перыметр роўны $(12 + 6\sqrt{2})$ см.

б) У трохвугольніку MKC $\angle K = 90^\circ$, $\operatorname{ctg} \angle C = 1$. Знайдзіце перыметр трохвугольніка MKC , калі яго плошча роўна 25 см².

2.7. а) Знайдзіце плошчу ромба, калі яго старана роўна 12 см, а сінус вострага вугла роўны $\frac{1}{3}$.

б) Старана ромба роўна 15 см, а яго плошча — 45 см². Знайдзіце сінус вострага вугла ромба.

2.8. а) Велічыні двух вуглоў раўнабедранага тупавугольнага трохвугольніка адносяцца як 1 : 4. Меншая вышыня трохвугольніка роўна 2 см. Знайдзіце яго большую вышыню.

б) Велічыні вуглоў трохвугольніка адносяцца як 1 : 4 : 1. Большая вышыня трохвугольніка роўна 6 см. Знайдзіце меншую старану гэтага трохвугольніка.

- 2.9.** Унутры роўнастаронняга трохвугольніка ABC адзначаны адвольны пункт T , з якога апущаны перпендыкуляры TH , TE , TK на стораны AB , BC і AC адпаведна. Дакажыце, што $AN + BE + CK = BH + CE + AK$.
- 2.10.** Стораны трапецыі адносяцца як $1 : 1 : 1 : 2$. Дакажыце, што ў гэтай трапецыі востры вугал роўны 60° і дыяганаль перпендыкулярна бакавой старане.
- 2.11.** а) Асновы раўнабедранай трапецыі роўны a і b ($b > a$). Дакажыце, што плошча трапецыі роўна $\frac{b^2 - a^2}{4} \operatorname{tg} \beta$, дзе β — вугал пры большай аснове трапецыі.
 б) Меншая аснова раўнабедранай трапецыі роўна a , а бакавая старана — c . Дакажыце, што плошча трапецыі роўна $(ac + c^2 \cdot \cos \gamma) \sin \gamma$, дзе γ — востры вугал трапецыі.
- 2.12.** У раўнабедранай трапецыі з узаемна перпендыкулярнымі дыяганалямі бакавая старана роўна m , а востры вугал — β . Дакажыце, што плошча трапецыі роўна $m^2 \sin^2 \beta$.
- 2.13.** Дакажыце, што калі β і α — вострыя вуглы прамавугольнага трохвугольніка, то $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$.

§ 3. Трыганаметрычныя формулы

- 3.1.** а) Няхай α — востры вугал і $\sin \alpha = \frac{8}{17}$. Знайдзіце $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.
 б) Няхай α — востры вугал і $\cos \alpha = \frac{24}{25}$. Знайдзіце $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.
- 3.2.** а) Выберыце правільныя роўнасці:
 1) $\sin 14^\circ = \cos 14^\circ - 1$;
 2) $\cos^2 23^\circ 12' = 1 - \sin^2 23^\circ 12'$;

3) $\operatorname{tg} 67^{\circ} \cdot \operatorname{ctg} 65^{\circ} = 1$;

4) $\cos 88^{\circ} = \sqrt{1 - \sin^2 88^{\circ}}$;

5) $\operatorname{tg} 2^{\circ} = \frac{1}{\operatorname{ctg} 2^{\circ}}$.

б) Выберите правильные равенства:

1) $\sin^2 19^{\circ} = 1 - \cos^2 19^{\circ}$;

2) $\operatorname{tg} 85^{\circ} 42' \cdot \operatorname{ctg} 85^{\circ} 42' = 1$;

3) $\operatorname{tg}^2 6^{\circ} + \operatorname{ctg}^2 6^{\circ} = 1$;

4) $\cos 54^{\circ} 4' = \sqrt{1 - \sin^2 54^{\circ}}$;

5) $\operatorname{tg} 32^{\circ} = \frac{1}{\operatorname{ctg} 30^{\circ}}$.

3.3. а) Знайдіть довшину меншого катета прямокутного трикутника да гіпотенузы, коли тангенс одного з кутів трикутника дорівнює $4\sqrt{5}$.

б) Знайдіть довшину меншого катета прямокутного трикутника да більшого, коли синус одного з кутів трикутника дорівнює $\frac{2\sqrt{5}}{25}$.

3.4. а) Висота ромба дорівнює $10\sqrt{2}$ см, а тангенс гострого кута ромба дорівнює $\frac{5}{12}$. Знайдіть периметр ромба.

б) Периметр ромба дорівнює $24\sqrt{5}$ см, знайдіть висоту ромба, коли косинус гострого кута ромба дорівнює $\frac{2}{3}$.

§ 4. Синус, косинус, тангенс і котангенс тупого кута

4.1. При заміні формул $\sin(180^{\circ} - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^{\circ} - \alpha) = -\cos \alpha$, $\operatorname{tg}(180^{\circ} - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(180^{\circ} - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ виразіть

значэнні трыганаметрычных функцый тупога вугла праз трыганаметрычныя функцыі вострага вугла:

а) $\sin 165^\circ$, $\cos 95^\circ$, $\operatorname{tg} 109^\circ$, $\operatorname{ctg} 123^\circ$;

б) $\sin 98^\circ$, $\cos 178^\circ$, $\operatorname{tg} 101^\circ$, $\operatorname{ctg} 145^\circ$.

4.2. Вядома, што $\alpha + \beta = 180^\circ$. Знайдзіце вугал α і $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, калі:

а) $\operatorname{ctg} \beta = \sqrt{3}$;

б) $\operatorname{ctg} \beta = 1$.

 **4.3.** Вылічыце:

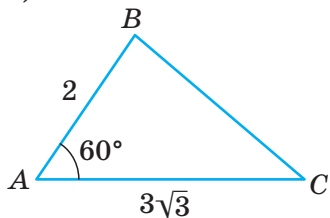
а) $\sin 180^\circ + \cos 0^\circ \cdot \cos 180^\circ - \sin 90^\circ$;

б) $\cos 180^\circ - \sin 90^\circ \cdot \cos 0^\circ - \sin 0^\circ$.

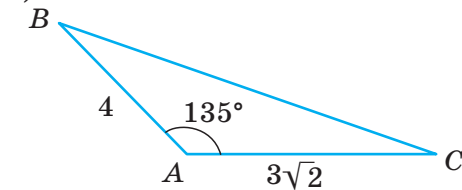
§ 5. Формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма

5.1. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC , выкарыстаўшы даныя рысункаў 208, а)–з).

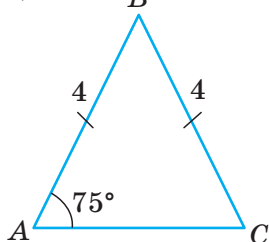
а)



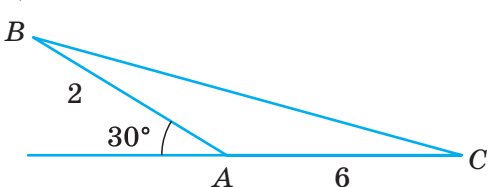
б)



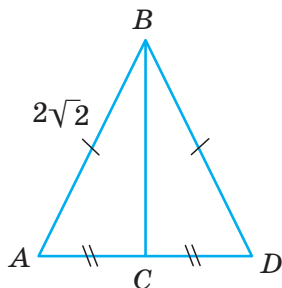
в)



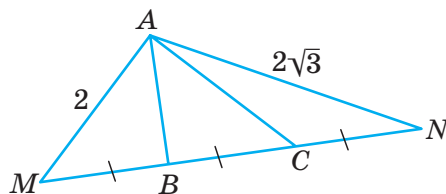
г)



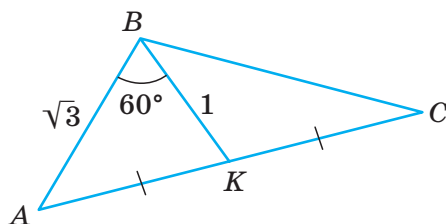
д) $\angle ABD = 45^\circ$



е) $\angle MAN = 120^\circ$



ж)



з) $\sin \angle ABD = \frac{3}{8}$

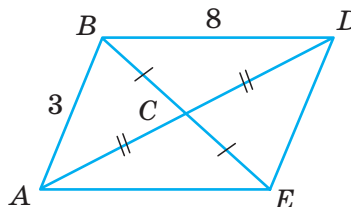


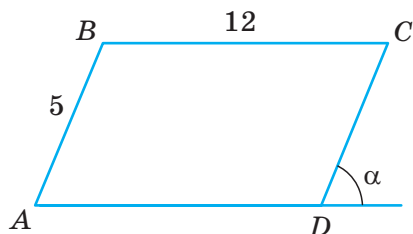
Рис. 208

5.2. а) Дзве стараны трохвугольніка роўны 8 см і 5 см, а косінус вугла паміж імі роўны $-0,5$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

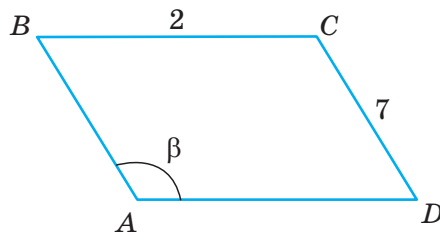
б) Плошча трохвугольніка роўна $1,5 \text{ см}^2$, а дзве яго стараны — 2 см і 3 см. Знайдзіце вугал паміж гэтымі старанамі.

5.3. Знайдзіце плошчу паралелаграма $ABCD$, выкарыстаўшы даныя рысункаў 209, а)—д).

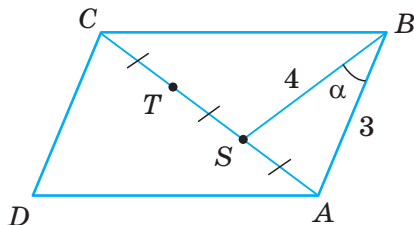
а) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$



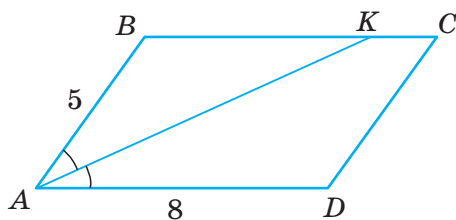
б) $\cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$е) \sin \alpha = \frac{1}{6}$$



$$з) S_{\triangle ABK} = 6$$



д)

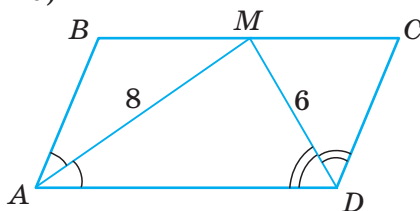


Рис. 209

5.4. а) Вуглы паралелаграма адносяцца як $1 : 5$, а яго стораны — як $5 : 9$. Знайдзіце плошчу паралелаграма, калі яго перыметр роўны 56 см.

б) Адзін вугал паралелаграма на 90° большы за другі, плошча паралелаграма роўна $4\sqrt{2}$ см². Знайдзіце перыметр паралелаграма, калі адна з яго старон на 2 см большая за другую.

5.5. а) Косінус вугла паралелаграма роўны $-\frac{1}{4}$, а яго стораны — $\sqrt{15}$ см і 20 см. Знайдзіце старану квадрата, роўнавялікага дадзенаму паралелаграму.

б) Квадрат са стараной $4\sqrt{3}$ см і паралелаграм са старанамі 18 см і $2\sqrt{2}$ см роўнавялікія. Знайдзіце косінус тупога вугла паралелаграма.

5.6. а) Медіаны AP і CE трикутника ABC пересікаються в пункті O , кут AOE дорівнює 30° . Знайдіть площу трикутника ABC , коли $AP = 12$ см, $CE = 9$ см.

б) Медіаны AP і CE трикутника ABC пересікаються в пункті O , кут AOC дорівнює 135° . Знайдіть площу трикутника ABC , коли $AP = 6\sqrt{2}$ см, $CE = 15$ см.

5.7. а) Периметр ромба дорівнює 20 см, а синус кута ромба дорівнює 0,4. Знайдіть площу ромба.

б) Площа ромба дорівнює 80 см^2 , а синус кута ромба дорівнює 0,8. Знайдіть периметр ромба.

5.8. а) Знайдіть площу прямокутника, у якого діагональ дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а кут між діагоналями дорівнює 45° .

б) Площа прямокутника дорівнює $4\sqrt{2} \text{ см}^2$. Знайдіть діагональ прямокутника, коли кут між діагоналями дорівнює 45° .

5.9. Знайдіть площу прямокутника $NMKP$, показаного на рисунку 210.

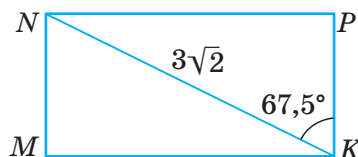


Рис. 210

5.10. а) Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$, показаного на рисунку 211, коли $AC = 6$, $BD = 10$, $\alpha = 120^\circ$.

б) Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$, показаного на рисунку 212, коли $AC = 4$, $BD = 6$, $\cos \beta = -0,8$.

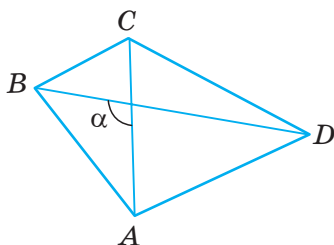


Рис. 211

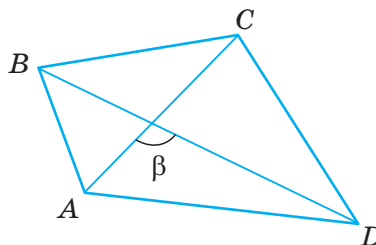
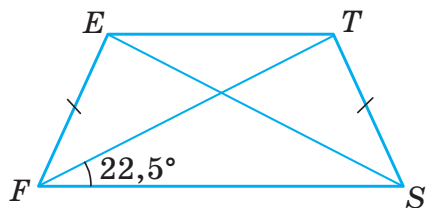


Рис. 212

5.11. На рысунку 213 паказана трапецыя $FETS$. Знайдзіце яе плошчу, калі $SE = 2\sqrt{2}$.

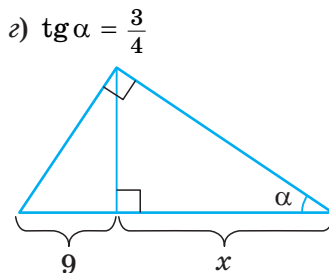
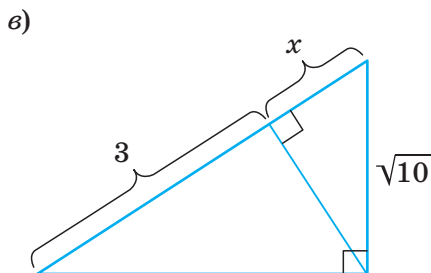
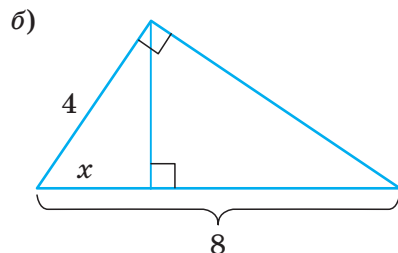
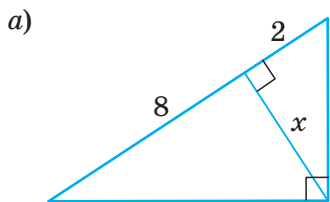
5.12. Дыяганалі трапецыі роўны n і m і ўтвараюць з адной з асноў вуглы α і β . Дакажыце, што плошча трапецыі роўна $0,5mn \sin(\alpha + \beta)$.



Рыс. 213

§ 6. Сярэдняе прапарцыянальнае (сярэдняе геаметрычнае) у прамавугольным трохвугольніку

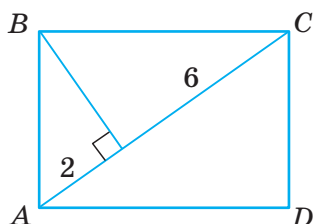
6.1. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 214, а)–г), знайдзіце даўжыню адрэзка x .



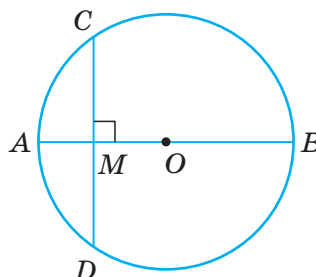
Рыс. 214

6.2. а) Выкарыстаўшы даныя рысунка 215, знайдзіце старану CD прамавугольнага $ABCD$.

б) AB — діаметр акружнасці з цэнтрам O , $CD = 8$, $AM = 2$ (рыс. 216). Знайдзіце OB .



Рыс. 215



Рыс. 216

6.3. а) Даўжыня перпендыкуляра TE , праведзенага з пункта T акружнасці да яе дыяметра AB , роўна $2\sqrt{5}$. Знайдзіце даўжыні хорд TA і TB , калі радыус акружнасці роўны 6.

б) З пункта P акружнасці праведзены перпендыкуляр PK да яе дыяметра BC , $BK = 4$, $KC = 8$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка BPC .

6.4. а) Адзін катэт прамавугольнага трохвугольніка роўны $2\sqrt{5}$, а праекцыя другога катэта на гіпатэнузу — $2\frac{2}{3}$. Знайдзіце другі катэт трохвугольніка.

б) Праекцыі катэтаў на гіпатэнузу прамавугольнага трохвугольніка адносяцца як $2 : 3$, меншы катэт роўны $2\sqrt{10}$. Знайдзіце большы катэт трохвугольніка.

 **6.5.** а) У прамавугольным трохвугольніку MPK MT — вышыня да гіпатэнузы, $PT = x$, $TK = y$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка PTE , дзе пункт E — сярэдзіна катэта MP .

б) BD — вышыня прамавугольнага трохвугольніка ABC , $AD = m$, $BD = p$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка BDK , дзе DK — медыяна трохвугольніка DBC .

6.6. а) У прамавугольным трохвугольніку бісектрыса, праведзеная да гіпатэнузы, дзеліць яе ў адносіне $2 : 3$. У якой адносіне дзеліць гіпатэнузу вышыня трохвугольніка?

б) Вышыня прамавугольнага трохвугольніка дзеліць гіпатэнузу ў адносіне $4 : 25$. У якой адносіне дзеліць гіпатэнузу бісектрыса прамога вугла трохвугольніка?

6.7. а) Востры вугал прамавугольнага трохвугольніка роўны 30° , а вышыня, праведзеная да гіпатэнузы, роўна n . Знайдзіце гіпатэнузу.

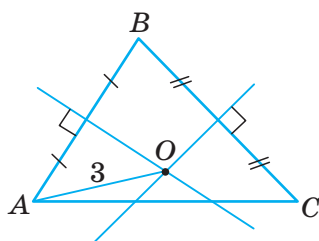
б) Востры вугал прамавугольнага трохвугольніка роўны 30° , а праекцыя большага катэта на гіпатэнузу роўна k . Знайдзіце гіпатэнузу.

УПІСАНЫЯ І АПІСАНЫЯ АКРУЖНАСЦІ

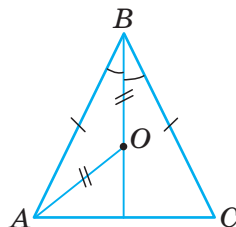
§ 7. Апісаная і ўпісаная акружнасці трохвугольніка

7.1. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 217, а), б), знайдзіце даўжыню адрэзка OC .

а)



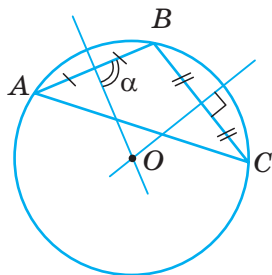
б) $AO = OB = 6$



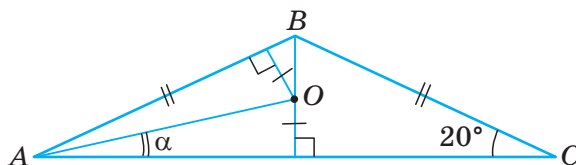
Рыс. 217

7.2. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 218, а), б), знайдзіце вугал α .

а) $OA = OB = OC$



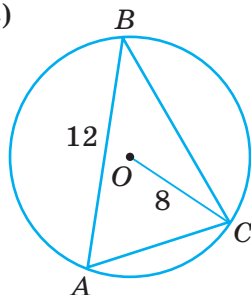
б)



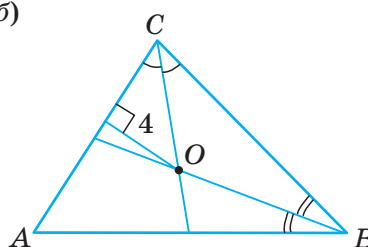
Рыс. 218

7.3. Знайдзіце адлегласць ад пункта O да прамой AB , выкарыстаўшы даныя рысункаў 219, а), б).

а)



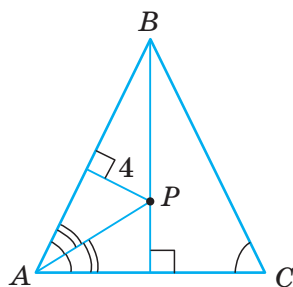
б)



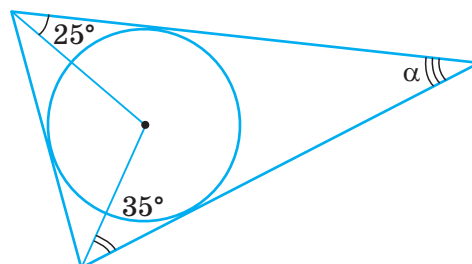
Рыс. 219

7.4. а) Знайдзіце адлегласць ад пункта P да прамой BC , выкарыстаўшы даныя рысунка 220.

б) Знайдзіце вугал α , выкарыстаўшы даныя рысунка 221.

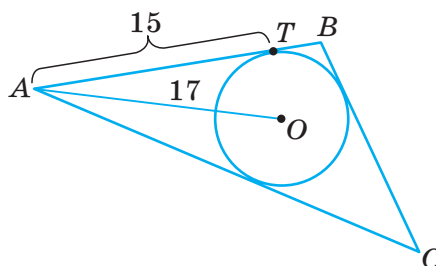


Рыс. 220



Рыс. 221

7.5. а) T — пункт дотыку ўпісанай у трохвугольнік ABC акружнасці са стараной AB (рыс. 222). Знайдзіце адлегласць ад цэнтра акружнасці O да прамой AC .



Рыс. 222

б) Знайдзіце вугал β , выкарыстаўшы даныя рысунка 223.

7.6. а) O — цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC . Выкарыстаўшы даныя рысунка 224, знайдзіце радыус акружнасці і старану BC трохвугольніка.

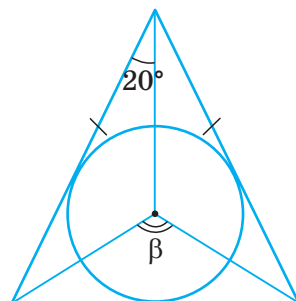


Рис. 223

б) O — цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC . Выкарыстаўшы даныя рысунка 225, знайдзіце адлегласць ад цэнтра акружнасці да стараны AB трохвугольніка і радыус акружнасці.

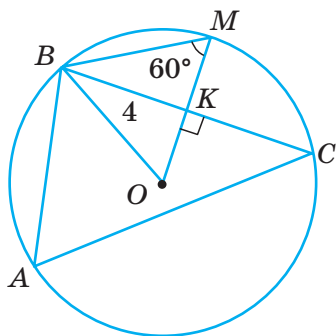


Рис. 224

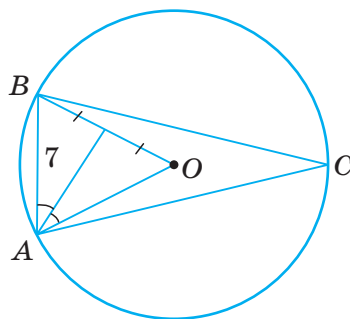


Рис. 225

7.7. а) Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка роўна 6 см, а сінус вугла пры аснове роўны $\frac{2}{3}$. Знайдзіце радыус апісанай каля трохвугольніка акружнасці.

б) Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка роўна 8 см, а радыус апісанай каля трохвугольніка акружнасці — $5\frac{1}{3}$ см. Знайдзіце сінус вугла пры аснове трохвугольніка.

7.8. а) Пункт O знаходзіцца на адлегласці 13 см ад усіх вяршынь трохвугольніка ABC і на адлегласці 5 см ад стараны AB . Знайдзіце старану AB .

б) Пункт P роўнаадалены ад усіх вяршынь трохвугольніка ABK . Адлегласць ад пункта P да стараны AB роўна 8 см, $AB = 30$ см. Знайдзіце AP .

7.9. а) Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка роўна 14 см, вышыня, праведзеная да асновы, роўна $6\sqrt{5}$ см. Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі дотыку ўпісанай у трохвугольнік акружнасці да яго бакавых старон.

б) Сінус вугла пры аснове раўнабедранага трохвугольніка роўны $\frac{\sqrt{15}}{4}$, а яго бакавая старана — 16 см. Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі дотыку ўпісанай у трохвугольнік акружнасці да бакавых старон трохвугольніка.

7.10. а) Перыметр трохвугольніка роўны 18 см, а яго плошча — $3\sqrt{15}$ см². Знайдзіце радыус упісанай у трохвугольнік акружнасці.

б) Плошча трохвугольніка роўна $24\sqrt{6}$ см², а радыус упісанай у яго акружнасці — $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка.

7.11. а) Упісаная ў роўнастаронні трохвугольнік ABC акружнасць радыусам 2 см перасякае вышыню BH трохвугольніка ABC у пункце P . Праз пункт P праведзена прамая, паралельная старане AC , якая перасякае стараны трохвугольніка ў пунктах K і E . Знайдзіце перыметр трохвугольніка BKE .

б) У роўнастаронні трохвугольнік MNR упісана акружнасць, якая перасякае вышыню NT трохвугольніка MNR у пункце O . Праз пункт O перпендыкулярна NT праведзена прамая, якая перасякае стараны трохвугольніка MNR у пунктах A і B . Перыметр трохвугольніка ANB роўны 12 см. Знайдзіце радыус упісанай у трохвугольнік MNR акружнасці.

7.12. а) Каля трохвугольніка ABC ($\angle A = 45^\circ$) апісана акружнасць з цэнтрам O . Адлегласць ад пункта O да стараны BC роўна 15 см. Знайдзіце радыус апісанай акружнасці.

б) Каля трохвугольніка ABC ($\angle A = 45^\circ$) апісана акружнасць з цэнтрам O . Плошча трохвугольніка BOC роўна 10 см^2 . Знайдзіце радыус апісанай акружнасці.

7.13. а) O — цэнтр упісанай у трохвугольнік ABC акружнасці. $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$. Плошча трохвугольніка AOB роўна 24. Знайдзіце плошчы трохвугольнікаў BOC і AOC .

б) Акружнасць з цэнтрам O і радыусам $\frac{\sqrt{15}}{3}$ упісана ў трохвугольнік ABC , у якім $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$. Плошча трохвугольніка AOB роўна $\frac{2\sqrt{15}}{3}$. Знайдзіце стараны BC і AC .

 **7.14.** а) У трохвугольнік ABC са старанамі $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 12$ упісана акружнасць, якая датыкаецца да старон трохвугольніка ў пунктах M , K , P адпаведна. Знайдзіце найменшы з адрэзкаў AM , BK , CP .

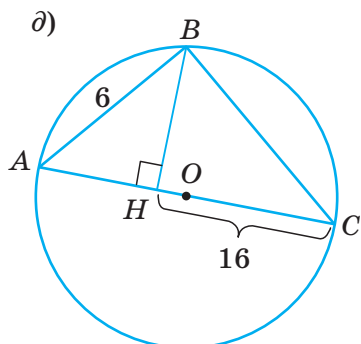
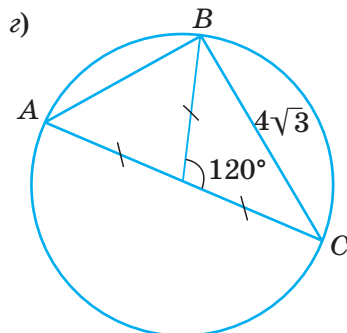
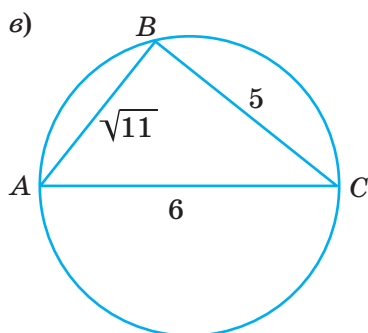
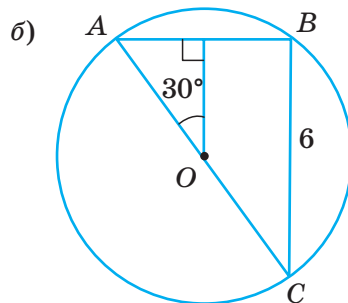
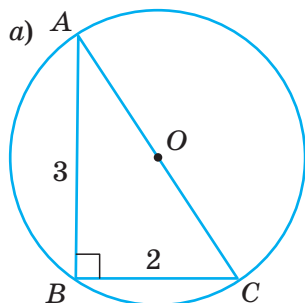
б) У трохвугольнік ABC са старанамі $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 4$ упісана акружнасць, якая датыкаецца да старон трохвугольніка ў пунктах M , K , P адпаведна. Знайдзіце найбольшы з адрэзкаў AM , BK , CP .

