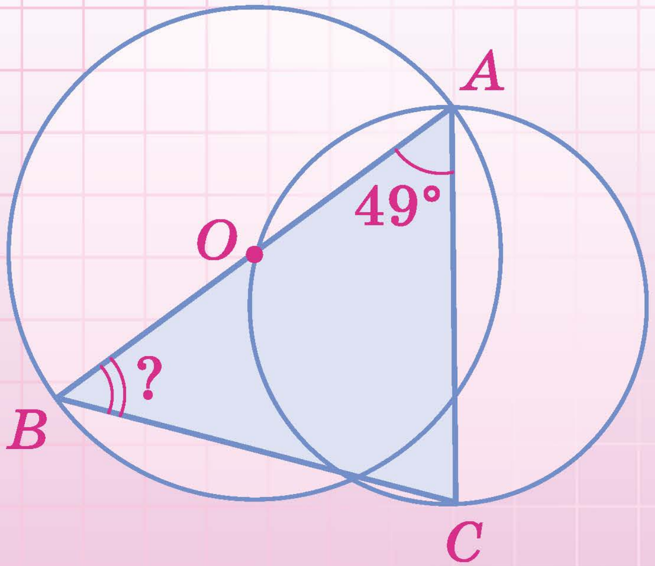
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

7-9



СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие для 7–9 классов
учреждений образования,
реализующих образовательные программы
общего среднего образования
с русским языком обучения и воспитания

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

Минск «Народная асвета» 2023

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
С23

Авторы:
С. Г. Кононов, Т. А. Адамович, И. В. Ефимцева, Т. В. Ячейко

Рецензенты:
кафедра алгебры и геометрии факультета математики и технологии программирования учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины» (доктор физико-математических наук, доцент *В. М. Селькин*);
учитель математики квалификационной категории «учитель-методист» государственного учреждения образования «Средняя школа № 1 г. Дрогичина»
Е. Б. Протасевич

ISBN 978-985-03-4012-2

ОТ АВТОРОВ

Уважаемые учащиеся! В данном сборнике предлагаются дополнительные задачи к учебным пособиям «Геометрия» для 7-го класса, «Геометрия» для 8-го класса, «Геометрия» для 9-го класса автора В. В. Казакова.

Структура сборника соответствует структуре указанных учебных пособий. Задачи подобраны таким образом, чтобы вы могли не только глубже усвоить основы теории, изложенные в учебных пособиях, но и выработали навыки их практического применения. Отдельные задания составлены так, что сами могут помочь вам правильно выбрать способ их решения. Главной целью сборника является развитие у вас умения рассуждать логически и способности отстаивать свою точку зрения.

Представленный в сборнике материал может быть использован вами для самостоятельной работы.

Задачи, отмеченные символом *, предназначены для самостоятельной поисково-исследовательской или проектной деятельности учащихся (индивидуальной или групповой), организуемой педагогическим работником.

Задачи, ориентированные на применение знаний на более высоком (повышенном) уровне, отмечены знаком .

Решение некоторых задач требует нешаблонного применения полученных знаний, что будет содействовать развитию у вас математической культуры и мышления. Чтобы вы могли убедиться в правильности своих решений, в сборнике даны ответы к заданиям.

Для контроля и самопроверки в сборник включен раздел «Итоговый самоконтроль», который может быть использован при подготовке к экзаменам.

Желаем успехов!

7 класс

НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Повторение геометрического материала 5—6-х классов

1.1. а) Постройте в тетради прямоугольник и обозначьте его $ABCD$. На рисунке отметьте: отрезок AC; луч CB; прямую BD.

б) Постройте в тетради прямоугольник и обозначьте его $MNPK$. На рисунке отметьте: отрезок MP; луч PN; прямую NK.

1.2. Постройте в тетради треугольник и обозначьте его MNK, внутри треугольника отметьте точки A, B, C. Имеют ли общие точки:

а) отрезок MN с отрезком AB; отрезок KN с прямой NC; луч MK с отрезком AC; луч KN с прямой NC;

б) отрезок MK с отрезком AC; прямая MN с отрезком AB; луч KN с отрезком NC; луч MK с прямой AC?

1.3. С помощью циркуля постройте окружность с центром:

а) в точке A и радиусом 3 см. Постройте отрезок $AB = 7$ см. Обозначьте буквой C общую точку отрезка AB и окружности. Найдите длину отрезка CB и диаметр этой окружности;

б) в точке M и радиусом 2 см. Постройте отрезок $MK = 5$ см. Обозначьте буквой C общую точку отрезка MK и окружности. Найдите длину отрезка CK и диаметр этой окружности.

1.4. При помощи транспортира постройте:

а) угол FDC, равный $50°$, и угол MNK, равный $130°$;

б) угол ABC, равный $70°$, и угол FKN, равный $120°$.

1.5. Постройте отрезок AB и отрезок CD разной длины и измерьте их длины.

1.6. С помощью линейки постройте в тетради отрезок MN, равный 3 см 5 мм, и отрезок CK, равный 2 дм 1 см.

1.7. Определите, не выполняя измерений:

а) какие прямые, изображенные на рисунке 1, могут быть перпендикулярными. Проверьте себя, пользуясь чертежным треугольником и транспортиром;

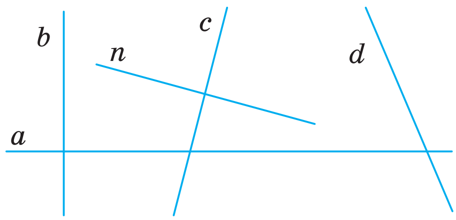


Рис. 1

б) какие прямые, изображенные на рисунке 2, могут быть параллельными. Проверьте себя, пользуясь линейкой и чертежным треугольником.

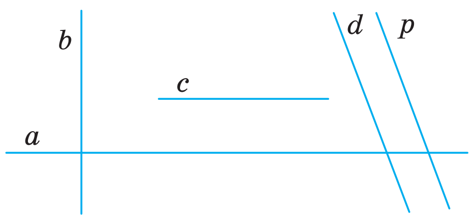


Рис. 2

1.8. а) Перенесите в тетрадь рисунок 3. Постройте прямую c, проходящую через точку A перпендикулярно прямой b.

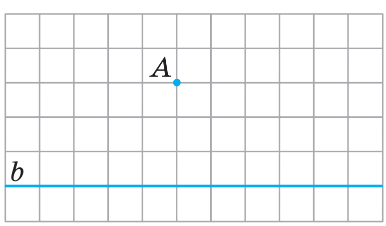


Рис. 3

б) Перенесите в тетрадь рисунок 4. Постройте прямую n, проходящую через точку A параллельно прямой b.

Рис. 4

1.9. а) Какие прямые, изображенные на рисунке 5, могут быть перпендикулярными? Проверьте себя, пользуясь чертежным треугольником.

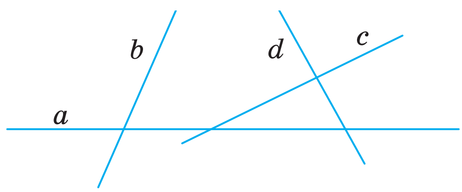


Рис. 5

б) Какие прямые, изображенные на рисунке 6, могут быть параллельными? Проверьте себя, пользуясь чертежным треугольником и линейкой.

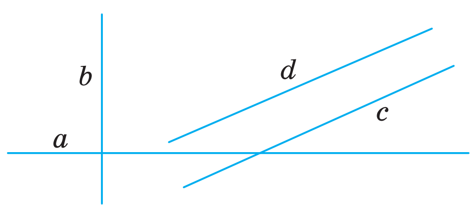


Рис. 6

1.10. Постройте в тетради:

а) две перпендикулярные прямые. Определите сколько прямых углов получилось;

б) две прямые, перпендикулярные третьей. Каково взаимное расположение двух первых прямых?

1.11. Постройте в тетради:

а) угол, равный 80°. Отметьте на его стороне точку, проведите через нее прямую, параллельную другой стороне угла;
б) угол, равный 120°. Отметьте на его стороне точку, проведите через нее прямую, параллельную другой стороне угла.

1.12. Постройте в тетради две параллельные прямые и проведите третью, пересекающую первые две прямые. Сколько углов получилось?

1.13. На какой угол нужно повернуть луч, чтобы его начальное и конечное положения:

а) образовали прямую линию;
б) были перпендикулярны?

1.14. а) Перенесите в тетрадь рисунок 7. Через точки A и C проведите прямые, перпендикулярные прямой a.

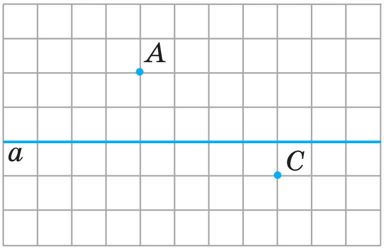


Рис. 7

б) Перенесите в тетрадь рисунок 8. Через точки M и B проведите прямые, параллельные прямой a.

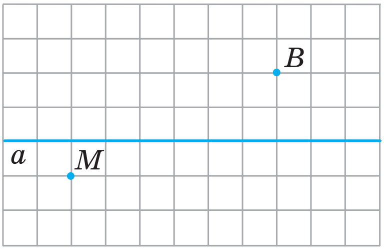


Рис. 8

1.15. С помощью циркуля постройте окружность с центром:

а) в точке O и радиусом 2 см. Определите, какие из точек, находящихся на расстояниях OA = 3 см, OB = 2 см, OC = 1,5 см, OK = 4 см, лежат на окружности, а какие — вне окружности;

б) в точке O и радиусом 3 см. Определите, какие из точек, находящихся на расстояниях ON = 4 см, OK = 1,5 см, OF = 1 см, OP = 3 см, лежат на окружности, а какие — внутри окружности.

1.16. а) Какой угол будет между начальным и конечным положениями часовой стрелки через 2 ч, если сейчас 13 ч?

б) Какой угол будет между начальным и конечным положениями минутной стрелки через полчаса, если сейчас 12 ч 15 мин?

§ 2. Предмет геометрии

2.1. Основными геометрическими фигурами являются:

а) точка, треугольник, прямая;

б) точка, прямая, плоскость.

Выберите правильный ответ.

2.2. Фигуры, которые изучает планиметрия, изображены:

а) на рисунке 9; б) на рисунке 10.

Выберите правильный ответ.

Рис. 9

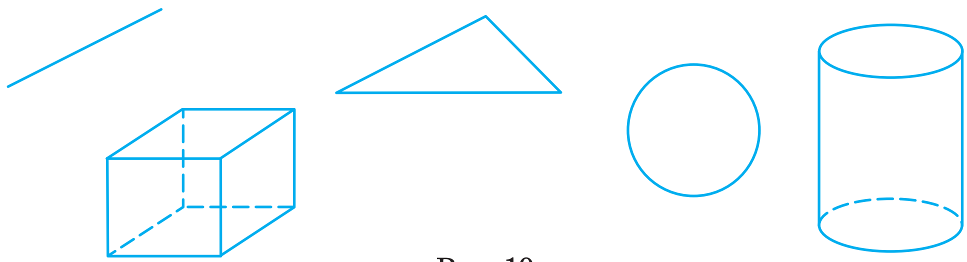


Рис. 10

2.3. Фигуры, которые изучает стереометрия, изображены:

а) на рисунке 11; б) на рисунке 12.

Выберите правильный ответ.

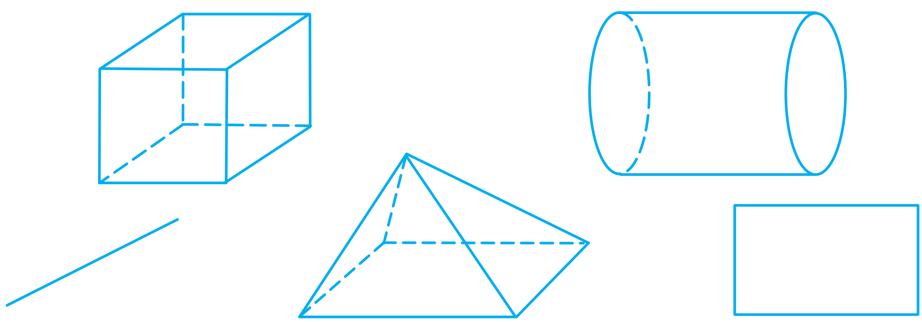


Рис. 11

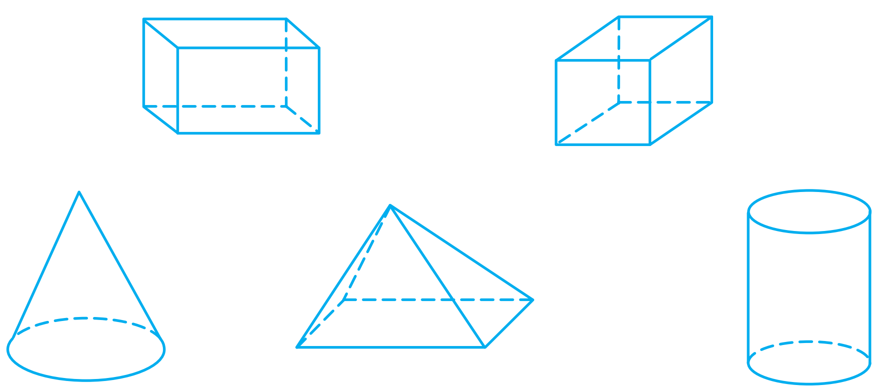


Рис. 12

2.4. Используя данные рисунка 13, вычислите площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда.

2.5. Используя данные рисунка 14, вычислите объем прямоугольного параллелепипеда.

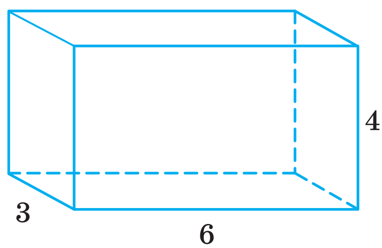


Рис. 13

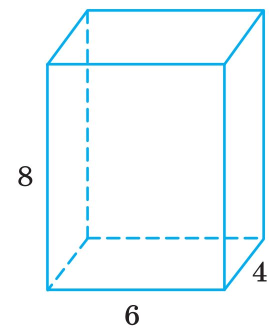


Рис. 14

2.6. а) Сумма длин отрезков AB и MK равна 10,8 см. Длина отрезка MK составляет $\frac{5}{6}$ от этой суммы. Найдите длину отрезка AB.

б) Разность длин отрезков AM и BK равна 4,8 см. Длина отрезка AM составляет $\frac{5}{4}$ от этой разности. Найдите длину отрезка BK.

2.7. а) Сумма длин всех ребер куба равна 48 дм. Найдите площадь полной поверхности куба.

б) Площадь одной грани куба равна 36 дм^2. Найдите площадь полной поверхности куба.

2.8. а) Стороны прямоугольника относятся как $5 : 6$. Найдите отношение периметра прямоугольника к большей стороне.

б) Стороны прямоугольника относятся как $2 : 5$. Найдите отношение периметра прямоугольника к меньшей стороне.

2.9. а) Коробка имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Длина коробки равна 60 см, ширина коробки составляет

$\frac{2}{3}$ ее длины, а высота — $\frac{3}{10}$ ширины. Найдите объем коробки.

б) Коробка имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Ширина коробки равна 20 см, длина коробки составляет $\frac{5}{2}$ ее ширины, а высота — $\frac{13}{10}$ ширины. Найдите объем коробки.

§ 3. Прямая. Луч. Отрезок. Ломаная

3.1. Изобразите в тетради:

а) простую незамкнутую ломаную;

б) простую замкнутую ломаную;

в) непростую незамкнутую ломаную.

3.2. а) На отрезке AB, равном 10 см, взята точка M. Отрезок AM на 2 см больше отрезка MB. Найдите длину отрезка MB.

б) На отрезке PK, равном 12 см, взята точка O. Отрезок PO на 4 см меньше отрезка OK. Найдите длину отрезка OK.

3.3. а) На отрезке AB, равном 30 см, отмечены точки M и K. Найдите длину отрезка MK, если отрезок AM равен 11 см, а отрезок KB на 3 см меньше отрезка AM.

б) На отрезке MN, равном 20 см, отмечены точки C и D. Найдите длину отрезка CD, если отрезок MC на 3 см больше отрезка DN, равного 6 см.

3.4. Площадь прямоугольника равна 17,6 см^2. Длина одной из сторон прямоугольника равна 0,55 дм. Найдите периметр прямоугольника и выразите его в дециметрах.

3.5. Периметр прямоугольника равен 17,6 см. Длина одной из сторон прямоугольника равна 0,45 дм. Найдите площадь прямоугольника и выразите ее в дециметрах.

3.6. а) Могут ли три точки A, B и C лежать на одной прямой, если $AC = 12$ см, $AB = 7$ см и $BC = 6$ см?

б) Могут ли три точки O, M и K лежать на одной прямой, если $OK = 17$ см, $OM = 9$ см и $MK = 8$ см?

3.7. В шестизвенной ломаной самое маленькое звено равно 2 см. Каждое следующее звено, начиная со второго, на 2 см больше предыдущего. Найдите:

а) самое большое звено ломаной;

б) длину всей ломаной.

3.8. В пятизвенной ломаной самое большое звено равно 12 см. Каждое следующее звено, начиная со второго, на 2 см меньше предыдущего. Найдите:

а) самое маленькое звено ломаной;

б) длину всей ломаной.

3.9. В шестизвенной ломаной самое маленькое звено равно 2 см. Найдите самое большое звено, если каждое следующее звено, начиная со второго, в 2 раза больше предыдущего.

3.10. В пятизвенной ломаной самое большое звено равно 80 см. Найдите самое маленькое звено, если каждое следующее звено, начиная со второго, в 2 раза меньше предыдущего.

§ 4. Окружность и круг

4.1. Постройте окружность и отметьте на ней точки A, B и C. Запишите дуги, которые при этом образовались. Укажите дуги:

а) меньшие $90°$;

б) меньшие полуокружности;

в) большие полуокружности.

4.2. Какой длины должны быть две хорды окружности радиуса R, чтобы при любом их положении эти хорды пересекались?

4.3. Найдите радиус окружности, если ее диаметр равен 5,6 дм.

4.4. Найдите диаметр окружности, если ее радиус равен 2,3 мм.

4.5. На окружности даны последовательно четыре точки A, B, C, D такие, что дуги AB и CD равны. Укажите другие пары равных дуг с концами в данных точках. Рассмотрите специальные случаи:

а) точка B является серединой AC;

б) дуги AB, BC, CD и DA равны.

4.6. Найдите длину окружности:

а) если ее радиус равен 4,1 см (число π и результат округлите до сотых);

б) если ее радиус равен 2,1 дм (число π и результат округлите до сотых).

4.7. Внутри данного угла постройте точки, равноудаленные от его вершины. Какую фигуру образует множество всех таких точек?

4.8. а) Найдите площадь круга, диаметр которого равен 6,2 см (число π и результат округлите до сотых).

б) Найдите площадь круга, радиус которого равен 3,6 см (число π и результат округлите до сотых).

4.9. Диаметр окружности $MP = 20$ см. Хорды MA, AB, BP равны радиусу этой окружности. Найдите периметр четырехугольника $MABP$.

4.10. а) Диаметр колеса равен 120 см. Оно делает 20 оборотов за минуту. Найдите, какое расстояние пройдет колесо за это время (число π округлите до сотых).

б) Радиус колеса равен 80 см. Оно делает 15 оборотов за минуту. Найдите, какое расстояние пройдет колесо за это время (число π округлите до сотых).

4.11. Как записать условие того, что:

а) точка M лежит вне или на окружности радиусом R с центром в точке O;

б) точка M лежит внутри или на окружности радиусом R с центром в точке O?

4.12*. Определите:

а) какой угол (меньше развернутого) составляют между собой направления на север и юго-запад;

б) какой угол образуют между собой часовая и минутная стрелки будильника в 3 ч, в 13 ч, в 16 ч;

в) на какой угол повернется Земля вокруг своей оси за 2 ч.