 **7.15.** а) Пункт O — цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC , BE — бісектрыса гэтага трохвугольніка, $BO : OE = 2 : 1$, $AC = 7$, $BC = 8$. Знайдзіце старану AB .

б) У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам P . $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 12$. Знайдзіце адносіну адрэзкаў AP і PK , калі AK — бісектрыса трохвугольніка ABC .

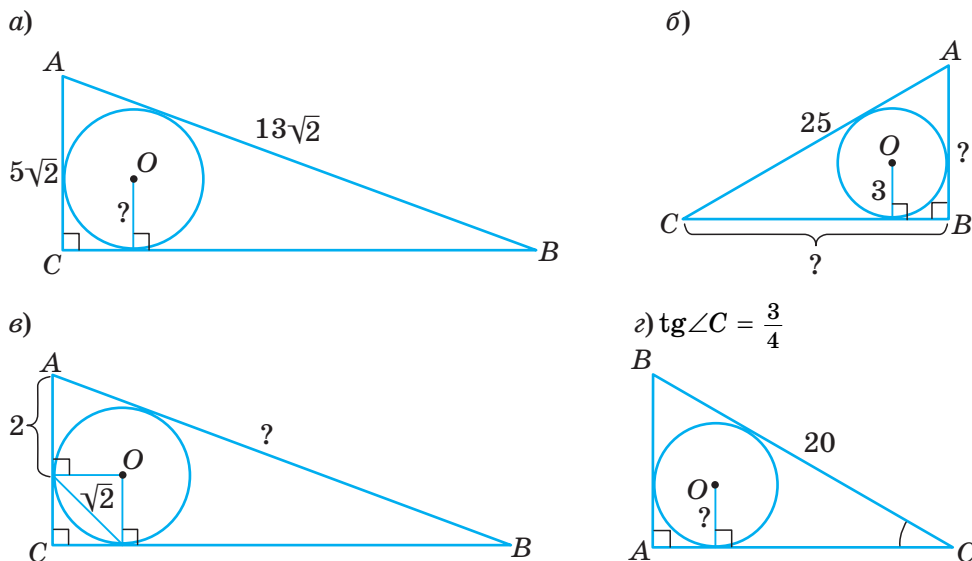
§ 8. Прямовугольны трохвугольнік і яго апісаная і ўпісаная акружнасці

8.1. Акружнасць з цэнтрам O радыусам R апісаная каля трохвугольніка ABC . Знайдзіце R , выкарыстаўшы даныя рысункаў 226, а)–д).



Рыс. 226

8.2. Акружнасць з цэнтрам O радыусам r упісана ў трохвугольнік ABC . Па даных рысункаў 227, а)–г) знайдзіце даўжыні невядомых адрэзкаў.



Рыс. 227

8.3. а) Гіпатэнуза прамавугольнага трохвугольніка роўна 25 см, а сума катэтаў — 35 см. Знайдзіце радыус упісанай у трохвугольнік акружнасці.

б) Сума катэтаў прамавугольнага трохвугольніка роўна 46 см, радыус упісанай у трохвугольнік акружнасці — 6 см. Знайдзіце гіпатэнузу.

8.4. а) Сінус вугла паміж вышыняй, роўнай $\frac{6\sqrt{13}}{13}$, і медыянай прамавугольнага трохвугольніка, праведзенымі да гіпатэнузы, роўны $\frac{12}{13}$. Знайдзіце дыяметр апісанай каля гэтага трохвугольніка акружнасці.

б) Дыяметр апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка акружнасці роўны 12. Знайдзіце сінус вугла паміж вышыняй, роўнай $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, і медыянай, праведзенымі да гіпатэнузы.

8.5. а) Вакол прамавугольнага трохвугольніка апісана акружнасць радыусам $5\sqrt{5}$. Знайдзіце меншы катэт трохвугольніка, ведаючы, што адзін з катэтаў у 2 разы бліжэйшы да цэнтра акружнасці, чым другі.

б) Наибольшая сярэдняя лінія прамавугольнага трохвугольніка роўна $3\sqrt{10}$. Вакол гэтага трохвугольніка апісана акружнасць, прычым цэнтр акружнасці ў 3 разы бліжэйшы да аднаго з катэтаў, чым да другога. Знайдзіце большы катэт трохвугольніка.

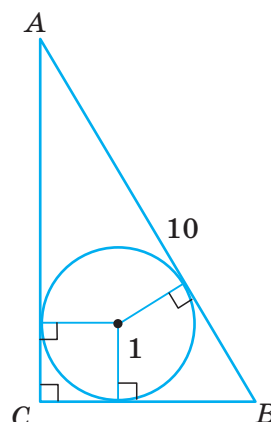
8.6. а) У трохвугольніку ABC $AB = 4,8$, $AC = 3,6$, $BC = 6$. Праз цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC , праведзена прамая, паралельная старане BC , якая перасякае дзве іншыя стараны трохвугольніка ABC у пунктах P і M . Знайдзіце бісектрысу трохвугольніка PAM , праведзеную з вяршыні A .

б) Праз цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік са старанамі 1; 2,4 і 2,6, праведзена прамая, паралельная найбольшай старане трохвугольніка. Знайдзіце бісектрысу трохвугольніка, адсякаемага гэтай прамой, праведзеную да найбольшай стараны.

8.7. а) $ABCD$ — прамавугольнік са старанамі 12 м і 16 м. Пункты O і P — цэнтры акружнасцей, упісаных у трохвугольнікі ABC і ADC адпаведна. Знайдзіце даўжыню адрэзка OP .

б) Дыяганаль прамавугольніка $ABCD$ роўна 34 м, а рознасць старон прамавугольніка — 14 м. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі ўпісаных у трохвугольнікі ABC і ADC акружнасцей.

8.8. Выкарыстаўшы даныя рысунка 228, знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC .



Рыс. 228

8.9. а) O — цэнтр акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік ABC . Плошча трохвугольніка OBA роўна 10. Адносіна радыуса ўпісанай акружнасці да вышыні трохвугольніка ABC , праведзенай да гіпатэнузы AB , роўна $\frac{5}{12}$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC .

б) O — цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC . Плошчы трохвугольнікаў OAB , OAC , OBC адносяцца як $5 : 3 : 4$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC , калі радыус апісанай каля яго акружнасці роўны 20.

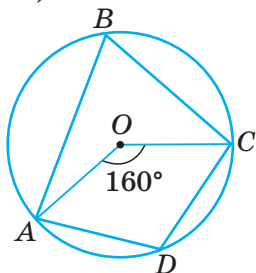
8.10. а) Бісектрысы BP і AN трохвугольніка ABC ($\angle A = 90^\circ$) перасякаюцца ў пункце O . AN перасякае ўпісаную ў трохвугольнік ABC акружнасць у пункце K (пункт O належыць адрэзку AK). Знайдзіце радыус упісанай акружнасці, калі адлегласць ад пункта K да аднаго з катэтаў роўна $6\sqrt{2}$ см.

б) Бісектрысы BP і AN трохвугольніка ABC ($\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$) перасякаюцца ў пункце O . BP перасякае ўпісаную ў трохвугольнік ABC акружнасць у пункце K (пункт K належыць адрэзку BO). Знайдзіце радыус упісанай акружнасці, калі адлегласць ад пункта K да катэта AC роўна $4,5(2 + \sqrt{3})$ см.

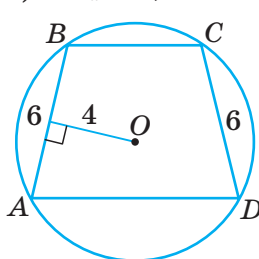
§ 9. Упісанія і апісанія чатырохвугольнікі

9.1. Акружнасць з цэнтрам O радыусам R апісана каля чатырохвугольніка $ABCD$. Па даных рысункаў 229, а) — д) знайдзіце невядомыя велічыні.

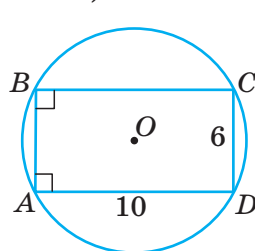
а) $\angle ADC$ — ?



б) $BC \parallel AD$; R — ?



в) R — ?



$$з) S_{\triangle AOB} = 4,5; R = ?$$

$$д) R = 5; P_{ABCD} = ?$$

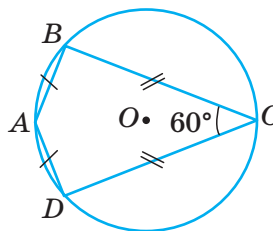
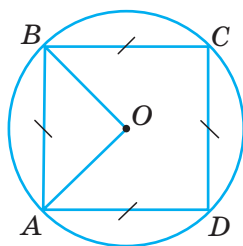


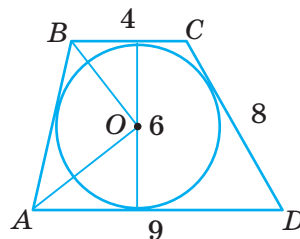
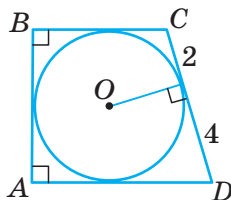
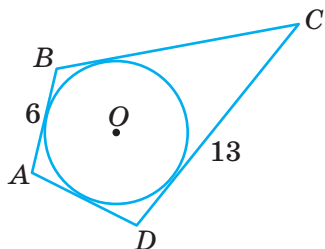
Рис. 229

9.2. Акружнасьць з цэнтрам O радыусам r упісана ў чатырохвугольнік $ABCD$. Па даных рысункаў 230, а)–д) знайдзіце невядомыя велічыні.

$$а) P_{ABCD} = ?$$

$$б) r = ?$$

$$в) AD \parallel BC; S_{\triangle AOB} = ?$$



$$з) ABCD \text{ — ромб, } BP : PH = 5 : 3, \\ P_{ABCD} = 40; r = ?$$

$$д) ABCD \text{ — ромб; } r = ?$$

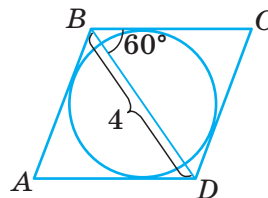
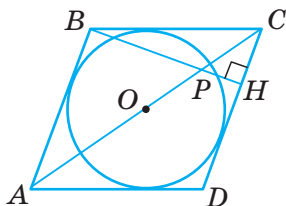


Рис. 230

9.3. а) Плошча прамавугольніка роўна $16\sqrt{2}$, а вугал паміж дыяганалямі прамавугольніка роўны 45° . Знайдзіце радыус апісанай каля прамавугольніка акружнасці.

б) Вугал паміж дыяганаллю прамавугольнага і адной з яго старон роўны $67,5^\circ$. Знайдзіце дыяметр апісанай каля прамавугольнага акружнасці, калі плошча прамавугольнага роўна $25\sqrt{2}$.

9.4. а) Сярэдзінныя перпендыкуляры да ўсіх старон выпуклага чатырохвугольнага $ABCP$ перасякаюцца ў пункце O . Адлегласць ад пункта O да стараны BC у 2 разы меншая за старану BC , а адлегласць ад пункта O да стараны AB у $2\sqrt{3}$ разы меншая за старану AB . Знайдзіце велічыню вугла APC .

б) Сярэдзінныя перпендыкуляры да ўсіх старон выпуклага чатырохвугольнага $ABCM$ перасякаюцца ў пункце O . Адлегласць ад пункта O да прамой AB адносіцца да адлегласці ад пункта O да прамой BC як $\sqrt{3} : 1$. Знайдзіце велічыню вугла BAC , калі вугал AMC роўны 90° .

9.5. а) $ABCD$ — прамавугольнік, $AB = 12$ см, $\angle CAB = 30^\circ$. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрам акружнасці, апісанай каля прамавугольнага $ABCD$, і цэнтрам акружнасці, апісанай каля трохвугольнага BCO , калі O — пункт перасячэння дыяганалей прамавугольнага $ABCD$.

б) O — пункт перасячэння дыяганалей прамавугольнага $ABCD$, адлегласць паміж цэнтрам акружнасці, апісанай каля прамавугольнага $ABCD$, і цэнтрам акружнасці, апісанай каля трохвугольнага BCO , роўна 6 см. Знайдзіце AB , калі $AC : BC = 2 : 1$.

9.6. а) Каля трапецыі $ABCD$ з асновамі BC і AD апісана акружнасць, вугал BCD роўны 120° . Вышыня BH дзеліць аснову AD на адрэзкі, большы з якіх роўны 12 см. Знайдзіце дыяметр апісанай каля трапецыі $ABCD$ акружнасці, калі дыяганаль трапецыі дзеліць яе востры вугал папалам.

б) Каля трапецыі $ABCD$ з асновамі BC і AD апісана акружнасць, вугал BCD у 2 разы большы за вугал BAD . Вышыня BH дзеліць аснову AD на адрэзкі, меншы з якіх роўны 5 см. Знайдзіце дыяметр апісанай каля трапецыі $ABCD$ акружнасці, калі меншая аснова трапецыі роўна яе бакавой старане.

9.7. а) У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ $\angle B = \angle D = 90^\circ$. Дыяметр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABD , роўны 24. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка BCD .

б) У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 2 : 7 : 9 : 4$. Радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC , роўны 12,5. Знайдзіце дыяметр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка BCD .

9.8. а) Каля трапецыі $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$), дыяганалі якой узаемна перпендыкулярныя, апісана акружнасць з цэнтрам у пункце O . Вугал AOD роўны 110° . Знайдзіце вугал AOC .

б) Акружнасць з цэнтрам O апісана каля трапецыі $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$), дыяганалі якой узаемна перпендыкулярныя. Вугал AOC роўны 130° . Знайдзіце вугал AOD .

9.9. а) Дакажыце, што калі бісектрысы ўсіх чатырох унутраных вуглоў любой трапецыі пры перасячэнні ўтвараюць чатырохвугольнік, то каля яго можна апісаць акружнасць.

б) Дакажыце, што калі бісектрысы ўсіх чатырох знешніх вуглоў, узятых па адным пры кожнай вяршыні любой трапецыі, пры перасячэнні ўтвараюць чатырохвугольнік, то каля яго можна апісаць акружнасць.

9.10. а) Плошча ромба роўна 120. Дыяганалі ромба адносяцца як 5 : 12. Знайдзіце радыус упісанай у ромб акружнасці.

б) Перыметр ромба роўны 40. Дыяганалі адносяцца як 3 : 4. Знайдзіце радыус упісанай у ромб акружнасці.

9.11. а) У раўнабедраную трапецыю ўпісана акружнасць радыусам 5. Меншая аснова трапецыі ў 2 разы меншая за яе вышыню. Знайдзіце плошчу трапецыі.

б) У раўнабедраную трапецыю ўпісана акружнасць радыусам 4. Вышыня трапецыі большая за меншую аснову трапецыі ў 4 разы. Знайдзіце плошчу трапецыі.

9.12. а) У акружнасць упісана трапецыя, бакавая старана якой роўна 15, сярэдняя лінія роўна 16, а большая аснова з'яўляецца дыяметрам акружнасці. Знайдзіце плошчу трапецыі.

б) У акружнасць упісана трапецыя, большая аснова якой роўна 26 і з'яўляецца дыяметрам акружнасці. Бакавая старана трапецыі роўна $\sqrt{26}$. Знайдзіце плошчу трапецыі.

9.13. а) Дакажыце, што ў любым упісаным чатырохвугольніку вугал, утвораны дыяганаллю з адной са старон, роўны вуглу, утворанаму другой дыяганаллю з процілеглай стараной чатырохвугольніка.

б) Дакажыце, што калі ў выпуклым чатырохвугольніку хаця б адна дыяганаль дзеліць два яго вуглы папалам, то ў такі чатырохвугольнік можна ўпісаць акружнасць.

9.14. а) $ABCD$ — апісаны чатырохвугольнік, старана AB меншая за старану CD на 4 см, старана AD меншая за старану CD у 3 разы, а $AD : BC = 1 : 4$. Знайдзіце перыметр $ABCD$.

б) $ABCD$ — апісаны чатырохвугольнік, старана BC большая за старану AD на 5 см, $AB : CD = 1 : 4$. Знайдзіце суму даўжынь старон AB і AD , калі перыметр чатырохвугольніка $ABCD$ роўны 50 см.

 **9.15.** а) Каля чатырохвугольніка $ABCD$ апісана акружнасць. Вугал ABC — прамы, старана AB роўна 5 см, а CD — 12 см. Вядома, што ў $ABCD$ можна ўпісаць акружнасць. Знайдзіце суму радыусаў упісанай і апісанай акружнасцей.

б) У чатырохвугольнік $ABCD$ упісана акружнасць. Стара-на AD роўна 8 см, вугал ABC — прамы. Вядома, што каля чатырохвугольніка $ABCD$ можна апісаць акружнасць, дыяметр якой роўны 17 см. Знайдзіце дыяметр упісанай у чатырохвугольнік $ABCD$ акружнасці.

9.16. а) Канцы большай бакавой стараны прамавугольнай трапедыі знаходзяцца на адлегласцях $\sqrt{2}$ і $2\sqrt{2}$ ад цэнтра ўпісанай у трапецыю акружнасці. Знайдзіце плошчу трапедыі.

б) Радывус акружнасці, упісанай у прамавугольную трапедыю, роўны 3. Знайдзіце плошчу трапедыі, калі яе меншая аснова роўна 4.

9.17. а) У ромб $ABCD$ са стараной $4\sqrt{3}$ і вострым вуглом A , роўным 60° , упісана акружнасць. Да акружнасці праведзена датычная, якая перасякае старану AB у пункце P , а старану AD — у пункце K . Знайдзіце перыметр трохвугольніка APK .

б) У ромб $ABCD$ упісана акружнасць. Да акружнасці праведзена датычная, якая перасякае старану AB у пункце P , а старану AD — у пункце K . Трохвугольнік APK — роўнастаронні, са стараной, роўнай 6. Знайдзіце радыус акружнасці.

9.18. а) Каля акружнасці апісана раўнабедраная трапецыя, сярэдняя лінія якой роўна m . Знайдзіце перыметр трапедыі.

б) Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапедыі, апісанай каля акружнасці радыусам r , калі яе бакавая старана роўна n .

 **9.19.** У прамавугольную трапецыю з вуглом 30° упісана акружнасць. Дакажыце, што плошча чатырохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца пункты дотыку акружнасці

да старон трапецыі, у 4 разы меншая за плошчу трапецыі.

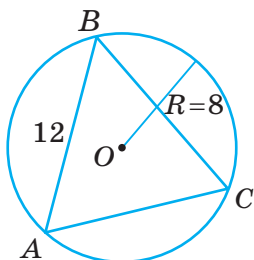
- 9.20. У акружнасць упісаны чатырохвугольнік $ABCD$, дыяганалі якога ўзаемна перпендыкулярныя і перасякаюцца ў пункце E . Прамая, якая праходзіць праз пункт E і сярэдзіну стараны BC , перасякае старану AD у пункце P . Дакажыце, што EP — вышыня трохвугольніка AED .

ТЭАРЭМА СІНУСАЎ, ТЭАРЭМА КОСІНУСАЎ

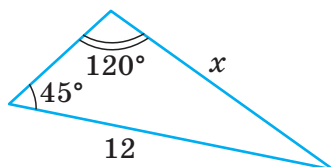
§ 10. Тэарэма сінусаў

- 10.1. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 231, а)–м), знайдзіце неведомыя велічыні.

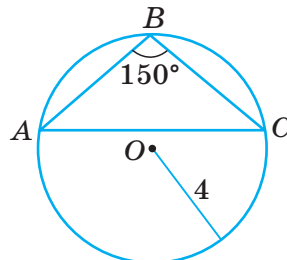
а) $\sin \angle C$ — ?



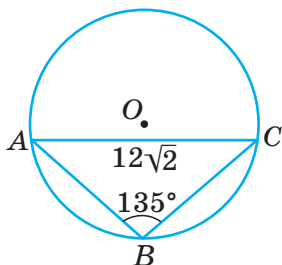
б) x — ?



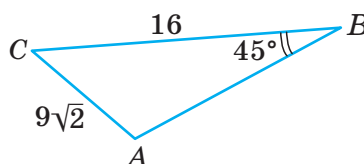
в) AC — ?



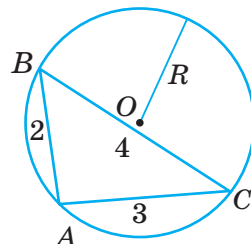
г) OA — ?



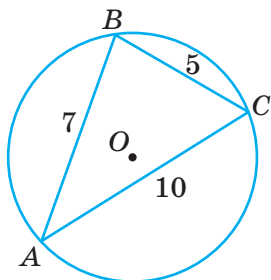
д) $\sin \angle A$ — ?



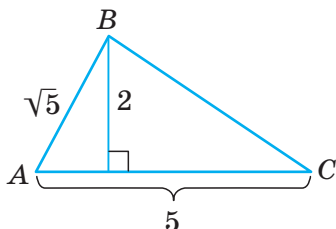
е) $R = \frac{8\sqrt{15}}{15}$; $S_{\triangle ABC}$ — ?



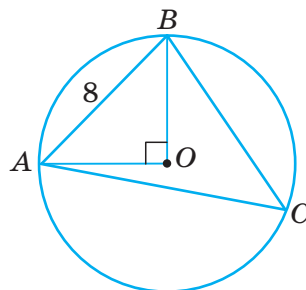
ж) $S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{6}$;
 $R_{\triangle ABC} = ?$



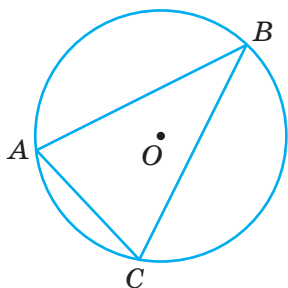
з) $R_{\triangle ABC} = ?$



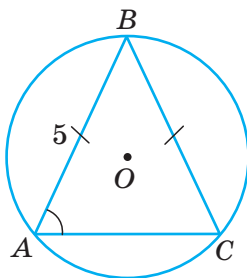
и) $\sin \angle ABC = \frac{4}{5}$;
 $AC = ?$



к) $\cup AB : \cup AC : \cup CB = 4 : 3 : 5$;
 $\frac{AC}{AB} = ?$



л) $\cos \angle A = 0,6$;
 $R_{\triangle ABC} = ?$



м) $\cos \angle B = -0,5$;
 $R_{\triangle ABC} = ?$

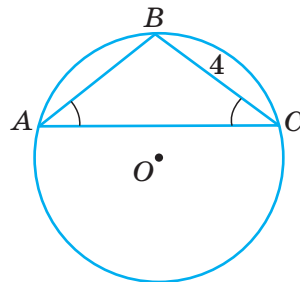


Рис. 231

10.2. а) У трикутнику ABC синус кута A роўны $\frac{2\sqrt{6}}{7}$, синус кута C роўны $\frac{12\sqrt{6}}{35}$, а старана BC роўна 5 см. Знайдзіце AB .

б) У трикутнику ABC синус кута B роўны $\frac{2\sqrt{6}}{5}$, старана AB роўна 6 см, а старана AC — 7 см. Знайдзіце синус кута C .

10.3. а) Знайдзіце радыус апісанай каля трикутніка акружнасці, калі адна з яго старон роўна $16\sqrt{3}$ см, а вугал, што ляжыць супраць яе, роўны 120° .

б) радыус апісанай каля трохвугольніка акружнасці роўны $8\sqrt{2}$ см. Адзін з вуглоў трохвугольніка роўны 135° . Знайдзіце старану трохвугольніка, што ляжыць супраць гэтага вугла.

10.4. а) У трохвугольніку PKC $\angle P = 5^\circ$, $\angle K = 25^\circ$, $PK = 23,4$ см. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка PKC .

б) У трохвугольніку TOH $\angle T = 4^\circ 25'$, $\angle O = 25^\circ 35'$. Знайдзіце старану TO , калі дыяметр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка TOH , роўны $44,2$ см.

10.5. а) Дзве стараны трохвугольніка роўны 3 см і 6 см, а вышыня, праведзеная да трэцяй стараны, — 2 см. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка.

б) Трохвугольнік ABC упісаны ў акружнасць, радыус якой роўны 10 см, BH — вышыня трохвугольніка ABC , $BH = 1$ см, $AB = 4$ см. Знайдзіце BC .

10.6. а) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, у якога два вуглы роўныя і дзве стараны роўны 8 см і 4 см.

б) У трохвугольніку адна з медыян з'яўляецца таксама яго вышынёй. Знайдзіце дыяметр акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка, калі дзве яго стараны роўны 12 см і 6 см.

10.7. а) У трохвугольніку ABC сінус вугла A роўны $\frac{1}{3}$, $AB = 2$ см, $BC = 1\frac{1}{3}$ см. Знайдзіце ўсе магчымыя велічыні вугла ACB .

б) У востравугольным трохвугольніку ABC $AB = 3\sqrt{2}$ см, $BC = 4$ см, сінус вугла C роўны $0,75$. Знайдзіце вугал A .

10.8. а) Трапеція $ABCD$ уписана ў акружнасць. Меншая асно-
ва BC роўна 10 см. Знайдзіце сярэдняю лінію трапецыі,
калі $\sin \angle BAC = \frac{1}{5}$, $\sin \angle ABD = \frac{6}{25}$.

б) Трапеція $ABCD$ уписана ў акружнасць. Яе асновы AD
і BC роўны 16 см і 14 см адпаведна. Знайдзіце вугал BDC ,
калі сінус вугла ACD роўны $\frac{4}{7}$.

10.9. а) $ABCD$ — уписаны чатырохвугольнік, дыяганаль AC
роўна $\sqrt{5}$ см, а косінус вугла ABC роўны $-\frac{2}{3}$. Знайдзіце
радыус акружнасці, апісанай каля $ABCD$.

б) Трапеція $ABCD$ уписана ў акружнасць. Знайдзіце
радыус акружнасці, калі $AC = 3\sqrt{2}$ см, $\cos \angle BCD = -\frac{1}{3}$.

 **10.10.** а) Дыяганаль AC паралелаграма $ABCD$ дзеліць ву-
гал BAD на два вуглы, велічыні якіх — β і ϕ . Знайдзіце
плошчу паралелаграма $ABCD$, калі $AC = a$.

б) У раўнабедранай трапецыі $ABCD$ ($AD > BC$) вугал BCA
роўны β , вугал CDA роўны ϕ , $AD = n$. Знайдзіце плошчу
трапецыі.

 **10.11.** а) У трохвугольніку ABC $\angle B = 105^\circ$, $BC = 20$. Вышы-
ня BH роўна 10. Знайдзіце перыметр трохвугольні-
ка ABC .

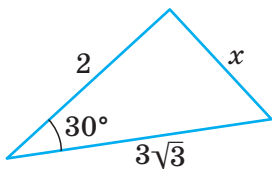
б) У трохвугольніку ABC $\angle B = 105^\circ$, $BC = 10$. Вышы-
ня BH роўна $5\sqrt{2}$. Знайдзіце перыметр трохвугольні-
ка ABC .

 **10.12.** Два вуглы трохвугольніка роўны β і ϕ . Знайдзіце радыус
апісанай каля трохвугольніка акружнасці, калі плошча
трохвугольніка роўна S .

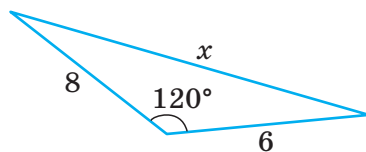
§ 11. Тэарэма косінусаў

11.1. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 232, а)–м), знайдзіце невядомыя велічыні.

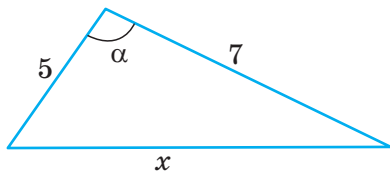
а) x — ?



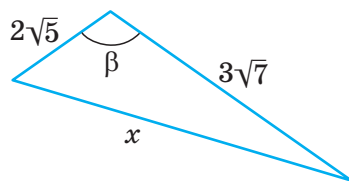
б) x — ?



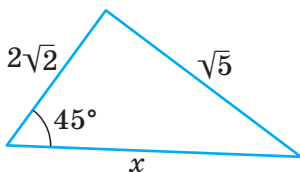
в) $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$; x — ?



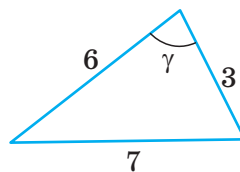
г) $\sin \beta = \frac{1}{6}$, $\beta > 90^\circ$; x — ?



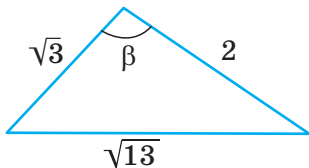
д) x — ?



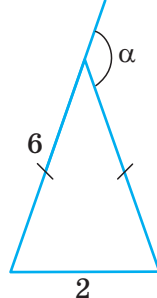
е) $\cos \gamma$ — ?



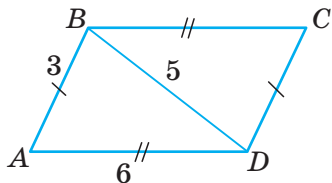
ж) β — ?



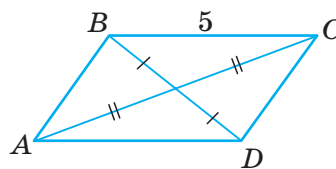
з) $\cos \alpha$ — ?



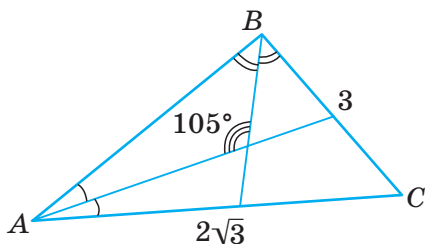
і) $AC = ?$



к) $AC = 4\sqrt{3}$, $BD = 4\sqrt{2}$;
 $AB = ?$



л) $AB = ?$



м) $AC = BC$; $AC = ?$

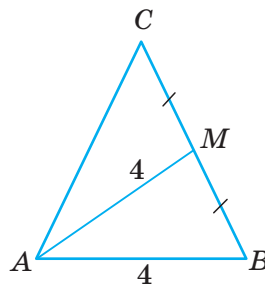


Рис. 232

11.2. а) Знайдіть косінус найменшого кута трикутника, катети якого сторони мають довжини $2\sqrt{3}$ см, 7 см, 5 см.

б) Знайдіть косінус найбільшого кута трикутника, катети якого сторони мають довжини $4\sqrt{3}$ см, 6 см, 5 см.

11.3. а) Визначте вид трикутника (острокутного, прямокутного, тупокутного), катети якого сторони мають довжини $5\sqrt{3}$ см, 7 см, $2\sqrt{3}$ см.

б) Визначте вид трикутника (острокутного, прямокутного, тупокутного), катети якого сторони мають довжини як 2 : 7 : 8.

11.4. а) Знайдіть сторону трикутника, катети сума прилеглих до неї катетів дорівнює 60° , а дві інші сторони — 5 см і 3 см.

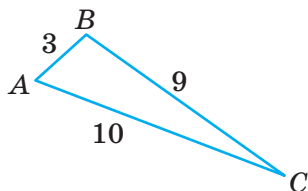
б) Знайдіть сторону трикутника, катети сума прилеглих до неї катетів дорівнює 30° , а дві інші сторони — $\sqrt{3}$ см і 1 см.

- 11.5.** а) Адзін з вуглоў трохвугольніка роўны 120° , старана, што ляжыць супраць яго, роўна $2\sqrt{7}$ см. Знайдзіце дзве іншыя стараны трохвугольніка, калі яны адносяцца як $1 : 2$.
 б) Адзін з вуглоў трохвугольніка роўны 135° , старана, што ляжыць супраць яго, роўна $2\sqrt{10}$ см. Знайдзіце дзве іншыя стараны трохвугольніка, калі яны адносяцца як $\sqrt{2} : 1$.
- 11.6.** а) Меншая аснова трапецыі роўна $2\sqrt{13}$, а яе бакавыя стараны — $\sqrt{3}$ і 2 . Знайдзіце большую аснову трапецыі, калі сума вуглоў, прылеглых да яе, роўна 30° .
 б) Асновы трапецыі адносяцца як $1 : 3$, яе бакавыя стараны роўны $\sqrt{2}$ і 2 . Знайдзіце меншую аснову трапецыі, калі сума вуглоў, прылеглых да яе, роўна 315° .
- 11.7.** а) Плошча трохвугольніка ABC роўна $6\sqrt{3}$ см², $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $\angle ABC > 90^\circ$. Знайдзіце вышыню BH трохвугольніка ABC .
 б) Плошча трохвугольніка ABC роўна $3\sqrt{3}$ см², $BC = 3$ см, $AB = 4\sqrt{3}$ см. Знайдзіце радыус апісанай каля трохвугольніка ABC акружнасці, калі яе цэнтр ляжыць па-за трохвугольнікам.
- 11.8.** а) Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі дзве яго стараны роўны $\sqrt{15}$ і 1 , а медыяна, праведзеная да трэцяй стараны, роўна 2 .
 б) BK — медыяна трохвугольніка ABC , $AB : BK : BC = 1 : 1,5 : 2\sqrt{2}$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі яго перыметр роўны $8 + 4\sqrt{2}$.
-  **11.9.** $ABCD$ — трапецыя з асновамі BC і AD , $AC = 3$, $BD = 5$, а вугал паміж дыяганалямі роўны 120° . Знайдзіце суму даўжынь асноў BC і AD .
-  **11.10.** Бісектрыса трохвугольніка дзеліць яго старану на два адрэзкі, рознасць даўжынь якіх роўна 2 см. Знайдзіце даўжыню гэтай бісектрысы, калі дзве іншыя стараны трохвугольніка роўны 15 см і 18 см.

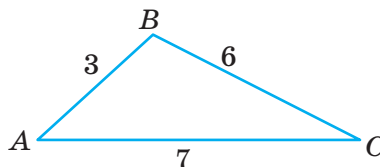
§ 12. Формула Герона. Рашэнне трохвугольнікаў

12.1. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 233, а)–з), знайдзіце невядомыя велічыні.

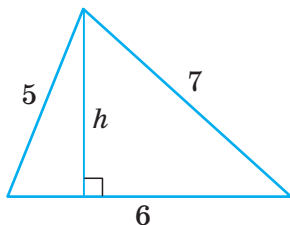
а) $S_{\triangle ABC}$ — ?



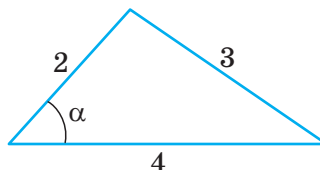
б) $R_{\triangle ABC}$ — ?



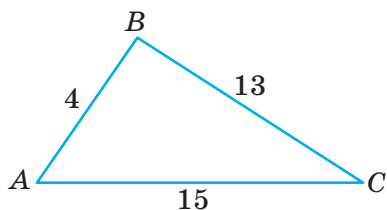
в) h — ?



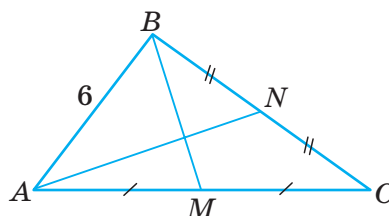
г) $\sin \alpha$ — ?



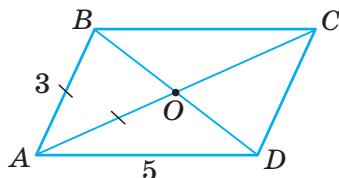
д) $r_{\triangle ABC}$ — ?



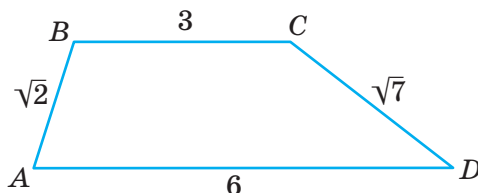
е) $AN = 7,5$, $BM = 6$; $S_{\triangle ABC}$ — ?



ж) $ABCD$ — паралелаграм;
 S_{ABCD} — ?



з) $BC \parallel AD$; S_{ABCD} — ?



Рыс. 233

- 12.2.** Знайдзіце плошчу трохвугольніка са старанамі:
- а) 8 см, 12 см, 16 см;
 - б) 10 см, 17 см, 21 см.
- 12.3.** а) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка са старанамі 13, 14, 15.
 б) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка са старанамі 37, 13, 40.
- 12.4.** а) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік са старанамі 13, 17, 22.
 б) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік са старанамі 14, 18, 24.
- 12.5.** а) Знайдзіце найменшую вышыню трохвугольніка са старанамі 5 см, 7 см і 9 см.
 б) Знайдзіце найбольшую вышыню трохвугольніка са старанамі 6 см, 11 см і 15 см.
- 12.6.** а) У трохвугольніку ABC $AB = 6$ см, $BC = 14$ см, $AC = 16$ см. Знайдзіце радыус акружнасці, якая датыкаецца да старон AB і AC , ведаючы, што яе цэнтр ляжыць на старане BC .
 б) У трохвугольніку ABC $AB = 9$ см, $BC = 13$ см, $AC = 20$ см. Знайдзіце радыус акружнасці, якая датыкаецца да старон BC і AC , ведаючы, што яе цэнтр ляжыць на старане AB .
- 12.7.** а) Дыяганалі паралелаграма роўны 10 см і 18 см, а адна з яго старон — 8 см. Знайдзіце плошчу паралелаграма.
 б) Дыяганалі паралелаграма роўны 16 см і 24 см, а адна з яго старон — 10 см. Знайдзіце плошчу паралелаграма.
- 12.8.** а) Стораны трохвугольніка адносяцца як 5 : 7 : 8, а яго плошча роўна $160\sqrt{3}$ см². Знайдзіце перыметр трохвугольніка.
 б) Адна старана трохвугольніка ў 1,4 раза меншая за другую старану і ў 1,6 раза меншая за трэцюю старану. Знайдзіце перыметр трохвугольніка, калі яго плошча роўна $90\sqrt{3}$ см².

12.9. Дакажыце, што плошча ўпісанага чатырохвугольніка роўна $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, дзе a, b, c, d — стораны чатырохвугольніка, а p — яго паўперыметр.

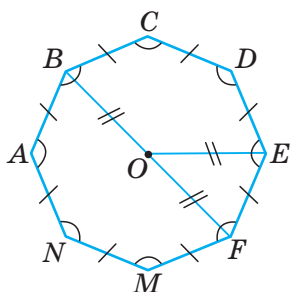
12.10. Дакажыце, што плошча ўпісанага чатырохвугольніка, у які можна ўпісаць акружнасць, роўна $\sqrt{abcd}$, дзе a, b, c, d — стораны чатырохвугольніка.

ПРАВІЛЬНЫЯ МНОГАВУГОЛЬНІКІ

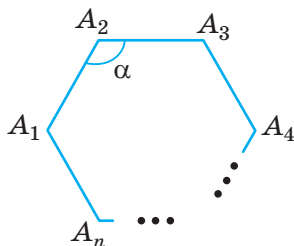
§ 13. Правільныя многавугольнікі

13.1. Па даных рысункаў 234, а)–д) знайдзіце невядомыя велічыні.

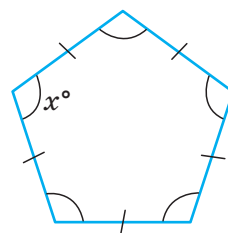
а) $\angle BOE$ — ?



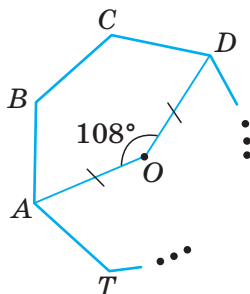
б) $A_1A_2\dots A_n$ — правільны n -вугольнік, $\alpha = 168^\circ$; n — ?



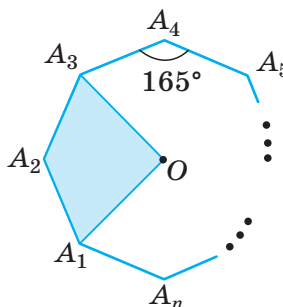
в) x — ?



г) O — цэнтр правільнага n -вугольніка $ABCD\dots T$; n — ?



д) O — цэнтр правільнага n -вугольніка $A_1A_2\dots A_n$, $S_{A_1A_2A_3O} = 6$; $S_{A_1A_2\dots A_n}$ — ?



Рыс. 234

- 13.2.** а) Знайдзіце перыметр правільнага 18-вугольніка, калі сума пяці яго старон на 42 см меншая за суму дванаццаці яго старон.
 б) Знайдзіце старану правільнага 22-вугольніка, калі яго перыметр большы за суму трох яго старон на 38 см.
- 13.3.** а) Унутраны вугал правільнага n -вугольніка на 135° большы за яго знешні вугал. Знайдзіце колькасць старон гэтага n -вугольніка.
 б) Знешні вугал правільнага n -вугольніка ў 3 разы меншы за яго ўнутраны вугал. Знайдзіце колькасць старон гэтага n -вугольніка.
- 13.4.** а) Сума ўсіх вуглоў правільнага n -вугольніка роўна 2160° . Знайдзіце яго перыметр, калі старана правільнага n -вугольніка роўна 5 см.
 б) Перыметр правільнага n -вугольніка ў 29 разоў большы за яго старану. Знайдзіце суму ўсіх вуглоў гэтага n -вугольніка.
- 13.5.** а) Пункт O — цэнтр правільнага n -вугольніка $A_1A_2\dots A_n$. Вугал A_1OA_4 роўны 27° . Знайдзіце старану гэтага n -вугольніка, калі яго перыметр роўны 40 см.
 б) Пункт O — цэнтр правільнага n -вугольніка $A_1A_2\dots A_n$. Вугал A_1A_2O роўны 85° . Знайдзіце перыметр гэтага n -вугольніка, калі яго старана роўна 1,5 см.
- 13.6.** а) $B_1B_2\dots B_8$ — правільны васьмівугольнік са стараной a . Знайдзіце плошчу трохвугольніка $B_1B_2B_3$.
 б) $B_1B_2\dots B_8$ — правільны васьмівугольнік са стараной a . Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $B_1B_2B_3B_4$.
-  **13.7.** а) Старана правільнага пяцівугольніка $A_1A_2A_3A_4A_5$ роўна 4 см. Дыяганалі A_1A_4 і A_2A_5 перасякаюцца ў пункце P . Знайдзіце даўжыню адрэзка A_1P .

б) Старана правільнага пяцівугольніка $A_1A_2A_3A_4A_5$ роўна 2 см. Дыяганалі A_1A_4 і A_2A_5 перасякаюцца ў пункце P . Знайдзіце даўжыню адрэзка A_5P .

13.8. а) Дакажыце, што дыяганалі A_1A_3 і A_1A_4 правільнага пяцівугольніка $A_1A_2A_3A_4A_5$ дзеляць вугал $A_2A_1A_5$ на тры роўныя вуглы.

б) Дакажыце, што ў правільным многавугольніку здабыткі адрэзкаў любых дзвюх дыяганалей, што перасякаюцца, роўныя паміж сабой.

 **13.9.** а) На старанах квадрата ад кожнай яго вяршыні адкладзены адрэзкі, роўныя палове дыяганалі квадрата. Атрыманыя восем пунктаў злучаны адрэзкамі. Знайдзіце плошчу квадрата, калі перыметр атрыманага васьмівугольніка роўны 8 см.

б) На старанах квадрата ад кожнай яго вяршыні адкладзены адрэзкі, роўныя палове дыяганалі квадрата. Атрыманыя восем пунктаў злучаны адрэзкамі. Знайдзіце перыметр атрыманага васьмівугольніка, калі дыяганаль квадрата роўна $3\sqrt{2}$ см.

13.10. а) $A_1A_2\dots A_8$ — правільны васьмівугольнік. На старане A_1A_2 ляжыць пункт P так, што $A_1P = 3\sqrt{2}$, $PA_2 = \sqrt{2}$. Знайдзіце адлегласць ад пункта P да прамой A_7A_8 .

б) $A_1A_2\dots A_8$ — правільны васьмівугольнік. На старане A_1A_2 ляжыць пункт P так, што $A_1P = 6\sqrt{2}$, $PA_2 = \sqrt{2}$. Знайдзіце адлегласць ад пункта P да прамой A_4A_5 .

13.11. а) Старана правільнага многавугольніка роўна 12 см, а радыус упісанай у яго акружнасці — $6\sqrt{3}$ см. Знайдзіце дыяметр апісанай каля гэтага многавугольніка акружнасці.

б) Дыяметр апісанай каля правільнага многавугольніка акружнасці роўны 20 см. Знайдзіце старану гэтага

многовугольніка, калі радыус упісанай у многовугольнік акружнасці роўны $5\sqrt{3}$ см.

13.12. а) Найменшая дыяганаль правільнага васьмівугольніка роўна 4 см. Знайдзіце радыус апісанай каля гэтага васьмівугольніка акружнасці.

б) Дыяметр акружнасці, апісанай каля правільнага васьмівугольніка, роўны 16 см. Знайдзіце найменшую дыяганаль гэтага васьмівугольніка.

13.13. а) Правільны 12-вугольнік $A_1A_2\dots A_{12}$ упісаны ў акружнасць радыусам 3,5. Знайдзіце плошчу трохвугольніка $A_1A_2A_7$.

б) Правільны 12-вугольнік $A_1A_2\dots A_{12}$ упісаны ў акружнасць радыусам 6. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $A_1A_2A_3A_8$.

§ 14. Формулы радыусаў апісанай

і ўпісанай акружнасцей правільнага многовугольніка

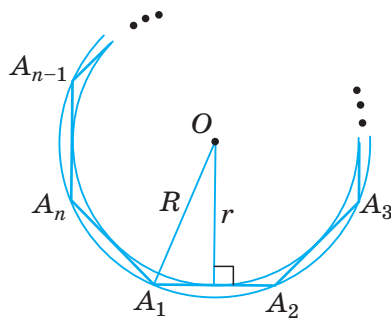
14.1. а) $A_1A_2\dots A_n$ — правільны n -вугольнік са стараной a , O — яго цэнтр, r — радыус упісанай у яго акружнасці, R — радыус апісанай каля яго акружнасці (рыс. 235). Знайдзіце n , калі:

1) $r = \frac{a}{2\operatorname{tg} 7,5^\circ}$;

2) $r = R \cdot \cos 10^\circ$;

3) $a = 2R \cdot \cos 87,5^\circ$;

4) $R = \frac{a}{2\sin 12^\circ}$.



Рыс. 235

б) Выкарыстаўшы даныя рысункаў 236, 1)–3), знайдзіце невядомыя велічыні.

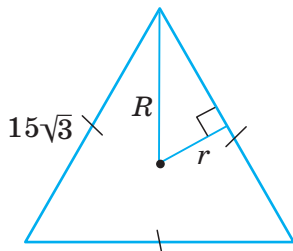
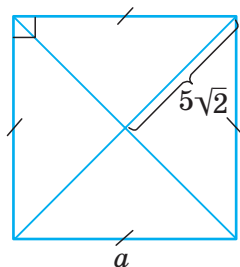
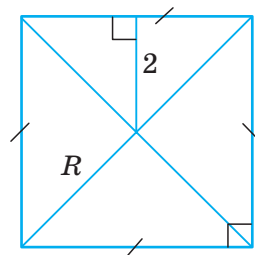
1) R, r — ?2) a — ?3) R — ?

Рис. 236

14.2. а) Дыяметр апісанай каля правільнага трохвугольніка акружнасці роўны 24 см. Знайдзіце плошчу гэтага трохвугольніка.

б) Плошча правільнага трохвугольніка роўна $16\sqrt{3}$ см². Знайдзіце дыяметр упісанай у гэты трохвугольнік акружнасці.

 **14.3.** а) Старана правільнага чатырохвугольніка на $(8 - 4\sqrt{2})$ см большая за радыус апісанай каля яго акружнасці. Знайдзіце перыметр гэтага чатырохвугольніка.

б) Радыус апісанай каля правільнага чатырохвугольніка акружнасці на $(2\sqrt{2} - 2)$ см большы за радыус упісанай у яго акружнасці. Знайдзіце плошчу гэтага чатырохвугольніка.

14.4. а) Плошча правільнага шасцівугольніка роўна $12\sqrt{3}$ см². Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у гэты шасцівугольнік.

б) Дыяметр акружнасці, упісанай у правільны шасцівугольнік, роўны 8 см. Знайдзіце плошчу гэтага шасцівугольніка.

14.5. а) Выразіце радыус R апісанай каля правільнага 18-вугольніка акружнасці праз старану b гэтага 18-вугольніка.

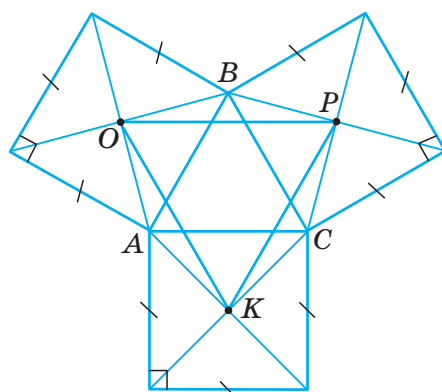
б) Выразіце старану s правільнага 36-вугольніка праз радыус r ўпісанай у яго акружнасці.

14.6. а) Радыус апісанай каля правільнага 24-вугольніка акружнасці роўны R . Знайдзіце плошчу гэтага 24-вугольніка.

б) Радыус апісанай каля правільнага n -вугольніка акружнасці роўны R . Плошча гэтага n -вугольніка роўна $18R^2 \sin 10^\circ$. Знайдзіце n .

14.7. Трохвугольнік ABC — роўнастаронні з перыметрам 6. Выкарыстаўшы рысунак 237, знайдзіце перыметр трохвугольніка OPK .

14.8. Правільныя $2n$ -вугольнік і n -вугольнік са старанамі m і k адпаведна ўпісаны ў акружнасць радыусам R .



Рыс. 237

Дакажыце, што $m = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - k^2}}$.

14.9. а) Тры акружнасці аднаго радыуса парамі датыкаюцца адна да адной. Знайдзіце радыус гэтых акружнасцей, калі радыус меншай акружнасці, якая датыкаецца да ўсіх дадзеных, роўны 8.

б) Тры акружнасці аднаго радыуса парамі датыкаюцца адна да адной. Знайдзіце радыус гэтых акружнасцей, калі радыус большай акружнасці, якая датыкаецца да ўсіх дадзеных, роўны 6.

14.10. а) Вяршыні правільнага 12-вугольніка злучылі цераз адну. Знайдзіце плошчу гэтага 12-вугольніка, калі радыус

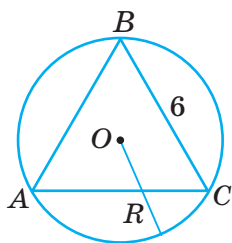
акружнасці, упісанай ва ўтвораны многавугольнік, роўны 3.

б) Вяршыні правільнага васьмівугольніка злучылі цераз адну. Знайдзіце плошчу васьмівугольніка, калі перыметр утворанага многавугольніка роўны 8.

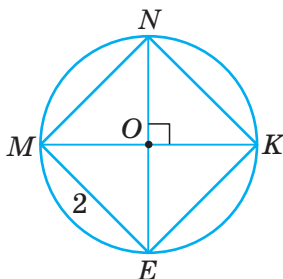
§ 15. Правільны трохвугольнік, чатырхвугольнік, шасцівугольнік

15.1. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 238, а) — і), знайдзіце невядомыя велічыні.

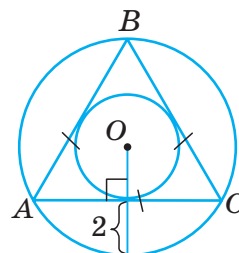
а) $\cup AB = \cup BC = \cup AC$;
 $R = ?$



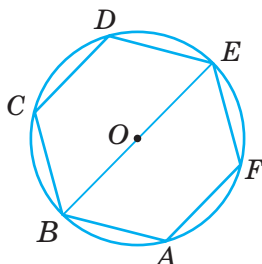
б) $ON = ?$



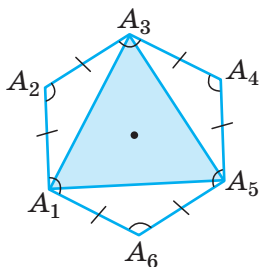
в) $OA = ?$



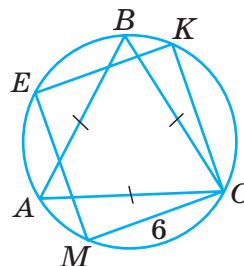
г) $ABCDEF$ — правільны шасцівугольнік,
 $BE > AF$ на 6;
 $P_{ABCDEF} = ?$



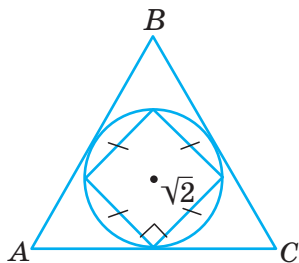
д) $S_{A_1 A_3 A_5} = 12$;
 $S_{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6} = ?$



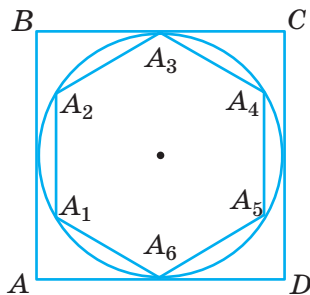
е) $CMEK$ — квадрат;
 $S_{\triangle ABC} = ?$



- ж) $\triangle ABC$ —
роўнастаронні;
 $S_{\triangle ABC}$ — ?

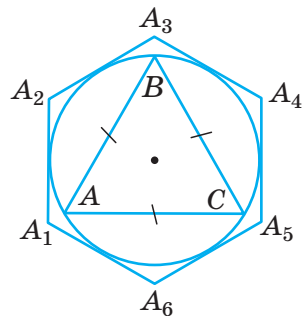


- з) $ABCD$
і $A_1A_2\dots A_6$ —
правільныя
многовугольнікі;
 $S_{ABCD} = 16$;
 $S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$ — ?



Рыс. 238

- і) $A_1A_2\dots A_6$ —
правільны
шасцівугольнік,
 $P_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} = 12$;
 $P_{\triangle ABC}$ — ?



- 15.2.** а) Старана правільнага трохвугольніка ў 2 разы большая за старану правільнага шасцівугольніка. Знайдзіце адносіну радыуса апісанай каля гэтага трохвугольніка акружнасці да радыуса апісанай каля шасцівугольніка акружнасці.
б) Радыусы акружнасцей, упісаных у правільныя шасцівугольнік і трохвугольнік, роўныя. Знайдзіце адносіну старон гэтых шасцівугольніка і трохвугольніка.
- 15.3.** а) Перыметр правільнага трохвугольніка, упісанага ў акружнасць, роўны 18 см. Знайдзіце перыметр правільнага чатырохвугольніка, апісанага каля гэтай акружнасці.
б) Перыметр правільнага чатырохвугольніка, упісанага ў акружнасць, роўны 16 см. Знайдзіце перыметр правільнага трохвугольніка, апісанага каля гэтай акружнасці.
- 15.4.** а) Радыус акружнасці, упісанай у правільны шасцівугольнік, роўны $2\sqrt{3}$. Знайдзіце старану правільнага чатырохвугольніка, апісанага каля гэтай акружнасці.

б) Радыус акружнасці, упісанай у правільны чатырохвугольнік, роўны 2. Знайдзіце старану правільнага шасцівугольніка, апісанага каля акружнасці, якая праходзіць праз усе вяршыні гэтага правільнага чатырохвугольніка.

15.5. а) Дакажыце, што плошча правільнага ўпісанага ў акружнасць шасцівугольніка роўна $\frac{3}{4}$ плошчы правільнага шасцівугольніка, апісанага каля гэтай жа акружнасці.

б) Дакажыце, што плошча раўнабедранага трохвугольніка, аснова якога роўна старане правільнага ўпісанага ў акружнасць чатырохвугольніка, а бакавая старана — старане правільнага трохвугольніка, упісанага ў акружнасць таго ж радыуса, роўна квадрату радыуса, павялічанаму ў $\frac{\sqrt{5}}{2}$ раза.

15.6. а) У акружнасці радыусам 5 см хорда CM і дыяметр AB узаемна перпендыкулярныя і перасякаюцца ў пункце P , прычым $AP : PB = 3 : 1$. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ACM .

б) Дыяметр AE і хорда CK акружнасці ўзаемна перпендыкулярныя і перасякаюцца ў пункце T , прычым $ET : AT = 1 : 3$. Знайдзіце радыус акружнасці, калі перыметр трохвугольніка ACK роўны $18\sqrt{3}$ см.

15.7. а) У квадрат упісана акружнасць, а ў яе — правільны шасцівугольнік, плошча якога роўна $18\sqrt{3}$. Знайдзіце плошчу квадрата.

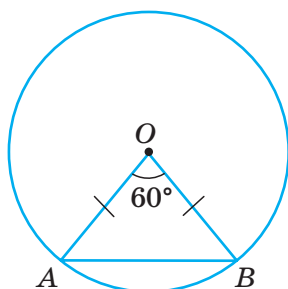
б) У правільны трохвугольнік упісана акружнасць, а ў яе — правільны шасцівугольнік, плошча якога роўна $18\sqrt{3}$. Знайдзіце плошчу правільнага трохвугольніка.