§ 5. Угол. Виды углов

5.1. Определите, какие углы острые, какие тупые, если: $\angle A = 35°$; $\angle B = 75°$; $\angle C = 135°$; $\angle M = 180°$.

5.2. Определите градусную меру углов, изображенных на рисунке 15.

5.3. Изобразите два равных угла $\angle AOB$ и $\angle COD$. Назовите еще одну пару равных углов на данном чертеже.

5.4. Назовите все пары вертикальных углов, изображенных на рисунке 16.

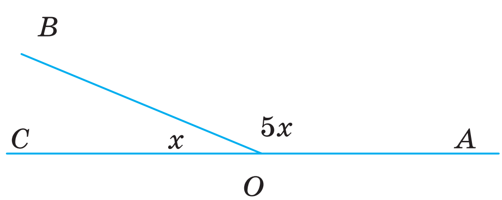


Рис. 15

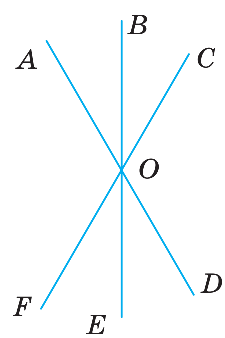


Рис. 16

5.5. С помощью линейки и транспортира постройте:

а) угол AOB, равный $80°$; б) угол AOB, равный $120°$.

5.6. Два угла величинами α и β имеют общую сторону. Чему равна величина угла, образованного несовпадающими сторонами этих углов?

5.7. Может ли луч OM быть биссектрисой угла AOB, равного $90°$, если:

а) $\angle MOB = 30°$; б) $\angle AOM = 45°$?

5.8. Луч OM является биссектрисой угла AOB, найдите:

а) угол AOB, если $\angle AOM = 35°$;

б) угол MOB, если $\angle AOB = 120°$.

5.9. $\angle ACB = 160°$. Внутри данного угла проведен луч CM. Внутри углов ACM и MCB проведены биссектрисы. Найдите величину угла между этими биссектрисами.

5.10. Изобразите произвольно несколько прямых. При помощи чертежного треугольника опустите на них перпендикуляры из точки, не принадлежащей ни одной из этих прямых.

5.11. Выпишите из предложенного списка углов $45°$; $126°$; $38°$; $147°$; $89°$; $95°$; $90°$; $211°$; $78°$; $180°$:

а) острые углы; б) тупые углы.

5.12. Постройте в тетради:

а) развернутый угол; б) прямой угол.

5.13. Постройте в тетради:

а) развернутый угол и с помощью транспортира разделите его на 3 равные части;

б) прямой угол и с помощью транспортира разделите его на 3 равные части.

§ 6. Смежные углы. Вертикальные углы

6.1. Могут ли углы AOB и BOC быть смежными, если:
а) $\angle AOB = 60°$, а $\angle BOC = 70°$;
б) $\angle AOB = 45°$, а $\angle BOC = 135°$?

6.2. Найдите угол ABC, если смежный с ним угол равен:
а) 120°; б) 56°.

6.3. Один из двух смежных углов увеличился на 10°. На сколько градусов изменилась разность полученных смежных углов?

6.4. а) Найдите угол, смежный с углом ABC, равным 150°.
б) Найдите угол, смежный с углом ABC, равным 50°.

6.5. Найдите смежные углы, если:
а) один из них меньше другого на 40°;
б) один из них больше другого на 100°.

6.6. а) Могут ли два смежных угла быть одновременно острыми, прямыми, тупыми?
б) Может ли один из смежных углов быть тупым, а другой — прямым?

6.7. Найдите углы α и β, если известно, что они смежные и $\alpha : \beta = 2 : 7$.

6.8. Разность двух смежных углов равна 90°. Найдите величины этих углов и постройте их с помощью транспортира.

6.9. Определите величину угла между биссектрисами двух смежных углов.

6.10. а) Биссектриса одного из двух смежных углов отсекает от него угол, равный 55°. Найдите величину второго смежного угла.
б) Биссектриса одного из двух смежных углов отсекает от него угол, равный 35°. Найдите величину второго смежного угла.

6.11. а) Углы *MOK* и *KOC* — смежные, причем угол *KOC* составляет пятую часть угла *MOK*. Найдите градусную меру угла, который вместе с углом *MOK* образует пару вертикальных углов.

б) Углы *AOB* и *BOC* — смежные, причем угол *BOC* составляет четвертую часть угла *AOB*. Найдите градусную меру угла, который вместе с углом *BOC* образует пару вертикальных углов.

6.12. Три прямые пересекаются в точке *B* (рис. 17). Из 6 полученных углов *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* известны $\angle 1 = 70°$ и $\angle 3 = 56°$. Найдите все остальные углы.

6.13. Три прямые пересекаются в точке *B* (рис. 18). Из 6 полученных углов *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* известны $\angle 5 = \angle 3 = 50°$. Найдите все остальные углы.

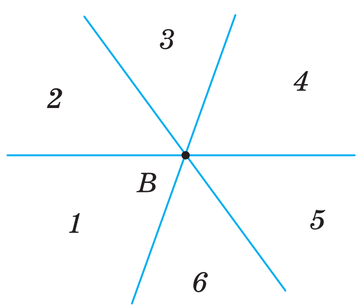


Рис. 17

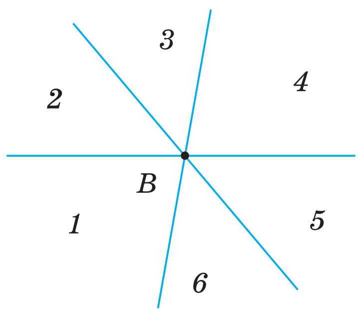


Рис. 18

6.14. а) При пересечении двух прямых образовалось 4 угла. Известно, что сумма трех из них равна 250°. Найдите величины всех четырех углов.

б) При пересечении двух прямых образовалось 4 угла. Известно, что сумма двух из них равна 130°. Найдите величины всех четырех углов.

6.15*. Даны четыре попарно пересекающиеся прямые, при этом никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько углов, меньших 180°, образуется в результате взаимного пересечения этих прямых? Рассмотрите все возможные варианты.

6.16. Может ли сумма двух вертикальных углов быть равной 180°?

§ 7. Перпендикулярные прямые

7.1. а) На рисунке 19 прямые a и b взаимно перпендикулярны. Найдите углы *2*, *3* и *4*, если $\angle 1 = 40°$.

б) На рисунке 20 прямые a и b взаимно перпендикулярны. Найдите углы *2*, *3* и *4*, если $\angle 1 = 130°$.

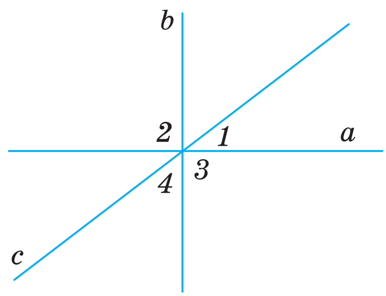


Рис. 19

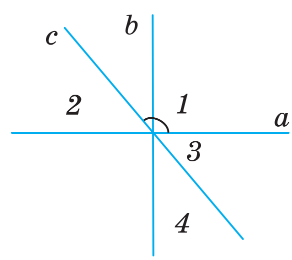


Рис. 20

7.2. Из точки O проведены лучи OA, OB, OC и OK, причем $OB \perp OA$, OK — биссектриса угла COB. Найдите:

а) углы AOK, AOC и KOB, если угол, образованный биссектрисами углов AOB и BOC, равен 20° (рис. 21);

б) углы AOK, BOK и AOC, если угол, образованный биссектрисами углов AOB и BOC, равен 75° (рис. 22).

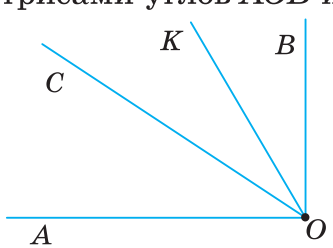


Рис. 21

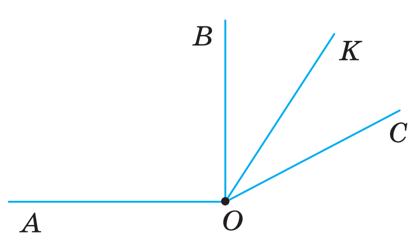


Рис. 22

7.3. Прямая a пересекает стороны угла A в точках B и C. Могут ли обе прямые AB и AC быть перпендикулярными прямой a?

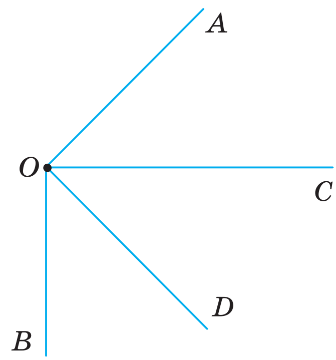


Рис. 23

7.4. Даны два угла AOB и DOC с общей вершиной O. Стороны одного угла перпендикулярны сторонам другого (рис. 23). Найдите углы AOB и DOC, если разность их градусных мер составляет 90°.

7.5. Внутри угла ABC проведен луч BK. Найдите градусную меру угла CBM, если луч BM перпендикулярен лучу AB и $\angle ABK = 25°$, что составляет $\frac{5}{8}$ угла CBK.

7.6. Два равных тупых угла имеют общую сторону, а две другие стороны взаимно перпендикулярны. Найдите величину данных тупых углов.

7.7*. Из вершины развернутого угла проведены два луча, которые делят его на три равные части. Докажите, что биссектриса среднего угла перпендикулярна сторонам развернутого угла.

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 8. Треугольники

8.1. Используя соотношения между углами треугольника ABC, запишите условие того, что этот треугольник:

а) равнобедренный;

б) равносторонний.

8.2. Используя соотношения между сторонами треугольника ABC, запишите условие того, что этот треугольник:
а) равнобедренный;
б) равносторонний;
в) разносторонний.

8.3. Назовите тип треугольника, если один его угол равен сумме двух других углов.

8.4. Известно, что периметр равнобедренного треугольника ABC равен 45 см, его боковая сторона равна 14 см. Найдите основание этого треугольника.

8.5. На рисунке 24 $AB = BC = AC$, $AK = CK$. Периметр треугольника ABC равен 24 см, а периметр треугольника AKC равен 28 см. Найдите длины сторон этих треугольников.

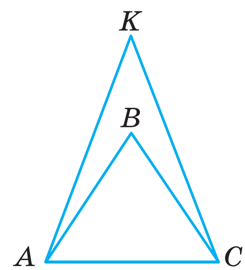


Рис. 24

§ 9. Первый и второй признаки равенства треугольников

9.1. Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли быть равными эти треугольники?

9.2. а) Пользуясь данными рисунка 25, определите, являются ли треугольники ABC и MNK равными. Объясните ответ.

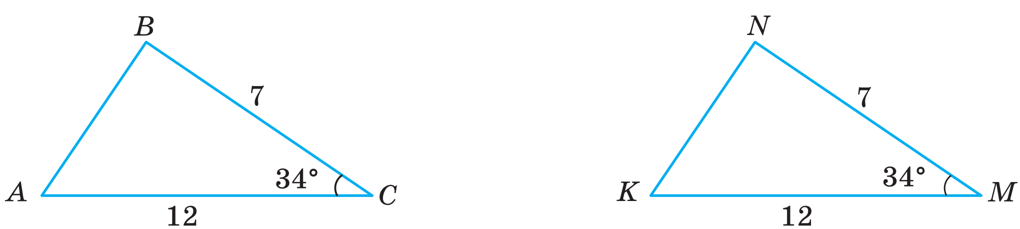


Рис. 25

б) Пользуясь данными рисунка 26, определите, являются ли треугольники KLM и PQR равными. Объясните ответ.

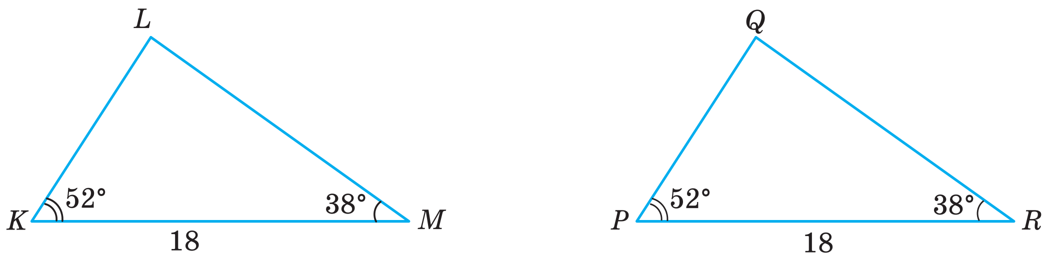


Рис. 26

9.3. а) Пользуясь данными рисунка 27, найдите NK при условии, что треугольники ABC и MNK равны. Объясните ответ.

Рис. 27

б) Пользуясь данными рисунка 28, найдите $\angle BCA$ при условии, что треугольники ABC и MNK равны. Объясните ответ.

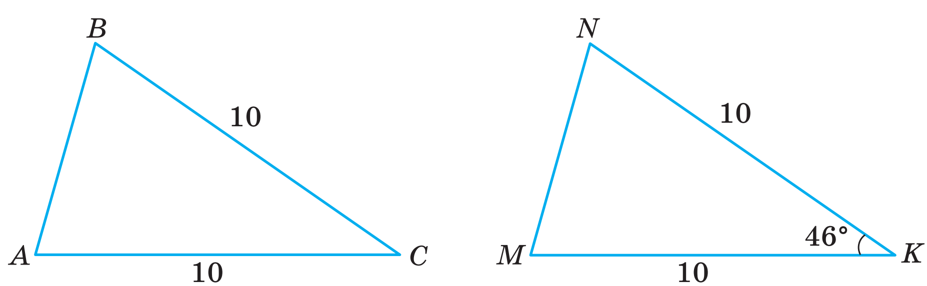


Рис. 28

9.4. Отрезки AC и BD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

9.5. а) Пользуясь данными рисунка 29, найдите NK при условии, что треугольники ABC и MNK равны. Объясните ответ.

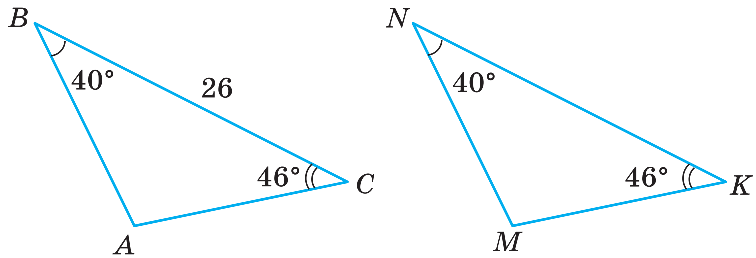


Рис. 29

б) Пользуясь данными рисунка 30, найдите $\angle BCA$ при условии, что треугольники ABC и MNK равны. Объясните ответ.

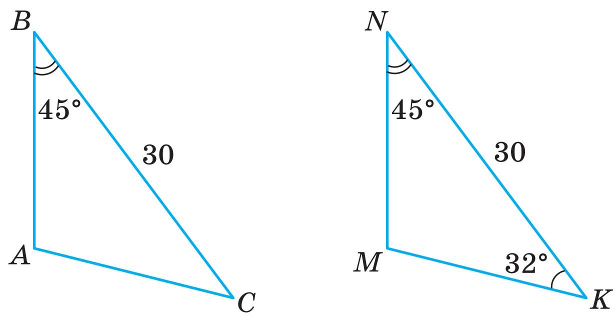


Рис. 30

9.6. Точки A и C лежат по одну сторону от прямой a. Перпендикуляры AB и CD к прямой a равны (рис. 31). Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CDB$.

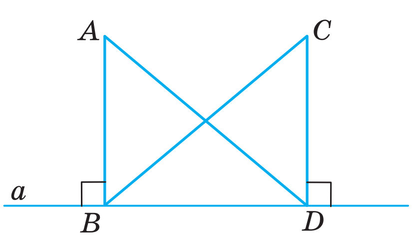


Рис. 31

9.7. а) Пользуясь данными рисунка 32, определите, являются ли равными треугольники ABC и DAE. Объясните ответ.

б) Пользуясь данными рисунка 33, определите, являются ли равными треугольники ABC и DAE. Объясните ответ.

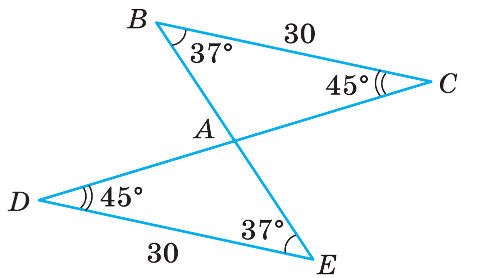


Рис. 32

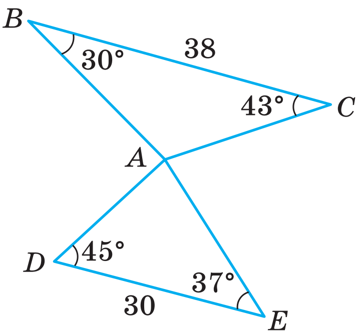


Рис. 33

9.8. Треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$. Докажите, что соответствующие биссектрисы BK и B_1K_1 равны.

9.9. Треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$. Докажите, что соответствующие высоты AH и A_1H_1 равны.

9.10. Треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$. Докажите, что соответствующие медианы BM и B_1M_1 равны.

9.11*. Для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются условия: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки D и D_1 так, что $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$.

§ 10. Высота, медиана и биссектриса треугольника

10.1. Чем отличается биссектриса угла от биссектрисы треугольника?

10.2. Постройте в тетради треугольник ABC с тупым углом при вершине C. Проведите высоту из вершины B. Проведите медиану из вершины C.

10.3. Постройте в тетради треугольник MPT с тупым углом при вершине P. Проведите высоту из вершины M. Проведите медиану из вершины T.

10.4. Какие из отрезков треугольника (высоты, медианы, биссектрисы) всегда лежат внутри треугольника? Какие из них могут совпадать с его сторонами?

10.5. Перенесите рисунок 34, *а*), *б*) в тетрадь. Проведите общую высоту для всех треугольников, изображенных на каждом из рисунков. Для какого треугольника высота лежит:

1) вне треугольника; 2) внутри треугольника?

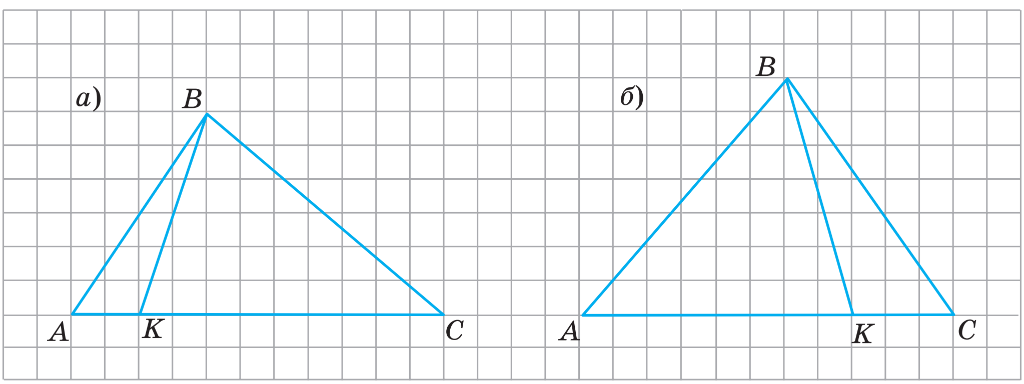


Рис. 34

10.6. В треугольнике ABC $AB = BC$, BK — медиана, $\angle ABK = 40°$. Найдите величины углов ABC и KCB.

10.7. На рисунке 35 изображены отрезки $AB = BC$, $AD = DC$. Докажите, что BD — биссектриса угла ABC.

10.8. Для отрезков, изображенных на рисунке 36, выполняются условия: $AB = BC$, $AD = DC$, DE — биссектриса угла BDC. Найдите угол ADE.

10.9. На рисунке 37 изображен треугольник ABC, $\angle ADB = 90°$, $AD = DC$. Докажите, что $\angle BAC = \angle BCA$.

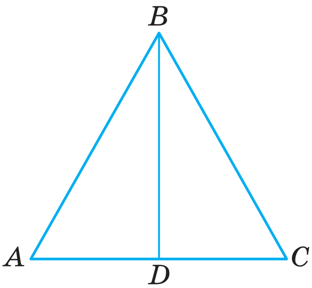


Рис. 35

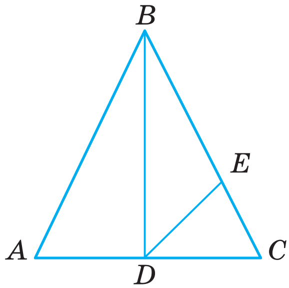


Рис. 36

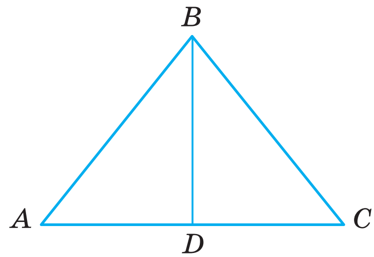


Рис. 37

10.10. В треугольнике ABC проведены биссектриса BM и медиана BK. Известно, что $AC = 16$ см, $\angle ABC = 100°$. Найдите длину отрезка AK и градусную меру угла ABM.

10.11. Вершины треугольника ABC лежат на окружности, причем AC — диаметр этой окружности (рис. 38). Какова длина медианы BM треугольника ABC, если $AC = 12$ см?

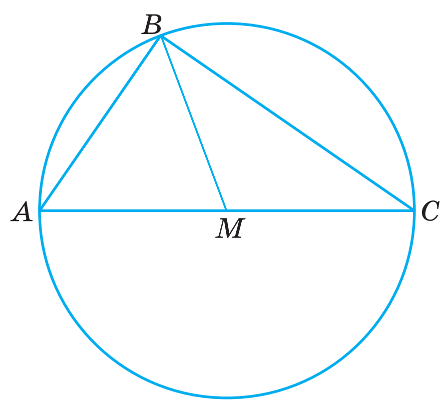


Рис. 38

10.12. В треугольнике ABC с углом B, равным 140°, проведены высота BH и биссектриса BK, причем точка H лежит между точками A и K. Найдите $\angle HBK$, если $\angle ABH = 40°$.

10.13. Медиана CM треугольника ABC делит его на два треугольника ACM и BCM, периметры которых соответственно равны 27 см и 33 см. Найдите длину этой медианы, если периметр треугольника ABC равен 50 см.

10.14. Углы *1* и *2* — смежные. Найдите, чему равен угол между биссектрисами этих углов, если:

а) $\angle 1 = 60°$; б) $\angle 2 = 140°$.

§ 11. Равнобедренный треугольник

11.1. а) Изобразите равнобедренный треугольник ABC с острым углом при вершине C. Укажите основание и боковые стороны треугольника ABC.

б) Изобразите равнобедренный треугольник MPT с тупым углом при вершине T. Укажите основание и боковые стороны треугольника MPT.

11.2. Основание равнобедренного треугольника вдвое больше проведенной к нему высоты. Определите углы этого треугольника.

11.3. На рисунке 39 изображен треугольник ABC. $AB = BC$, $\angle NDC = 90°$. Найдите AC, если $AD = 16$ см.

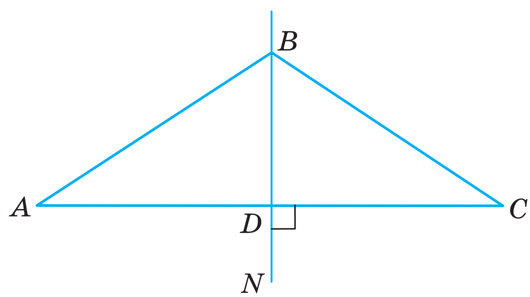


Рис. 39

11.4. Изобразите в тетради треугольник, у которого:

а) боковые стороны равны 6 см каждая, а основание — 8 см;

б) боковые стороны равны 8 см каждая, а основание — 6 см.

Найдите его периметр.

11.5. Прямая, перпендикулярная биссектрисе угла A, пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN равнобедренный.

§ 12. Признаки равнобедренного треугольника

12.1. Что должно быть известно об углах треугольника ABC, чтобы утверждать, что он:

а) равнобедренный;

б) равносторонний?

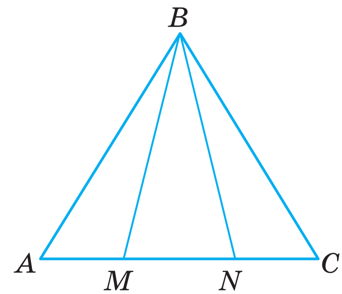


Рис. 40

12.2. На рисунке 40 изображен треугольник ABC, $AM = NC$, $\angle BMC = \angle BNA$. Докажите, что:

а) $\angle BAC = \angle BCA$;

б) $\angle ABM = \angle CBN$.

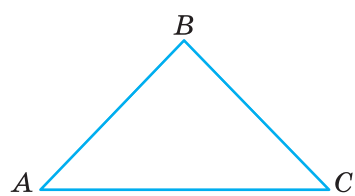


Рис. 41

12.3. а) На рисунке 41 изображен треугольник ABC, $\angle BAC = \angle BCA$, $AC : BC = 3 : 2$. Найдите длину стороны AB, если периметр треугольника ABC равен 35 см.

б) В треугольнике ABC (рис. 42) $\angle BAC = \angle BCA$, $BC : AC = 3 : 4$. Периметр треугольника ABC равен 50 см. Найдите длину стороны AC.

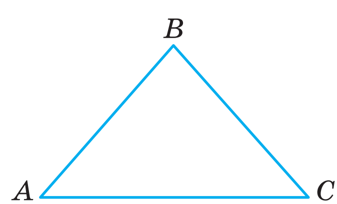


Рис. 42

12.4. Можно ли утверждать, что:

а) равносторонний треугольник является равнобедренным;

б) равнобедренный треугольник является остроугольным;

в) прямоугольный треугольник является равносторонним?

12.5. В треугольнике ABC высота BO делит сторону AC пополам. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

12.6. На рисунке 43 $AD = DC$, $\angle ADB = \angle CDB$. Докажите, что $AM = MC$ и $\angle BAC = \angle BCA$.

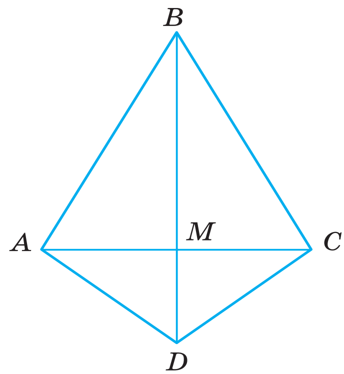


Рис. 43

12.7. В треугольнике ABC (рис. 44) биссектриса CO делит сторону AB пополам. Найдите градусную меру угла ABC, если $\angle BAC = 68°$.

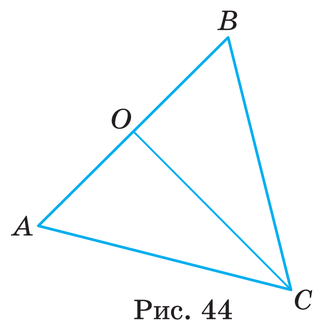


Рис. 44

12.8. В треугольнике ABC (рис. 45) высота BO делит сторону AC пополам. Найдите градусную меру угла BAC, если $\angle BCA = 56°$.

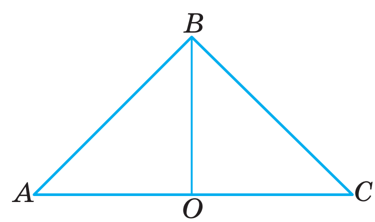


Рис. 45

12.9. В треугольнике ABC (рис. 46) $AB = BC = EC$. Найдите градусную меру угла DCE, если $\angle BAC = 40°$ и $BD = ED$.

12.10. В треугольнике ABC (рис. 47) $OB = BC = AO$. Найдите градусную меру угла AOD, если $\angle ACB = 64°$ и $AD = BD$.

12.11. Докажите, что если точки K и M являются серединами боковых сторон равнобедренного треугольника ABC с основанием AC (рис. 48), то треугольник KBM также является равнобедренным.

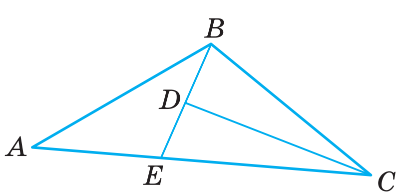


Рис. 46

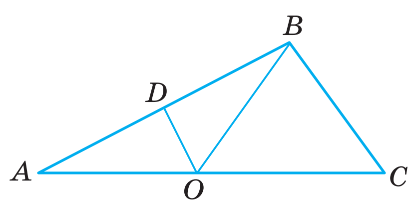


Рис. 47

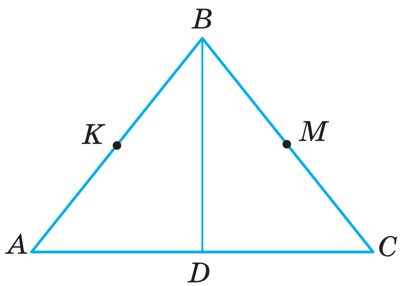


Рис. 48

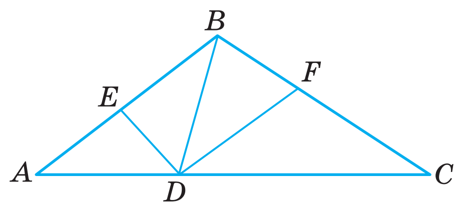


Рис. 49

12.12*. В треугольнике ABC (рис. 49) $AD = DB$, DF — биссектриса треугольника DBC, DE — медиана треугольника ADB. Докажите, что отрезок DE перпендикулярен отрезку DF.

§ 13. Третий признак равенства треугольников

13.1. В равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ с основаниями AC и A_1C_1 соответственно, точка M — середина стороны BC, точка M_1 — середина стороны B_1C_1 (рис. 50). Докажите, что:

а) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $AB = A_1B_1$ и $AM = A_1M_1$;

б) $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$, если $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$.

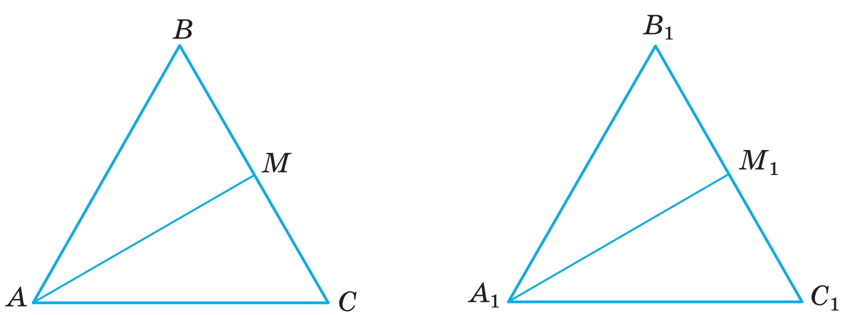


Рис. 50

13.2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны медианы BK и B_1K_1. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$.

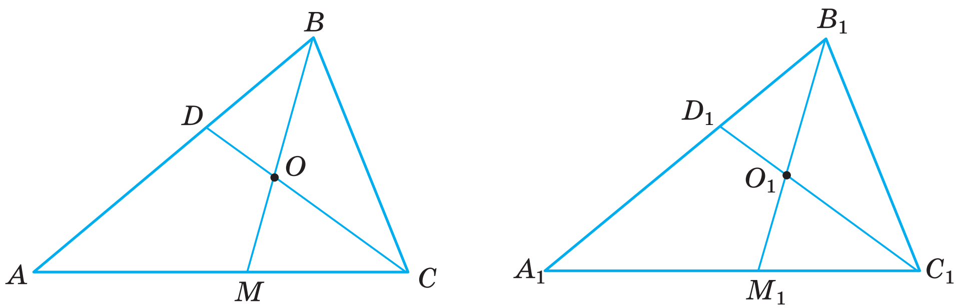


Рис. 51

13.3. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 51) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Докажите, что $\triangle BOC = \triangle B_1O_1C_1$, где O — точка пересечения биссектрис BM и CD треугольника ABC, а O_1 — точка пересечения биссектрис B_1M_1 и C_1D_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

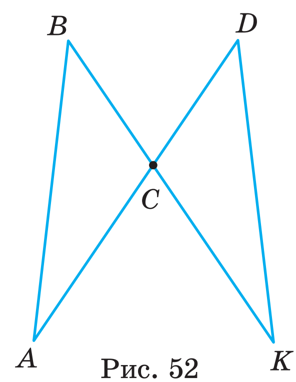


Рис. 52

13.4. Стороны AD и KB углов BAD и DKB соответственно пересекаются в точке C (рис. 52). Докажите, что $\triangle ABC = \triangle KCD$, если $AD = KB$, $AB = KD$.

13.5*. Известно, что $\triangle ABC = \triangle MNK$ и $AB \neq MK$, $BC \neq MN$, $CA \neq KN$. Возможно ли это?

§ 14. Серединный перпендикуляр к отрезку

14.1. В треугольнике ABC на стороне AB (или ее продолжении) найдите точку, одинаково удаленную от вершин A и C.

14.2. В равнобедренном треугольнике ABC высоты AM и CK, проведенные к боковым сторонам, пересекаются в точке O. Докажите, что прямая OB является серединным перпендикуляром к отрезку AC.

14.3. Серединный перпендикуляр к боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке K. Найдите основание AC, если $AB = 12$ см, а периметр треугольника AKC равен 22 см.

14.4. Серединный перпендикуляр AK к отрезку BC пересекает его в точке K. Найдите градусную меру угла ACK, если $\angle ABK = 55°$.

14.5. Серединный перпендикуляр AK к отрезку BC пересекает его в точке K. Найдите периметр треугольника BAC, если $AC = 5$ см, $CK = 3$ см.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

§ 15. Признаки параллельности прямых

15.1. Пользуясь данными рисунков 53 и 54, выберите верное утверждение:

а) $\angle 1$ и $\angle 2$ являются накрест лежащими;

б) $\angle 1$ и $\angle 2$ являются односторонними;

в) $\angle 1$ и $\angle 2$ являются соответственными;

г) $\angle 1$ и $\angle 2$ являются вертикальными.

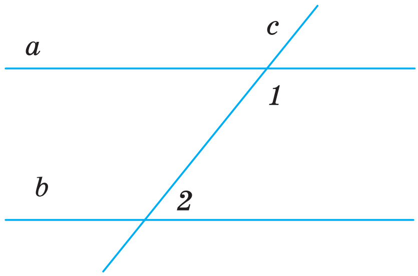


Рис. 53

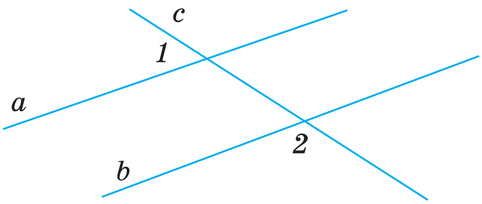


Рис. 54

15.2. Прямая c пересекает прямые a и b (рис. 55). Цифрами обозначены образовавшиеся углы. Дайте название каждой из указанных пар углов:

а) $\angle 1$ и $\angle 3$; б) $\angle 3$ и $\angle 5$;
в) $\angle 4$ и $\angle 5$; г) $\angle 4$ и $\angle 8$;
д) $\angle 1$ и $\angle 4$; е) $\angle 1$ и $\angle 8$.

15.3. Используя рисунок 55, назовите угол, который образует с углом 1:

а) пару вертикальных углов;
б) пару смежных углов;
в) пару внутренних накрест лежащих углов;
г) пару соответственных углов;
д) пару внутренних односторонних углов.

15.4. Прямая c пересекает прямые a и b (рис. 56). Цифрами обозначены образовавшиеся углы. Выясните, будут ли прямые a и b параллельны, если:

а) $\angle 4 = 25°$ и $\angle 5 = 135°$;
б) $\angle 2 = 32°$ и $\angle 7 = 148°$;
в) $\angle 1 = 150°$ и $\angle 8 = 30°$;
г) $\angle 1 = 142°$ и $\angle 7 = 142°$.

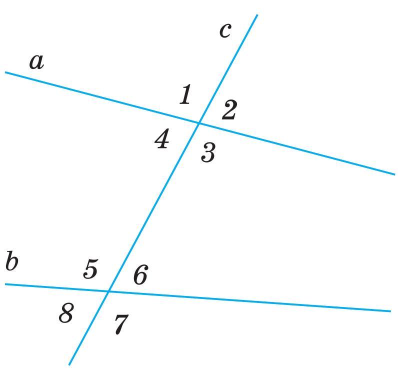


Рис. 55

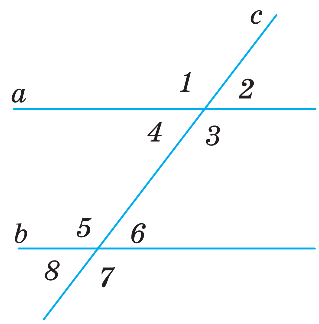


Рис. 56

15.5. Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если один из двух внешних односторонних углов на 48° больше другого.

15.6. Параллельны ли прямые a и b, изображенные на рисунке 57, если:

а) $\angle 1 = \angle 3$;

б) $\angle 1 = \angle 4$;

в) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$;

г) $\angle 5 = \angle 6 = 90°$?

15.7. Прямая c пересекает прямые a и b (рис. 58). Цифрами обозначены образовавшиеся углы. Используя рисунок, назовите пару углов, которые являются:

а) внутренними накрест лежащими;

б) внешними накрест лежащими;

в) внутренними односторонними;

г) внешними односторонними;

д) соответственными.

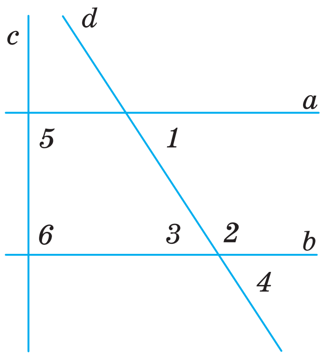


Рис. 57

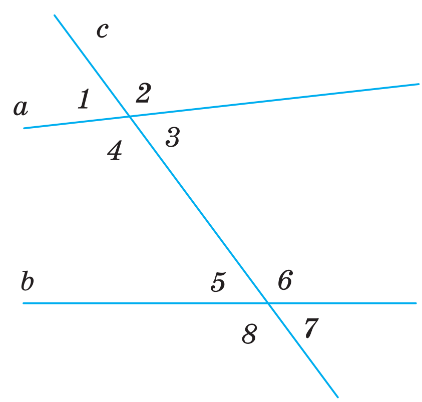


Рис. 58

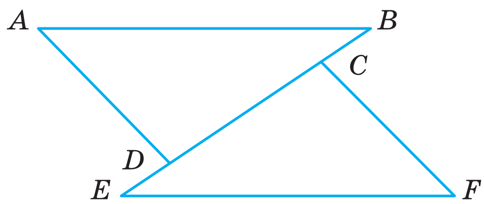


Рис. 59

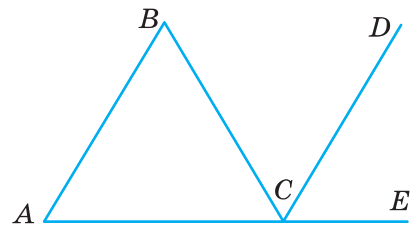


Рис. 60

15.8. На рисунке 59 изображены равные треугольники ABD и FEC, $AD = CF$. Докажите, что $AB \parallel EF$.

15.9. На рисунке 60 $AB = BC$, $\angle BAC = 60°$, CD — биссектриса угла BCE. Докажите, что $AB \parallel CD$.