- 15.8.** а) $ABCDMN$ — правільны шасцівугольнік. Плошча трохвугольніка ABC роўна 5. Знайдзіце плошчу шасцівугольніка.
- б) Плошча правільнага шасцівугольніка $ABCDMN$ роўна 60. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $ACDM$.
- 15.9.** а) Меншая дыяганаль правільнага шасцівугольніка роўна $6\sqrt{3}$ см. Знайдзіце перыметр шасцівугольніка.
- б) Меншая дыяганаль правільнага шасцівугольніка роўна $9\sqrt{3}$ см. Знайдзіце яго большую дыяганаль.
-  **15.10.** а) У правільны трохвугольнік са стараной 6 см упісана акружнасць. Затым у гэты трохвугольнік упісалі яшчэ тры акружнасці, якія датыкаюцца да першай акружнасці і дзвюх старон трохвугольніка. Знайдзіце перыметр трохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца цэнтры гэтых трох акружнасцей.
- б) У правільны трохвугольнік, старана якога роўна 8 см, упісаны тры роўныя акружнасці, якія парамі датыкаюцца адна да адной. Кожная з іх датыкаецца да дзвюх старон дадзенага трохвугольніка. Знайдзіце радыус гэтых акружнасцей.
-  **15.11.** На старанах квадрата па-за ім пабудаваны правільныя трохвугольнікі. Іх вяршыні, што не з'яўляюцца вяршынямі квадрата, паслядоўна злучаны. Знайдзіце перыметр атрыманага такім чынам чатырохвугольніка, калі старана дадзенага квадрата роўна 5.

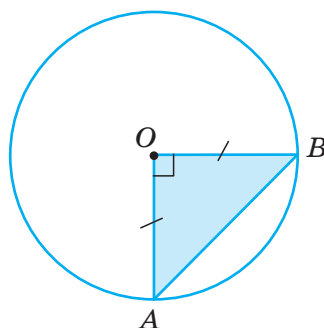
§ 16. Знаходжанне даўжыні акружнасці і плошчы круга

- 16.1.** Выкарыстаўшы даныя рысункаў 239, а) — ж), знайдзіце невядомыя велічыні.

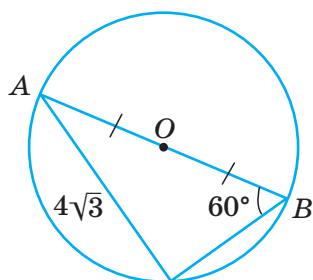
а) $P_{\triangle AOB} = 12$; $C_{\text{акр.}} = ?$



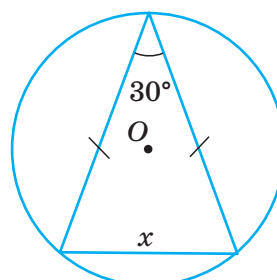
б) $S_{\triangle AOB} = 4,5$; $S_{\text{кр.}} = ?$



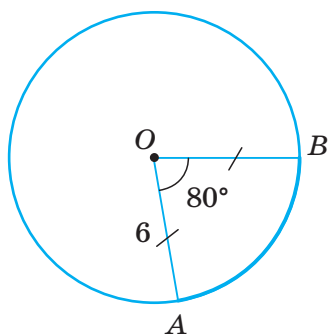
в) $S_{\text{кр.}} = ?$



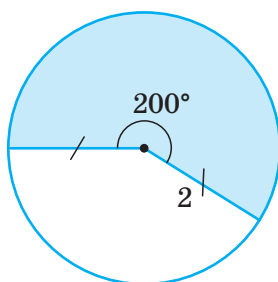
г) $C_{\text{акр.}} = 16\pi$; $x = ?$



д) $l_{AB} = ?$



е) $S_{\text{каляр. сектора}} = ?$



ж) $S_{\text{сегмента}} = ?$

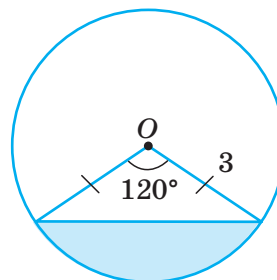


Рис. 239

- 16.2.** а) Знайдзіце даўжыню акружнасці, упісанай у квадрат, плошча якога роўна 6.
 б) Знайдзіце даўжыню акружнасці, упісанай у правільны трохвугольнік, плошча якога роўна $9\sqrt{3}$.
- 16.3.** а) Знайдзіце плошчу круга, абмежаванага акружнасцю, упісанай у правільны шасцівугольнік, калі плошча гэтага шасцівугольніка роўна $36\sqrt{3}$.
 б) Знайдзіце плошчу круга, абмежаванага ўпісанай у правільны шасцівугольнік акружнасцю, калі радыус апісанай каля гэтага шасцівугольніка акружнасці роўны 8.
- 16.4.** а) Даўжыня акружнасці роўна 24π см. Знайдзіце старану квадрата, упісанага ў гэту акружнасць.
 б) Плошча круга роўна 81π см². Знайдзіце старану правільнага трохвугольніка, упісанага ў гэты круг.
- 16.5.** а) Круг упісаны ў квадрат са стараной 10 см. Знайдзіце плошчу часткі квадрата, якая знаходзіцца па-за кругам.
 б) Круг упісаны ў правільны трохвугольнік са стараной 4 см. Знайдзіце плошчу часткі гэтага трохвугольніка, якая знаходзіцца па-за кругам.
- 16.6.** а) Знайдзіце прыбліжана даўжыню дугі акружнасці, калі яе градусная мера складае 15° , а дыяметр акружнасці роўны 16 см (пры вылічэннях прыміце $\pi \approx 3$).
 б) Знайдзіце прыбліжана даўжыню дугі акружнасці, калі яе градусная мера складае 125° , а дыяметр акружнасці роўны 6 см (пры вылічэннях прыміце $\pi \approx 3$).
- 16.7.** а) Знайдзіце прыбліжана плошчу сектара круга, калі яго градусная мера складае 66° , а дыяметр круга роўны $4\sqrt{5}$ см (пры вылічэннях прыміце $\pi \approx 3$).
 б) Знайдзіце прыбліжана плошчу сектара круга, калі яго градусная мера складае 170° , а дыяметр круга роўны $4\sqrt{3}$ см (пры вылічэннях прыміце $\pi \approx 3$).

- 16.8.** а) Знайдзіце градусную меру дугі акружнасці радыусам 10, калі даўжыня гэтай дугі роўна 4π .
б) Знайдзіце градусную меру сектара круга радыусам 6, калі плошча гэтага сектара роўна 8π .
- 16.9.** а) Градусная мера дугі акружнасці радыусам 10 см роўна 288° . Знайдзіце дыяметр акружнасці, даўжыня якой роўна даўжыні дадзенай ва ўмове дугі.
б) Градусная мера дугі акружнасці з дыяметрам 8 см роўна 18° . Знайдзіце радыус акружнасці, даўжыня якой роўна даўжыні дадзенай ва ўмове дугі.
- 16.10.** а) Плошча сектара круга з градуснай мерай 54° роўна $3\pi \text{ см}^2$. Знайдзіце даўжыню дугі акружнасці, якая абмяжоўвае гэты сектар.
б) Даўжыня дугі акружнасці з градуснай мерай 216° роўна $3\pi \text{ см}$. Знайдзіце плошчу сектара круга таго ж радыуса, абмежаванага гэтай дугой.
- 16.11.** а) У акружнасць упісаны квадрат, у яго ўпісана акружнасць, у якую ўпісаны правільны трохвугольнік са стараной $\sqrt{3} \text{ см}$. Знайдзіце плошчу часткі круга, абмежаванага большай з акружнасцей, якая знаходзіцца па-за квадратам.
б) У акружнасць радыусам 2 см упісаны правільны трохвугольнік, у яго ўпісана акружнасць, у якую ўпісаны квадрат. Знайдзіце плошчу часткі круга, абмежаванага меншай акружнасцю, якая знаходзіцца па-за квадратам.
- 16.12.** а) У акружнасці даўжынёй $72\pi \text{ см}$ праведзена хорда, якая сцягвае дугу ў 90° . Знайдзіце даўжыню гэтай хорды.
б) У акружнасці даўжынёй $24\pi \text{ см}$ праведзена хорда, роўная 12 см. Знайдзіце градусную меру большай з дуг, якія сцягвае гэта хорда.

16.13. а) Радыусы дзвюх канцэнтрычных акружнасцей роўны 4 і 6. Знайдзіце адносіну плошчы кольца да плошчы круга, абмежаванага меншай акружнасцю.

б) Радыусы дзвюх канцэнтрычных акружнасцей роўны $\sqrt{5}$ і 5. Знайдзіце адносіну плошчы кольца да плошчы круга, абмежаванага большай акружнасцю.

16.14. а) Знайдзіце плошчу сегмента круга, дыяметр якога роўны 8 см, калі хорда, якая абмяжоўвае гэты сегмент, роўна 4 см.

б) Знайдзіце плошчу сегмента круга, дыяметр якога роўны 6 см, калі хорда, якая абмяжоўвае гэты сегмент, роўна $3\sqrt{2}$ см.

16.15. а) У крузе радыусам 4 праведзены дзве паралельныя хорды так, што цэнтр круга ляжыць паміж імі. Адна з іх сцягвае дугу ў 60° , а другая — у 120° . Знайдзіце плошчу часткі круга, заключанай паміж хордамі.

б) У крузе радыусам 2 праведзены дзве паралельныя хорды з аднаго боку ад цэнтра. Адна з іх сцягвае дугу ў 60° , а другая — у 120° . Знайдзіце плошчу часткі круга, заключанай паміж хордамі.

 **16.16.** а) Дадзены паўкруг з дыяметрам AC . Хорды AK і CP адсякаюць дугі ў 30° . Знайдзіце плошчу фігуры, абмежаванай дугой KP і хордамі AK і AP , калі плошча паўкруга роўна 9 см^2 .

б) Дадзены паўкруг з дыяметрам AB . Градусныя меры дуг AC і BP роўны 45° кожная. Знайдзіце плошчу паўкруга, калі плошча фігуры, абмежаванай хордамі AC і AP і дугой CP , роўна 12 см^2 .

-  **16.17.** а) Тры акружнасці радыусамі 2 см, 4 см, 6 см парамі датыкаюцца адна да адной знешнім чынам. Знайдзіце даўжыню акружнасці, якая праходзіць праз усе тры пункты дотыку гэтых акружнасцей.
- б) Тры кругі радыусамі 2 см, 3 см, 10 см парамі датыкаюцца адзін да аднаго знешнім чынам. Знайдзіце плошчу круга, які праходзіць праз усе тры пункты дотыку гэтых акружнасцей.
-  **16.18.** Знайдзіце плошчу круга, у сегмент якога, што адпавядае хордзе даўжынёй 6, упісаны квадрат са стараной 2 (дзве вяршыні квадрата ляжаць на дузе сегмента, дзве — на хордзе).
-  **16.19.** У паўкруг радыусам 8 см упісана акружнасць, якая датыкаецца да дыяметра BP у пункце K , прычым $BK : KP = 1 : 3$. Знайдзіце даўжыню ўпісанай акружнасці.
-  **16.20.** Да дзвюх акружнасцей радыусамі 3 і 1, якія датыкаюцца адна да адной знешнім чынам, праведзена агульная знешняя датычная. Знайдзіце плошчу фігуры, абмежаванай акружнасцямі і датычнай.

ПАЎТАРЭННЕ КУРСА ГЕАМЕТРЫІ 7—9-х КЛАСАЎ

Трохвугольнікі

1. а) Велічыні вуглоў трохвугольніка ўтвараюць арыфметычную прагрэсію. Знайдзіце найбольшы з вуглоў, калі найменшы па велічыні вугал роўны 50° .
б) Найбольшы з вуглоў трохвугольніка ў 11 разоў большы за найменшы вугал. Знайдзіце найменшы па велічыні вугал трохвугольніка, калі вядома, што велічыні вуглоў трохвугольніка ўтвараюць арыфметычную прагрэсію.
2. а) Вугал пры вяршыні раўнабедранага трохвугольніка ў 3 разы меншы за знешні вугал пры аснове гэтага трохвугольніка. Знайдзіце вугал пры вяршыні трохвугольніка.
б) Вугал пры вяршыні раўнабедранага трохвугольніка на 15° меншы за знешні вугал пры аснове гэтага трохвугольніка. Знайдзіце ўнутраны вугал пры аснове трохвугольніка.
3. а) У трохвугольніку праведзены дзве бісектрысы. Адзін з вуглоў, утвораных пры іх перасячэнні, роўны 115° . Знайдзіце вугал трохвугольніка, з вяршыні якога не праведзена бісектрыса.
б) Адзін з вуглоў трохвугольніка роўны 106° . З вяршынь дзвюх іншых вуглоў праведзены бісектрысы трохвугольніка. Знайдзіце востры вугал, які ўтвараецца пры іх перасячэнні.
4. а) Дакажыце, што калі на старанах вугла ад вяршыні адкла-сці адрэзкі роўнай даўжыні і з атрыманых пунктаў узвесці перпендыкуляры да старон вугла, то пункт перасячэння гэтых перпендыкуляраў будзе належаць бісектрысе вугла.

б) Дакажыце, што прамая, якая змяшчае медыяну трохвугольніка, роўнааддалена ад дзвюх яго вяршынь.

5. а) Выберыце наборы даўжынь адрэзкаў, якія не могуць быць старанамі трохвугольніка:

1) 4 см, 8 см, 9 см; 2) 12 см, 12 см, 25 см;

3) 7 см, 8 см, 15 см; 4) 3 см, $\sqrt{2}$ см, 2 см.

б) Выберыце наборы даўжынь адрэзкаў, якія могуць быць старанамі трохвугольніка:

1) 1 см, $\sqrt{3}$ см, 2 см; 2) 10 см, 10 см, 19 см;

3) 6 см, 5 см, 11 см; 4) 3 см, 6 см, 2 см.

6. а) Знайдзіце плошчу трохвугольніка, утворанага сярэднімі лініямі прамавугольнага трохвугольніка з гіпатэнузай 26 см і катэтам 24 см.

б) Медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, роўна 8,5 см, а адзін з катэтаў гэтага трохвугольніка — 8 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, утворанага сярэднімі лініямі дадзенага трохвугольніка.

7. а) У трохвугольніку ABC $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC = 12$ см. Знайдзіце праекцыю катэта AC на гіпатэнузу.

б) У трохвугольніку ABC $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Праекцыя катэта AB на гіпатэнузу роўна 15 см. Знайдзіце гіпатэнузу трохвугольніка.

8. а) У прамавугольным трохвугольніку вышыня, праведзеная да гіпатэнузы, роўна $2\sqrt{7}$ і дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, рознасць даўжынь якіх роўна 12. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

- б) У прамавугольным трохвугольніку вышыня, праведзеная да гіпатэнузы, дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, рознасць даўжынь якіх роўна 10. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі меншы катэт роўны $2\sqrt{7}$.
9. а) У прамавугольным трохвугольніку ABC $\angle C = 90^\circ$, CK — вышыня, $\sin \angle A = \frac{5}{13}$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC , калі плошча трохвугольніка AKC роўна 1,44.
- б) У прамавугольным трохвугольніку ABC $\angle C = 90^\circ$, CH — вышыня, $\cos \angle A = \frac{5}{13}$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC , калі плошча трохвугольніка AHC роўна 2,5.
10. а) Медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, разбівае яго на два трохвугольнікі з перыметрамі 16 і 18. Знайдзіце гіпатэнузу трохвугольніка.
- б) Медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, разбівае яго на два трохвугольнікі з перыметрамі 25 і 18. Знайдзіце перыметр дадзенага трохвугольніка.
11. а) Катэт прамавугольнага трохвугольніка роўны 18 см. Пункт, які належыць дадзенаму катэту, знаходзіцца на адлегласці 8 см ад гіпатэнузы і ад другога катэта. Знайдзіце перыметр трохвугольніка.
- б) Пункт, які належыць катэту прамавугольнага трохвугольніка, дзеліць яго ў адносіне 3 : 5, лічачы ад вяршыні прамога вугла, і роўнааддалены ад гіпатэнузы і другога катэта. Знайдзіце перыметр дадзенага трохвугольніка, калі гіпатэнузу роўна 30 см.
12. а) Знайдзіце дыяметр акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, калі радыус акружнасці, упісанай у яго, роўны 6, а адзін з катэтаў — 20.

б) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, калі радыус акружнасці, упісанай у яго, роўны 4, а адзін з адрэзкаў, на якія гіпатэнуза дзеліцца пунктам дотыку з упісанай акружнасцю, роўны 6.

13. а) У рознастароннім трохвугольніку сярэдні па велічыні вугал роўны 60° . Найменшая старана трохвугольніка ў 4 разы карацейшая за найбольшую старану. Знайдзіце тангенс найменшага вугла трохвугольніка.

б) У рознастароннім трохвугольніку сярэдні па велічыні вугал роўны 60° . Найбольшая старана трохвугольніка ў 5 разоў большая за найменшую старану. Знайдзіце катангенс найменшага вугла трохвугольніка.

14. а) У трохвугольніку HKP $HK = 8$ см, $KP = 12$ см, $HP = 15$ см, KO — бісектрыса. Знайдзіце рознасць даўжынь адрэзкаў OP і HO .

б) У трохвугольніку ABC $AB : BC = 3 : 4$, $AC = 14$ см, BK — бісектрыса. Знайдзіце рознасць даўжынь адрэзкаў KC і AK .

15. а) Адна са старон трохвугольніка роўна 8 см. Адлегласць ад пункта перасячэння медыян трохвугольніка да гэтай стараны роўна 4 см. Знайдзіце плошчу дадзенага трохвугольніка.

б) Плошча трохвугольніка роўна 30 см^2 , адна з яго старон — 12 см. Знайдзіце адлегласць ад пункта перасячэння медыян трохвугольніка да гэтай стараны.

16. а) Адна са старон трохвугольніка роўна 26 см, а медыяны, праведзеныя да дзвюх іншых старон, роўны 30 см і 39 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

- б) Адна са старон трохвугольніка роўна 20 см, а медыяны, праведзеныя да дзвюх іншых старон, роўны 18 см і 24 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.
17. а) Стораны трохвугольніка роўны 6 см, 7 см і 8 см. Знайдзіце сінус найбольшага вугла трохвугольніка.
- б) У трохвугольніку ABC $\angle B > 90^\circ$, $BC = 2$ см, $AB = 10$ см, $\sin \angle B = 0,6$. Знайдзіце даўжыню стараны AC .
18. а) У трохвугольніку ABC $BC = 6$ см, $\cos \angle C = \frac{4}{9}$, $\sin \angle A = \frac{\sqrt{65}}{12}$. Знайдзіце даўжыню стараны AB .
- б) У трохвугольніку ABC $AB = 4$ см, $\cos \angle A = \frac{3}{8}$, $\sin \angle C = \frac{\sqrt{55}}{10}$. Знайдзіце даўжыню стараны BC .
19. а) У раўнабедраным трохвугольніку бакавая старана ў 1,5 раза большая за радыус апісанай каля яго акружнасці. Знайдзіце сінус вугла пры аснове трохвугольніка.
- б) Аснова раўнабедранага трохвугольніка ў 1,5 раза меншая за радыус апісанай каля яго акружнасці. Знайдзіце сінус вугла пры вяршыні трохвугольніка.
20. а) Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка роўна 40. Знайдзіце аснову трохвугольніка, калі цэнтр упісанай у яго акружнасці дзеліць вышыню, праведзеную да асновы, у адносіне 8 : 3.
- б) Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 20. Знайдзіце бакавую старану трохвугольніка, калі цэнтр упісанай у яго акружнасці дзеліць вышыню, праведзеную да асновы, у адносіне 7 : 2.
21. а) У трохвугольніку ABC $AB = BC = 12$ см, BK — вышыня трохвугольніка. Пункт P дзеліць BK у адносіне 1 : 2, лічачы ад вяршыні B . Праз пункт P праведзена прамая, па-

ралельная старане BC . Знайдзіце адрэзак гэтай прамой, заключаны ўнутры трохвугольніка ABC .

б) На вышыні CP раўнабедранага трохвугольніка ABC ($AC = CB$) адзначаны пункт T так, што $PT : PC = 4 : 5$. Праз пункт T праведзена прамая, паралельная старане AC . Знайдзіце адрэзак гэтай прамой, канцы якога ляжаць на старанах трохвугольніка ABC , калі $CB = 20$ см.

22. а) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка са старанамі 36 см і 18 см.

б) Знайдзіце дыяметр акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка са старанамі 8 см і 20 см.

23. а) Плошчы двух падобных прамавугольных трохвугольнікаў роўны $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ і $\frac{225\sqrt{3}}{8}$. Знайдзіце гіпатэнузу большага трохвугольніка, калі адзін з катэтаў меншага трохвугольніка роўны $5\sqrt{3}$.

б) Адносіна плошчаў двух падобных прамавугольных трохвугольнікаў роўна 2 : 9. Знайдзіце гіпатэнузу большага трохвугольніка, калі катэты меншага трохвугольніка роўны $4\sqrt{2}$ і $3\sqrt{2}$.

24. а) Дзве меншыя стараны тупавугольнага трохвугольніка роўны 3 і 8. Плошча трохвугольніка роўна $6\sqrt{3}$. Знайдзіце даўжыню большай стараны трохвугольніка.

б) Дзве стараны востравугольнага трохвугольніка роўны 4 і 3. Плошча трохвугольніка роўна $3\sqrt{3}$. Знайдзіце даўжыню трэцяй стараны трохвугольніка.

25. а) У трохвугольніку ABC пункт P ляжыць на старане AC , а пункт E — на старане AB . Вядома, што $AP = 2PC$ і $AE = 3BE$. Знайдзіце адносіну плошчаў трохвугольнікаў ABC і BPE .
- б) У трохвугольніку ABC пункт P — сярэдзіна стараны AC , а пункт E ляжыць на старане AB так, што $2AE = 3BE$. Знайдзіце адносіну плошчаў трохвугольнікаў ABC і BPE .
26. а) Дадзены трохвугольнік ABC . На старане AC адзначаны пункт K , а на старане BC — пункт M так, што $CK : AC = 5 : 6$, $S_{\triangle KMC} : S_{\triangle KMB} = 5 : 6$. Знайдзіце адносіну $CM : MB$.
- б) Дадзены трохвугольнік ABC . На старане AB адзначаны пункт T , а на старане CB — пункт E так, што $AT : TB = 2 : 3$, $S_{\triangle CET} : S_{\triangle TBE} = 5 : 4$. Знайдзіце адносіну $CE : BE$.
27. а) У трохвугольніку ABC на старане AC адзначаны пункт M , а на старане BC — пункт K так, што $AM = \frac{2}{5}AC$, $BK = \frac{1}{3}BC$. Адрэзкі BM і AK перасякаюцца ў пункце O . Знайдзіце адносіну $AO : OK$.
- б) У трохвугольніку ABC на старане AB адзначаны пункт T , а на старане BC — пункт P так, што $AT = 4BT$, $5PC = 3BP$. Адрэзкі AP і CT перасякаюцца ў пункце O . Знайдзіце адносіну $CO : OT$.
28. а) У трохвугольніку ABC на старанах AB і BC адзначаны пункты P і E адпаведна, прычым $AP : BP = 11 : 1$, $CE : BE = 2 : 1$, $\angle BAE = \angle BCP$, а $\angle ABC = 60^\circ$. Знайдзіце адносіну радыуса акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC , да радыуса акружнасці, упісанай у гэты трохвугольнік.
- б) У трохвугольніку PKE на старанах PK і KE адзначаны пункты C і A адпаведна, прычым $PC : CK = 10 : 1$, $KA : AE = 2 : 9$, $\angle APK = \angle CEK$, а $\angle PKE = 45^\circ$. Знайдзіце адносіну

радыуса акружнасці, апісанай каля трохвугольніка PKE , да радыуса акружнасці, упісанай у гэты трохвугольнік.

29. а) Трохвугольнік ABC , плошча якога роўна 60, падзелены на чатыры роўныя па плошчы часткі трыма адрэзкамі, паралельнымі старане AB . Знайдзіце адлегласць ад вяршыні C да адрэзка найменшай даўжыні, калі $AB = 10$.

б) Трохвугольнік ABC , плошча якога роўна 80, падзелены на чатыры роўныя па плошчы часткі трыма адрэзкамі, паралельнымі старане AC . Вышыня трохвугольніка, праведзеная да стараны AC , роўна 10. Знайдзіце даўжыню найменшага з трох праведзеных адрэзкаў.

30. а) Вышыня трохвугольніка, роўная 4 см, дзеліць старану, да якой яна праведзена, на адрэзкі, што адносяцца як 1 : 8. Адрэзак, паралельны гэтай вышыні, дзеліць трохвугольнік на дзве роўнавялікія часткі. Знайдзіце даўжыню гэтага адрэзка.

б) У трохвугольніку праведзены адрэзак, перпендыкулярны адной са старон, так, што трохвугольнік дзеліцца на дзве роўнавялікія часткі. Даўжыня адрэзка роўна 6 см. Знайдзіце вышыню трохвугольніка, паралельную гэтаму адрэзку, ведаючы, што яна дзеліць старану, да якой праведзена, на адрэзкі, адносіна якіх роўна 1 : 3.

31. а) BP — вышыня трохвугольніка ABC , пункт E — сярэдзіна стараны BC , $AB = 30$, $BC = 26$, $AC = 28$. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка BPE .

б) BH — вышыня трохвугольніка ABC , пункт E — сярэдзіна стараны BC , $AB = 10\sqrt{10}$, $AC = 26$, $BC = 34$. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік BEH .

- 32*.** а) У трохвугольніку ABC бісектрыса BM і медыяна AE ўзаемна перпендыкулярныя і маюць даўжыню, роўную 4 см. Знайдзіце большую са старон трохвугольніка ABC .
- б) У трохвугольніку ABC бісектрыса BK і медыяна AN узаемна перпендыкулярныя і роўны 3 см і 6 см адпаведна. Знайдзіце найбольшую са старон трохвугольніка ABC .
- 33*.** Дакажыце, што калі даўжыні старон трохвугольніка ўтвараюць арыфметычную прагрэсію, то адрэзак прамой, які злучае пункт перасячэння медыян з цэнтрам упісанай у трохвугольнік акружнасці, паралельны сярэдняй па даўжыні старане.

Чатырохвугольнікі

- 34.** а) Адна са старон паралелаграма роўна 3 см, а адзін з вуглоў — 150° . Знайдзіце перыметр паралелаграма, калі яго плошча роўна 6 см^2 .
- б) Плошча паралелаграма роўна $8\sqrt{3} \text{ см}^2$. Знайдзіце перыметр паралелаграма, калі адна з яго старон роўна 2 см, а адзін з вуглоў — 120° .
- 35.** а) У паралелаграме $ABCK$ $AB = 6 \text{ см}$, BM — бісектрыса вугла B , прычым пункт M дзеліць старану AK у адносіне $2 : 1$, лічачы ад пункта A . Знайдзіце перыметр паралелаграма.
- б) У паралелаграме $EKOP$ $EP = 12 \text{ см}$, EA — бісектрыса вугла E , прычым пункт A ляжыць на старане OK і адрэзак KA большы за AO на 2 см. Знайдзіце перыметр паралелаграма.
- 36.** а) Знайдзіце плошчу паралелаграма, калі яго дыяганалі роўны 4 см і 6 см, а адносіна двух яго вуглоў — $1 : 2$.
- б) Знайдзіце плошчу паралелаграма, калі яго дыяганалі роўны 8 см і 6 см, а адносіна двух яго вуглоў — $1 : 5$.

- 37*.** а) Чатырохвугольнік $ABCK$ такі, што каля яго можна апісаць і ў яго можна ўпісаць акружнасці. Рознасць даўжынь старон AK і BC роўна рознасці даўжынь старон AB і CK . Дакажыце, што дыяганаль AC — дыяметр апісанай акружнасці.
- б) Каля чатырохвугольніка $ABCE$ апісана акружнасць. Прадаўжэнні хорды AB за пункт B і хорды CE за пункт C перасякаюцца ў пункце P , прычым вугал APE роўны 60° . Вугал ABE ў 3 разы большы за вугал BAC . Дакажыце, што AE — дыяметр акружнасці.
- 38.** а) Стораны паралелаграма роўны 1 см і 2 см, а адна з дыяганалей — $\sqrt{7}$ см. Знайдзіце меншую вышыню паралелаграма.
- б) Стораны паралелаграма роўны 5 см і $2\sqrt{3}$ см, а адна з дыяганалей — $\sqrt{7}$ см. Знайдзіце большую вышыню паралелаграма.
- 39.** а) У паралелаграме $ABCD$ вугал CAD роўны 30° , вяршыня B аддалена ад дыяганалі AC на 3 см, а ад стараны AD — на 7 см. Знайдзіце плошчу паралелаграма.
- б) У паралелаграме $ABCD$ вугал CAD роўны 45° , вяршыня B аддалена ад дыяганалі AC на 2 см, а ад стараны AD — на $2\sqrt{2}$ см. Знайдзіце плошчу паралелаграма.
- 40.** а) Адна з дыяганалей паралелаграма з'яўляецца яго вышынёй, а вуглы паралелаграма адносяцца як 3 : 1. Знайдзіце меншую старану паралелаграма, калі яго перыметр роўны $4(1 + \sqrt{2})$ см.
- б) Перыметр паралелаграма роўны 30 см. Дыяганаль паралелаграма перпендыкулярна яго старане. Знайдзіце большую старану паралелаграма, калі яго вуглы адносяцца як 1 : 2.