15.10. На рисунке 61 $AB = BC$, $\angle BAC = 30°$, $\angle DCE = \frac{1}{5}\angle BCE$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

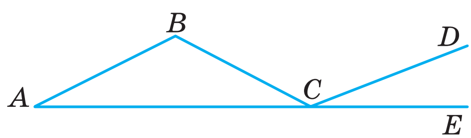


Рис. 61

15.11*. Каково взаимное расположение двух прямых, если они имеют:

а) по крайней мере, одну общую точку;

б) не более одной общей точки?

§ 16. Аксиома параллельных прямых

16.1. Каково взаимное расположение двух прямых, перпендикулярных одной и той же прямой?

16.2. На рисунке 62 $a \parallel c$. Докажите, что $b \parallel c$.

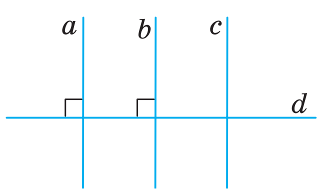


Рис. 62

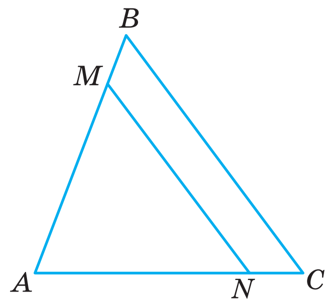


Рис. 63

16.3. Точка K является серединой стороны AC треугольника ABC. Через точку K проведена прямая a, параллельная прямой BC. Докажите, что прямые a и AB пересекаются.

16.4. На рисунке 63 $AM = AN$, $\angle MNC = 117°$, $\angle ABC = 63°$. Докажите, что $MN \parallel BC$.

16.5. Через вершину C треугольника CDE с прямым углом D проведена прямая CP, параллельная прямой DE. Найдите угол C треугольника, если $\angle PCE = 29°$.

16.6. Прямые b, d, c и e пересекаются в точке O, прямая a не проходит через точку O (рис. 64). Определите, какая прямая параллельна прямой a, если $e \perp a$, $e \perp d$.

16.7. Может ли оказаться, что при пересечении двух прямых третьей внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов не равна 180°?

16.8. На рисунке 65 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что прямая a параллельна прямой c.

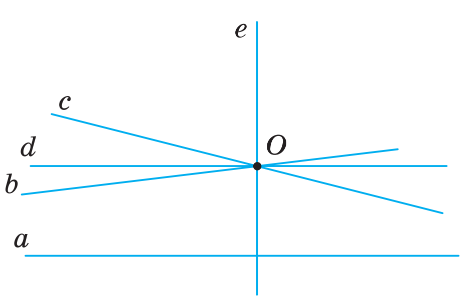


Рис. 64

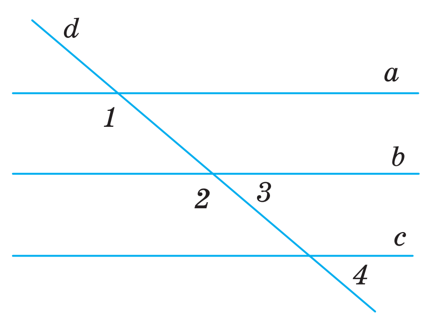


Рис. 65

16.9. На рисунке 66 прямая d пересекает прямую b. Пересечет ли эта прямая прямую a? Объясните ответ.

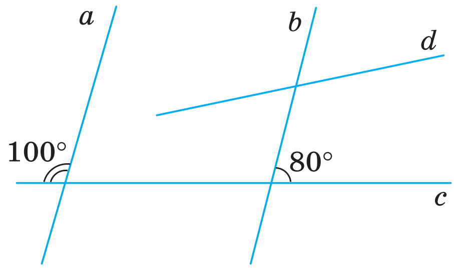


Рис. 66

16.10. На рисунке 67 прямая l не пересекает стороны треугольника ABC и не параллельна ни одной из них. Перенесите рисунок в тетрадь. Через вершины треугольника A, B и C проведите прямые a, b и c соответственно, параллельные прямой l. Определите, параллельны ли эти прямые между собой и пересечет ли прямая AC прямую l. Объясните ответ.

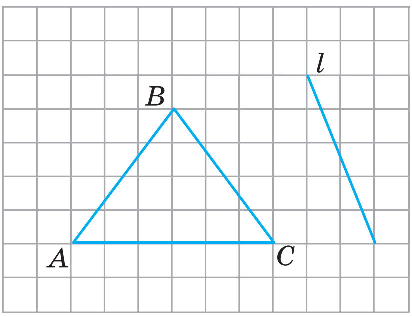


Рис. 67

§ 17. Свойства параллельных прямых

17.1. На рисунке 68 $\angle 3 = \angle 5$. Докажите, что:

а) $\angle 4 = \angle 6$;

б) $\angle 1 = \angle 5$;

в) $\angle 3 + \angle 6 = 180°$;

г) $\angle 1 + \angle 8 = 180°$.

17.2. Можно ли утверждать, что две прямые параллельны, если при пересечении их секущей где-либо образуются равные углы?

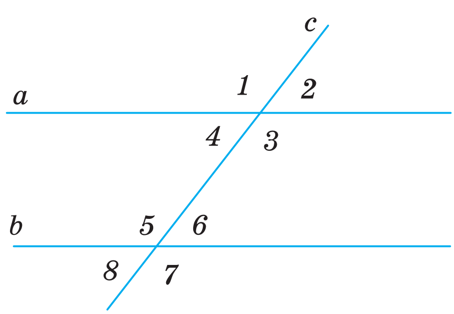


Рис. 68

17.3. Прямая a параллельна прямой b, прямые c и d — секущие (рис. 69). Найдите:

а) $\angle 1$, если $\angle 4 = 65°$;

б) $\angle 2$, если $\angle 3 = 62°$.

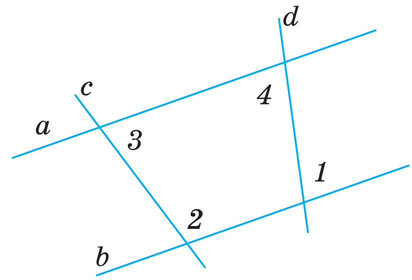


Рис. 69

17.4. Прямые AB и CD параллельны, прямая d — секущая (рис. 70). Найдите:

а) $\angle 2 + \angle 3$, если $\angle 1 = 108°$;

б) $\angle 1 + \angle 3$, если $\angle 2 = 110°$.

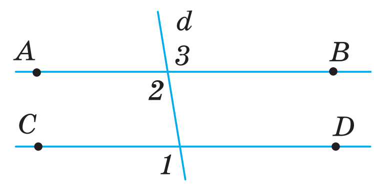


Рис. 70

17.5. Могут ли быть параллельными биссектрисы двух внутренних углов треугольника?

§ 18*. Углы с соответственно параллельными и соответственно перпендикулярными сторонами

18.1. На рисунке 71 $a \parallel b$, $c \parallel d$. Найдите:

а) угол *3*, если угол *2* больше угла *1* на 70°;

б) угол *1*, если угол *3* меньше угла *2* на 82°.

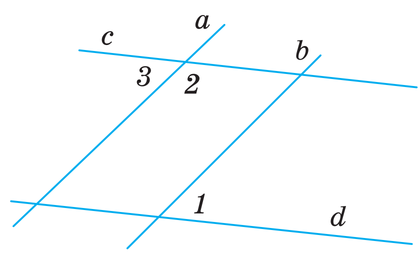


Рис. 71

18.2. а) На рисунке 72 изображены острые углы BAC и DEF с соответственно перпендикулярными сторонами. Определите, чему равен угол DEF, если $\angle BAC = 40°$.

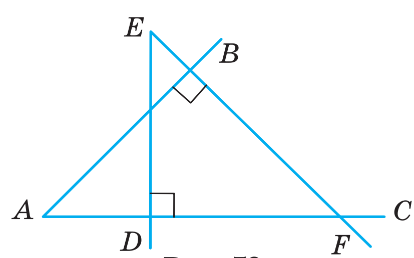


Рис. 72

б) На рисунке 73 изображены острый угол ABC и тупой угол DEF с соответственно перпендикулярными сторонами. Определите, чему равен угол DEF, если $\angle ABC = 60°$.

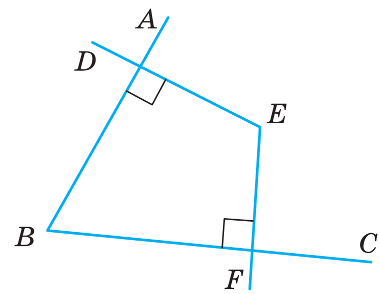


Рис. 73

18.3. Две параллельные прямые пересечены третьей. При каком положении этой прямой будут равны все образованные углы?

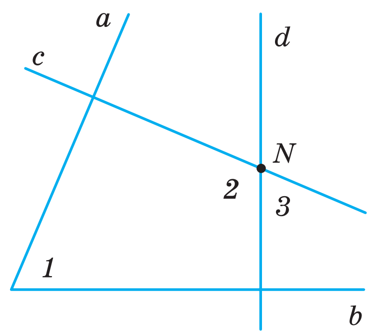


Рис. 74

18.4. Прямые c и d перпендикулярны сторонам данного угла *1* (рис. 74). Найдите:

а) меньший из углов, образованных прямыми c и d, если $\angle 1 = 80°$;

б) больший из углов, образованных прямыми c и d, если $\angle 1 = 62°$.

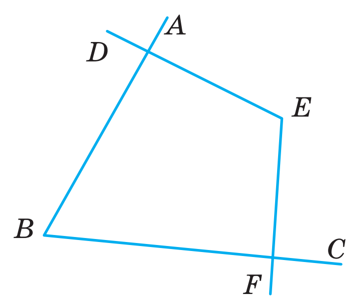


Рис. 75

18.5. Стороны углов ABC и DEF взаимно перпендикулярны (рис. 75). Найдите эти углы, если:

а) один из них на 48° больше другого;

б) один из них на 60° меньше другого.

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 19. Сумма углов треугольника

19.1. Один из углов равнобедренного треугольника равен $96°$. Найдите остальные углы треугольника.

19.2. Дан треугольник ABC. Найдите:

а) угол B, если $\angle A = 40°$, $\angle C = 70°$;

б) угол A, если $\angle B = 30°$, $\angle C = 85°$.

19.3. Для каждой стороны одного треугольника имеется равная ей сторона в другом треугольнике. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны?

19.4. а) Известно, что угол при вершине равнобедренного треугольника в четыре раза больше угла при основании. Найдите углы этого треугольника.

б) Известно, что угол при основании равнобедренного треугольника в два раза больше угла при вершине. Найдите углы этого треугольника.

19.5. Чему равна сумма двух углов равностороннего треугольника?

19.6. В треугольнике два угла относятся как $1 : 3$, а третий угол на $20°$ больше суммы первых двух. Найдите градусные меры углов треугольника.

19.7. В треугольнике один из углов в 5 раз меньше другого угла и в 3 раза меньше третьего угла. Найдите наибольший угол этого треугольника.

19.8. В равностороннем треугольнике ABC отрезок BD — высота. Найдите градусную меру угла ABD.

19.9. В треугольнике ABC из вершины A проведена биссектриса AD (рис. 76). Найдите градусную меру угла ADB, если $\angle BCA = 70°$, $AB = BC$.

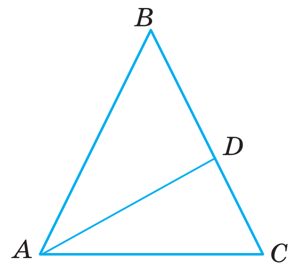


Рис. 76

19.10. На рисунке 77 изображен треугольник ABC, у которого $\angle ABC = 30°$, $DM \perp AB$, а $DN \perp BC$. Найдите $\angle MDN$.

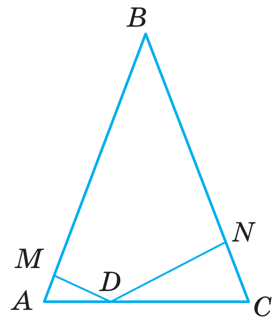


Рис. 77

19.11. Найдите градусные меры углов равнобедренного треугольника, если:

а) один из его углов равен 96°;

б) один из его углов равен 50°.

19.12. В треугольнике ABC проведены отрезки BM и BN так, что $\angle BMN = 72°$ и $\angle MNB = 68°$ (рис. 78). Найдите градусную меру угла ABC, если $AM = MB$, $NC = NB$.

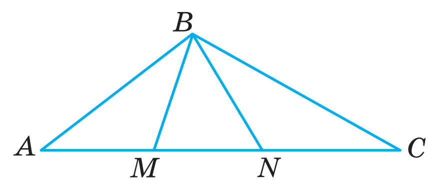


Рис. 78

19.13. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AN и BM (рис. 79). Найдите угол ACB, если $\angle AOB = 124°$.

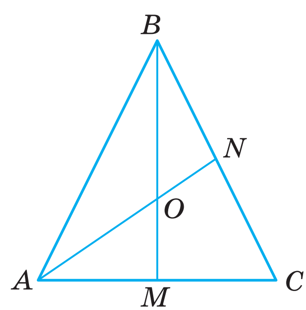


Рис. 79

19.14. В треугольнике ABC проведена высота BD (рис. 80). Найдите $\angle ABD$, если $AC = BC$ и $\angle BCA = 42°$.

19.15. На рисунке 81 изображен равнобедренный треугольник ABC

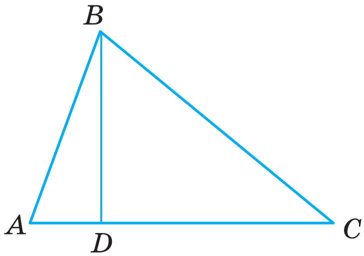


Рис. 80

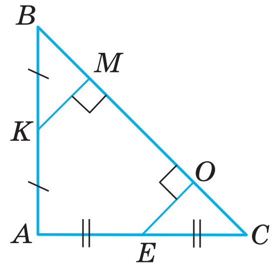


Рис. 81

с прямым углом A. Из точек K и E, являющихся серединами боковых сторон ($K \in AB$; $E \in AC$), опущены перпендикуляры KM и EO на гипотенузу. Найдите:

а) EO, если $BM = 6$ см;

б) KM, если $OC = 8$ см.

19.16. В треугольнике ABC отрезок CK — биссектриса. Найдите углы треугольника AKC, если известно, что $AK = BK$ и $\angle ABC = 40°$.

19.17. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?

§ 20. Внешний угол треугольника

20.1. Чему равна сумма всех внешних углов треугольника?

20.2. Могут ли быть равными все внешние углы треугольника?

20.3. На рисунке 82 $AC = BC$. Найдите градусную меру угла ABC, если $\angle 1 = 110°$.

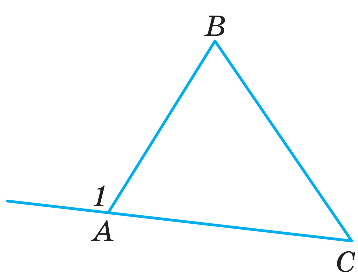


Рис. 82

20.4. На рисунке 83 $\angle 2 = 90°$, $\angle 3 = 50°$. Найдите градусную меру угла *1*.

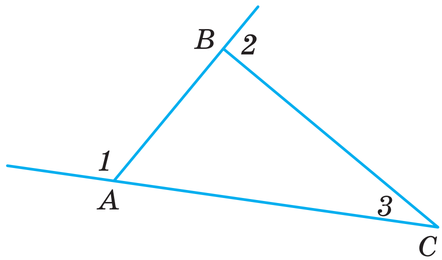


Рис. 83

20.5. На рисунке 84 изображены равные треугольники ABC и MNK ($\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle K$). Найдите градусную меру угла *1*, если $\angle 2 = 56°$, $\angle 3 = 106°$.

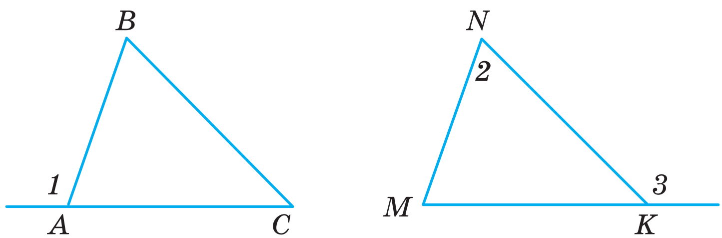


Рис. 84

20.6. Дан треугольник ABC. Точка D лежит на стороне AC. Верно ли утверждение, что $\angle ADB = \angle DBC + \angle DCB$?

20.7. В треугольнике ABC (рис. 85) $AC = BC$. Найдите:

а) градусную меру угла *1*, если $\angle ACB = 68°$;

б) градусную меру угла C, если $\angle 1 = 68°$.

20.8. На рисунке 86 $AB \parallel CD$. Найдите угол BED, если:

а) $\angle ABC = 30°$, $\angle CDE = 40°$;

б) $\angle ABC = 20°$, $\angle CDE = 50°$.

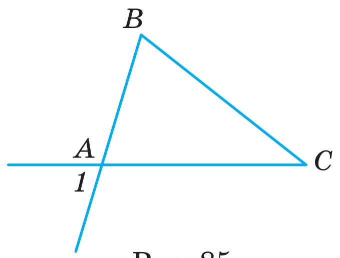


Рис. 85

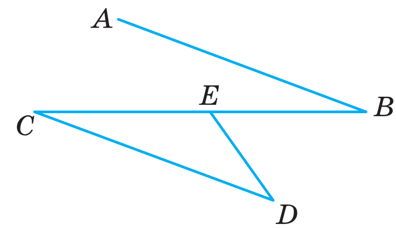


Рис. 86

20.9. На рисунке 87 $AC \parallel BD$, $AC = BA$. Найдите угол CBD, если:

а) $\angle 1 = 50°$; б) $\angle 2 = 120°$.

20.10. На рисунке 88 $AB = BC$. Найдите градусную меру угла 1, если:

а) $\angle ABC = 42°$; б) $\angle BAC = 74°$.

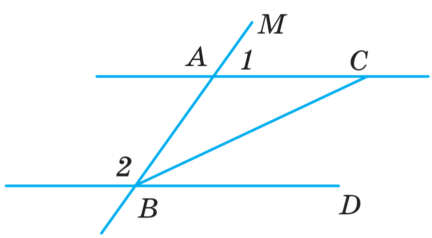


Рис. 87

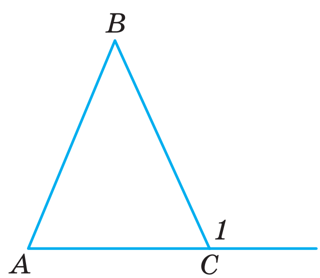


Рис. 88

20.11. а) На рисунке 89 $\angle ADB = 40°$. Найдите, чему равна сумма углов DBC и DCB.

б) На рисунке 90 $\angle ADB = 120°$. Найдите, чему равна сумма углов DBC и DCB.

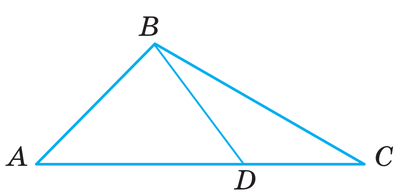


Рис. 89

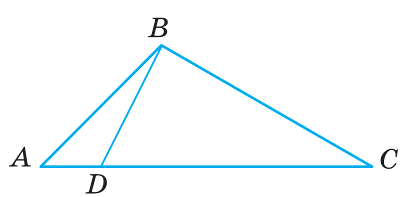


Рис. 90

20.12. Один из внешних углов треугольника равен $120°$, а разность внутренних углов, не смежных с ним, равна $40°$. Найдите градусные меры внутренних углов треугольника.

20.13. Сколько внешних углов при разных вершинах треугольника могут быть острыми?

20.14*. В треугольнике ABC проведена биссектриса CC_1. Докажите, что угол CC_1B равен полусумме угла A и внешнего угла B.

§ 21. Соотношения между сторонами и углами треугольника

21.1. Известно, что угол при вершине равнобедренного треугольника:

а) больше $120°$. Сравните длины основания треугольника, боковой стороны и медианы, проведенной к основанию;

б) меньше $30°$. Сравните длины основания треугольника, боковой стороны и высоты, проведенной к основанию.

21.2. В треугольнике ABC $\angle A = 95°$. Докажите, что BC — наибольшая сторона треугольника ABC.

21.3. Докажите, что средней по длине стороне треугольника противолежит средний по величине угол.

21.4. Докажите, что если два прямоугольных треугольника имеют по равному катету, то гипотенуза больше у того треугольника, у которого второй катет больше.

21.5. В треугольнике ABC $\angle B = 60°$. Внутри треугольника отмечена точка O, равноудаленная от его вершин. Докажите, что треугольник AOC является тупоугольным.

21.6. а) Пользуясь данными рисунка 91, укажите наибольший угол треугольника ABC.

б) Пользуясь данными рисунка 92, укажите наименьшую сторону треугольника KMN.

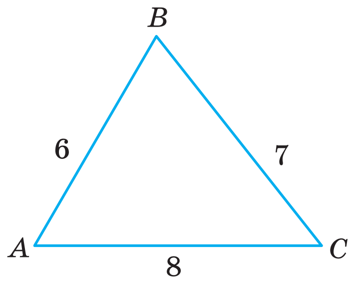


Рис. 91

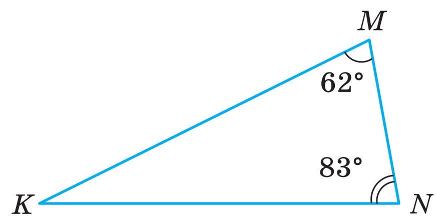


Рис. 92

21.7. а) Пользуясь данными рисунка 93, укажите наименьший угол треугольника ABC.

б) Пользуясь данными рисунка 94, укажите наибольшую сторону треугольника KMN.

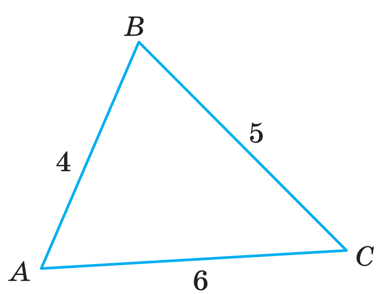


Рис. 93

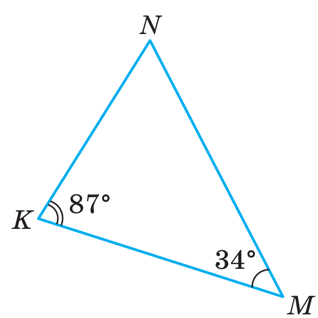


Рис. 94

§ 22. Неравенство треугольника

22.1. Существует ли треугольник со сторонами:

а) 4 см; 6 см; 10 см;

б) 5 см; 7 см; 15 см;

в) 12 см; 18 см; 24 см?

22.2. Найдите периметр равнобедренного треугольника, если:

а) две стороны треугольника равны 7 см и 14 см;

б) две стороны треугольника равны 5 см и 6 см.

22.3. Одна из сторон равнобедренного треугольника равна 8 см, а другая — 17 см. Найдите периметр треугольника.

22.4. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены соответственно точки D и E так, что $AD = DB$, $AE = 12$ см, $DE = 1$ см. Может ли отрезок AB быть равным 27 см?

22.5. Треугольники ABD и BCD расположены по разные стороны от прямой BD, $\angle ABD = \angle BDC$, $\angle ADB = \angle DBC$. Докажите, что $BD + BC > AB$.

22.6. На продолжении стороны AB треугольника ABC за вершину B отмечена точка D. Может ли отрезок AD быть равным 12 см, если $AC = 18$ см, $BC = 5$ см?

22.7. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка E. Докажите, что $EA > EB + EC$.

22.8*. Вне равностороннего треугольника ABC отмечена точка E, а внутри него — точка M. Докажите, что $MA < BE + EC$.

22.9*. Докажите, что сумма двух медиан треугольника больше полусуммы двух сторон, к которым эти медианы проведены.

22.10*. а) В каких пределах может изменяться целое число x, выражающее длину отрезка CD (рис. 95)?

б) В каких пределах может изменяться целое число x, выражающее длину отрезка CD (рис. 96)?

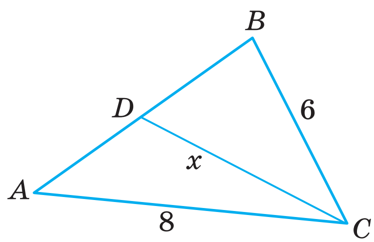


Рис. 95

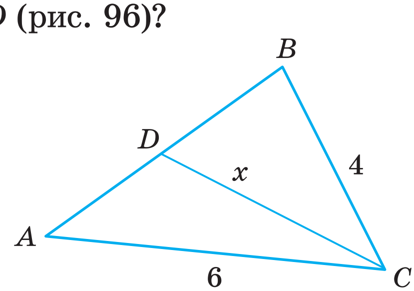


Рис. 96

§ 23. Признаки равенства прямоугольных треугольников

23.1. Определите, по каким признакам равны треугольники, изображенные на рисунках 97—100.

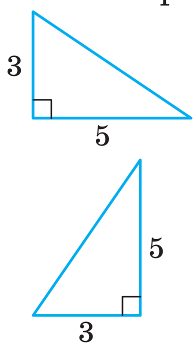


Рис. 97

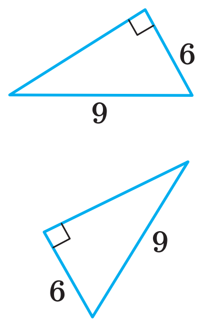


Рис. 98

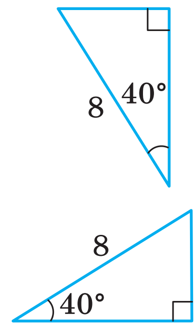


Рис. 99

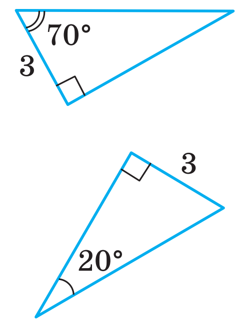


Рис. 100

23.2. Может ли медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, совпадать с его высотой?

23.3. Может ли биссектриса острого угла прямоугольного треугольника совпадать с его медианой, проведенной из той же вершины?

23.4. Катеты одного треугольника меньше соответствующих катетов другого треугольника. Докажите, что гипотенуза первого треугольника меньше гипотенузы второго треугольника.

23.5. Отрезки AB и DC пересекаются в точке O, расположенной на середине отрезка AB. Отрезки AD и BC перпендикулярны AB (рис. 101). Докажите, что $\angle ADO = \angle BCO$.

23.6. Два прямоугольных треугольника ABC и ABD имеют общую гипотенузу AB и лежат по разные стороны от нее. Известно, что $AD = BC$. Докажите, что $\angle CAB = \angle DBA$.

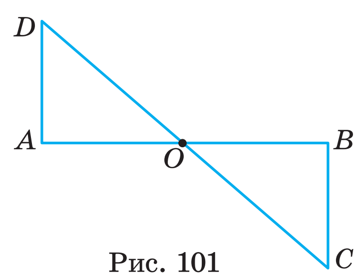


Рис. 101

23.7. На рисунке 102 изображены два равных прямоугольных треугольника ABC ($AC > BC$) и MNK ($MK > KN$). Найдите величину угла BAC, если $\angle MNK = 35°$.

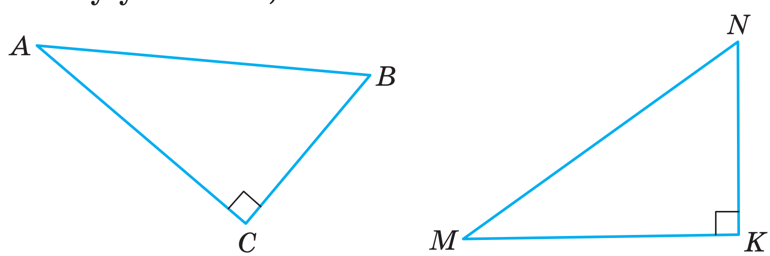


Рис. 102

23.8. Можно ли утверждать, что прямоугольные треугольники ABC ($\angle B = 90°$) и DEF ($\angle E = 90°$) равны, если:

а) $AC = DF$, $\angle C = \angle D$;

б) $AB = EF$, $\angle A = \angle F$;

в) $AB = EF$, $\angle A = \angle D$?

§ 24. Свойство точек биссектрисы угла

24.1. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $CD = 6$ см, BD — биссектриса угла B (рис. 103). Найдите расстояние от точки D до прямой AB.

24.2. Точка M находится на равном расстоянии от сторон угла ABC, равного $100°$ (рис. 104). Найдите величину угла AMB.

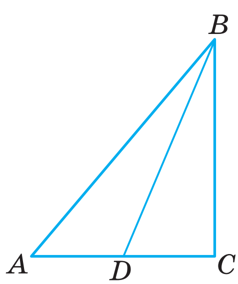


Рис. 103

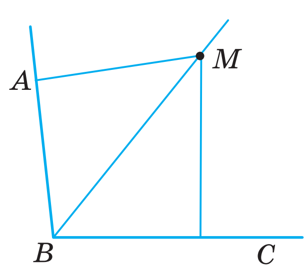


Рис. 104

24.3. Дан равнобедренный треугольник ACB ($AC = BC$). На стороне AC взята точка K, равноудаленная от прямых AB и BC (рис. 105). Найдите величину угла C, если $\angle ABK = 25°$.

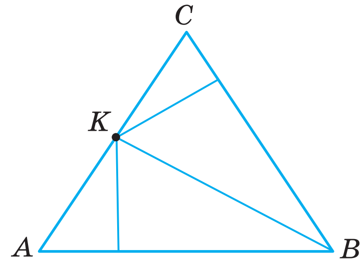


Рис. 105

24.4. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M. Расстояние от точки M до стороны AB равно 4 см. Найдите сумму расстояний от точки M до двух других сторон треугольника.

24.5. Какую фигуру образует множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух пересекающихся прямых?

§ 25. Свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°

25.1. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AB = 2BC$. Найдите градусные меры углов A и B.

25.2. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle BAC = 90°$, $\angle BCA = 2\angle ABC$. Найдите длины сторон AC и BC, если $BC + AC = 18$ см.

25.3. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $BC = 12$ см, $\angle B = 60°$. Найдите катет AB.

25.4. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $BC = 10$ см, катет $AB = 5$ см. Найдите градусную меру угла C.

25.5. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle B = 60°$, катет BC равен 4 см. Найдите длину гипотенузы.

25.6. В треугольнике ABC $\angle C = 60°$, $\angle B = 90°$. Высота BB_1 равна 2 см. Найдите BA.

25.7. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, высота CC_1 равна 5 см, $BC = 10$ см. Найдите градусную меру угла CAB.

25.8. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, внешний угол при вершине B равен $150°$, биссектриса $AA_1 = 20$ см. Найдите A_1C.

25.9. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AB = 2BC$. Найдите градусную меру внешнего угла при вершине B.

25.10. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, биссектриса $CC_1 = 16$ см, $BC_1 = 8$ см. Найдите градусную меру внешнего угла при вершине A.

25.11. В треугольнике ABC $AB = BC = 20$ см, BK — высота, $\angle ABC = 60°$. Найдите AC и градусную меру угла BCK.

25.12. В равнобедренном треугольнике ABC $\angle C = 30°$, $AB = BC = 8$ см. Найдите высоту треугольника, опущенную из вершины B.

25.13. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $BC = 2BD$. Докажите, что $AD = 3DB$.

25.14*. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, BD — высота, $AB = 2BD$. Докажите, что $3AC = 4AD$.

§ 26. Расстояние между параллельными прямыми

26.1. В треугольнике ABC сторона $AB = 10$ см, $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$. Через вершину A проведена прямая a, параллельная BC. Найдите расстояние от прямой BC до прямой a.

26.2. Точка O — середина отрезка AB. Через точки A, O и B проведены параллельные прямые a, b и c соответственно так, что прямые AB и a не являются взаимно перпендикулярными. Докажите, что расстояние от прямой a до прямой c в два раза больше расстояния от прямой b до прямой c.

26.3. В треугольнике ABC $\angle C = 30°$, $AC = 10$ см, $BC = 8$ см. Через вершину A проведена прямая a, параллельная BC. Найдите расстояние:

а) от точки B до прямой AC;

б) между прямыми a и BC.

26.4. В треугольнике ABC $AC = 30$ см. Расстояние от точки B до прямой AC равно $\frac{1}{2}BC$. Через точку A проведена прямая a, параллельная BC. Найдите расстояние между прямыми a и BC.

26.5. Через концы A и B отрезка AB проведены параллельные прямые a и b соответственно. Прямые AB и b не являются взаимно перпендикулярными. C — середина отрезка AB. Докажите, что:

а) точка C находится на одинаковом расстоянии от прямых a и b;

б) сумма расстояний от точки C до прямых a и b равна расстоянию между этими прямыми.

26.6. Точка C — середина отрезка AB. Через точки C и B проведены параллельные прямые c и b соответственно так, что прямые AB и b не являются взаимно перпендикулярными. Докажите, что:

а) расстояние от точки A до прямой c равно расстоянию от точки C до прямой b;

б) расстояние от точки A до прямой b вдвое больше расстояния между прямыми b и c.

26.7. В треугольнике ABC $\angle A = 70°$, $\angle B = 80°$. Через точку E, лежащую на прямой AC так, что $EC = 14$ см, проведена прямая a, параллельная BC. Найдите расстояние между прямыми a и BC.

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

§ 27. О задачах на построение

27.1. Отметьте три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, и проведите прямые AB, BC и CA.

27.2. Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Обозначьте все точки пересечения этих прямых. Сколько получилось точек? Рассмотрите все возможные случаи.

27.3. Начертите прямую и отметьте на ней точки A и B. С помощью линейки отметьте точки C и D так, чтобы точка B была серединой отрезка AC, а точка D — серединой отрезка BC.

27.4. Постройте неразвернутый угол. Отметьте точки A, B, M и N так, чтобы все точки отрезка AB лежали внутри угла, а все точки отрезка MN лежали вне угла.

27.5. Постройте отрезок, длина которого равна сумме длин данных отрезков AB и CD.

27.6. Постройте луч с началом в точке O. Отметьте на нем точки A, B и C так, чтобы $OB = 3OA$, а $OC = 2OB$.

27.7. Постройте прямую a, отметьте на ней точку A. С помощью линейки отметьте на этой прямой точку C так, чтобы длина отрезка AC равнялась 2 см. Сколько таких точек можно отметить на этой прямой?

27.8. Постройте отрезок, длина которого равна разности длин данных отрезков AB и CD.

§ 28. Построение треугольника по трем сторонам. Построение угла, равного данному

28.1. Постройте треугольник ABC, у которого длины сторон связаны соотношениями $AB = \frac{3}{4}AC$, $BC = \frac{1}{2}AC$.

28.2. Постройте треугольник ABC по отрезкам, длины которых равны длинам стороны BC, медианы BM и высоты BH ($BC > BH$, $BM > BH$).

28.3. Постройте равнобедренный треугольник по основанию a и боковой стороне b.

28.4. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне b и высоте h, проведенной к основанию.

28.5. Постройте равнобедренный треугольник по основанию a и высоте h, проведенной к основанию.

28.6. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и углу при основании данного треугольника.

28.7. В треугольнике ABC высоты пересекаются в точке O. Постройте этот треугольник по отрезкам OA, BO, AB.

28.8. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу, противолежащему основанию.

28.9. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте к одной из этих сторон.

28.10. Начертите треугольник ABC и постройте треугольник MNL, у которого $\angle M = \angle A$, $\angle N = \angle B$ и $MN = 2AB$.

28.11. Начертите произвольный угол и произвольный луч. С помощью циркуля и линейки от данного луча отложите угол, равный данному.

§ 29. Построение биссектрисы угла. Построение середины отрезка

29.1. Постройте точку пересечения биссектрис данного треугольника.

29.2. Постройте угол, величина которого в 4 раза меньше величины данного угла.

29.3. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла.

29.4. Постройте отрезок, длина которого составляет $\frac{3}{4}$ длины данного отрезка.

§ 30. Построение прямой, перпендикулярной данной

30.1. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и биссектрисе угла при вершине данного треугольника.

30.2. Постройте углы, величины которых равны 45°, 30°, 60°.

30.3. Начертите неразвернутый угол AOB и отметьте точку C внутри угла. Постройте отрезок, длина которого равна сумме расстояний от точки C до сторон угла.

30.4*. Постройте равнобедренный треугольник по углу при вершине и биссектрисе к боковой стороне.

30.5*. Постройте равносторонний треугольник по его высоте.

§ 31. Геометрическое место точек

31.1. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых.

31.2. Начертите произвольную прямую c и отрезок AB. Найдите геометрическое место точек, удаленных на расстояние AB от данной прямой c.

31.3. Постройте точку, равноудаленную от вершин равностороннего треугольника.

31.4. Сколько существует точек, равноудаленных от трех данных точек?

31.5*. Отрезок длиной a перемещается так, что его концы остаются на сторонах данного прямого угла. Найдите геометрическое место возможных положений середины этого отрезка.

31.6*. Постройте геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных непараллельных прямых.

31.7*. Вершина угла находится за пределами доступной части плоскости. Как построить часть биссектрисы этого угла?

8 класс

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

§ 1. Многоугольники

1.1. Выпишите номера выпуклых многоугольников, изображенных на рисунке 106.

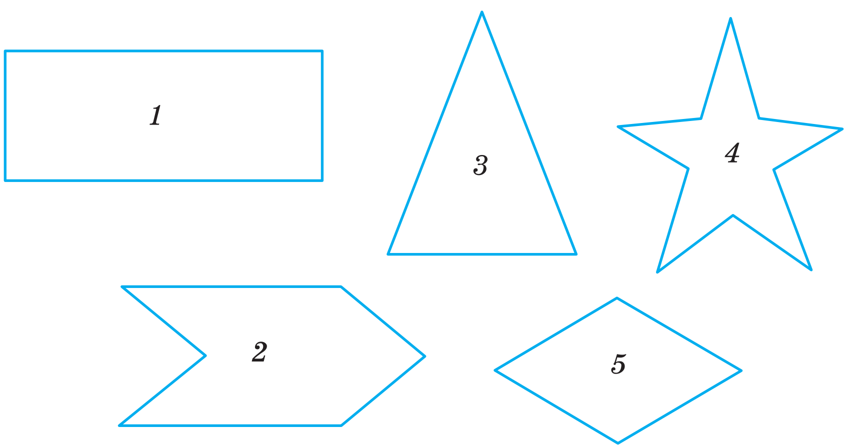


Рис. 106

1.2. Какой из многоугольников не может быть невыпуклым: треугольник, четырехугольник, пятиугольник?

1.3. Нарисуйте в тетради выпуклый и невыпуклый:

а) пятиугольник; б) семиугольник.

1.4. а) На какое наименьшее количество треугольников можно разбить выпуклый 17-угольник?

б) Сколько сторон у выпуклого многоугольника, если его можно разбить как минимум на 18 треугольников?

1.5. а) Найдите количество диагоналей выпуклого 12-угольника.
б) Найдите количество сторон выпуклого многоугольника, если у него 9 диагоналей.

1.6. Перенесите таблицы в тетрадь. Заполните пустые ячейки.

а)

Количество сторон выпуклого многоугольника, n	6		5		8	9	
Сумма внутренних углов n-угольника				180°			1800°
Число диагоналей n-угольника		2					

б)

Количество сторон выпуклого многоугольника, n		4		6	7	10	11
Сумма внутренних углов n-угольника	180°						
Число диагоналей n-угольника			5				

1.7. Найдите величину угла x в каждом из многоугольников на рисунках 107, *а*), *б*) при условии, что углы, обозначенные одной буквой, равны.