41. а) Стораны паралелаграма роўны $7\sqrt{2}$ і $5\sqrt{2}$. Востры вугал паралелаграма роўны меншаму вуглу паміж яго дыяганаллямі. Знайдзіце большую дыяганаль паралелаграма.
- б) Стораны паралелаграма роўны $7\sqrt{2}$ і $6\sqrt{2}$. Востры вугал паралелаграма роўны меншаму вуглу паміж яго дыяганаллямі. Знайдзіце суму даўжынь дыяганалей паралелаграма.
42. а) У квадрат, плошча якога роўна 18, упісаны прамавугольнік так, што на кожнай старане квадрата ляжыць адна вяршыня прамавугольніка. Даўжыні старон прамавугольніка адносяцца як 2 : 1. Знайдзіце плошчу прамавугольніка.
- б) У квадрат, плошча якога роўна 32, упісаны прамавугольнік так, што на кожнай старане квадрата ляжыць адна вяршыня прамавугольніка. Даўжыні старон прамавугольніка адносяцца як 4 : 1. Знайдзіце плошчу прамавугольніка.
43. а) Дыяганаль прамавугольніка роўна 10, а косінус вугла паміж дыяганаллямі роўны 0,8. Знайдзіце плошчу прамавугольніка.
- б) Плошча прамавугольніка роўна 40, а косінус вугла паміж дыяганаллямі роўны 0,6. Знайдзіце даўжыню дыяганалі прамавугольніка.
44. а) Большая старана прамавугольніка роўна $\sqrt{10}$, а косінус вугла паміж дыяганаллямі роўны 0,25. Знайдзіце даўжыню дыяганалі.
- б) Меншая старана прамавугольніка роўна $2\sqrt{3}$, а косінус вугла паміж дыяганаллямі роўны $-\frac{1}{3}$. Знайдзіце даўжыню дыяганалі.

45. а) Знайдзіце старану ромба, калі яго плошча роўна 32, а адзін з вуглоў роўны 150° .
б) Знайдзіце перыметр ромба, калі адзін з яго вуглоў роўны 45° , а плошча роўна $18\sqrt{2}$.
46. а) Вышыня ромба роўна 5 см, сінус вугла ромба роўны 0,4. Знайдзіце плошчу ромба.
б) Вышыня ромба роўна 6 см, сінус вугла ромба роўны 0,6. Знайдзіце перыметр ромба.
47. а) Перыметр ромба роўны 16 см, а адносіна велічынь вуглоў ромба — $2 : 1$. Знайдзіце плошчу ромба.
б) Адзін з вуглоў ромба ў 2 разы большы за другі. Знайдзіце даўжыню большай дыяганалі ромба, калі яго меншая дыяганаль роўна 4 см.
48. а) У ромбе $ABCD$ вугал A — востры, BH — вышыня, косінус вугла DBH роўны $\frac{2}{3}$. Знайдзіце плошчу ромба, калі $BH = 4\sqrt{5}$.
б) У ромбе $ABCD$ вугал A — востры, BH — вышыня, косінус вугла DBH роўны $\frac{2}{3}$. Знайдзіце плошчу ромба, калі $BD = 6\sqrt{5}$.
49. а) Акружнасць, упісаная ў ромб, пунктам дотыку дзеліць яго старану ў адносіне $1 : 4$. Знайдзіце сінус вугла ромба.
б) У ромб, сінус вугла якога роўны 0,6, упісана акружнасць. Знайдзіце, у якой адносіне пункт дотыку дзеліць старану ромба.
50. а) У ромб упісана акружнасць. Старана ромба пунктам дотыку дзеліцца на адрэзкі, даўжыні якіх роўны 16 см і 9 см. Знайдзіце плошчу ромба.

- б) У ромб упісана акружнасць. Адзін з адрэзкаў, на якія старана ромба дзеліцца пунктам дотыку, роўны 4 см. Знайдзіце плошчу ромба, калі вышыня ромба роўна 12 см.
- 51.** а) Дыяганалі ромба, плошча якога роўна 24, адносяцца як 3 : 4. Знайдзіце вышыню ромба.
- б) Дыяганалі ромба, плошча якога роўна $\frac{20\sqrt{3}}{3}$, адносяцца як $1 : \sqrt{3}$. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у ромб.
- 52.** а) Перыметр ромба роўны 68. Перыметр чатырохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца сярэдзіны старон ромба, роўны 46. Знайдзіце плошчу гэтага чатырохвугольніка.
- б) Сярэдзіны старон ромба паслядоўна злучылі і атрымалі чатырохвугольнік з перыметрам 56. Знайдзіце плошчу ромба, калі яго перыметр роўны 80.
- 53.** а) Вышыня ромба роўна 4, а косінус вугла паміж вышынёй і большай дыяганаллю ромба роўны 0,6. Знайдзіце плошчу ромба.
- б) Вышыня ромба роўна 2, а тангенс вугла паміж вышынёй і большай дыяганаллю ромба роўны $\frac{4}{3}$. Знайдзіце плошчу ромба.
- 54.** а) Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапецыі, асновы якой роўны 4 см і 12 см, а востры вугал роўны 60° .
- б) Адзін з вуглоў раўнабедранай трапецыі роўны 30° . Знайдзіце плошчу трапецыі, калі яе бакавая старана роўна $8\sqrt{3}$ см, а меншая аснова — 6 см.
- 55.** а) Бакавая старана раўнабедранай трапецыі роўна 5 см, а велічыні вуглоў трапецыі адносяцца як 2 : 1. Даўжыня адрэзка, які злучае вяршыню тупога вугла трапецыі з сярэдзінай большай асновы, таксама роўна 5 см. Знайдзіце перыметр трапецыі.

- б) У раўнабедранай трапецыі меншая аснова роўна бакавой старане, а адносіна большай асновы да бакавой стараны — $2 : 1$. Знайдзіце велічыню вострага вугла трапецыі.
- 56.** а) Большая аснова раўнабедранай трапецыі роўна $6\sqrt{3}$, а вугал пры гэтай аснове — 75° . Дыяганаль трапецыі ўтварае з асновай вугал 45° . Знайдзіце меншую аснову трапецыі.
- б) Меншая аснова раўнабедранай трапецыі роўна 8, адзін з вуглоў трапецыі — 75° . Дыяганаль трапецыі ўтварае з асновай вугал 45° . Знайдзіце большую аснову трапецыі.
- 57.** а) Асновы трапецыі роўны 18 см і 4 см. Знайдзіце даўжыню адрэзка, які злучае сярэдзіны дыяганалей трапецыі.
- б) Меншая аснова трапецыі роўна 6 см, а даўжыня адрэзка, які злучае сярэдзіны дыяганалей трапецыі, роўна 5 см. Знайдзіце большую аснову трапецыі.
- 58.** а) У раўнабедранай трапецыі з вяршыні тупога вугла праведзена вышыня. Большы з адрэзкаў, на якія дзеліцца большая аснова гэтай вышынёй, роўны 12 см. Знайдзіце плошчу трапецыі, калі яе вышыня роўна 5 см.
- б) У раўнабедранай трапецыі з вяршыні тупога вугла праведзена вышыня. Большы з адрэзкаў, на якія дзеліцца большая аснова гэтай вышынёй, роўны 10 см. Знайдзіце вышыню трапецыі, калі яе плошча роўна 60 см^2 .
- 59.** а) Дыяганалі трапецыі роўны 4 см і 6 см, а сярэдняя лінія — 3 см. Знайдзіце плошчу трапецыі.
- б) Дыяганалі трапецыі роўны 2 см і 8 см, а сярэдняя лінія — 4 см. Знайдзіце плошчу трапецыі.
- 60.** а) У раўнабедранай трапецыі асновы роўны 10 і 6, а дыяганалі ўзаемна перпендыкулярныя. Знайдзіце плошчу трапецыі.

- б) Вышыня раўнабедранай трапецыі, дыяганалі якой узамежна перпендыкулярныя, роўна 15. Знайдзіце плошчу трапецыі.
- 61.** а) У раўнабедранай трапецыі большая аснова роўна 10, бакавая старана — $2\sqrt{10}$, а дыяганаль — $2\sqrt{15}$. Знайдзіце плошчу трапецыі.
- б) У раўнабедранай трапецыі дыяганаль і большая аснова маюць даўжыню 5, а бакавая старана трапецыі роўна 4. Знайдзіце плошчу трапецыі.
- 62.** а) Дыяганаль раўнабедранай трапецыі з'яўляецца бісектрысай яе тупога вугла. Меншая аснова трапецыі роўна 6, а бакавая старана — 10. Знайдзіце плошчу трапецыі.
- б) Дыяганаль раўнабедранай трапецыі з'яўляецца бісектрысай яе вострага вугла. Большая аснова трапецыі роўна 6, а бакавая старана — 4. Знайдзіце плошчу трапецыі.
- 63.** а) Праз пункт O перасячэння дыяганалей трапецыі праведзена прамая, паралельная асновам трапецыі. Дакажыце, што пункт O дзеліць папалам адрэзак, які адсякаецца ад прамой бакавымі старанамі трапецыі.
- б) Дакажыце, што ў трапецыі, дыяганалі якой з'яўляюцца бісектрысамі вуглоў пры адной з асноў, даўжыні трох старон роўныя.
- 64.** а) BC і AD — асновы трапецыі $ABCD$, прычым $AD > BC$, $\angle ABD = \angle BCD$, $CB = 6$, $DB = 9$. Знайдзіце аснову AD .
- б) $MNPK$ — трапецыя з асновамі MK і NP , прычым $MK > NP$, $\angle MNK = \angle NPK$, $NP = 4$, $NK = 6$. Знайдзіце аснову MK .
- 65.** а) У прамавугольнай трапецыі дыяганаль, роўная 8 см, з'яўляецца бісектрысай яе вострага вугла. Адлегласць ад

вяршыні тупога вугла трапецыі да гэтай дыяганалі роўна 3 см. Знайдзіце большую аснову трапецыі.

б) У прамавугольнай трапецыі дыяганаль, роўная $4\sqrt{6}$ см, з'яўляецца бісектрысай яе вострага вугла. Адлегласць ад вяршыні тупога вугла трапецыі да гэтай дыяганалі роўна 1 см. Знайдзіце вышыню трапецыі.

66. а) Даўжыня большай дыяганалі прамавугольнай трапецыі роўна $\sqrt{58}$, сярэдняя лінія — 5,5, а плошча — 16,5. Знайдзіце градусную меру вострага вугла трапецыі.

б) Даўжыня большай дыяганалі прамавугольнай трапецыі роўна $2\sqrt{19}$, сярэдняя лінія — 5, а плошча — $10\sqrt{3}$. Знайдзіце градусную меру вострага вугла трапецыі.

67. а) BC і AD — асновы трапецыі $ABCD$, прычым $AD > BC$, O — пункт перасячэння яе дыяганалей. Знайдзіце плошчу трапецыі $ABCD$, калі $BC : AD = 2 : 3$, а плошча трохвугольніка ABO роўна 15.

б) BC і AD — асновы трапецыі $ABCD$, прычым $AD > BC$, O — пункт перасячэння яе дыяганалей. Знайдзіце плошчу трапецыі $ABCD$, калі $AO : OC = 5 : 2$, а плошча трохвугольніка BOC роўна 8.

68. а) У трапецыі $ABCD$ бакавыя стораны AB і CD прадоўжаны да перасячэння ў пункце P . Знайдзіце даўжыню CD , калі $AB : AP = 15 : 22$, а $PD = 66$ см.

б) У трапецыі $ABCD$ бакавыя стораны AB і CD прадоўжаны да перасячэння ў пункце O . Знайдзіце даўжыню CD , калі $AB : OB = 12 : 7$, а $OD = 57$ см.

69. а) Вострыя вуглы трапецыі роўны 72° і 18° , асновы — 10 см і 26 см. Знайдзіце даўжыню адрэзка, які злучае сярэдзіны асноў трапецыі.

- б) Большая аснова трапецыі роўна 30 см, а вострыя вуглы роўны 64° і 26° . Знайдзіце меншую аснову трапецыі, калі даўжыня адрэзка, які злучае сярэдзіны яе асноў, роўна 11 см.
- 70.** а) Бісектрыса вострага вугла раўнабедранай трапецыі дзеліць бакавую старану на адрэзкі 20 см і 30 см, лічачы ад меншай асновы. Знайдзіце плошчу трапецыі, калі яе большая аснова роўна 66 см.
- б) Бісектрыса вострага вугла раўнабедранай трапецыі дзеліць бакавую старану на адрэзкі, адносіна якіх роўна 11 : 12, лічачы ад меншай асновы. Знайдзіце плошчу трапецыі, калі яе асновы роўны 2 см і 12 см.
- 71.** а) У трапецыі $ABCD$ з асновамі $AD = 12$ і $BC = 8$ на прамені BC адзначаны пункт P так, што прамень AP дзеліць трапецыю на дзве роўнавялікія часткі. Знайдзіце даўжыню адрэзка CP .
- б) У трапецыі $ABCD$ з асновамі $AD = 9$ і $BC = 6$ на прамені BC адзначаны пункт P так, што прамень AP дзеліць трапецыю на трохвугольнік і чатырохвугольнік, прычым плошча трохвугольніка ў 2 разы меншая за плошчу чатырохвугольніка. Знайдзіце даўжыню адрэзка CP .
- 72.** а) Дыяганалі трапецыі, даўжыня адной з якіх роўна 5, узаемна перпендыкулярныя. Знайдзіце плошчу трапецыі, калі яе вышыня роўна 4.
- б) Дыяганалі трапецыі, даўжыня адной з якіх роўна 13, узаемна перпендыкулярныя. Знайдзіце плошчу трапецыі, калі яе вышыня роўна 12.
- 73.** а) Сярэдняя лінія, роўная 10 см, дзеліць трапецыю на дзве часткі, плошчы якіх адносяцца як 3 : 5. Знайдзіце меншую аснову трапецыі.

б) Сярэдняя лінія дзеліць трапецыю на дзве часткі, плошчы якіх адносяцца як 3 : 4. Знайдзіце даўжыню сярэдняй лініі трапецыі, калі яе меншая аснова роўна 10 см.

74. а) У раўнабедраную трапецыю ўпісана акружнасць радыусам 2. Знайдзіце меншую старану гэтай трапецыі, калі яе плошча роўна 20.

б) Каля акружнасці дыяметрам $2\sqrt{6}$ апісана раўнабедраная трапецыя, плошча якой роўна $10\sqrt{6}$. Знайдзіце большую старану трапецыі.

75. а) У раўнабедраную трапецыю, адна з асноў якой роўна 4, упісана акружнасць радыусам 1. Знайдзіце перыметр трапецыі.

б) У раўнабедраную трапецыю, адна з асноў якой роўна 18, упісана акружнасць радыусам 3. Знайдзіце бакавую старану трапецыі.

76. а) У трапецыю ўпісана акружнасць радыусам 6. Пункт дотыку дзеліць большую аснову на адрэзкі 9 і 12. Знайдзіце плошчу трапецыі.

б) У трапецыю ўпісана акружнасць радыусам 4. Пункт дотыку дзеліць меншую аснову на адрэзкі 1 і 2. Знайдзіце плошчу трапецыі.

77. а) Трапецыя ўпісана ў акружнасць радыусам 5 см, дыяганаль трапецыі, роўная 8 см, перпендыкулярна яе бакавой старане. Знайдзіце вышыню трапецыі.

б) У акружнасць радыусам 6,5 см упісана трапецыя. Дыяганаль трапецыі роўна 12 см і перпендыкулярна яе бакавой старане. Знайдзіце сярэднюю лінію трапецыі.

78. а) У акружнасць упісана трапецыя, бакавая старана якой роўна 15, а сярэдняя лінія — 16. Большая аснова трапецыі з'яўляецца дыяметрам акружнасці. Знайдзіце плошчу трапецыі.
- б) Трапецыя ўпісана ў акружнасць, дыяметрам якой з'яўляецца большая аснова трапецыі. Бакавая старана трапецыі роўна $\sqrt{17}$, а сярэдняя лінія — 16. Знайдзіце плошчу трапецыі.
79. а) Каля трапецыі, асновы якой роўны 12 і 20, апісана акружнасць. Цэнтр акружнасці ляжыць на большай аснове трапецыі. Знайдзіце плошчу трапецыі.
- б) Трапецыя ўпісана ў акружнасць радыусам 17, меншая аснова трапецыі роўна 16. Знайдзіце плошчу трапецыі, калі цэнтр акружнасці ляжыць на большай аснове трапецыі.
- 80*. Дакажыце, што сума квадратаў дыяганалей трапецыі роўна суме квадратаў яе бакавых старон і падвоянага здабытку яе асноў, г. зн. $d_1^2 + d_2^2 = b^2 + d^2 + 2ac$, дзе b, d — бакавыя стораны трапецыі, a, c — асновы трапецыі, d_1, d_2 — дыяганалі трапецыі.
81. а) Чатырохвугольнік $ABCD$ з роўнымі вугламі B і D упісаны ў акружнасць. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка, калі $AC = 13$ см, $BC = 5$ см, а $AD = 12$ см.
- б) Чатырохвугольнік $ABCD$ з роўнымі вугламі B і D упісаны ў акружнасць. Знайдзіце большую старану чатырохвугольніка, калі $AC = 2\sqrt{13}$ см, $BC = 4$ см, а $AD = 5$ см.
82. а) Чатырохвугольнік апісаны каля акружнасці радыусам 3 см, сума дзвюх процілеглых старон чатырохвугольніка роўна 12 см. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка.

б) У чатырохвугольнік упісана акружнасць. Знайдзіце радыус гэтай акружнасці, калі плошча чатырохвугольніка роўна 40 см^2 , а сума дзвюх процілеглых старон роўна 10 см .

83. а) Прамавугольная трапецыя апісана каля акружнасці. Знайдзіце большую бакавую старану трапецыі, калі яе асновы роўны 2 і 3 .

б) Каля прамавугольнай трапецыі апісана акружнасць. Знайдзіце меншую бакавую старану трапецыі, калі яе асновы роўны 3 і 6 .

84. а) Дыяганалі AC і BK чатырохвугольніка $ABCK$ перасякаюцца ў пункце O . Плошчы трохвугольнікаў ABO і COK роўны 3 і 4 адпаведна, а плошча трохвугольніка BOC на 200% большая за плошчу трохвугольніка COK . Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $ABCK$.

б) Дыяганалі AC і BP чатырохвугольніка $ABCP$ перасякаюцца ў пункце O . Плошчы трохвугольнікаў ABO і COP роўны 6 і 18 адпаведна, а плошча трохвугольніка BOC на 100% большая за плошчу трохвугольніка COP . Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $ABCP$.

85*. а) У паралелаграме $ABCK$ вугал A востры. З вяршыні A праведзены вышыні паралелаграма AM і AN да старон BC і CK адпаведна, $MN : AC = 3 : 4$. Знайдзіце адносіну плошчаў трохвугольнікаў MAN і ABC .

б) У паралелаграме $ABCP$ вугал A востры, BM і BH — вышыні паралелаграма, праведзеныя да старон AP і PC адпаведна, $MN : BP = 2 : 3$. Знайдзіце адносіну плошчаў трохвугольнікаў MBH і BPC .

Акружнасць

86. а) Акружнасць падзелена трыма пунктамі на дугі, градусныя меры якіх адносяцца як $2 : 7 : 3$. Знайдзіце градусную меру большага вугла трохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца гэтыя пункты.
- б) Акружнасць падзелена чатырма пунктамі на дугі, градусныя меры якіх адносяцца як $1 : 3 : 15 : 17$ у пазначаным парадку. Знайдзіце велічыню большага вугла чатырохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца гэтыя пункты.
87. а) Пункт аддалены ад цэнтра акружнасці на 4 і дзеліць хорду гэтай акружнасці на адрэзкі 6 і 8. Знайдзіце радыус акружнасці.
- б) Пункт дзеліць хорду акружнасці на адрэзкі 2 і 8. Адлегласць ад гэтага пункта да цэнтра акружнасці роўна 3. Знайдзіце дыяметр акружнасці.
88. а) У чатырохвугольніку $ABCD$ вугал CBD роўны 58° , вугал ABD — 44° , а вугал ADC — 78° . Знайдзіце градусную меру вугла CAD .
- б) У чатырохвугольніку $ABCD$ вугал BCA роўны 80° , вугал ACD — 28° , а вугал BAD — 72° . Знайдзіце градусную меру вугла ABD .
89. а) Дакажыце, што перпендыкуляры да хорды акружнасці, праведзеныя праз яе канцы, перасякаюць адвольны дыяметр у пунктах, якія аднолькава аддалены ад цэнтра акружнасці.
- б) Дакажыце, што калі правесці перпендыкуляры з канцоў адвольнага дыяметра акружнасці да любой хорды гэтай акружнасці або яе прадаўжэння, то асновы гэтых перпен-

дыкуляраў будучь аднолькава адстаяць ад адпаведных канцоў хорды.

90. а) Чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны ў акружнасць так, што старана AD з'яўляецца дыяметрам акружнасці і вугал ABC роўны 134° . Знайдзіце градусную меру вугла CAD .
- б) Чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны ў акружнасць так, што старана AB з'яўляецца дыяметрам акружнасці і вугал ADC роўны 122° . Знайдзіце градусную меру вугла CAB .
91. а) Чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны ў акружнасць, вугал BAD роўны 70° , вугал ADC — 80° , а вугал ABD — 50° . Знайдзіце велічыню вострага вугла паміж дыяганалямі чатырохвугольніка $ABCD$.
- б) Чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны ў акружнасць, вугал ADC роўны 75° , вугал BCD — 80° , а вугал CBD — 30° . Знайдзіце велічыню вострага вугла паміж дыяганалямі чатырохвугольніка $ABCD$.
92. а) З пункта па-за акружнасцю да яе праведзены дзве сякучыя, якія ўтвараюць вугал 45° . Градусная мера меншай дугі, заключанай паміж старанамі вугла, роўна 30° . Знайдзіце велічыню большай дугі.
- б) З пункта па-за акружнасцю да яе праведзены дзве сякучыя, якія ўтвараюць вугал 50° . Градусная мера большай дугі, заключанай паміж старанамі вугла, роўна 120° . Знайдзіце велічыню меншай дугі.
93. а) Хорды MT і PK перасякаюцца ў пункце A , вугал MAP роўны 15° . Знайдзіце градусную меру дугі MP , калі яна меншая за градусную меру дугі TK у 2 разы.
- б) Хорды AE і OC перасякаюцца ў пункце B , вугал OBA роўны 40° . Знайдзіце градусную меру дугі OA , калі яна на 10° большая за градусную меру дугі CE .

94. а) На прамой, якая змяшчае хорду BC , адзначаны пункт A (пункт B ляжыць паміж пунктамі A і C). Градусная мера дугі BC роўна 112° . Датычная AK пунктам дотыку K дзеліць гэту дугу ў адносіне $3 : 4$. Знайдзіце велічыню вугла BAK .
- б) Хорда AC сцягвае дугу AKC . З пункта B , адзначанага на прамой AC (пункт A ляжыць паміж пунктамі B і C), праведзена датычная BT , прычым пункт дотыку T дзеліць дугу AKC на дзве дугі, рознасць градусных мер якіх роўна 18° . Знайдзіце велічыню вугла ABT .
95. а) У акружнасці хорды AB і CD перасякаюцца і перпендыкулярныя адна адной, $AD = 5$, $BC = 12$. Знайдзіце радыус акружнасці.
- б) У акружнасці радыусам $8,5$ хорды AB і $МК$ перасякаюцца і перпендыкулярныя адна адной, $MB = 15$. Знайдзіце даўжыню хорды AK .
96. а) У чатырохвугольніку $ABCD$, упісаным у акружнасць, стораны AB і BC роўныя, M — пункт перасячэння дыяганалей. Знайдзіце AB , калі $BM = 2$, а $MD = 6$.
- б) Чатырохвугольнік $ABCD$, у якім $AD = CD$, упісаны ў акружнасць. Дыяганалі чатырохвугольніка перасякаюцца ў пункце E . Знайдзіце AD , калі $BE = 4$, а $ED = 6$.
97. а) З пункта па-за акружнасцю да яе праведзены дзве датычныя. Вугал паміж датычнымі роўны 60° , а адлегласць паміж пунктамі дотыку роўна $8\sqrt{3}$. Знайдзіце радыус акружнасці.
- б) З пункта па-за акружнасцю да яе праведзены дзве датычныя. Вугал паміж датычнымі роўны 120° , а адлегласць паміж пунктамі дотыку роўна $6\sqrt{3}$. Знайдзіце дыяметр акружнасці.
98. а) З пункта A па-за акружнасцю да яе праведзена датычная. Адлегласць ад пункта A да пункта дотыку роў-

на 15. Адрэзак, які злучае пункт A з цэнтрам акружнасці O , перасякае акружнасць у пункце P , прычым адрэзак AP большы за PO на 1. Знайдзіце радыус акружнасці.

б) З пункта A па-за акружнасцю да яе праведзена датычная. Адлегласць ад пункта A да пункта дотыку роўна 12. Адрэзак, які злучае пункт A з цэнтрам акружнасці O , перасякае акружнасць у пункце K , прычым адрэзак AK роўны 8. Знайдзіце дыяметр акружнасці.

99. а) Хорда AB акружнасці знаходзіцца на адлегласці, роўнай палове радыуса, ад цэнтра акружнасці. Праз пункт B праведзена датычная да акружнасці, якая перасякае прадаўжэнне яе дыяметра AP у пункце M . Знайдзіце адлегласць ад пункта M да цэнтра акружнасці, калі яе дыяметр роўны 10.

б) Хорда AB , даўжыня якой роўна $2\sqrt{3}$, аддалена ад цэнтра акружнасці на адлегласць, роўную палове радыуса акружнасці. Праз пункт B праведзена датычная да акружнасці, якая перасякае прадаўжэнне яе дыяметра AT у пункце H . Знайдзіце адлегласць ад пункта H да пункта A .

100. а) Чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны ў акружнасць з цэнтрам у пункце O . Знайдзіце велічыню вугла BCD , калі вугал COD роўны 44° , а вугал BAC роўны 62° .

б) Чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны ў акружнасць з цэнтрам у пункце O . Знайдзіце велічыню вугла BAD , калі вугал AOD роўны 88° , а вугал BCA роўны 40° .

101. а) Вяршыні A , B і C паралелаграма $ABCK$ ляжаць на акружнасці, прамая AK датыкаецца да гэтай акружнасці, а старана CK перасякае акружнасць у пункце P і дзеліцца гэтым пунктам у адносіне $2 : 1$, лічачы ад вяршыні K .

Знайдзіце суму квадратаў дыяганалей паралелаграма, калі старана BC роўна $2\sqrt{6}$.

б) Вяршыні K , P і E паралелаграма $KPTE$ ляжаць на акружнасці, прамая TP датыкаецца да гэтай акружнасці, а старана TE перасякае акружнасць у пункце M і дзеліцца гэтым пунктам у адносіне $5 : 1$, лічачы ад вяршыні E . Знайдзіце суму квадратаў дыяганалей паралелаграма, калі старана KP роўна 12 .

102. а) MK — дыяметр акружнасці, MC — яе хорда. Праз пункт K праведзена датычная да акружнасці, якая перасякае прамую MC у пункце P . Знайдзіце адлегласць ад пункта P да цэнтра акружнасці, калі адлегласць ад пункта K да прамой MP роўна 6 см, а $MK = 2\sqrt{13}$ см.

б) PE — дыяметр акружнасці, PA — яе хорда. Праз пункт E праведзена датычная да акружнасці, якая перасякае прамую AP у пункце H . Знайдзіце адлегласць ад пункта E да прамой HP , калі адлегласць ад пункта H да прамой PE роўна $3\sqrt{5}$ см, а $AP = 4$ см.

103. а) Прамыя, якія змяшчаюць хорды BC і PK акружнасці, перасякаюцца ў пункце A (пункт B ляжыць паміж пунктамі A і C , а пункт P — паміж пунктамі A і K). Знайдзіце даўжыню хорды BC , калі пункт B — сярэдзіна AC , $AP = 2$ см, а $PK = 6$ см.

б) Прамыя, якія змяшчаюць хорды MP і TE акружнасці, перасякаюцца ў пункце A (пункт M ляжыць паміж пунктамі A і P , а пункт T — паміж пунктамі A і E). Знайдзіце даўжыню хорды MP , калі $AM : MP = 1 : 3$, $AE = 9$ см, а $AT = 4$ см.

104. а) AP і AT — дзве датычныя да адной акружнасці радыусам 8 (P і T — пункты дотыку). Пункт H ляжыць на

большай з дуг PT . Знайдзіце вугал PHT , калі адрэзак AP роўны 8.

б) AB і AC — датычныя да адной акружнасці (B і C — пункты дотыку). Адлегласць ад пункта A да цэнтра акружнасці роўна 8, а да хорды BC — 6. Знайдзіце градусную меру меншай з дуг BC .

105*. а) Акружнасці радыусамі 16 і 4 датыкаюцца адна да адной знешнім чынам. Бакавыя стораны раўнабедранага трохвугольніка з'яўляюцца іх знешнімі датычнымі, а аснова датыкаецца толькі да большай акружнасці. Знайдзіце аснову трохвугольніка.

б) Акружнасці радыусамі 16 і 4 датыкаюцца адна да адной знешнім чынам. Бакавыя стораны раўнабедранага трохвугольніка з'яўляюцца іх знешнімі датычнымі, а аснова датыкаецца толькі да большай акружнасці. Знайдзіце бакавую старану трохвугольніка.

ВЫНІКОВЫ САМАКАНТРОЛЬ

1. Няроўнасць трохвугольніка

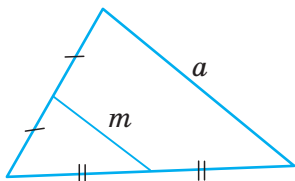
Сума любых дзвюх старон трохвугольніка большая за трэцюю старану.

Назавіце набор адрэзкаў, з якіх можна скласці трохвугольнік, і растлумачце чаму:

- а) 13 см; 6 см; 5 см;
- б) 10 см; 14 см; 16 см;
- в) 7 дм; 8 дм; 15 дм.

2. Тэарэма аб сярэдняй лініі трохвугольніка

Сярэдняя лінія трохвугольніка паралельна трэцяй старане і роўна яе палове: $m = \frac{a}{2}$.

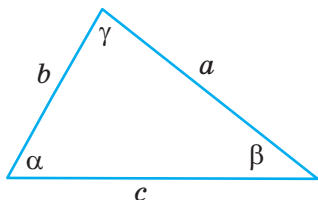


Сярэдняя лінія трохвугольніка на 3,6 см меншая за паралельную ёй старану. Знайдзіце сярэднюю лінію і гэту старану трохвугольніка.

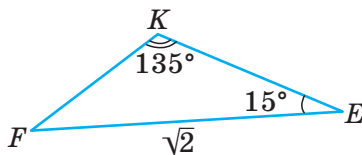
3. Тэарэма сінусаў

Стораны трохвугольніка прапарцыянальны сінусам процілеглых вуглоў:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$



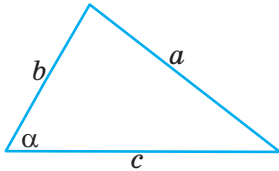
Выкарыстаўшы даныя рысунка, вылічыце даўжыню стараны KE .



4. Тэарэма косінусаў

Квадрат стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон мінус падвоены здабытак гэтых старон на косінус вугла паміж імі:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

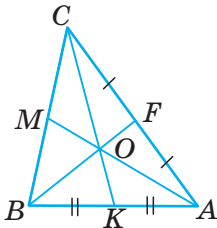


У востравугольным трохвугольніку ABC $\angle A = 60^\circ$, $AB = 8$, $BC = 7$. Знайдзіце перыметр трохвугольніка.

5. Уласцівасці медыян трохвугольніка

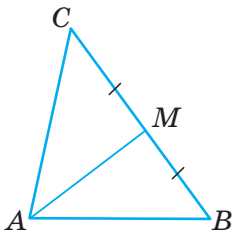
1. Медыяны перасякаюцца ў адным пункце і дзеляцца ім у адносіне $2 : 1$, лічачы ад вяршыні:

$$\frac{BO}{OF} = \frac{CO}{OK} = \frac{AO}{OM} = 2 : 1.$$



2. Медыяна дзеліць трохвугольнік на два роўнавялікія трохвугольнікі:

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}.$$

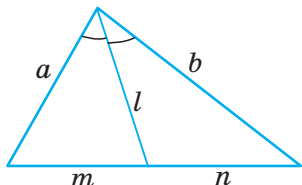


У трохвугольніку ABC медыяны BK і CD перасякаюцца ў пункце O . Плошча трохвугольніка COK роўна 30 см^2 . Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC .

6. Тэарэма аб бісектрысе трохвугольніка

Бісектрыса трохвугольніка дзеліць процілеглую старану на адрэзкі, прапарцыянальныя прылеглым старанам трохвугольніка:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}.$$



Бісектрыса вугла трохвугольніка дзеліць процілеглую старану на адрэзкі 7 см і 5 см. Перыметр трохвугольніка роўны 36 см. Знайдзіце стараны трохвугольніка.

7. Прыметы падобнасці трохвугольнікаў

Два трохвугольнікі падобныя, калі:

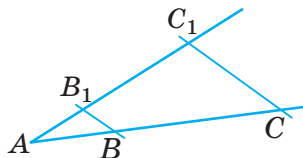
- 1) два вуглы аднаго трохвугольніка адпаведна роўныя двум вуглам другога трохвугольніка;
- 2) дзве стараны аднаго трохвугольніка прапарцыянальныя дзвюм старанам другога трохвугольніка і вуглы, заключаныя паміж гэтымі старанамі, роўныя;
- 3) тры стараны аднаго трохвугольніка прапарцыянальныя тром старанам другога трохвугольніка.

У трохвугольніках ABC і MPL $\angle A = \angle M$, $\angle C = \angle L$, $AB : MP = 2 : 3$, $AC = 10$ см. Знайдзіце старану ML .

8. Тэарэма Фалеса

Калі на адной з дзвюх прамых адкласці паслядоўна некалькі роўных адрэзкаў і праз іх канцы правесці паралельныя прамыя, якія перасякаюць другую прамую, то яны адсякаюць на ёй роўныя паміж сабой адрэзкі.

Дадзена: $AB : BC = 5 : 7$;
 $BB_1 \parallel CC_1$; $AC_1 = 36$.
 Знайсці: $B_1C_1 - AB_1$.



9. Тэарэма аб цэнтры ўпісанай у трохвугольнік акружнасці	
Бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, які з'яўляецца цэнтрам упісанай у трохвугольнік акружнасці.	Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік, бакавая старона якога роўна 5 см, а аснова — 8 см.
10. Тэарэма аб цэнтры апісанай акружнасці (размяшчэнне цэнтра апісанай каля трохвугольніка акружнасці для розных відаў трохвугольнікаў)	
Сярэдзінныя перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, які з'яўляецца цэнтрам апісанай каля трохвугольніка акружнасці. 1) Цэнтр апісанай каля <i>востравугольнага</i> трохвугольніка акружнасці знаходзіцца ўнутры трохвугольніка. 2) Цэнтр апісанай каля <i>прамавугольнага</i> трохвугольніка акружнасці супадае з сярэдзінай гіпатэнузы. 3) Цэнтр апісанай каля <i>туравугольнага</i> трохвугольніка акружнасці знаходзіцца па-за трохвугольнікам.	Стораны трохвугольніка роўны 7 см, 15 см і 20 см. Знайдзіце радыусы апісанай і ўпісанай акружнасцей гэтага трохвугольніка.
11. Адносіна плошчаў і лінейных элементаў падобных трохвугольнікаў	
У падобных трохвугольнікаў: 1) плошчы адносяцца як квадраты каэфіцыента падобнасці;	У трохвугольніках ABC і $A_1B_1C_1$ $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1 = 5 : 2$. Сума плошчаў гэтых трохвугольнікаў роўна 58 см^2 . Знайдзіце плошчу кожнага трохвугольніка.

2) усе адпаведныя лінейныя элементы (медыяны, вышыні, бісектрысы, радыусы ўпісанай і апісанай акружнасцей, перыметры) адносяцца як каэфіцыент падобнасці.

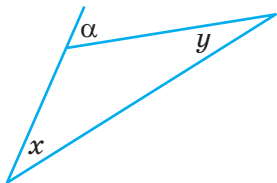
12. Формулы плошчы трохвугольніка

1. $S = \frac{ah_a}{2};$
2. $S = p \cdot r;$
3. $S = \frac{abc}{4R};$
4. $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma;$
5. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

У раўнабедраным трохвугольніку даўжыня бакавой стараны роўна 10, а вугал пры аснове роўны 15° . Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

13. Тэарэма аб знешнім вугле трохвугольніка

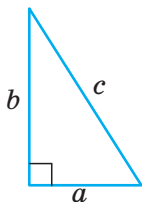
Знешні вугал трохвугольніка роўны суме двух вуглоў трохвугольніка, не сумежных з ім: $\alpha = x + y$.



Знешні вугал трохвугольніка роўны 99° . Знайдзіце вуглы трохвугольніка, калі ўнутраныя вуглы, не сумежныя з ім, адносяцца як 3 : 7.

14. Тэарэма Піфагора

Квадрат гіпатэнузы роўны суме квадратаў катэтаў: $c^2 = a^2 + b^2$.



Гіпатэнуза AB прамавугольнага трохвугольніка ABC роўна $2\sqrt{22}$ см, а катэт BC роўны 6 см. Знайдзіце даўжыню медыяны BK .

15. Тэарэма, адваротная тэарэме Піфагора

Калі квадрат большай стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх іншых старон, то такі трохвугольнік з'яўляецца прамавугольным.

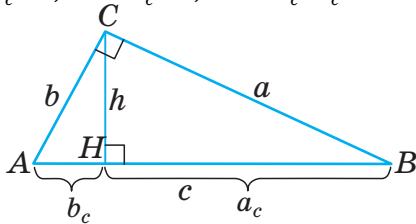
У трохвугольніку ABC $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 2\sqrt{6}$ см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

16. Прапарцыянальныя адрэзкі ў прамавугольным трохвугольніку

$AH = b_c$ — праекцыя катэта AC на гіпатэнузу;

$BH = a_c$ — праекцыя катэта BC на гіпатэнузу.

$$a^2 = a_c \cdot c; \quad b^2 = b_c \cdot c; \quad h^2 = a_c \cdot b_c.$$



Знайдзіце вострыя вуглы прамавугольнага трохвугольніка, калі праекцыі катэтаў на гіпатэнузу роўны 2 см і 6 см.

17. Уласцівасці прамавугольных трохвугольнікаў з вугламі 30° і 45°

1. Катэт, што ляжыць супраць вугла ў 30° , роўны палове гіпатэнузы.
2. Калі катэт роўны палове гіпатэнузы, то ён ляжыць супраць вугла ў 30° .
3. Калі ў прамавугольным трохвугольніку з вуглом 30° меншы катэт роўны a , то большы катэт роўны $a\sqrt{3}$.
4. Калі ў раўнабедранным прамавугольным трохвугольніку катэт роўны a , то гіпатэнуза роўна $a\sqrt{2}$.

- а) У прамавугольным трохвугольніку ABC вугал B роўны 60° , а гіпатэнуза AB роўна 4 см. Знайдзіце BC , AC і плошчу трохвугольніка ABC .
- б) У раўнабедранным прамавугольным трохвугольніку вышыня, праведзеная з вяршыні прамога вугла, роўна 14 см. Знайдзіце катэты гэтага трохвугольніка.

18. Тэарэма аб суме вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка

Сума вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка роўна 90° .

Вострыя вуглы прамавугольнага трохвугольніка адносяцца як $1 : 8$. Знайдзіце найменшы вугал трохвугольніка.

19. Уласцівасць медыяны прамавугольнага трохвугольніка, праведзенай з вяршыні прамога вугла

Медыяна, праведзеная з вяршыні прамога вугла, роўна палове гіпатэнузы.

Медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, роўна 15, большы востры вугал роўны 60° . Знайдзіце даўжыню меншага катэта.

20. радыус акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік

$$r = p - c;$$

$$r = \frac{a + b - c}{2},$$

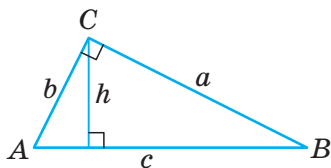
дзе a і b — катэты, c — гіпатэнуза,

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Сума катэтаў прамавугольнага трохвугольніка роўна 6, а радыус апісанай каля гэтага трохвугольніка акружнасці роўны $\sqrt{5}$. Знайдзіце радыус упісанай у гэты трохвугольнік акружнасці.

21. Формулы плошчы прамавугольнага трохвугольніка

$$S_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2}; \quad S_{\triangle ABC} = \frac{ch}{2}.$$



Вылічыце даўжыню вышыні прамавугольнага трохвугольніка, праведзенай з вяршыні прамога вугла, калі яго катэты роўны 9 і 12.

22. Азначэнне сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка

Сінусам вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна процілеглага катэта да гіпатэнузы.

Косінусам вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна прылеглага катэта да гіпатэнузы.

Тангенсам вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна процілеглага катэта да прылеглага.

Катангенсам вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна прылеглага катэта да процілеглага.

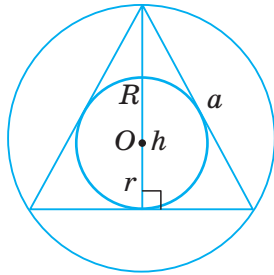
У прамавугольным трохвугольніку косінус вострага вугла роўны $\frac{4}{5}$. Знайдзіце сінус і тангенс гэтага вугла.

23. Формулы, якія звязваюць вышыню, радыус упісанай акружнасці і радыус апісанай акружнасці

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$r = \frac{h}{3};$$

$$R = \frac{2h}{3}.$$



Бісектрыса роўнастаронняга трохвугольніка роўна $2\sqrt{3}$ см. Знайдзіце плошчу гэтага трохвугольніка.

24. Адлегласць ад пункта да прамой

Адлегласцю ад пункта да прамой называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з дадзенага пункта да прамой.

Пункты A і B ляжаць па розных бакі ад прамой a . Адлегласць ад пункта A да гэтай прамой роўна 6 см, а ад пункта B — 4 см. Ці можа адлегласць паміж пунктамі A і B быць роўнай 8 см?

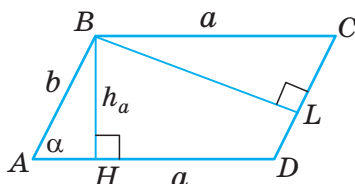
25. Адлегласць паміж паралельнымі прамымі	
<i>Адлегласцю паміж паралельнымі прамымі называецца адлегласць ад любога пункта адной прамой да другой прамой.</i>	У прамавугольным трохвугольніку AMK праз вяршыню K праведзена прмая b , паралельная катэту AM . Знайдзіце адлегласць паміж прамымі b і MA , калі катэт MK роўны 14 см.
26. Тэарэма аб суме ўнутраных вуглоў чатырохвугольніка	
Сума ўнутраных вуглоў адвольнага чатырохвугольніка роўна 360° .	Вядома, што ў чатырохвугольніку $ABCD$ $\angle A = 74^\circ$, $\angle D = 120^\circ$. Знайдзіце тупы вугал паміж бісектрысамі вуглоў B і C .
27. Формула плошчы адвольнага чатырохвугольніка	
$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi,$ дзе d_1 і d_2 — дыяганалі, φ — вугал паміж імі.	Адна з дыяганалей чатырохвугольніка на 1 см большая за другую. Плошча чатырохвугольніка роўна 2 см^2 , а сінус вугла паміж дыяганалямі роўны $\frac{1}{3}$. Знайдзіце даўжыню меншай дыяганалі чатырохвугольніка.
28. Тэарэма аб чатырохвугольніку, апісаным каля акружнасці. Формула плошчы чатырохвугольніка праз радыус упісанай акружнасці	
Калі чатырохвугольнік апісаны каля акружнасці, то сумы яго процілеглых старон роўныя. $S = pr$.	Сума дзвюх процілеглых старон чатырохвугольніка, апісанага каля акружнасці, роўна 12 см, а плошча дадзенага чатырохвугольніка — 36 см^2 . Знайдзіце радыус акружнасці.

29. Тэарэма аб чатырохвугольніку, упісаным у акружнасць	
Калі чатырохвугольнік упісаны ў акружнасць, то сумы яго процілеглых вуглоў роўны 180° .	Чатырохвугольнік $MNKL$ упісаны ў акружнасць, $\angle M : \angle N : \angle K = 2 : 3 : 7$. Знайдзіце вугал L .
30. Прыметы і ўласцівасці паралелаграма	
Прыметы паралелаграма. Калі ў чатырохвугольніку: • дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца папалам; • процілеглыя стораны парамі роўныя; • дзве процілеглыя стараны роўныя і паралельныя, то гэты чатырохвугольнік з'яўляецца паралелаграмам. У паралелаграма: 1) процілеглыя стораны роўныя; 2) процілеглыя стораны паралельныя; 3) процілеглыя вуглы роўныя; 4) сума вуглоў, прылеглых да адной стараны, роўна 180°; 5) дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца папалам; 6) дыяганалі дзеляць яго на чатыры роўнавялікія трохвугольнікі.	а) Два вуглы паралелаграма адносяцца як $5 : 7$. Знайдзіце большы вугал паралелаграма. б) Перыметр паралелаграма роўны 96 см. Знайдзіце стораны паралелаграма, калі вядома, што адна з іх складае 140% другой.
31. Формула, якая звязвае дыяганалі паралелаграма і яго стораны	
$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.	Знайдзіце даўжыні дыяганалей паралелаграма, калі вядома, што яны адносяцца як $2 : 3$, а стораны паралелаграма роўны 11 см і 23 см.

32. Формулы плошчы паралелаграма

$$S = a h_a;$$

$$S = ab \sin \alpha.$$



Вышыні, праведзеныя з вяршыні тупога вугла паралелаграма, утвараюць вугал 45° . Адна з вышынь дзеліць старану, на якую яна апущана, на адрэзкі 3 см і 8 см, лічачы ад вяршыні вострага вугла. Знайдзіце плошчу паралелаграма.

33. Уласцівасці і прымета ромба

Прымета ромба. Калі ў паралелаграме дыяганалі ўзаемна перпендыкулярныя, то гэты паралелаграм з'яўляецца ромбам.

У ромба:

- 1) усе стораны роўныя;
- 2) процілеглыя стораны паралельныя;
- 3) процілеглыя вуглы роўныя;
- 4) сума вуглоў, прылеглых да адной стараны ромба, роўна 180° ;
- 5) дыяганалі з'яўляюцца бісектрысамі яго вуглоў;
- 6) дыяганалі ўзаемна перпендыкулярныя;
- 7) дыяганалі пунктам перасячэння дзеліцца папалам;
- 8) дыяганалі дзеляць яго на чатыры роўныя прамавугольныя трохвугольнікі.

Дыяганаль ромба разбівае яго на два трохвугольнікі. Знайдзіце даўжыню дыяганалі, калі вядома, што сума перыметраў абодвух трохвугольнікаў на 15 см большая за перыметр ромба.

34. Формулы плошчы ромба

$$S = ah;$$

$$S = \frac{d_1 d_2}{2};$$

$$S = pr;$$

$$S = a^2 \sin \alpha.$$

Большая дыяганаль ромба роўна 40, а меншая дыяганаль адносіцца да стараны як 6 : 5. Знайдзіце вышыню ромба.

35. Уласцівасці і прымета прамавугольніка	
Прымета прамавугольніка. Калі ў паралелаграме дыяганалі роўныя, то гэты паралелаграм з'яўляецца прамавугольнікам. У прамавугольніка: 1) процілеглыя стораны роўныя; 2) процілеглыя стораны паралельныя; 3) усе вуглы прамыя; 4) дыяганалі роўныя; 5) дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца папалам; 6) дыяганалі дзеляць яго на чатыры роўнавялікія трохвугольнікі.	У прамавугольніку $ABCD$ $AD = 4\sqrt{5}$ см, вяршыня A аддалена ад дыяганалі BD на 8 см. Знайдзіце плошчу прамавугольніка.
36. Формулы плошчы квадрата	
$S = a^2;$ $S = \frac{d^2}{2}.$	Знайдзіце перыметр квадрата, калі яго плошча роўна 32.
37. Формула, якая звязвае дыяганаль квадрата і яго старану	
$d = a\sqrt{2}.$	Дыяганаль квадрата роўна $3\sqrt{2}$. Знайдзіце перыметр гэтага квадрата.
38. Тэарэма аб сярэдняй лініі трапецыі	
Сярэдняя лінія трапецыі паралельна яе асновам і роўна іх паўсуме: $m = \frac{a+b}{2},$ дзе a і b — асновы трапецыі.	Сярэдняя лінія трапецыі роўна 7, а большая аснова роўна 10. Знайдзіце меншую аснову трапецыі.

39. Формула плошчы трапецыі

$$S = \frac{a+b}{2}h = mh,$$

дзе a і b — асновы, h — вышыня, m — сярэдняя лінія трапецыі.

Сярэдняя лінія трапецыі роўна 19, а бакавая старана AB , роўная 10, утварае з асновай BC вугал у 150° . Знайдзіце плошчу трапецыі.

40. Уласцівасці раўнабедранай трапецыі

У раўнабедранай трапецыі:

- 1) вуглы пры аснове роўныя;
- 2) дыяганалі роўныя;
- 3) вышыня, праведзеная з вяршыні тупога вугла, дзеліць большую аснову на адрэзкі, роўныя паўсуме асноў і паўрознасці асноў.

Аснова AD раўнабедранай трапецыі $ABCD$ у 5 разоў большая за аснову BC . Вышыня BH перасякае дыяганаль AC у пункце M , плошча трохвугольніка AMH роўна 4 см^2 . Знайдзіце плошчу трапецыі $ABCD$.

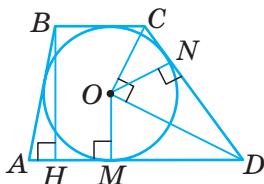
41. Плошча раўнабедранай трапецыі з узаемна перпендыкулярнымі дыяганалямі

У раўнабедранай трапецыі з перпендыкулярнымі дыяганалямі вышыня роўна сярэдняй лініі ($h = m$) і $S = h^2 = m^2$.

У раўнабедранай трапецыі дыяганалі ўзаемна перпендыкулярныя. Плошча трапецыі роўна 144 см^2 . Знайдзіце:
а) вышыню трапецыі;
б) сярэднюю лінію трапецыі.

42. Трапецыя, у якую можна ўпісаць акружнасць

1. У трапецыю можна ўпісаць акружнасць тады і толькі тады, калі $AB + CD = AD + BC$.



Радыус акружнасці, упісанай у трапецыю, роўны 3 см, а сума яе бакавых старон роўна 20 см. Знайдзіце плошчу трапецыі.

2. Цэнтрам упісанай у трапецыю акружнасці з'яўляецца пункт перасячэння бісектрыс вуглоў трапецыі. 3. Радыус упісанай у трапецыю акружнасці роўны палове вышыні трапецыі. 4. Трохвугольнік COD з'яўляецца прамавугольным і $ON^2 = CN \cdot ND$.																							
43. Формулы, якія звязваюць стораны правільнага трохвугольніка, чатырохвугольніка, шасцівугольніка з радыусамі ўпісанай і апісанай акружнасцей																							
<table><tr><td></td><td>R</td><td>r</td></tr><tr><td>a_3</td><td>$R\sqrt{3}$</td><td>$2r\sqrt{3}$</td></tr><tr><td>a_4</td><td>$R\sqrt{2}$</td><td>$2r$</td></tr><tr><td>a_6</td><td>R</td><td>$\frac{2r}{\sqrt{3}}$</td></tr></table>				R	r	a_3	$R\sqrt{3}$	$2r\sqrt{3}$	a_4	$R\sqrt{2}$	$2r$	a_6	R	$\frac{2r}{\sqrt{3}}$	Даўжыня акружнасці, упісанай у роўнастаронні трохвугольнік, роўна 24π. Знайдзіце даўжыню акружнасці, апісанай каля трохвугольніка.								
	R	r																					
a_3	$R\sqrt{3}$	$2r\sqrt{3}$																					
a_4	$R\sqrt{2}$	$2r$																					
a_6	R	$\frac{2r}{\sqrt{3}}$																					
44. Формулы плошчаў правільнага трохвугольніка, чатырохвугольніка, шасцівугольніка, n-вугольніка																							
$S_3 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; \quad S_4 = a^2;$ $S_6 = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}; \quad S_n = p \cdot r.$			Правільны шасцівугольнік са стараной $2\sqrt{3}$ апісаны каля акружнасці. Знайдзіце плошчу квадрата, упісанага ў гэтую ж акружнасць.																				
45. Значэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вуглоў 30°, 45°, 60°																							
<table><tr><td></td><td>30°</td><td>45°</td><td>60°</td></tr><tr><td>$\sin \alpha$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td></tr><tr><td>$\cos \alpha$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr><tr><td>$\operatorname{tg} \alpha$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$</td><td>1</td><td>$\sqrt{3}$</td></tr><tr><td>$\operatorname{ctg} \alpha$</td><td>$\sqrt{3}$</td><td>1</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$</td></tr></table>					30°	45°	60°	$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
	30°	45°	60°																				
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$																				
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$																				
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$																				
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$																				
Вылічыце: $\sqrt{6} \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \sin 45^\circ + 4 \cos 30^\circ.$																							

46. Значэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вуглоў 150° , 135° , 120°

	150°	135°	120°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Выкарыстаўшы формулы
 $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$,
 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$,
 $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$,
 $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$,
 знайдзіце значэнне выразу

$$\frac{\sqrt{2} \cos 135^\circ - 6 \sin 150^\circ}{\operatorname{tg} 135^\circ + \operatorname{ctg} 135^\circ}.$$

47. Уласцівасць датычнай

Датычная да акружнасці перпендыкулярна радыусу гэтай акружнасці, праведзенаму ў пункт дотыку.

З пункта A да акружнасці з цэнтрам O праведзена датычная AB (B — пункт дотыку). Параўнайце даўжыні адрэзкаў OB і OA .

48. Тэарэма аб адрэзках датычных

Адрэзкі датычных да акружнасці, праведзеныя з аднаго пункта, роўныя і ўтвараюць роўныя вуглы з прамой, якая праходзіць праз гэты пункт і цэнтр акружнасці.

Да акружнасці з цэнтрам у пункце O і радыусам 5 з пункта A праведзены дзве датычныя (B і C — пункты дотыку). Знайдзіце градусную меру вугла BAC , калі $AB = 5\sqrt{3}$.

49. Тэарэма аб упісаным вугле

Градусная мера ўпісанага вугла роўна палове градуснай меры дугі, на якую ён абапіраецца.

Пункты A , B і C ляжаць на акружнасці з цэнтрам O , $\angle ABC = 50^\circ$, $\cap AB : \cap CB = 5 : 8$. Знайдзіце гэтыя дугі і вугал AOC .

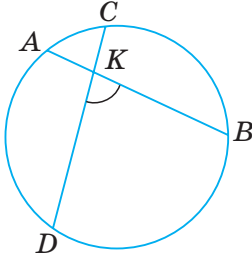
50. Уласцівасць упісаных вуглоў, якія абапіраюцца на дыяметр

Упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр, роўны 90° .

На паўакружнасці з дыяметрам AB адзначаны пункт C . Знайдзіце хорду AC , калі радыус акружнасці роўны $2\sqrt{3}$ см, а хорда $CB = \sqrt{23}$ см.

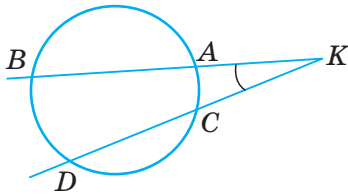
51. Вуглы паміж хордамі, сякучымі, датычнай і хордай, якія перасякаюцца

$$\angle DKB = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DB).$$



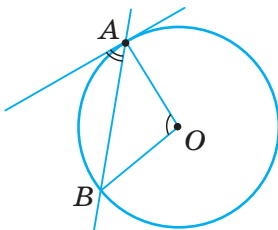
а) Хорды AB і CD акружнасці перасякаюцца ў пункце E . Знайдзіце вугал BEC , калі $\cup AD = 54^\circ$, $\cup BC = 70^\circ$.

$$\angle DKB = \frac{1}{2}(\cup DB - \cup AC).$$



б) Праз пункт, што ляжыць па-за акружнасцю, праведзены дзве сякучыя, якія ўтвараюць вугал у 32° . Меншая дуга акружнасці, заключаная паміж старанамі гэтага вугла, роўна 56° . Знайдзіце большую дугу.

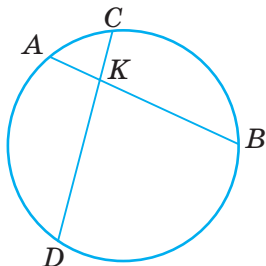
Вугал, утвораны *датычнай* да акружнасці і *сякучай (хордай)*, праведзенай праз пункт дотыку, роўны палове дугі, заключанай паміж яго старанамі.



в) Праз пункт B хорды AB праведзена датычная да акружнасці, большая дуга AB роўна 290° . Знайдзіце востры вугал паміж датычнай і хордай.