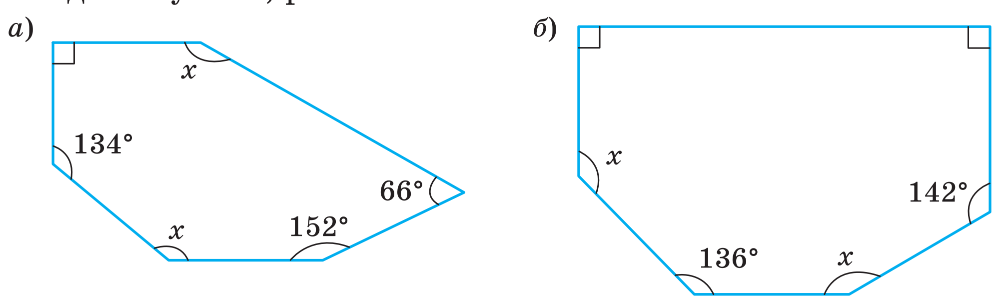


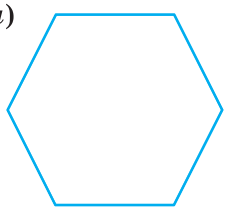
Рис. 107

1.8. а) В четырехугольнике величины углов находятся в отношении 6 : 7 : 8 : 15. Найдите величину наименьшего угла четырехугольника.

б) В четырехугольнике величины углов находятся в отношении 2 : 3 : 5 : 8. Найдите величину наибольшего угла четырехугольника.

1.9. Найдите величины внутренних углов многоугольников, изображенных на рисунках 108, *а*), *б*), если известно, что у каждого из них все внешние углы равны между собой.

а)



б)

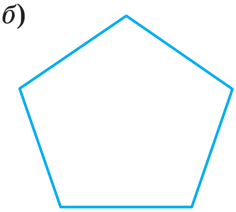


Рис. 108

1.10. а) Сумма углов выпуклого многоугольника равна 1440°. Найдите количество его диагоналей.

б) Сумма углов выпуклого многоугольника равна 1980°. Найдите количество его внутренних углов.

1.11. а) У выпуклого многоугольника каждый внешний угол равен 18°. Найдите количество диагоналей данного многоугольника.

б) У выпуклого многоугольника каждый внешний угол равен 30°. Найдите сумму внутренних углов многоугольника.

1.12. Найдите периметр многоугольника, если:

а) каждый его внутренний угол равен 140° и каждая его сторона равна 12 см;

б) каждый его внешний угол равен 10° и каждая его сторона равна 10 см.

§ 2. Параллелограмм и его свойства

2.1. *ABCD* — параллелограмм. Пользуясь данными рисунков 109, *а*)—*г*), найдите величину угла α.

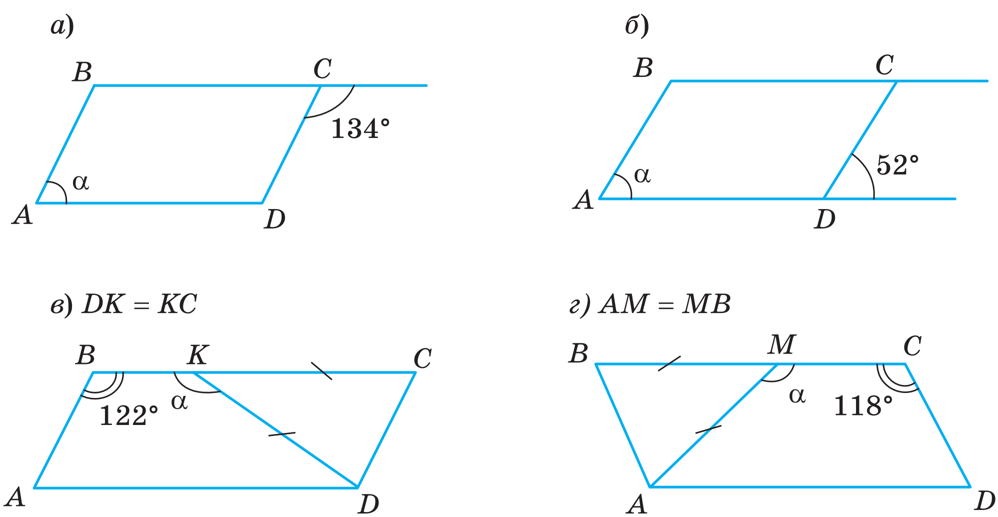


Рис. 109

2.2. а) Один из углов параллелограмма равен 28°. Найдите градусные меры остальных углов параллелограмма.

б) Один из углов параллелограмма равен 146°. Найдите градусные меры остальных углов параллелограмма.

2.3. *ABCD* — параллелограмм. Пользуясь данными рисунков 110, *а*), *б*), найдите периметр параллелограмма.

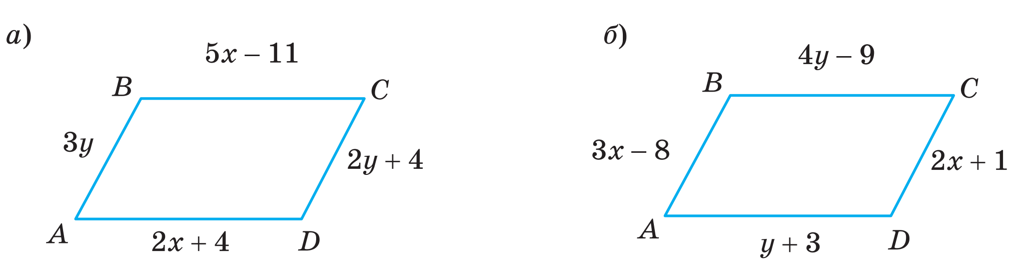


Рис. 110

2.4. а) Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите длины сторон параллелограмма, если их отношение равно 3 : 5.

б) Периметр параллелограмма равен 56 см, одна из его сторон равна 4 см. Найдите отношение длин сторон параллелограмма.

2.5. а) В параллелограмме $ABCD$ градусные меры двух углов относятся как 2 : 3. Найдите величины всех углов параллелограмма.

б) В параллелограмме $ABCD$ угол A равен 30°. Найдите отношение градусных мер углов параллелограмма.

2.6. а) В параллелограмме один угол на 42° меньше другого. Найдите величины всех углов параллелограмма.

б) В параллелограмме один угол на 38° больше другого. Найдите величины всех углов параллелограмма.

2.7. Пользуясь данными рисунков 111, *а*), *б*), найдите углы параллелограмма $ABCD$.

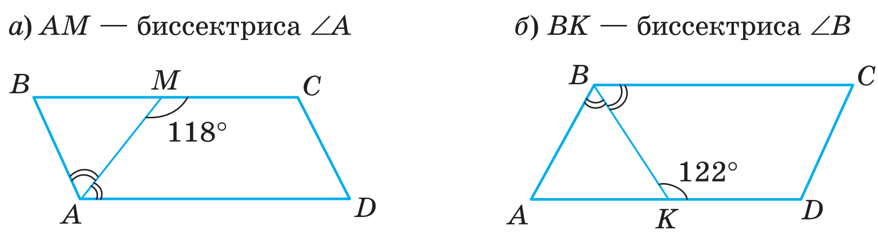


Рис. 111

2.8. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB в два раза больше стороны BC, а точка M — середина AB. Докажите, что угол CMD прямой.

2.9. а) В параллелограмме $ABCD$ биссектриса AN делит сторону BC на отрезки BN и NC, равные соответственно 12 см и 7 см. Найдите периметр параллелограмма.

б) В параллелограмме $ABCD$ $CD = 17$ см, периметр параллелограмма равен 96 см, биссектриса BM делит сторону AD на отрезки AM и MD. Найдите длины отрезков AM и MD.

2.10. а) В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Периметр параллелограмма равен 40 см, а разность периметров треугольников AOD и AOB равна 4 см. Найдите стороны параллелограмма.

б) В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Периметр параллелограмма равен 60 см, а разность периметров треугольников BOC и COD равна 6 см. Найдите стороны параллелограмма.

2.11. В параллелограмме острый угол равен 60°, высота делит противолежащую сторону на отрезки, длины которых равны 3 см и 8 см. Найдите периметр параллелограмма (рассмотрите все возможные случаи).

2.12. а) В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите расстояние от точки O до стороны BC, если известно, что $\angle B = 150°$ и $CD = 8$ см.

б) В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину стороны AB, если расстояние от точки O до стороны AD равно 3 см и $\angle A = 30°$.

2.13. а) В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B делят сторону CD на два отрезка. Найдите периметр параллелограмма, если сторона $AB = 18$ см.

б) Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 36 см, биссектрисы углов A и D пересекаются в точке N, принадлежащей стороне BC. Найдите длины сторон параллелограмма.

2.14. а) В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и D делят сторону BC на три отрезка. Найдите длины этих отрезков, если периметр параллелограмма равен 30 см, а сторона $AB = 4$ см.

б) В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов C и D делят сторону AB на три отрезка, длины которых равны 7 см, 2 см и 7 см. Найдите периметр параллелограмма.

2.15. а) В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает прямую CD в точке M, а биссектриса угла B пересекает прямую CD в точке N. Длина отрезка MN в 5 раз больше длины стороны CD параллелограмма. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 32 см.

б) В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает прямую BC в точке K так, что $BC : CK = 2 : 1$. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 20 см.

2.16. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AD и BC отмечены точки P и F соответственно, при этом $\angle AFB = \angle CPD$. Докажите, что четырехугольник $AFCP$ — параллелограмм.

2.17. а) Периметр параллелограмма в 3 раза больше одной из его сторон. Найдите отношение сторон параллелограмма.

б) Периметр параллелограмма в 3 раза больше разности длин его сторон. Найдите отношение сторон параллелограмма.

2.18. На сторонах параллелограмма $ABCD$ построены равносторонние треугольники APB и BKC. Докажите, что треугольник PKD является равносторонним.

§ 3. Признаки параллелограмма

3.1. Пользуясь данными рисунков 112, *а*)—*г*), докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

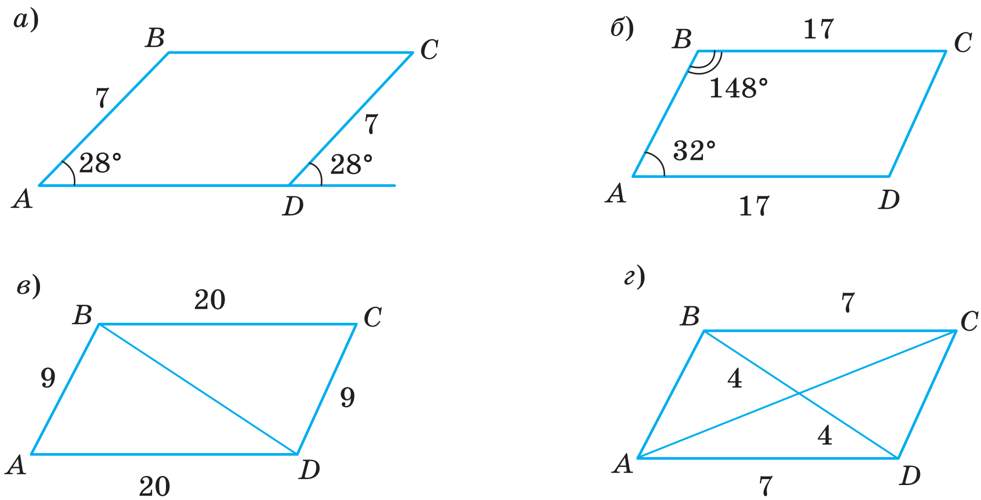


Рис. 112

3.2. а) $ABCD$ — параллелограмм, точки K и M делят диагональ BD на три равные части. Докажите, что $AKCM$ — параллелограмм.

б) $ABCD$ — параллелограмм, точки K, L и M делят диагональ AC на равные отрезки AK, KL, LM и MC. Докажите, что $BMDK$ — параллелограмм.

3.3. а) Три вершины параллелограмма имеют координаты (6; 0), (2; –3) и (–4; 3). Найдите координаты четвертой вершины, если известно, что эта вершина находится в четвертой координатной четверти.

б) Две вершины параллелограмма имеют координаты (2; 0), (–3; –7), точка пересечения диагоналей имеет координаты (5; –3). Найдите координаты двух других вершин параллелограмма.

3.4. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали BD отложены равные отрезки BF и DE, а на диагонали AC отложены равные отрезки AK и CP. Докажите, что $KFPE$ — параллелограмм.

3.5. В треугольнике ABC медиану AM продлили за точку M и на продолжении отметили точку N так, что $AN = 2AM$. Докажите, что $ABNC$ — параллелограмм.

3.6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) высоту BH продлили за точку H и на продолжении отметили точку P так, что $BH = HP$. Докажите, что $ABCP$ — параллелограмм.

3.7. а) На рисунке 113 изображен параллелограмм $ABCD$, точка пересечения диагоналей O принадлежит орезку LM с концами на сторонах параллелограмма. Докажите, что $ALCM$ — параллелограмм.

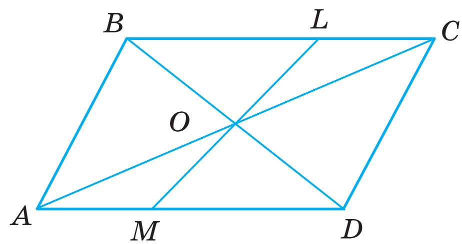


Рис. 113

б) На рисунке 114 изображен параллелограмм $ABCD$, точка пересечения диагоналей O принадлежит орезку PS с концами на сторонах параллелограмма. Докажите, что $PBSD$ — параллелограмм.

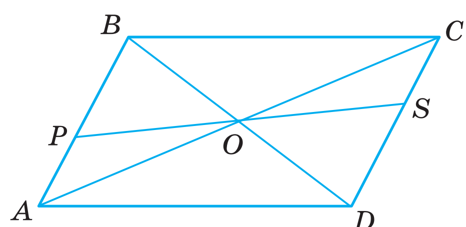


Рис. 114

3.8. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AD и BC отмечены соответственно точки P и F, при этом $FB = PD$. Докажите, что четырехугольник $AFCP$ — параллелограмм.

3.9. а) Дан равнобедренный треугольник с основанием 14 см и периметром 50 см. Через точку, принадлежащую основанию, проведены прямые, параллельные боковым сторонам треугольника. Установите вид и найдите периметр полученного четырехугольника.

б) Точка M принадлежит основанию равнобедренного треугольника ABC, $AB = BC = 8$ см. Через точку M проведены прямые, параллельные сторонам треугольника AB и BC, пересекающие стороны BC и AB соответственно в точках K и L. Докажите, что полученный четырехугольник $MKBL$ является параллелограммом, и найдите его периметр.

3.10. а) В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке K, а биссектриса угла D пересекает сторону BC в точке P. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если известно, что $PK = 15$ см и $AK : AD = 2 : 5$.

б) В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке N. Найдите периметр параллелограмма $MCDN$, если известно, что $AB = 12$ см и $AN : ND = 3 : 4$.

§ 4. Прямоугольник

4.1. Пользуясь данными рисунков 115, *а*)—*г*), докажите, что параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником.

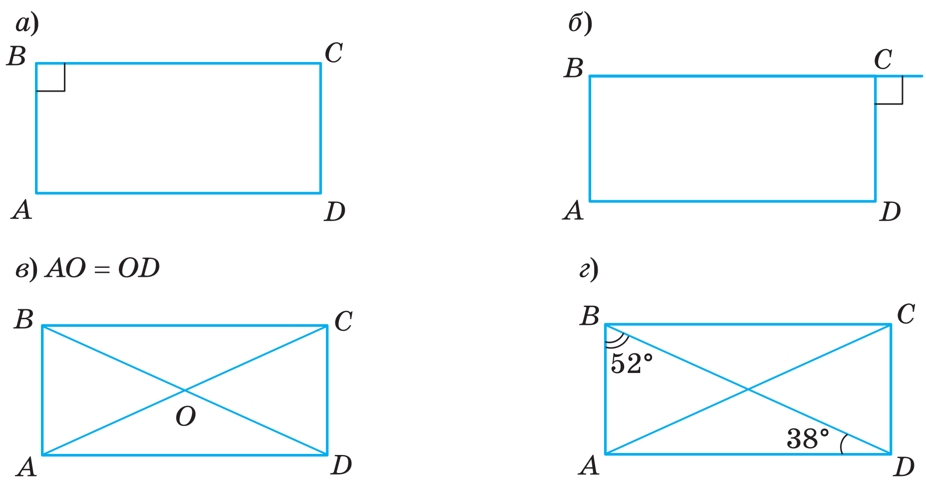


Рис. 115

4.2. а) Стороны прямоугольника относятся как 3 : 5, разность длин сторон прямоугольника равна 30 см. Найдите периметр прямоугольника.

б) Периметр прямоугольника равен 90 см, разность длин сторон прямоугольника равна 15 см. Найдите стороны прямоугольника.

4.3. а) Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. В треугольнике BOC проведена медиана OM, $\angle OCM = 36°$. Найдите угол AOM.

б) Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. В треугольнике COD проведена биссектриса ON, $\angle OCN = 27°$. Найдите угол AON.

4.4. а) В прямоугольнике $ABCD$ $BD = 16$ см, $\angle ACD = 60°$. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до его большей стороны.

б) В прямоугольнике $ABCD$ $AC = 12$ см, $\angle ADB = 60°$. Найдите периметр треугольника AOD.

4.5. а) Докажите, что параллелограмм $ABCD$, у которого $\angle CAD = \angle ADB$, является прямоугольником.

б) Докажите, что параллелограмм $ABCD$, у которого $AO = OC = OD$, где O — точка пересечения диагоналей, является прямоугольником.

4.6. Найдите периметр прямоугольника, точка пересечения диагоналей которого удалена от его сторон на 5 см и 6 см.

4.7. а) В прямоугольнике $ABCD$ из вершины C проведен перпендикуляр CH к диагонали BD. Найдите длину отрезка BH, если $AC = 12$ см и $\angle ABD : \angle CBD = 2 : 1$.

б) В прямоугольнике $ABCD$ из вершины B проведен перпендикуляр BF к диагонали AC. Найдите длину диагонали прямоугольника, если $FC = 12$ см и $\angle ACB : \angle ACD = 1 : 2$.

4.8. а) В прямоугольнике $ABCD$ диагональ $AC = 20$ см, сторона $AB = 12$ см. Периметр прямоугольника равен 56 см. Найдите периметр треугольника ACD.

б) В прямоугольнике $ABCD$ диагональ $BD = 25$ см, сторона $BC = 20$ см, периметр прямоугольника равен 70 см. Найдите длину незамкнутой ломаной $AODCB$, где O — точка пересечения диагоналей прямоугольника.

4.9. а) Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, периметр треугольника ABO равен 36 см, периметр треугольника BOC равен 50 см. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если $BO = 13$ см.

б) Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, периметр треугольника ADO равен 54 см, периметр треугольника DOC равен 48 см. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если $OC = 15$ см.

4.10. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит пересекаемую ею сторону на отрезки 7 см и 8 см. Найдите периметр прямоугольника. Рассмотрите все возможные случаи.

4.11. а) В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы всех четырех углов при пересечении образуют четырехугольник $PKLM$. Найдите отношение длин отрезков PL и KM.

б) В параллелограмме $KLMN$ биссектрисы всех четырех углов при пересечении образуют четырехугольник $ABCD$. Найдите разность градусных мер углов A и B.

4.12. а) Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если биссектрисы его углов A и B делят сторону CD на два отрезка по 7 см.

б) Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если биссектрисы его углов A и B делят сторону CD на три отрезка по 5 см, при этом точка пересечения биссектрис лежит вне прямоугольника.

4.13. а) В прямоугольнике $ABCD$ диагональ $AC = 12$ см, $\angle CAD = 30°$. Найдите расстояние от вершины C до прямой AD.

б) В прямоугольнике $ABCD$ диагональ $BD = 16$ см, $\angle CDB = 15°$. Найдите расстояние от вершины A до прямой BD.

4.14. а) В прямоугольнике $ABCD$ биссектриса угла A пересекает диагональ BD в точке P, $\angle APB = 75°$. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.

б) В прямоугольнике $ABCD$ биссектриса угла B пересекает диагональ AC в точке K, $\angle AKB = 65°$. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.

§ 5. Ромб

5.1. Используя данные рисунков 116, *а)*—*г)*, докажите, что параллелограмм $ABCD$ — ромб.

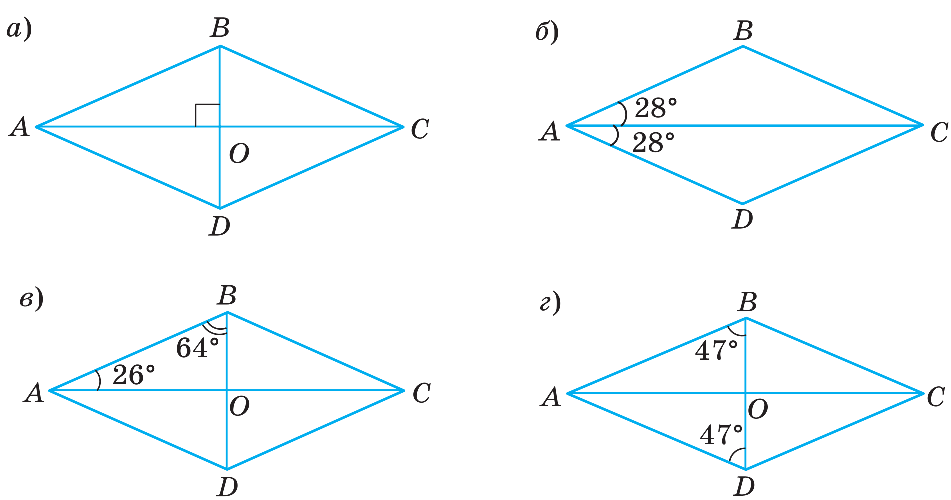


Рис. 116

5.2. *ABCD* — ромб. Равные углы отмечены равным количеством дуг (рис. 117, *а*), *б*)). Найдите углы ромба.

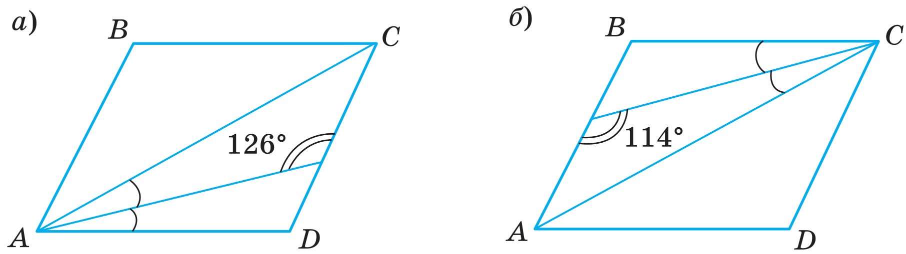


Рис. 117

5.3. а) Один из углов ромба равен 60°, меньшая диагональ равна 10 см. Найдите периметр ромба.

б) Периметр ромба равен 12 дм, меньшая диагональ равна 3 дм. Найдите градусные меры углов ромба.

5.4. а) Один из углов ромба равен 150°, высота равна 7 см. Найдите периметр ромба.

б) Один из углов ромба равен 30°, периметр равен 24 см. Найдите высоту ромба.

5.5. а) Высота ромба относится к его стороне как 1 : 2. Найдите больший угол ромба.

б) Один из углов ромба равен 30°. Найдите отношение высоты ромба к его периметру.

5.6. а) Высота ромба делит его сторону на равные отрезки по 4 см. Найдите длину меньшей диагонали ромба.

б) Высота ромба делит его сторону на равные отрезки по 5 см. Найдите угол между двумя высотами, проведенными из одной вершины тупого угла ромба.

5.7. а) Угол между двумя высотами, проведенными из одной вершины острого угла ромба, равен 150°. Найдите периметр ромба, если его высота равна 5 см.

б) Угол между двумя высотами, проведенными из одной вершины острого угла ромба, равен 150°. Найдите высоту ромба, если его периметр равен 48 см.

5.8. а) В параллелограмме $ABCD$ $\angle ACB = 75°$, $\angle ACD = 75°$. Найдите высоту параллелограмма, если его периметр равен 80 см.

б) В параллелограмме $ABCD$ $\angle BAC = 75°$, $\angle DAC = 75°$. Найдите периметр параллелограмма, если его высота равна 6 см.

5.9. В ромбе $ABCD$ прямая AB образует с диагоналями углы, величины которых относятся как 13 : 17. Найдите углы ромба.

§ 6. Квадрат

6.1. $ABCD$ — квадрат. Пользуясь данными рисунков 118, *а*), *б*), найдите значение x.

а) $P_{ABCD} = 28$ см *б*)

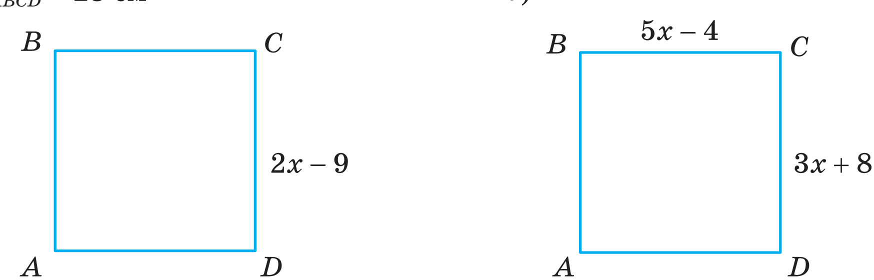


Рис. 118

6.2. а) Две вершины квадрата имеют координаты (–3; –1) и (5; –1). Найдите координаты остальных вершин квадрата. Рассмотрите все возможные случаи.

б) Две вершины квадрата имеют координаты (−4; −2) и (6; −2), точка пересечения диагоналей имеет координаты (1; 3). Найдите координаты остальных вершин квадрата.

6.3. а) Найдите длину стороны квадрата, периметр которого равен 1,04 м. Ответ выразите в сантиметрах.

б) Найдите периметр квадрата, сторона которого равна 2,03 м.

6.4. а) Периметр равностороннего треугольника равен 84 см, найдите периметр квадрата, сторона которого равна стороне треугольника.

б) Периметр квадрата равен 72 см, найдите периметр равностороннего треугольника, сторона которого равна стороне квадрата.

6.5. В квадрате *ABCD* точки *M*, *N*, *P* и *Q* являются серединами сторон. Докажите, что четырехугольник *MNPQ* — квадрат.

6.6. а) На сторонах равностороннего треугольника *ABC* построены квадраты *ANMC* и *BKLC*. Найдите величину угла между прямыми *MB* и *AL*.

б) На сторонах квадрата *ABCD* построены равносторонние треугольники *ALD* и *BKC*. Найдите величину угла между прямыми *LB* и *AK*.

6.7. В равностороннем треугольнике *APC* проведена высота *PH*. Прямоугольник *PRTH* разделен отрезком *MN* на два квадрата (рис. 119). Найдите величину угла *HKP*.

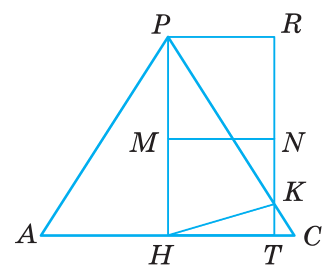


Рис. 119

§ 7. Теорема Фалеса

7.1. Прямые $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B$. Пользуясь данными рисунков 120, *а*), *б*), найдите длину отрезка, обозначенного буквой *x*.

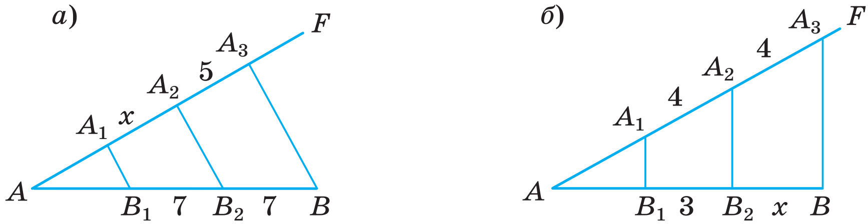


Рис. 120

7.2. Пользуясь данными рисунков 121, *а*), *б*), найдите длину *CB*.

а) $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ *б*) $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$

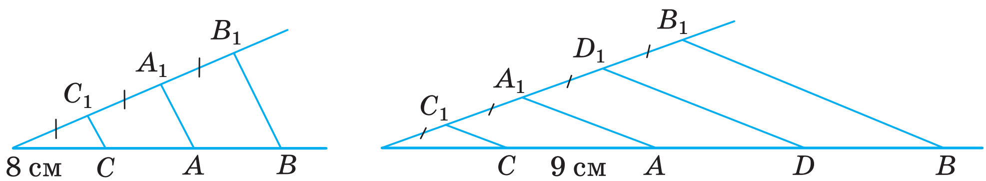


Рис. 121

7.3. Пользуясь данными рисунков 122, *а*), *б*), найдите длину *PB*.

а) $\angle A = 90°$, $\angle C = 30°$, $FE = 12$ см *б*) $\angle P = 90°$, $\angle A = 30°$, $BC = 24$ см

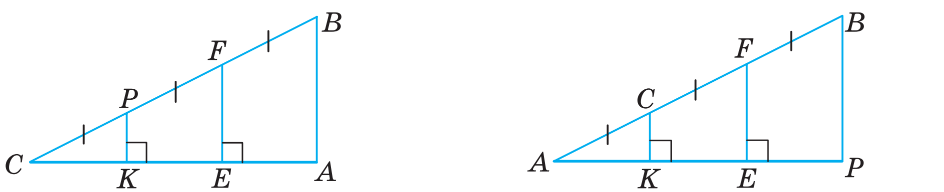


Рис. 122

7.4. Пользуясь данными рисунков 123, *а*), *б*), найдите градусную меру угла *BAC*.

а) $\angle ACB = 32°$, $\angle AMN = 101°$ *б*) $\angle BNM = 57°$, $\angle ABC = 48°$

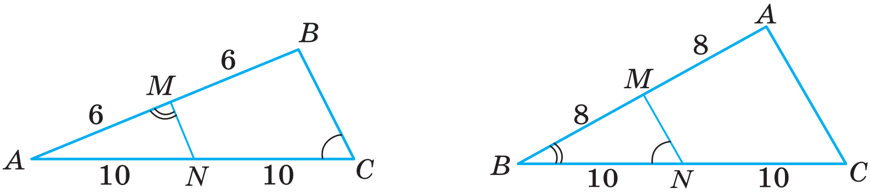


Рис. 123

7.5. а) В параллелограмме $ABCD$ диагональ $AC = 21$ см, точка M — середина стороны AD. Найдите длины отрезков, на которые прямые BM и DB разделили диагональ AC.

б) В параллелограмме $ABCD$ диагональ $BD = 27$ см, точка K — середина стороны CD. Найдите длины отрезков, на которые прямые CA и AK разделили диагональ BD.

7.6. а) В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Через вершину C и середину отрезка OD проведена прямая, пересекающая сторону AD ромба в точке K. Найдите длину отрезка AK, если периметр ромба равен 60 см.

б) В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Через вершину B и середину отрезка AO проведена прямая, пересекающая сторону AD ромба в точке K. Найдите периметр ромба, если длина отрезка AK равна 4 см.

§ 8. Средняя линия треугольника

8.1. По данным рисунков 124, *а*), *б*) найдите значение x.

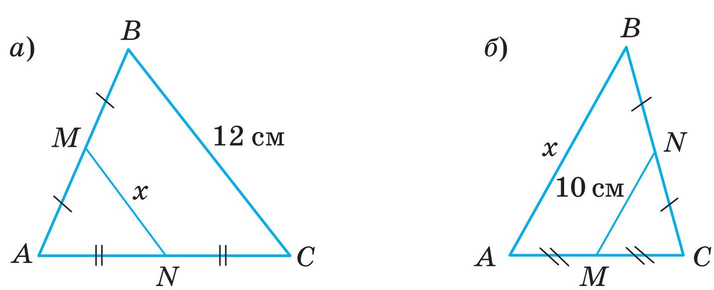
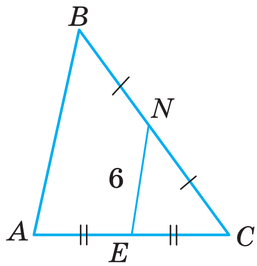


Рис. 124

8.2. Найдите периметры указанных четырехугольников, пользуясь данными рисунков 125, *а*), *б*).

а) $P_{ENC} = 16$ см, P_{ABNE} — ?



б) $P_{AME} = 25$ см, P_{MBCE} — ?

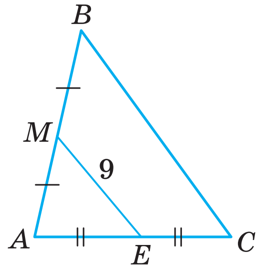


Рис. 125

8.3. а) Средние линии треугольника равны 7 см, 8 см и 9 см. Найдите периметр треугольника.

б) Две средние линии треугольника равны 5 см и 8 см. Найдите длину третьей средней линии, если периметр треугольника равен 40 см.

8.4. а) Периметр треугольника равен 120 см, а длины сторон находятся в отношении 5 : 12 : 13. Найдите длины сторон треугольника, вершины которого являются серединами сторон данного треугольника.

б) Периметр треугольника равен 130 см, а его средние линии относятся как 7 : 8 : 11. Найдите разность длин наибольшей и наименьшей сторон треугольника.

8.5. а) В треугольнике ABC $AB = 12$ см, $BC = 8$ см, точка M — середина стороны AC. Через точку M проведены прямые, параллельные сторонам AB и BC. Определите вид полученного четырехугольника и найдите его периметр.

б) В треугольнике ABC $AB = 20$ см, точка T — середина стороны AB. Через точку T проведены прямые, параллельные сторонам AC и BC. Периметр полученного четырехугольника равен 24 см. Найдите периметр треугольника ABC.

8.6. а) Сторона прямоугольника равна 7 см и образует угол 60° с диагональю. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон прямоугольника.

б) Периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон прямоугольника, равен 40 см. Найдите длину диагонали прямоугольника.

8.7. а) В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, точка N — середина стороны AB, $AN = 5$ см, $ON = 4$ см. Найдите периметр параллелограмма.

б) В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, точка M — середина стороны BC, $MC = 7$ см, периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите длину отрезка OM.

8.8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали $AC = 17$ см, $BD = 10$ см. Середины сторон четырехугольника $ABCD$ — точки K, L, M и N являются вершинами четырехугольника $KLMN$. Определите вид четырехугольника $KLMN$ и найдите его периметр.

8.9. Сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника равна $16\sqrt{13}$ см. Найдите периметр многоугольника, полученного при последовательном соединении середин сторон исходного четырехугольника.

§ 9. Свойство медиан треугольника

9.1. По данным рисунков 126, *а*), *б*) найдите длину медианы AN.

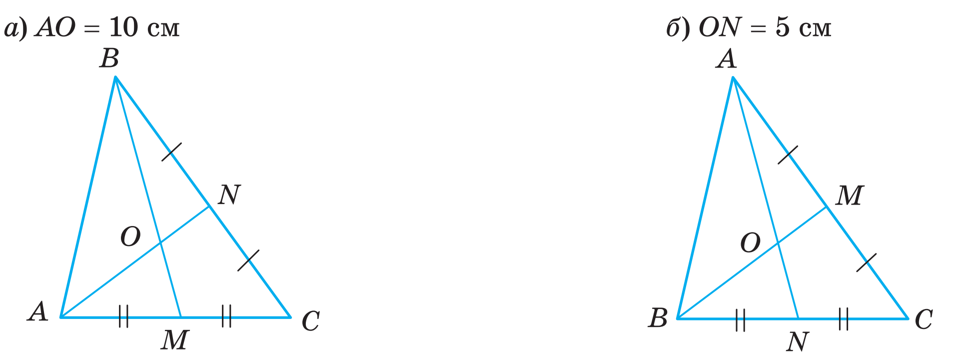


Рис. 126

9.2. а) По данным рисунка 127 найдите длину отрезка BO, если $OE = x$, $AO = 8x - 5$, $ON = 3x + 4$.

б) По данным рисунка 128 найдите длину отрезка CE, если $OE = x$, $AO = x - 3$, $OM = 9 - x$.

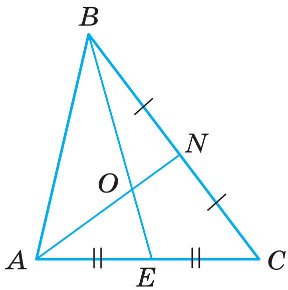


Рис. 127

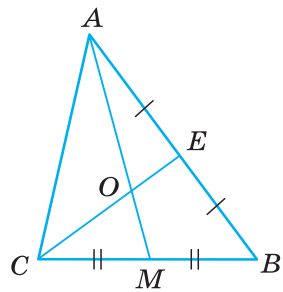


Рис. 128

9.3. По данным рисунка 129 найдите длину отрезка AM, если:

а) $OM = 6$ см; б) $AO = 8$ см.

9.4. По данным рисунка 130 найдите AB, если:

а) $OM = 10$ см; б) $OC = 8$ см.

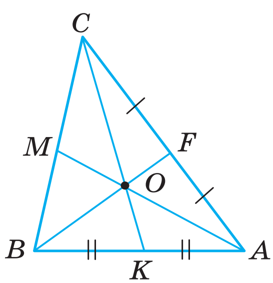


Рис. 129

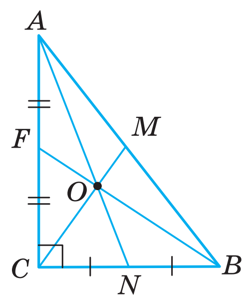


Рис. 130

9.5. а) В треугольнике ABC медианы AM и BN пересекаются в точке O. Длина отрезка AO на 6 см больше, чем длина отрезка OM. Найдите длину медианы AM.

б) В треугольнике ABC медианы AL и CK пересекаются в точке O. Длина отрезка OK на 4 см меньше, чем длина отрезка CO. Найдите длину медианы CK.

9.6. В параллелограмме $ABCD$ диагональ $BD = 24$ см, точка M — середина стороны BC. Найдите длину отрезка PD, где P — точка пересечения прямых AM и BD.

б) В параллелограмме $ABCD$ точка N — середина стороны CD, K — точка пересечения прямых AC и BN, $KC = 8$ см. Найдите длину диагонали AC.

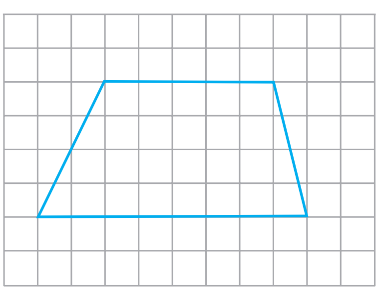
9.7. а) В параллелограмме $ABCD$ точки M и N — середины сторон AD и CD соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке K. Периметр треугольника MNK равен 13 см. Найдите длину диагонали AC, если $AN = 12$ см и $CM = 9$ см.

б) В параллелограмме $ABCD$ точки K и L — середины сторон BC и CD соответственно. Отрезки DK и BL пересекаются в точке P. Найдите периметр треугольника PKL, если $DK = 15$ см, $BL = 21$ см и $BD = 8$ см.

§ 10. Трапеция. Средняя линия трапеции

10.1. По данным рисунков 131, *а*), *б*) найдите длину средней линии трапеции, если размер одной клетки 2×2 см.

а)



б)

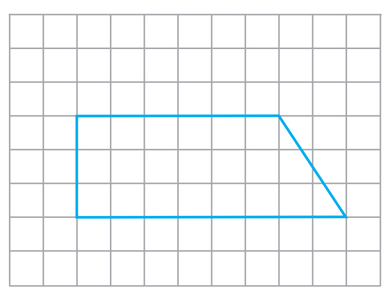


Рис. 131

10.2. а) Найдите среднюю линию трапеции, основания которой равны 9 см и 17 см.