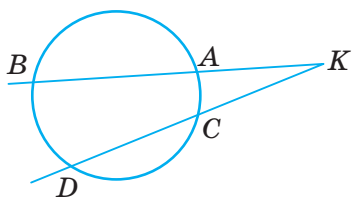
52. Суадносіны паміж даўжынямі хорд, адрэзкаў датычных і сякучых

$$AK \cdot KB = CK \cdot KD.$$



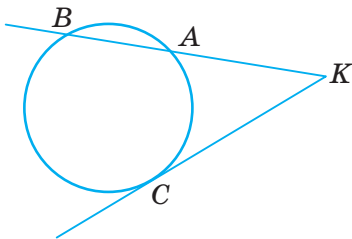
а) BD і CE — хорды адной акружнасці, A — пункт перасячэння гэтых хорд. $AC = 6$ см, $AE = 12$ см. Адрэзак AB на 1 см меншы за AD . Знайдзіце BD .

$$AK \cdot KB = CK \cdot KD.$$



б) З пункта A , адзначанага па-за акружнасцю, праведзены дзве сякучыя, якія перасякаюць акружнасць у пунктах B і C (пункт B ляжыць паміж пунктамі A і C) і ў пунктах D і E (пункт D ляжыць паміж пунктамі A і E). Знайдзіце даўжыню адрэзка AD , калі $AB = BC = 4$, $DE = 14$.

$$CK^2 = AK \cdot KB.$$



в) Сякучая MN праходзіць праз дыяметр акружнасці PN (пункт P ляжыць паміж пунктамі M і N), MK — датычная да гэтай акружнасці (K — пункт дотыку). Знайдзіце MK , калі адрэзак MK у 2 разы меншы за MN , а радыус акружнасці роўны 6.

53. Плошча круга, сектара

$S = \pi r^2$ — формула плошчы круга.

$S = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha$ — формула плошчы сектара.

Вугал, роўны 36° , упісаны ў круг. Знайдзіце плошчу сектара круга, заключанага паміж старанамі цэнтральнага вугла, які абапіраецца на тую ж дугу, што і дадзены вугал, калі радыус круга роўны 5.

54. Даўжыня акружнасці, дугі

$C = 2\pi r$ — формула даўжыні акружнасці.

$l = \frac{\pi r}{180^\circ} \cdot \alpha$ — формула даўжыні дугі, градусная мера якой роўна α .

Вяршыні правільнага трохвугольніка дзеляць акружнасць на тры дугі. Знайдзіце даўжыню адной з гэтых дуг, калі старана правільнага трохвугольніка роўна $4\sqrt{3}$.

55. Вызначэнне віда трохвугольніка па яго старанах

Няхай a — найбольшая старана трохвугольніка, тады:

- 1) калі $a^2 = b^2 + c^2$, то трохвугольнік прамавугольны;
- 2) калі $a^2 < b^2 + c^2$, то трохвугольнік востравугольны;
- 3) калі $a^2 > b^2 + c^2$, то трохвугольнік тупавугольны.

Вызначыце від трохвугольніка, стораны якога роўны 15, 11 і 9.

АДКАЗЫ

7 КЛАС

§ 1

1.3. а) 4 см; 6 см; б) 3 см; 4 см. 1.12. 8. 1.13. а) 180° ; б) 90° .
1.15. а) B — на акружнасці; A, K — па-за акружнасцю; б) P — на акружнасці; F, K — унутры акружнасці. 1.16. а) 60° ; б) 180° .

§ 2

2.4. 108. 2.5. 192. 2.6. а) 1,8 см; б) 1,2 см. 2.7. а) 96 дм^2 ; б) 216 дм^2 .
2.8. а) $11 : 3$; б) $7 : 1$. 2.9. а) $28\,800 \text{ см}^3$; б) 6500 см^3 .

§ 3

3.2. а) 4 см; б) 8 см. 3.3. а) 11 см; б) 5 см. 3.4. 1,74 дм.
3.5. $0,1935 \text{ дм}^2$. 3.6. а) Не могуць; б) могуць. 3.7. а) 12 см; б) 42 см.
3.8. а) 4 см; б) 40 см. 3.9. 64 см. 3.10. 5 см.

§ 4

4.2. $2R$. 4.3. 2,8 дм. 4.4. 4,6 мм. 4.5. а)—б) ABC і BCD , BAD і ADC , CBD і BCA . 4.6. а) 25,75 см; б) 13,19 дм. 4.8. а) $30,18 \text{ см}^2$; б) $40,69 \text{ см}^2$. 4.9. 50 см. 4.10. а) 7536 см; б) 7536 см.
4.11. а) $MO \geq R$; б) $MO \leq R$. 4.12. а) 135° ; б) 90° , 30° , 120° ; в) 30° .

§ 5

5.1. $\angle A$ і $\angle B$ — вострыя; $\angle C$ — тупы. 5.2. $\angle BOC = 30^\circ$, $\angle BOA = 150^\circ$. 5.3. Напрыклад, $\angle AOD$ і $\angle BOC$. 5.4. $\angle AOB$ і $\angle DOE$, $\angle BOC$ і $\angle EOF$, $\angle AOF$ і $\angle DOC$, $\angle AOC$ і $\angle DOF$, $\angle BOF$ і $\angle EOC$.
5.6. $\alpha + \beta$; $\alpha - \beta$; $\beta - \alpha$. 5.7. а) Не можа; б) можа. 5.8. а) 70° ; б) 60° .
5.9. 80° . 5.11. а) 45° , 38° , 89° , 78° ; б) 126° , 147° , 95° , 211° .

§ 6

6.1. а) Не могуць; б) могуць. 6.2. а) 60° ; б) 124° . 6.3. На 20° .
6.4. а) 30° ; б) 130° . 6.5. а) 70° , 110° ; б) 40° , 140° . 6.6. а) Не могуць, могуць, не могуць; б) не могуць. 6.7. 40° і 140° . 6.8. 135° і 45° .
6.9. 90° . 6.10. а) 70° ; б) 110° . 6.11. а) 150° ; б) 36° . 6.12. $\angle 2 = 54^\circ$, $\angle 4 = 70^\circ$, $\angle 5 = 54^\circ$, $\angle 6 = 56^\circ$. 6.13. $\angle 1 = 80^\circ$, $\angle 2 = 50^\circ$, $\angle 4 = 80^\circ$,

$\angle 6 = 50^\circ$. 6.14. а) 70° , 110° , 70° , 110° ; б) 65° , 115° , 65° , 115° .
6.16. Можа.

§ 7

7.1. а) $\angle 2 = 90^\circ$, $\angle 3 = 90^\circ$, $\angle 4 = 50^\circ$; б) $\angle 2 = 50^\circ$, $\angle 3 = 50^\circ$, $\angle 4 = 40^\circ$. 7.2. а) $\angle AOK = 65^\circ$, $\angle AOC = 40^\circ$, $\angle KOB = 25^\circ$; б) $\angle AOK = 120^\circ$, $\angle BOK = 30^\circ$, $\angle AOC = 150^\circ$. 7.3. Не могуць. 7.4. 135° , 45° . 7.5. 25° або 155° . 7.6. 135° .

§ 8

8.1. а) $\angle A = \angle C$, або $\angle B = \angle C$, або $\angle A = \angle B$; б) $\angle A = \angle B = \angle C$.
8.2. а) $AB = BC$, або $AB = AC$, або $AC = BC$; б) $AB = BC = AC$;
в) $AB \neq BC \neq AC$, $AB \neq AC$. 8.3. Прамавугольны. 8.4. 17 см.
8.5. 8 см, 8 см, 8 см, 10 см, 10 см, 8 см.

§ 9

9.1. Не могуць. 9.2. а) З'яўляюцца; б) з'яўляюцца. 9.3. а) 8; б) 46° .
9.5. а) 26; б) 32° . 9.7. а) З'яўляюцца; б) не з'яўляюцца.

§ 10

10.1. Бісектрыса вугла — прамень, бісектрыса трохвугольніка — адрэзак. 10.6. 80° ; 50° . 10.8. 135° . 10.10. 8 см, 50° . 10.11. 6 см.
10.12. 30° . 10.13. 5 см. 10.14. а) 90° ; б) 90° .

§ 11

11.2. 45° , 45° і 90° . 11.3. 32 см. 11.4. а) 20 см; б) 22 см.

§ 12

12.1. а) $\angle A = \angle C$, або $\angle A = \angle B$, або $\angle B = \angle C$; б) $\angle A = \angle B = \angle C$.
12.3. а) 10 см; б) 20 см. 12.4. а) Можна; б) не; в) не. 12.7. 68° .
12.8. 56° . 12.9. 20° . 12.10. 58° .

§ 14

14.1. Указанне. Пабудуйце сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка AC . 14.3. 10 см. 14.4. 55° . 14.5. 16 см.

§ 15

15.1. Рys. 53 — б); рys. 54 — б). **15.2.** а) Вертыкальныя; б) унутраныя накрыжлеглыя; в) унутраныя аднастароннія; г) адпаведныя; д) сумежныя; е) знешнія аднастароннія. **15.3.** а) $\angle 3$; б) $\angle 4$, $\angle 2$; в) няма; г) $\angle 5$; д) няма. **15.4.** а) Не; б) будуць; в) будуць; г) будуць. **15.5.** 66° , 114° , 66° , 114° , 66° , 114° , 66° , 114° . **15.6.** а) Паралельныя; б) паралельныя; в) паралельныя; г) паралельныя. **15.7.** а) $\angle 3$ і $\angle 5$, $\angle 4$ і $\angle 6$; б) $\angle 2$ і $\angle 8$, $\angle 1$ і $\angle 7$; в) $\angle 4$ і $\angle 5$, $\angle 3$ і $\angle 6$; г) $\angle 1$ і $\angle 8$, $\angle 2$ і $\angle 7$; д) $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$, $\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 4$ і $\angle 8$. **15.11.** а) Персякаюцца або супадаюць; б) персякаюцца або паралельныя.

§ 16

16.5. $\angle C = 61^\circ$. **16.7.** Не можа.

§ 17

17.2. Нельга. Калі роўныя вуглы з'яўляюцца ўнутранымі аднастароннімі, адрознымі ад 90° , то прамая персякаюцца. **17.3.** а) 65° ; б) 118° . **17.4.** а) 216° ; б) 220° . **17.5.** Не, паколькі гэтыя бісектрысы ўтвараюць са стараной трохвугольніка ўнутраныя аднастароннія вуглы, сума якіх меншая за 180° .

§ 18

18.1. а) 55° ; б) 49° . **18.2.** а) 40° ; б) 120° . **18.3.** Прамая павінна быць перпендыкулярна дадзеным паралельным прамым. **18.4.** а) $\angle 3 = 80^\circ$; б) $\angle 2 = 118^\circ$. **18.5.** а) 66° , 114° ; б) 60° , 120° .

§ 19

19.1. 42° , 42° . **19.2.** а) 70° ; б) 65° . **19.3.** Можна. **19.4.** а) 30° , 30° , 120° ; б) 36° , 72° , 72° . **19.5.** 120° . **19.6.** 20° , 60° , 100° . **19.7.** 100° . **19.8.** 30° . **19.9.** 105° . **19.10.** 150° . **19.11.** а) 42° і 42° ; б) 50° і 80° або 65° і 65° . **19.12.** 110° . **19.13.** 68° . **19.14.** 21° . **19.15.** а) 6 см; б) 8 см. **19.16.** 40° , 50° , 90° . **19.17.** 90° .

§ 20

20.1. 720° . **20.2.** Могуць. **20.3.** 70° . **20.4.** 140° . **20.5.** 130° . **20.6.** Правільнае. **20.7.** а) 56° ; б) 44° . **20.8.** а) 70° ; б) 70° . **20.9.** а) 25° ; б) 30° . **20.10.** а) 111° ; б) 106° . **20.11.** а) 40° ; б) 120° . **20.12.** 60° , 80° , 40° . **20.13.** Адзін. **20.14.** Указанне. Двойчы выкарыстайце тэарэму аб знешнім вугле трохвугольніка.

§ 21

21.6. а) $\angle B$; б) MN . **21.7.** а) $\angle C$; б) MN .

§ 22

22.1. а) Не існуе; б) не існуе; в) існуе. **22.2.** а) 35 см; б) 16 см або 17 см. **22.3.** 42 см. **22.4.** Не можа. **22.10.** а) $1 \leq x \leq 7$; б) $1 \leq x \leq 5$.

§ 23

23.2. Можа, у прамавугольным раўнабедраным трохвугольніку. **23.3.** Не. **23.7.** 55° . **23.8.** а) Можна; б) можна; в) не.

§ 24

24.2. 40° . **24.3.** 80° .

§ 25

25.1. 30° , 60° . **25.2.** 6 см, 12 см. **25.3.** 6 см. **25.4.** 30° . **25.5.** 8 см. **25.6.** 4 см. **25.7.** 60° . **25.8.** 10 см. **25.9.** 120° . **25.10.** 150° . **25.11.** 20 см; 60° . **25.12.** 4 см.

§ 26

26.1. 5 см. **26.3.** а) 4 см; б) 5 см. **26.4.** 15 см. **26.7.** 7 см.

§ 27

27.2. Тры пункты або адзін пункт. **27.7.** Два пункты.

§ 31

31.4. Адзін, ні аднаго. **31.5.** Частка акружнасці, абмежаваная старанамі дадзенага вугла. **31.6.** Дзве ўзаемна перпендыкулярныя

прамыя. **31.7.** Указанне. Унутры вугла пабудуйце дзве прамыя, паралельныя яго старанам і роўнааддаленыя ад іх. Яны ўтвораць вугал A , бісектрыса якога ляжыць на бісектрысе дадзенага вугла.

8 КЛАС

§ 1

1.1. 1, 3, 5. **1.2.** Трохвугольнік. **1.4.** а) 15; б) 20. **1.5.** а) 54; б) 6. **1.6.**

а)	Колькасць старон выпуклага n -вугольніка, n	6	4	5	3	8	9	12
	Сума ўнутраных вуглоў n -вугольніка	720°	360°	540°	180°	1080°	1260°	1800°
	Колькасць дыяганалей n -вугольніка	9	2	5	0	20	27	54

б)	Колькасць старон выпуклага n -вугольніка, n	3	4	5	6	7	10	11
	Сума ўнутраных вуглоў n -вугольніка	180°	360°	540°	720°	900°	1440°	1620°
	Колькасць дыяганалей n -вугольніка	0	2	5	9	14	35	44

1.7. а) 139° ; б) 131° . **1.8.** а) 60° ; б) 160° . **1.9.** а) 120° ; б) 108° . **1.10.** а) 35; б) 13. **1.11.** а) 170; б) 1800° . **1.12.** а) 108 см; б) 360 см.

§ 2

2.1. а) 46° ; б) 52° ; в) 116° ; г) 124° . **2.2.** а) 152° , 28° , 152° ; б) 34° , 146° , 34° . **2.3.** а) 18; б) 26. **2.4.** а) 9 см і 15 см; б) 6 : 1. **2.5.** а) 72° , 108° , 72° , 108° ; б) 1 : 5 : 1 : 5. **2.6.** а) 69° , 111° , 69° , 111° ; б) 71° , 109° , 71° , 109° . **2.7.** а) 56° , 124° , 56° , 124° ; б) 64° , 116° , 64° , 116° . **2.9.** а) 62 см; б) 17 см і 14 см. **2.10.** а) 8 см і 12 см; б) 12 см і 18 см. **2.11.** 34 см або 54 см. **2.12.** а) 2 см; б) 12 см. **2.13.** а) 54 см; б) 6 см і 12 см. **2.14.** а) 4 см, 3 см, 4 см; б) 46 см. **2.15.** а) 12 см і 4 см; б) 6 см і 4 см. **2.17.** а) 2 : 1; б) 1 : 5.

§ 3

3.3. а) (12; -6); б) (13; 1), (8; -6). **3.9.** а) Паралелаграм, 36 см; б) 16 см. **3.10.** а) 80 см; б) 56 см.

§ 4

4.2. а) 240 см; б) 15 см і 30 см. **4.3.** а) 126° ; б) 117° . **4.4.** а) 4 см; б) 18 см. **4.6.** 44 см. **4.7.** а) 9 см; б) 16 см. **4.8.** а) 48 см; б) 60 см. **4.9.** а) 68 см; б) 84 см. **4.10.** 44 см або 46 см. **4.11.** а) 1 : 1; б) 0° . **4.12.** а) 42 см; б) 40 см. **4.13.** а) 6 см; б) 4 см. **4.14.** а) 60° ; б) 40° .

§ 5

5.2. а) 72° і 108° ; б) 92° і 88° . **5.3.** а) 40 см; б) 60° і 120° . **5.4.** а) 56 см; б) 3 см. **5.5.** а) 150° ; б) 1 : 8. **5.6.** а) 8 см; б) 60° . **5.7.** а) 40 см; б) 6 см. **5.8.** а) 10 см; б) 48 см. **5.9.** 102° і 78° .

§ 6

6.1. а) 8 см; б) 6 см. **6.2.** а) (-3; 7) і (5; 7), або (-3; -9) і (5; -9), або (1; 3) і (1; -5); б) (-4; 8) і (6; 8), або (-4; -12) і (6; -12), або (1; 3) і (1; -7). **6.3.** а) 26 см; б) 8,12 м. **6.4.** а) 112 см; б) 54 см. **6.6.** а) 90° ; б) 150° . **6.7.** 75° .

§ 7

7.1. а) 5; б) 3. **7.2.** а) 16 см; б) 27 см. **7.3.** а) 24 см; б) 18 см. **7.4.** а) 47° ; б) 75° . **7.5.** а) 7 см, 3,5 см і 11,5 см; б) 13,5 см, 4,5 см і 9 см. **7.6.** а) 10 см; б) 48 см.

§ 8

8.1. а) 6 см; б) 20 см. 8.2. а) 28 см; б) 43 см. 8.3. а) 48 см; б) 7 см.
8.4. а) 10 см, 24 см, 26 см; б) 20 см. 8.5. а) Паралелаграм, 20 см;
б) 44 см. 8.6. а) 28 см; б) 20 см. 8.7. а) 36 см; б) 5 см. 8.8. Парале-
лаграм, 27 см. 8.9. $16\sqrt{13}$ см.

§ 9

9.1. а) 15 см; б) 15 см. 9.2. а) 13; б) 21. 9.3. а) 18 см; б) 12 см.
9.4. а) 60 см; б) 24 см. 9.5. а) 18 см; б) 12 см. 9.6. а) 16 см; б) 24 см.
9.7. а) 12 см; б) 16 см.

§ 10

10.1. а) 13 см; б) 14 см. 10.2. а) 13 см; б) 18 см. 10.3. а) 45° , 135° ,
 144° і 36° ; б) 36° , 144° , 150° і 30° . 10.4. а) 8,5 см; б) 7 см.
10.5. а) 20 см; б) 19 см і 15 см. 10.6. 15 см.

§ 11

11.1. а) 13 см і 4 см; б) 7 см і 12 см. 11.2. а) 33 см; б) 42 см.
11.3. а) 4 см; б) 4 см. 11.4. а) 45° , 135° , 135° і 45° ; б) 36° , 144° ,
 144° і 36° . 11.5. а) 10 см; б) 9 см. 11.6. а) $(-2; 6)$ або $(9; 6)$, 7 см;
б) $(3; 2)$ або $(3; -3)$, 10 см. 11.7. а) 20 см; б) 80 см. 11.8. а) 120° ;
б) 60° . 11.9. а) 22 см; б) 60° , 120° , 120° і 60° . 11.10. 45° , 135° , 135° і
 45° . 11.11. 72° , 108° , 108° , 72° .

§ 12

12.1. а) 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8; б) 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9. 12.2. а) Ф А П О Н Ш Х Е;
б) W I U T V M. 12.3. а) 24 см; б) 18 см. 12.4. а) $(7; -1)$; б) $(8; -2)$.

§ 13

13.1. а) 20 см^2 ; б) 19 см^2 . 13.2. а) 1024 см^2 ; б) $44 \cdot 100 \text{ см}^2$. 13.3. а) 32 см;
б) 256 см^2 . 13.4. а) 28,7; б) 48. 13.5. а) 49 см^2 ; б) 225 см^2 .
13.6. а) $100\sqrt{3}$; б) $64\sqrt{3}$. 13.7. а) 54 см; б) 1452 см^2 . 13.8. а) 20 м;
б) 1 : 20. 13.9. а) 52 см, або 32 см, або 28 см; б) 68 см, або 40 см,
або 32 см.

§ 14

14.1. а) 180 см^2 ; б) 135 см^2 . 14.2. а) 68; б) 66. 14.3. а) 88; б) 50. 14.4. а) 72 см^2 ; б) 64 см^2 . 14.5. а) 90° ; б) 120° . 14.6. а) 4 см; б) 48 см. 14.7. а) 18 см^2 ; б) 64 см. 14.8. а) 24 см^2 ; б) 160 см^2 . 14.9. а) 48; б) 42.

§ 15

15.1. а) 16 см^2 ; б) $10,5 \text{ см}^2$; в) 14 см^2 ; г) 12 см^2 ; д) 16 см^2 ; е) 12 см^2 . 15.2. а) 9 см; б) 12 см. 15.3. а) 16; б) 49. 15.4. а) 35 см^2 ; б) 24 см^2 . 15.5. а) 35 см^2 ; б) 24 см. 15.6. а) 28 см; б) 12 см. 15.7. а) 56; б) 84.

§ 16

16.1. а) 13 см; б) 17 см. 16.2. а) 84 см^2 ; б) 40 см. 16.3. а) 30 см; б) $16\sqrt{3} \text{ см}^2$. 16.4. а) 12 см^2 ; б) 36 см. 16.5. а) 16 см; б) 12 см. 16.6. а) 12 см; б) 9,6 см. 16.7. а) 6 см; б) 4 см. 16.8. а) 120 см^2 ; б) 168 см^2 . 16.9. а) 6 см; б) 3 см. 16.10. а) $3\sqrt{7} \text{ см}^2$; б) $5\sqrt{11} \text{ см}^2$. 16.11. а) $81\sqrt{3} \text{ см}^2$; б) $12\sqrt{3} \text{ см}^2$. 16.12. а) $7\sqrt{15} \text{ см}^2$; б) $8\sqrt{17} \text{ см}^2$. 16.13. а) 6,6 см^2 ; б) 3,6 см^2 . 16.14. а) 168 см^2 ; б) 120 см^2 . 16.15. а) $6\sqrt{7} \text{ см}^2$; б) $5\sqrt{6} \text{ см}^2$. 16.16. а) $50\sqrt{3} \text{ см}^2$; б) $72\sqrt{3} \text{ см}^2$. 16.17. а) 30 см^2 ; б) 60 см^2 . 16.18. а) $\frac{17\sqrt{2}}{8} \text{ см}$; б) $\frac{7\sqrt{2}}{6} \text{ см}$. 16.19. а) $162\sqrt{2} \text{ см}^2$; б) $242\sqrt{2} \text{ см}^2$. 16.20. а) 50 см^2 ; б) 20 см. 16.21. а) 324 см^2 ; б) 441 см^2 . 16.22. а) 2 см; б) 3 см. 16.23. $144 + 114\sqrt{3} \text{ см}^2$.

§ 17

17.1. а) 16 см^2 ; б) $13,5 \text{ см}^2$; в) $13,5 \text{ см}^2$; г) 18 см^2 . 17.2. а) 27 см^2 ; б) 18 см^2 . 17.3. а) 189 см^2 ; б) 12 см. 17.4. а) 168 см^2 ; б) 300 см^2 . 17.5. а) 276 см^2 ; б) 65 см^2 . 17.6. 80 см^2 . 17.7. 80 см^2 . 17.8. 169 см^2 . 17.9. 324 см^2 . 17.10. а) 20 см; б) $27\sqrt{3} \text{ см}^2$. 17.11. $12(6 + \sqrt{5}) \text{ см}$. 17.12. 210 см^2 .

§ 18

18.1. а) $24,5 \text{ см}^2$; б) 12 см^2 . 18.2. а) 120 см^2 ; б) 240 см^2 . 18.3. а) $2\sqrt{29} \text{ см}$; б) $2\sqrt{13} \text{ см}$. 18.4. а) $12(1 + \sqrt{3}) \text{ см}$ и $36\sqrt{3} \text{ см}^2$; б) $18(1 + \sqrt{3}) \text{ см}$

і $81\sqrt{3}$ см². 18.5. а) 12 см; б) 128 см². 18.6. а) 24 см²; б) 60 см².
 18.7. а) $5\sqrt{2}$ см; б) $\sqrt{10}$ см. 18.8. а) $3\sqrt{7}$ см²; б) $2\sqrt{5}$ см².
 18.9. а) 30 см; б) 18 см. 18.10. а) $36\sqrt{3}$ см²; б) $25\sqrt{3}$ см².
 18.11. а) 64 см²; б) 49 см². 18.12. а) $\frac{72\sqrt{97}}{97}$ см; б) $\frac{80\sqrt{89}}{89}$ см.
 18.13. а) 180 см²; б) 210 см². 18.14. а) 125 см²; б) 256 см².
 18.15. 2 см.

§ 19

19.1. а) 30 см; б) 24 см. 19.2. а) 5 : 11; б) 13 : 6. 19.3. а) 12 см;
 б) 28 см. 19.4. а) 136°; б) 68°. 19.5. а) 5,5; б) 8. 19.6. а) 16; б) 6,5.
 19.7. а) 76 см; б) 66 см. 19.8. а) 16 см і 25 см; б) 17 см і 26 см.
 19.9. 6 : 7.

§ 20

20.1. а) 33; б) 15. 20.2. а) 12,5; б) 31. 20.3. а) 5 см; б) 40 см.
 20.4. а) 51 см; б) 18 см. 20.5. Указанне. Выкарыстайце няроў-
 насць трохвугольніка. а) 15 см; б) 14 см. 20.6. а) 30 см; б) 16 см.
 20.7. а) 4 см; б) 9 см.

§ 21

21.1. а) II і III; б) I і III. 21.2. а) 34,5 см; б) 66,5 см. 21.3. а) 45;
 б) 96. 21.4. а) 8 см і 16 см; б) 6 см і 12 см. 21.5. а) 193; б) 132.
 21.6. а) 600 см²; б) 156 см². 21.7. а) $17\frac{7}{9}$ см; б) $21\frac{9}{11}$ см.
 21.8. а) 24 см; б) 18 см. 21.9. а) 21 см; б) 32 см. 21.10. а) 90 см²;
 б) 72 см². 21.11. а) 10 см; б) 9 см. 21.12. а) 18 см; б) 30 см.

§ 22

22.1. а) $1\frac{1}{3}$; б) 4,5; в) 6; г) $6\frac{2}{3}$. 22.2. а) 30 см; б) 24 см.
 22.3. а) $\frac{12\sqrt{6}}{7}$ см²; б) $\frac{48\sqrt{5}}{7}$ см². 22.4. а) 864 см²; б) 1500 см².
 22.5. а) $\frac{490}{29}$ см²; б) $\frac{1650}{41}$ см². 22.6. а) 432 м²; б) 375 см².

§ 23

23.1. а) 17; б) 19. 23.2. $6\sqrt{2}$ см. 23.3. а) 81 см^2 ; б) 81 см^2 .
23.4. а) 108 см; б) 108 см. 23.5. $\frac{15}{338} \text{ см}^2$. 23.6. а) 75 см^2 ; б) 15 см^2 .
23.7. а) 98 см^2 ; б) 100 см^2 .

§ 24

24.1. а) 2 см і 14 см; б) 4 см і 12 см. 24.2. 162 см.
24.3. а) 882 см^2 ; б) 2450 см^2 .

§ 25

25.1. а) 68° ; б) 46° . 25.2. а) 216° ; б) 224° . 25.3. а) 34° ; б) 32° .
25.4. а) $\frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ см}$; б) $12\sqrt{3} \text{ см}$. 25.5. а) $6\sqrt{2} \text{ см}$; б) $8\sqrt{2} \text{ см}$.
25.6. а) 32° ; б) 26° . 25.7. а) 16 см; б) $16\sqrt{3} \text{ см}$.

§ 26

26.1. а) $\sqrt{33} \text{ см}$; б) $2\sqrt{14} \text{ см}$. 26.2. а) 80 см; б) 130 см.
26.3. а) $8\sqrt{3} \text{ см}$ або $2\sqrt{13} \text{ см}$; б) $5\sqrt{2} \text{ см}$ або $7\sqrt{2} \text{ см}$.
26.4. а) 96 см^2 ; б) 30 см^2 .

§ 27

27.1. а) 108° ; б) 34° . 27.2. а) 32° ; б) 62° . 27.3. а) 68° ; б) 42° .
27.4. а) $12\sqrt{2} \text{ см}$; б) 10 см. 27.5. а) 18 см^2 ; б) 8 см. 27.6. а) $\frac{169\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2$;
б) 22 см. 27.7. а) 14 см; б) 12 см. 27.8. а) 22° ; б) 56° . 27.9. а) 45° ;
б) 80° . 27.10. а) 58° ; б) 66° . 27.11. а) 18° ; б) 22° . 27.12. а) 125° ;
б) 112° . 27.13. а) 6,5 см; б) 24 см. 27.14. а) 78° ; б) 82° .

§ 28

28.1. а) 150° ; б) 35° . 28.2. а) $39,5^\circ$; б) 33° . 28.3. а) 28° ; б) 99° .
28.4. а) 33° ; б) 52° . 28.5. а) 40° ; б) 50° .

§ 29

29.1. а) 3 см; б) 4 см. 29.2. а) 7,5; б) 6,5. 29.3. а) $3\sqrt{5}$; б) $4\sqrt{5}$.
29.4. а) 10; б) 7. 29.5. а) 5; б) 7. 29.6. а) 4; б) 12. 29.7. а) 12 см;
б) 16 см. 29.8. 12,5 см.

9 КЛАС

§ 1

- 1.1. а) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sin \alpha = \frac{5}{6}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{\sqrt{11}}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$; в) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$; д) $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{2}$; е) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\operatorname{ctg} \alpha = 2\sqrt{2}$. 1.2. а) $\frac{16\sqrt{5}}{25} \text{ см}^2$; б) $\frac{12\sqrt{10}}{25} \text{ см}^2$. 1.3. а) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{6}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{6}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{35}}{7}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{35}}{5}$; б) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{5}$. 1.4. а) $\frac{5}{13}$; б) $\frac{15}{17}$.

§ 2

- 2.1. а) 10; б) 4; в) 5; г) $6\frac{2}{3}$. 2.2. а) $a = 6$; $b = 6\sqrt{3}$; б) $a = b = 18$; в) $a = b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. 2.3. а) 36 см^2 ; б) 13 см . 2.4. а) $\sqrt{73} \text{ см}$; б) $2\sqrt{61} \text{ см}$. 2.5. а) $2(3 + \sqrt{3}) \text{ см}$; б) 20 см^2 . 2.6. а) 18 см^2 ; б) $10(\sqrt{2} + 1) \text{ см}$. 2.7. а) 48 см^2 ; б) $0,2$. 2.8. а) $2\sqrt{3} \text{ см}$; б) $4\sqrt{3} \text{ см}$.

§ 3

- 3.1. а) $\cos \alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg} \alpha = 1\frac{7}{8}$; б) $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$, $\operatorname{ctg} \alpha = 3\frac{3}{7}$. 3.2. а) 2); 4); 5); б) 1); 2). 3.3. а) $1 : 9$; б) $2 : 11$. 3.4. а) $104\sqrt{2} \text{ см}$; б) 10 см .

§ 4

- 4.1. а) $\sin 15^\circ$, $-\cos 85^\circ$, $-\operatorname{tg} 71^\circ$, $-\operatorname{ctg} 57^\circ$; б) $\sin 82^\circ$, $-\cos 2^\circ$, $-\operatorname{tg} 79^\circ$, $-\operatorname{ctg} 35^\circ$. 4.2. а) 150° , $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$; б) 135° , $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -1$, $\operatorname{ctg} \alpha = -1$. 4.3. а) -2 ; б) -2 .

§ 5

- 5.1. а) 4,5; б) 6; в) 4; г) 3; д) $\sqrt{2}$; е) 1; ж) 1,5; з) 2,25.
5.2. а) $10\sqrt{3}$ см²; б) 30° або 150°. 5.3. а) 48; б) 7; в) 6; г) 19,2;
д) 48. 5.4. а) 90 см²; б) 12 см. 5.5. а) $5\sqrt{3}$ см; б) $-\frac{1}{3}$. 5.6. а) 36 см²;
б) 60 см². 5.7. а) 10 см²; б) 40 см. 5.8. а) $8\sqrt{2}$ см²; б) 4 см. 5.9. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$.
5.10. а) $15\sqrt{3}$; б) 7,2. 5.11. $2\sqrt{2}$.

§ 6

- 6.1. а) 4; б) 2; в) 2; г) 16. 6.2. а) 4; б) 5. 6.3. а) $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{30}$;
б) $24\sqrt{2}$. 6.4. а) 4; б) $2\sqrt{15}$. 6.5. а) $\frac{x\sqrt{xy}}{4}$; б) $\frac{p^3}{4m}$. 6.6. а) 4 : 9;
б) 2 : 5. 6.7. а) $\frac{4\sqrt{3n}}{3}$; б) $\frac{4k}{3}$.

§ 7

- 7.1. а) 3; б) 6. 7.2. а) 90°; б) 10°. 7.3. а) $2\sqrt{7}$; б) 4. 7.4. а) 4; б) 60°.
7.5. а) 8; б) 110°. 7.6. а) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, 8; б) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$, 7. 7.7. а) 4,5 см; б) $\frac{3}{4}$.
7.8. а) 24 см; б) 17 см. 7.9. а) $5\frac{5}{7}$ см; б) 6 см. 7.10. а) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ см;
б) 36 см. 7.11. а) $4\sqrt{3}$ см; б) $2\sqrt{3}$ см. 7.12. а) $15\sqrt{2}$ см; б) $2\sqrt{5}$ см.
7.13. а) 36, 48; б) 6, 8. 7.14. а) 3; б) 5. 7.15. а) 6; б) 2 : 1.

§ 8

- 8.1. а) $\frac{\sqrt{13}}{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) 3; г) 4; д) 9. 8.2. а) $2\sqrt{2}$; б) 24; 7; в) 5;
г) 4. 8.3. а) 5 см; б) 34 см. 8.4. а) $2,4\sqrt{13}$; б) $\frac{\sqrt{69}}{9}$. 8.5. а) 10; б) 18.
8.6. а) $\frac{6\sqrt{2}}{5}$; б) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. 8.7. а) $4\sqrt{5}$ м; б) $2\sqrt{85}$ м. 8.8. 11. 8.9. а) 24;
б) 384. 8.10. а) $12(\sqrt{2} - 1)$ см; б) 9 см.

§ 9

- 9.1. а) 100°; б) 5; в) $\sqrt{34}$; г) 3; д) $10(1 + \sqrt{3})$. 9.2. а) 38; б) $2\sqrt{2}$;
в) 7,5; г) 4; д) $\sqrt{3}$. 9.3. а) 4; б) 10. 9.4. а) 105°; б) 60°. 9.5. а) 4 см;

б) 18 см. **9.6.** а) 16 см; б) 20 см. **9.7.** а) 12; б) 25. **9.8.** а) 160° ; б) 140° .
9.10. а) $4\frac{8}{13}$; б) 4,8. **9.11.** а) 125; б) 136. **9.12.** а) 192; б) 125.
9.14. а) 40 см; б) 15 см. **9.15.** а) $10\frac{1}{34}$ см; б) $10\frac{10}{23}$ см. **9.16.** а) 7,2;
 б) 48. **9.17.** а) $6\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$. **9.18.** а) $4m$; б) $2nr$.

§ 10

10.1. а) 0,75; б) $4\sqrt{6}$; в) 4; г) 12; д) $\frac{8}{9}$; е) $\frac{3\sqrt{15}}{4}$; ж) $\frac{175\sqrt{6}}{72}$; з) 2,5;
 і) $\frac{32\sqrt{2}}{5}$; к) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; л) 3,125; м) 4. **10.2.** а) 6 см; б) $\frac{12\sqrt{6}}{35}$. **10.3.** а) 16 см;
 б) 16 см. **10.4.** а) 23,4 см; б) 22,1 см. **10.5.** а) 4,5 см; б) 5 см.
10.6. а) $\frac{16\sqrt{15}}{15}$ см; б) $\frac{48\sqrt{15}}{15}$ см. **10.7.** а) 30° , 150° ; б) 45° .
10.8. а) 11 см; б) 30° . **10.9.** а) 1,5 см; б) 2,25 см.
10.10. а) $\frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \varphi}{\sin(\beta + \varphi)}$; б) $\frac{n^2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \sin^2 \varphi}{\sin^2(\beta + \varphi)}$. **10.11.** а) $10(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$;
 б) $5(2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6})$. **10.12.** $\sqrt{\frac{S}{2\sin(\beta + \varphi)\sin \beta \sin \varphi}}$.

§ 11

11.1. а) $\sqrt{13}$; б) $2\sqrt{37}$; в) $2\sqrt{26}$; г) $3\sqrt{17}$; д) 1 або 3; е) $-\frac{1}{9}$;
 ж) 150° ; з) $-\frac{17}{18}$; і) $\sqrt{65}$; к) $\sqrt{15}$; л) $\sqrt{3}$; м) $4\sqrt{2}$. **11.2.** а) $\frac{31}{35}$; б) $\frac{13}{60}$.
11.3. а) Тупавугольны; б) тупавугольны. **11.4.** а) 7 см; б) $\sqrt{7}$ см.
11.5. а) 2 см, 4 см; б) $2\sqrt{2}$ см, 4 см. **11.6.** а) $3\sqrt{13}$; б) $0,5\sqrt{10}$.
11.7. а) $\frac{6\sqrt{57}}{19}$ см; б) $\sqrt{93}$ см або $\sqrt{21}$ см. **11.8.** а) $0,5\sqrt{15}$; б) $4\sqrt{2}$.
11.9. 7. **11.10.** $5\sqrt{6}$ см.

§ 12

12.1. а) $4\sqrt{11}$; б) $\frac{63\sqrt{5}}{40}$; в) $2\sqrt{6}$; г) $\frac{2\sqrt{15}}{16}$; д) 1,5; е) $\frac{45\sqrt{7}}{4}$;
 ж) $4\sqrt{14}$; з) $\frac{3\sqrt{14}}{2}$. **12.2.** а) $12\sqrt{15}$ см²; б) 84 см². **12.3.** а) 8,125;

- б) $20\frac{1}{24}$. 12.4. а) $3\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{5}$. 12.5. а) $\frac{7\sqrt{11}}{6}$ см; б) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ см.
12.6. а) $\frac{24\sqrt{3}}{11}$ см; б) $\frac{8\sqrt{14}}{11}$ см. 12.7. а) $24\sqrt{11}$ см²; б) $60\sqrt{7}$ см².
12.8. а) 80 см; б) 60 см.

§ 13

- 13.1. а) 135°; б) 30; в) 108°; г) 10; д) 72. 13.2. а) 108 см; б) 2 см.
13.3. а) 16; б) 8. 13.4. а) 70 см; б) 4860°. 13.5. а) 1 см; б) 54 см.
13.6. а) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{a^2(\sqrt{2}+1)}{2}$. 13.7. а) $(2\sqrt{5}-2)$ см; б) $(\sqrt{5}-1)$ см.
13.9. а) $(3+2\sqrt{2})$ см²; б) $24(\sqrt{2}-1)$ см. 13.10. а) $4+3\sqrt{2}$;
б) $8+7\sqrt{2}$. 13.11. а) 12 см; б) 10 см. 13.12. а) $2\sqrt{2}$ см; б) $8\sqrt{2}$ см.
13.13. а) 6,125; б) 36.

§ 14

- 14.1. а) 1) 24; 2) 18; 3) 72; 4) 15; б) 1) 15; 7,5; 2) 10; 3) $2\sqrt{2}$.
14.2. а) $108\sqrt{3}$ см²; б) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см. 14.3. а) 32 см; б) 16 см².
14.4. а) $\sqrt{6}$ см; б) $32\sqrt{3}$ см². 14.5. а) $R = \frac{b}{2\sin 10^\circ}$; б) $c = 2r\operatorname{tg} 5^\circ$.
14.6. а) $12R^2\sin 15^\circ$; б) 36. 14.7. $3(1+\sqrt{3})$. 14.9. а) $8(3+2\sqrt{3})$;
б) $6(2\sqrt{3}-3)$. 14.10. а) 36; б) $4\sqrt{2}$.

§ 15

- 15.1. а) $2\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$; в) 4; г) 36; д) 24; е) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$; ж) $3\sqrt{3}$; з) $6\sqrt{3}$;
и) $6\sqrt{3}$. 15.2. а) $2:\sqrt{3}$; б) $1:3$. 15.3. а) $16\sqrt{3}$ см; б) $12\sqrt{6}$ см.
15.4. а) 8; б) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$. 15.6. а) $15\sqrt{3}$ см; б) 6 см. 15.7. а) 48; б) $36\sqrt{3}$.
15.8. а) 30; б) 40. 15.9. а) 36 см; б) 18 см. 15.10. а) 12 см;
б) $2(\sqrt{3}-1)$ см. 15.11. $20\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

§ 16

- 16.1. а) 8π ; б) 9π ; в) 16π ; г) 8; д) $\frac{8\pi}{3}$; е) $\frac{20\pi}{9}$; ж) $\frac{12\pi - 9\sqrt{3}}{4}$.
 16.2. а) $\sqrt{6}\pi$; б) $2\sqrt{3}\pi$. 16.3. а) 18π ; б) 48π . 16.4. а) $12\sqrt{2}$ см;
 б) $9\sqrt{3}$ см. 16.5. а) $(100 - 25\pi)$ см²; б) $\frac{4(3\sqrt{3} - \pi)}{3}$ см². 16.6. а) 2 см;
 б) 6,25 см. 16.7. а) 11 см²; б) 17 см². 16.8. а) 72°; б) 80°.
 16.9. а) 16 см; б) 0,2 см. 16.10. а) $\frac{3\sqrt{5}\pi}{5}$ см; б) $3,75\pi$ см².
 16.11. а) $(2\pi - 4)$ см²; б) $(\pi - 2)$ см². 16.12. а) $36\sqrt{2}$ см; б) 300°.
 16.13. а) 5 : 4; б) 4 : 5. 16.14. а) $\frac{4(2\pi - 3\sqrt{3})}{3}$ см²; б) $\frac{9(\pi - 2)}{4}$ см².
 16.15. а) $8(\sqrt{3} + \pi)$; б) $\frac{2\pi}{3}$. 16.16. а) 6 см²; б) 24 см². 16.17. а) 4π см;
 б) 4π см². 16.18. 10π. 16.19. 6π см. 16.20. $\frac{24\sqrt{3} - 11\pi}{6}$.

ПАЎТАРЭННЕ КУРСА ГЕАМЕТРЫІ 7—9-х КЛАСАЎ

Трохвугольнікі

1. а) 70°; б) 10°. 2. а) 36°; б) 15°. 3. а) 50°; б) 37°. 5. а) 2), 3); б) 1), 2).
 6. а) 30 см²; б) 15 см². 7. а) 9 см; б) 20 см. 8. а) $16\sqrt{7}$; б) $14\sqrt{6}$.
 9. а) 1,69; б) 16,9. 10. а) 10; б) 30. 11. а) 72 см; б) 72 см. 12. а) 29;
 б) 13. 13. а) $\frac{\sqrt{3}}{7}$; б) $3\sqrt{3}$. 14. а) 3 см; б) 2 см. 15. а) 48 см²;
 б) $1\frac{2}{3}$ см. 16. а) 720 см²; б) 288 см². 17. а) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; б) $2\sqrt{34}$ см.
 18. а) 8 см; б) 5 см. 19. а) 0,75; б) $\frac{1}{3}$. 20. а) 30; б) 35. 21. а) 10 см;
 б) 18 см. 22. а) $\frac{24\sqrt{15}}{5}$ см; б) $\frac{25\sqrt{6}}{3}$ см. 23. а) 15; б) 15. 24. а) $\sqrt{97}$;
 б) $\sqrt{13}$. 25. а) 6 : 1; б) 5 : 1. 26. а) 6 : 5; б) 7 : 20. 27. а) 2 : 1;
 б) 3 : 4. 28. а) $(\sqrt{3} + 1) : 1$; б) $(\sqrt{2} + 1) : 1$. 29. а) 6; б) 8. 30. а) 3 см;
 б) $3\sqrt{6}$ см. 31. а) 16,9; б) 3,75. 32. а) $2\sqrt{13}$ см; б) $\frac{9\sqrt{17}}{4}$ см.

Чатырохвугольнікі

34. а) 14 см; б) 20 см. 35. а) 30 см; б) 38 см. 36. а) $5\sqrt{3}$ см²; б) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см². 38. а) $0,5\sqrt{3}$ см; б) 2,5 см. 39. а) 42 см²; б) 8 см². 40. а) 2 см; б) 10 см. 41. а) 14; б) 26. 42. а) 8; б) 10,24. 43. а) 30; б) 10. 44. а) 4; б) 6. 45. а) 8; б) 24. 46. а) 62,5 см²; б) 40 см. 47. а) $8\sqrt{3}$ см²; б) $4\sqrt{3}$ см. 48. а) $36\sqrt{5}$; б) $36\sqrt{5}$. 49. а) 0,8; б) 9 : 1. 50. а) 600 см²; б) 156 см². 51. а) 4,8; б) $\frac{\sqrt{10}}{2}$. 52. а) 120; б) 384. 53. а) $16\frac{2}{3}$; б) $4\frac{1}{6}$. 54. а) $32\sqrt{3}$ см²; б) $72\sqrt{3}$ см². 55. а) 25 см; б) 60°. 56. а) 6; б) $8\sqrt{3}$. 57. а) 7 см; б) 16 см. 58. а) 60 см²; б) 6 см. 59. а) $8\sqrt{2}$ см²; б) $3\sqrt{7}$ см². 60. а) 64; б) 225. 61. а) $12\sqrt{6}$; б) $\frac{68\sqrt{21}}{25}$. 62. а) $32\sqrt{6}$; б) $5\sqrt{15}$. 64. а) 13,5; б) 9. 65. а) 6,4 см; б) $\frac{4\sqrt{6}}{5}$ см. 66. а) 45°; б) 30°. 67. а) 62,5; б) 98. 68. а) 45 см; б) 36 см. 69. а) 8 см; б) 8 см. 70. а) 1440 см²; б) 84 см². 71. а) 2,4; б) 7,2. 72. а) $16\frac{2}{3}$; б) 202,8. 73. а) 5 см; б) 14 см. 74. а) 2; б) 6. 75. а) 10; б) 10. 76. а) 168; б) 108. 77. а) 4,8 см; б) $11\frac{1}{13}$ см. 78. а) 192; б) 64. 79. а) 128; б) 375. 81. а) 60 см²; б) 6 см. 82. а) 36 см²; б) 4 см. 83. а) 2,6; б) 4. 84. а) 20; б) 63. 85. а) 9 : 16; б) 4 : 9.

Акружнасць

86. а) 105°; б) 160°. 87. а) 8; б) 10. 88. а) 58°; б) 28°. 90. а) 44°; б) 32°. 91. а) 70°; б) 35°. 92. а) 120°; б) 20°. 93. а) 10°; б) 45°. 94. а) 8°; б) 9°. 95. а) 6,5; б) 8. 96. а) 4; б) $2\sqrt{15}$. 97. а) 8; б) $12\sqrt{3}$. 98. а) 8; б) 10. 99. а) 10; б) 6. 100. а) 96°; б) 96°. 101. а) 120; б) 336. 102. а) $\sqrt{130}$ см; б) $2\sqrt{5}$ см. 103. а) $2\sqrt{2}$ см; б) 9 см. 104. а) 45°; б) 120°. 105. а) 64; б) $53\frac{1}{3}$.

ВЫНІКОВЫ САМАКАНТРОЛЬ

1. б). 2. 3,6 см; 7,2 см. 3. 1. 4. 20. 5. 180 см^2 . 6. 14 см, 10 см, 12 см. 7. 15 см. 8. 6. 9. $1\frac{1}{3}$ см. 10. 12,5 см; 2 см. 11. 8 см^2 ; 50 см^2 .
 12. 25. 13. $29,7^\circ$, $69,3^\circ$ і 81° . 14. 7 см. 15. $5\sqrt{6} \text{ см}^2$. 16. 30° ; 60° . 17. а) 2 см; $2\sqrt{3}$ см; $2\sqrt{3} \text{ см}^2$; б) $14\sqrt{2}$ см. 18. 10° . 19. 15.
 20. $3 - \sqrt{5}$. 21. 7,2. 22. $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}$. 23. $4\sqrt{3} \text{ см}^2$. 24. Не можа. 25. 14 см.
 26. 97° . 27. 3 см. 28. 3 см. 29. 120° . 30. а) 105° ; б) 20 см; 28 см.
 31. 30 см і 20 см. 32. 33 см^2 . 33. 7,5 см. 34. 24. 35. 160 см^2 .
 36. $16\sqrt{2}$. 37. 12. 38. 4. 39. 95. 40. 18 см^2 . 41. а) 12 см; б) 12 см.
 42. 60 см^2 . 43. 48π . 44. 18. 45. $3 + 2\sqrt{3}$. 46. 2. 47. $OB < OA$.
 48. 60° . 49. 100° ; 160° ; 100° . 50. 5 см. 51. а) 62° ; б) 120° ; в) 35° .
 52. а) 17; б) 2; в) 8. 53. 5π . 54. $\frac{8\pi}{3}$. 55. Тупавугольны.

ЗМЕСТ

Ад аўтараў	3
------------------	---

7 клас

ПАЧАТКОВЫЯ ПАНЯЦЦІ ГЕАМЕТРЫІ

§ 1. Паўтарэнне геаметрычнага матэрыялу 5—6-х класаў	4
§ 2. Прадмет геаметрыі	8
§ 3. Прамая. Прамень. Адрэзак. Ломаная	11
§ 4. Акружнасць і круг	12
§ 5. Вугал. Віды вуглоў	14
§ 6. сумежныя вуглы. Вертыкальныя вуглы	16
§ 7. Перпендыкулярныя прамыя	18

ПРЫМЕТЫ РОЎНАСЦІ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ

§ 8. Трохвугольнікі	19
§ 9. Першая і другая прыметы роўнасці трохвугольнікаў	20
§ 10. Вышыня, медыяна і бісектрыса трохвугольніка	23
§ 11. Раўнабедраны трохвугольнік	26
§ 12. Прыметы раўнабедранага трохвугольніка	27
§ 13. Трэцяя прымета роўнасці трохвугольнікаў	29
§ 14. Сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка	30

ПАРАЛЕЛЬНАСЦЬ ПРАМЫХ НА ПЛОСКАСЦІ

§ 15. Прыметы паралельнасці прамых	31
§ 16. Аксіёма паралельных прамых	34
§ 17. Уласцівасці паралельных прамых	36
§ 18*. Вуглы з адпаведна паралельнымі і адпаведна перпендыкулярнымі старанамі	37

СУМА ВУГЛОЎ ТРОХВУГОЛЬНІКА

§ 19. Сума вуглоў трохвугольніка	39
§ 20. Знешні вугал трохвугольніка	41
§ 21. Суадносіны паміж старанамі і вугламі трохвугольніка	44
§ 22. Няроўнасць трохвугольніка	45
§ 23. Прыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў	47

§ 24. Уласцівасць пунктаў бісектрысы вугла	48
§ 25. Уласцівасць катэта прамавугольнага трохвугольніка, які ляжыць супраць вугла ў 30°	49
§ 26. Адлегласць паміж паралельнымі прамымі	50

ЗАДАЧЫ НА ПАБУДОВУ

§ 27. Аб задачах на пабудову	51
§ 28. Пабудова трохвугольніка па трох старанах. Пабудова вугла, роўнага дадзенаму	52
§ 29. Пабудова бісектрысы вугла. Пабудова сярэдзіны адрэзка	53
§ 30. Пабудова прамой, перпендыкулярнай дадзенай	54
§ 31. Геаметрычнае месца пунктаў	—

8 клас

ЧАТЫРОХВУГОЛЬНІКІ

§ 1. Многавугольнікі	55
§ 2. Паралелаграм і яго ўласцівасці	58
§ 3. Прыметы паралелаграма	62
§ 4. Прамавугольнік	64
§ 5. Ромб	67
§ 6. Квадрат	69
§ 7. Тэарэма Фалеса	70
§ 8. Сярэдняя лінія трохвугольніка	72
§ 9. Уласцівасць медыян трохвугольніка	74
§ 10. Трапецыя. Сярэдняя лінія трапецыі	76
§ 11. Раўнабедраная і прамавугольная трапецыі	78
§ 12. Цэнтральная і восевая сіметрыя	81

ПЛОШЧЫ МНОГАВУГОЛЬНІКАЎ

§ 13. Плошча квадрата, прамавугольніка	82
§ 14. Плошча паралелаграма	84
§ 15. Плошча трохвугольніка, прамавугольнага трохвугольніка, ромба	87
§ 16. Тэарэма Піфагора	89
§ 17. Плошча трапецыі	94
§ 18. Задачы па тэме «Плошчы многавугольнікаў»	96

ПАДОБНАСЦЬ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ

§ 19. Абагульненая тэарэма Фалеса	100
§ 20. Падобнасць трохвугольнікаў	102
§ 21. Прыметы падобнасці трохвугольнікаў	104
§ 22. Уласцівасць бісектрысы вугла трохвугольніка	108
§ 23. Уласцівасць плошчаў падобных трохвугольнікаў	109
§ 24. Задачы па тэме «Падобнасць трохвугольнікаў»	111

АКРУЖНАСЦЬ

§ 25. Датычная да акружнасці	112
§ 26. Узаемнае размяшчэнне акружнасцей	114
§ 27. Цэнтральны і ўпісаны вуглы	115
§ 28. Вуглы, утвораныя хордамі, сякучымі і датычнымі	119
§ 29. Уласцівасць адрэзкаў хорд і датычных	121

9 клас

СУАДНОСІНЫ Ў ПРАМАВУГОЛЬНЫМ ТРОХВУГОЛЬНІКУ

§ 1. Сінус, косінус, тангенс і катангенс вострага вугла	124
§ 2. Рашэнне прамавугольнага трохвугольніка	126
§ 3. Трыганаметрычныя формулы	128
§ 4. Сінус, косінус, тангенс і катангенс тупога вугла	129
§ 5. Формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма	130
§ 6. Сярэдняе прапарцыянальнае (сярэдняе геаметрычнае) у прамавугольным трохвугольніку	134

УПІСАНЫЯ І АПІСАНЫЯ АКРУЖНАСЦІ

§ 7. Апісаная і ўпісаная акружнасці трохвугольніка	136
§ 8. Прамавугольны трохвугольнік і яго апісаная і ўпісаная акружнасці	141
§ 9. Упісаная і апісаная чатырохвугольнікі	144

ТЭАРЭМА СІНУСАЎ, ТЭАРЭМА КОСІНУСАЎ

§ 10. Тэарэма сінусаў	150
§ 11. Тэарэма косінусаў	154
§ 12. Формула Герона. Рашэнне трохвугольнікаў	157

ПРАВІЛЬНЫЯ МНОГАВУГОЛЬНІКІ

§ 13. Правільныя многавугольнікі	159
§ 14. Формулы радыусаў апісанай і ўпісанай акружнасцей правільнага многавугольніка	162
§ 15. Правільны трохвугольнік, чатырохвугольнік, шасцівугольнік	165
§ 16. Знаходжанне даўжыні акружнасці і плошчы круга	168

ПАЎТАРЭННЕ КУРСА ГЕАМЕТРЫІ**7—9-х КЛАСАЎ**

Трохвугольнікі	174
Чатырохвугольнікі	182
Акружнасць	194
Выніковы самакантроль	200
Адказы	218

(Назва ўстановы адукацыі)

Вучэбны год	Імя і прозвішча вучня	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака вучню за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Вучэбнае выданне
Конанаў Сяргей Гаўрылавіч
Адамовіч Тамара Антонаўна
Яфімцава Ірына Валяр'янаўна
Ячэйка Таіса Уладзіміраўна

ЗБОРНІК ЗАДАЧ ПА ГЕАМЕТРЫІ

Вучэбны дапаможнік для 7–9 класаў устаноў адукацыі,
якія рэалізуюць адукацыйныя праграмы агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання і выхавання

Заг. рэдакцыі *Г. А. Бабаева*. Рэдактар *Н. М. Алганава*. Мастацкі рэдактар *В. М. Карповіч*.
Тэхнічнае рэдагаванне і камп'ютарная вёрстка *І. І. Дуброўскай*. Карэктар *В. С. Казіцкая*.

Падпісана да друку 05.12.2023. Фармат 70 × 90^{1/16}. Папера афсетная. Друк афсетны.
Ум. друк. арк. 17,55. Ул.-выд. арк. 9,4. Тыраж 8 803 экз. Заказ .

Выдавецкае рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Народная асвета». Пасведчанне
аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выдан-
няў № 1/2 ад 08.07.2013. Пр. Пераможцаў, 11, 220004, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

Адкрытае акцыянернае таварыства «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа». Пасведчанне аб
дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выдан-
няў № 2/3 ад 10.09.2018. Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

З-41 Зборнік задач па геаметрыі : вучэбны дапаможнік для 7–9-х класаў устаноў адукацыі, якія рэалізуюць адукацыйныя праграмы агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання і выхавання / С. Г. Конанаў [і інш.] ; пераклад з рускай Н. М. Алганавай. — Мінск : Народная асвета, 2023. — 240 с. : іл.

ISBN 978-985-03-4013-9.

У зборніку прапануюцца дадатковыя задачы да вучэбных дапаможнікаў «Геаметрыя» для 7-га класа, «Геаметрыя» для 8-га класа, «Геаметрыя» для 9-га класа аўтара В. У. Казакова. Структура зборніка адпавядае структуры названых вучэбных дапаможнікаў. Змяшчае заданні базавага і павышанага ўзроўняў. Можа выкарыстоўвацца пры самастойнай падрыхтоўцы да экзаменаў.

УДК 514(075.3=161.3)

ББК 22.151я721