б) Средняя линия трапеции равна 15 см, а длина одного из оснований — 12 см. Найдите длину второго основания трапеции.

10.3. а) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A в 3 раза меньше угла B, а угол C в 4 раза больше угла D. Найдите градусные меры углов трапеции.

б) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол B на $108°$ больше угла A, а угол D на $120°$ меньше угла C. Найдите градусные меры углов трапеции.

10.4. а) Отрезок AB расположен по одну сторону от прямой a, расстояния от концов отрезка до прямой a равны 5 см и 12 см. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой a.

б) Точки A и B лежат в разных полуплоскостях от прямой a, расстояния от концов отрезка до прямой a равны 3 см и 17 см. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой a.

10.5. а) Меньшее основание трапеции равно 4 см, отрезок, соединяющий середины ее диагоналей, равен 8 см. Найдите длину большего основания трапеции.

б) Средняя линия трапеции равна 17 см, а отрезок, соединяющий середины ее диагоналей, равен 2 см. Найдите длины оснований трапеции.

10.6. В трапеции $ABCD$ основание $BC = 10$ см, боковые стороны $AB = 8$ см, $CD = 12$ см. Биссектрисы углов при основании BC пересекаются в точке P, принадлежащей основанию AD. Найдите длину средней линии трапеции.

§ 11. Равнобедренная и прямоугольная трапеции

11.1. По данным рисунков 132, *а*), *б*) найдите длины отрезков, на которые высота делит большее основание трапеции.

а) $AD = 17$ см, $BC = 9$ см *б*) $AD = 19$ см, $BC = 5$ см

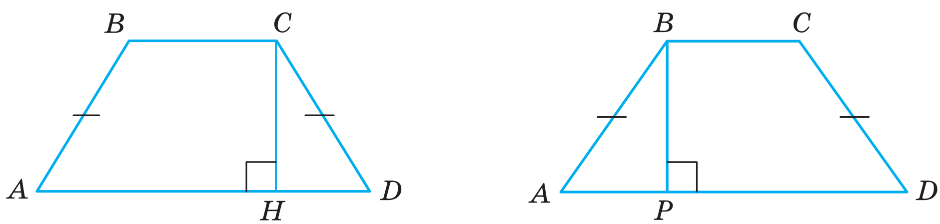


Рис. 132

11.2. По данным рисунков 133, *а*), *б*) найдите периметр равнобедренной трапеции $ABCD$.

а) $BL \parallel CD$, $BC = 9$ см, $P_{ABL} = 15$ см *б*) $AB \parallel CN$, $AN = 7$ см, $P_{CND} = 28$ см

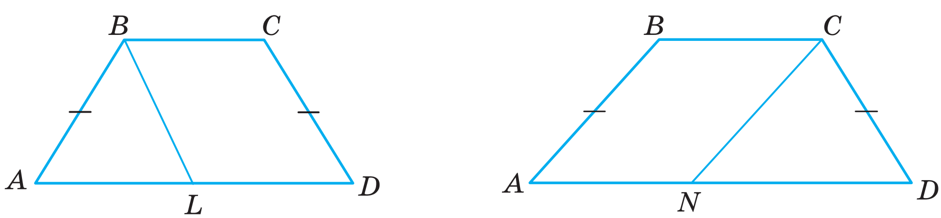


Рис. 133

11.3. По данным рисунков 134, *а*), *б*) найдите длину меньшей боковой стороны трапеции $ABCD$.

а) $CD = 8$ см, $\angle BCD = 150°$ *б*) $BC = 6$ см, $AD = 10$ см, $\angle ADC = 45°$

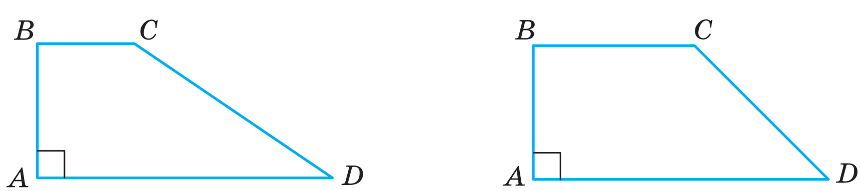


Рис. 134

11.4. а) В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A на 90° меньше угла B. Найдите градусные меры углов трапеции.

б) В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол C в 4 раза больше угла D. Найдите градусные меры углов трапеции.

11.5. а) Изобразите на координатной плоскости равнобедренную трапецию, три вершины которой имеют координаты $(-6; -3)$, $(-2; 7)$, $(8; -3)$. Найдите длину средней линии полученной трапеции, если известно, что она параллельна оси абсцисс. За единичный отрезок примите две клетки тетради, т. е. 1 см.

б) Изобразите на координатной плоскости равнобедренную трапецию, три вершины которой имеют координаты $(-5; -2)$, $(-5; 5)$, $(2; -4)$. Найдите длину средней линии полученной трапеции, если известно, что она параллельна оси ординат. За единичный отрезок примите две клетки тетради, т. е. 1 см.

11.6. а) Изобразите на координатной плоскости прямоугольную трапецию, три вершины которой имеют координаты $(-2; -1)$, $(9; -1)$, $(3; 6)$. Укажите возможные координаты четвертой вершины и найдите, чему равна высота полученной трапеции, если известно, что средняя линия параллельна оси абсцисс. За единичный отрезок примите две клетки тетради, т. е. 1 см.

б) Изобразите на координатной плоскости прямоугольную трапецию, три вершины которой имеют координаты $(-7; -3)$, $(-7; 2)$, $(3; 0)$. Укажите возможные координаты четвертой вершины и найдите, чему равна высота полученной трапеции, если известно, что средняя линия параллельна оси ординат. За единичный отрезок примите две клетки тетради, т. е. 1 см.

11.7. а) Длины боковых сторон прямоугольной трапеции относятся как 2 : 5, а их сумма равна 70 см. Найдите высоту трапеции.

б) Длины боковых сторон прямоугольной трапеции относятся как 3 : 5, ее высота равна 15 см. Найдите периметр трапеции, если средняя линия равна 20 см.

11.8. а) В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = 90°$) боковая сторона CD равна 16 см, разность оснований равна 8 см. Найдите градусную меру угла BCD.

б) В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = 90°$) боковая сторона CD равна 14 см, разность оснований равна 7 см. Найдите разность градусных мер углов BCD и ADC.

11.9. а) Основания равнобедренной трапеции равны 5 см и 9 см, острый угол равен 60°. Найдите периметр трапеции.

б) Средняя линия равнобедренной трапеции равна 8,5 см, расстояние между серединами диагоналей равно 2,5 см, периметр трапеции равен 27 см. Найдите градусные меры углов трапеции.

11.10. В равнобедренной трапеции $ABCD$ высота $BH = 5{,}5$ см, точка H принадлежит основанию AD. Периметр треугольника BCD равен 27 см, периметр треугольника ACD равен 38 см. Найдите углы трапеции.

11.11. В равнобедренной трапеции длины боковых сторон равны длине меньшего основания, а длины диагоналей — длине большего основания. Найдите величины углов данной трапеции.

§ 12. Центральная и осевая симметрия

12.1. Из фигур, изображенных на рисунках 135, 1)—9), выберите те, которые являются:

а) центрально-симметричными;

б) имеющими ось (оси) симметрии.

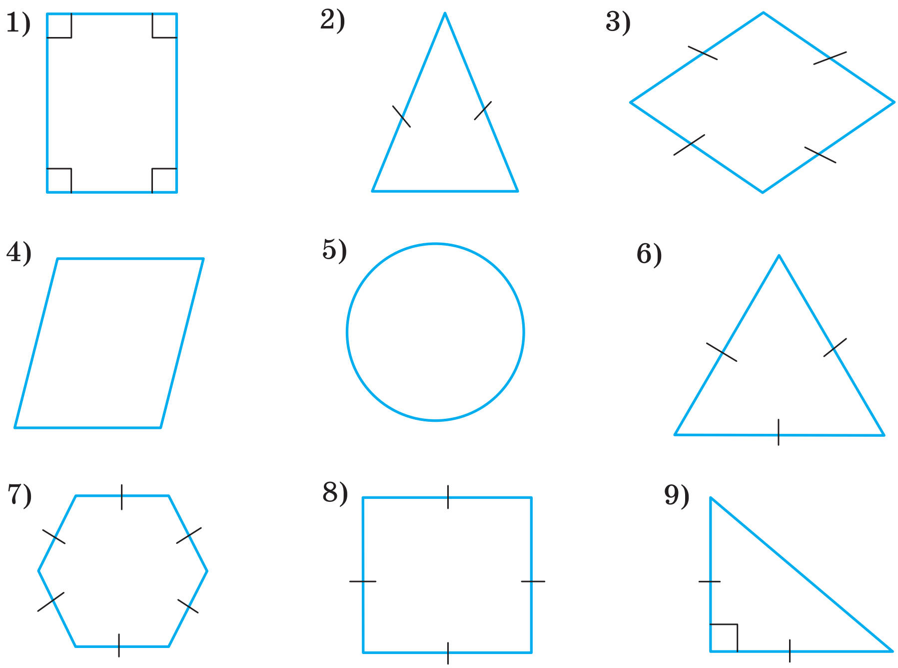


Рис. 135

12.2. Из перечисленных ниже букв выберите те, которые обладают осевой симметрией. Изобразите схематически эти буквы и их оси симметрии:

а) Ф А П Р О Н Е Г Ш Щ З Х;

б) W I U T V B C J S R N M.

12.3. а) Треугольник ABC равнобедренный, $\angle ABC = 120°$. Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AC. Найдите периметр четырехугольника $ABCB_1$, если расстояние между точками B и B_1 равно 6 см.

б) Треугольник MNP равнобедренный, $MN = 12$ см, $\angle MNP = 120°$. Точка M_1 симметрична точке M относительно прямой NP. Найдите высоту треугольника MPM_1.

12.4. а) Известны координаты трех вершин прямоугольника: (–2; 7), (–2; –1), (7; 7). Изобразите данный прямоугольник, определив координаты его четвертой вершины, и постройте фигуру, симметричную данной относительно оси абсцисс.

б) Известны координаты трех вершин прямоугольника: (–3; 8), (–3; –2), (8; 8). Изобразите данный прямоугольник, определив координаты его четвертой вершины, и постройте фигуру, симметричную данной относительно оси ординат.

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

§ 13. Площадь квадрата, прямоугольника

13.1. Найдите площади фигур, изображенных на рисунках 136, *а*), *б*), если размер одной клетки 1×1 см.

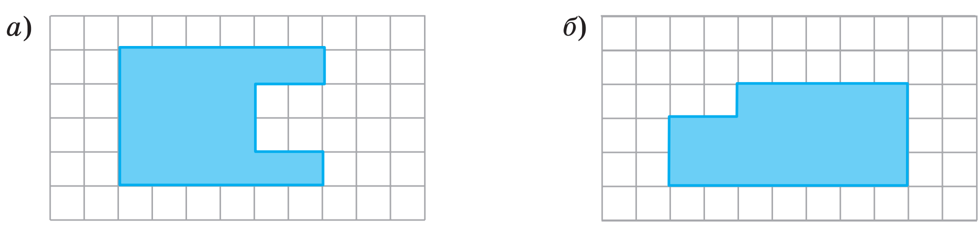


Рис. 136

13.2. а) Найдите площадь квадрата со стороной 3,2 дм и выразите ее в квадратных сантиметрах.

б) Найдите площадь квадрата со стороной 2,1 м и выразите ее в квадратных сантиметрах.

13.3. а) Найдите периметр квадрата, площадь которого равна 64 см^2.

б) Найдите площадь квадрата, периметр которого равен 64 см.

13.4. По данным рисунков 137, *а*), *б*) найдите площадь прямоугольника *ABCD*.

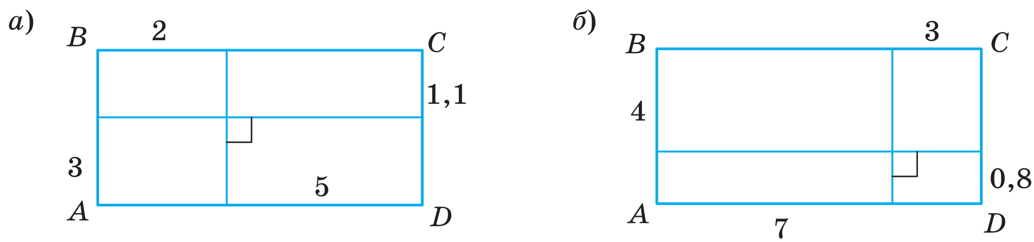


Рис. 137

13.5. а) Периметр ромба равен 84 см, сторона квадрата в 3 раза меньше стороны ромба. Найдите площадь квадрата.

б) Периметр квадрата в 5 раз больше периметра ромба со стороной 3 см. Найдите площадь квадрата.

13.6. По данным рисунков 138, *а*), *б*) найдите площадь прямоугольника *ABCD*.

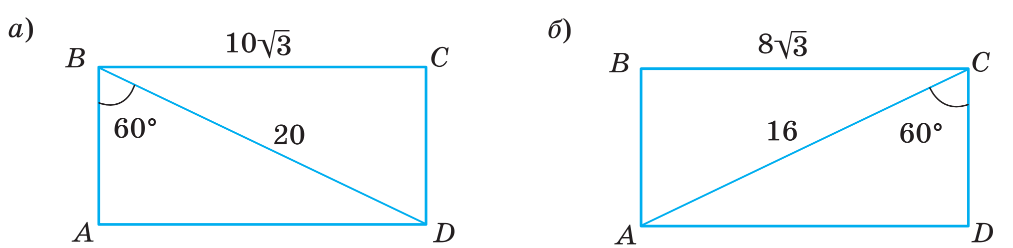


Рис. 138

13.7. а) Площадь прямоугольника равна 126 см^2, а длины его сторон относятся как 2 : 7. Найдите периметр прямоугольника.

б) Периметр прямоугольника равен 154 см, а длины его сторон относятся как 3 : 4. Найдите площадь прямоугольника.

13.8. На рисунке 139 изображен план садового участка прямоугольной формы. В углу участка расположена квадратная клумба.

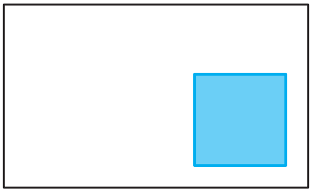


Рис. 139

а) Размеры участка 40×15 м, а площадь клумбы в 24 раза меньше площади всего участка. Найдите, сколько метров бордюрной ленты потребуется, чтобы отделить ею клумбу со всех сторон.

б) Чтобы отделить клумбу со всех сторон, потребовалось 24 м бордюрной ленты. Какую часть участка занимает клумба, если размеры участка 40×18 м?

13.9. а) Прямоугольник площадью 48 см^2 составлен из равных квадратов площадью 4 см^2 каждый. Найдите периметр прямоугольника, рассмотрите все возможные случаи.

б) Прямоугольник площадью 64 см^2 составлен из равных квадратов периметром 8 см каждый. Найдите периметр прямоугольника, рассмотрите все возможные случаи.

§ 14. Площадь параллелограмма

14.1. Найдите площадь параллелограмма (рис. 140, *а*), *б*)), если размер одной клетки 3×3 см.

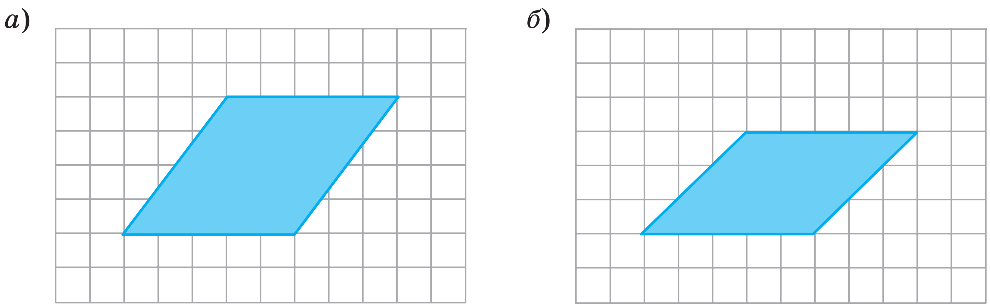


Рис. 140

14.2. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ по данным рисунков 141, *а*), *б*).

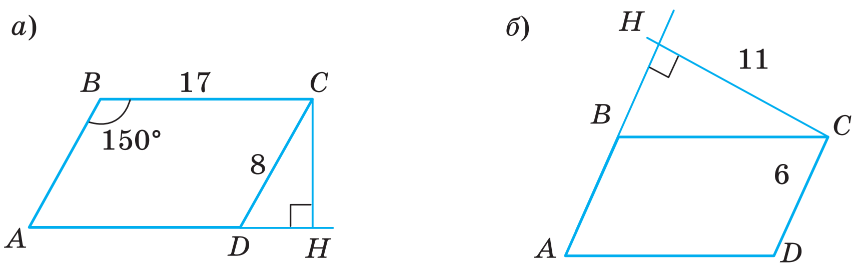


Рис. 141

14.3. Найдите площадь ромба $ABCD$ по данным рисунков 142, *а*), *б*).

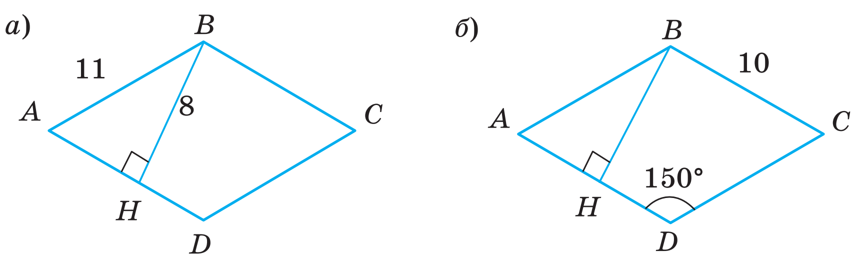


Рис. 142

14.4. а) Длины сторон параллелограмма равны 8 см и 18 см, один из углов равен 150°. Найдите площадь параллелограмма.

б) В параллелограмме $ABCD$ проведена высота BH, точка H принадлежит отрезку AD, причем $BH = 4$ см и $HD = 12$ см, $\angle A = 45°$. Найдите площадь параллелограмма.

14.5. а) В параллелограмме $ABCD$ проведена высота BH, точка H принадлежит отрезку AD, причем $AH = 4$ см и $HD = 5$ см. Площадь параллелограмма равна 36 см^2. Найдите разность градусных мер большего и меньшего углов параллелограмма.

б) Площадь параллелограмма равна 90 см^2, а стороны — 20 см и 9 см. Найдите разность градусных мер большего и меньшего углов параллелограмма.

14.6. а) Площадь параллелограмма равна 24 см^2, а стороны — 12 см и 4 см. Найдите разность длин высот параллелограмма.

б) Площадь параллелограмма равна 54 см^2, а высоты параллелограмма — 3 см и 9 см. Найдите периметр параллелограмма.

14.7. а) Найдите площадь ромба, периметр которого равен 24 см, а острый угол — 30°.

б) Найдите периметр ромба, площадь которого равна 128 см^2, а больший угол — 150°.

14.8. а) Длины двух высот параллелограмма равны 3 см и 4 см, угол между ними равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

б) Длины двух высот параллелограмма относятся как 4 : 5, угол между ними равен 30°. Периметр параллелограмма равен 72 см. Найдите площадь параллелограмма.

14.9. а) Изобразите на координатной плоскости параллелограмм, у которого две стороны параллельны оси ординат и три вершины имеют координаты (2; 5), (6; 8), (2; –7). Найдите площадь полученного параллелограмма.

б) Изобразите на координатной плоскости параллелограмм, две стороны которого параллельны оси абсцисс и три вершины имеют координаты (–1; 6), (5; 6), (–5; –1). Найдите площадь полученного параллелограмма.

§ 15. Площадь треугольника, прямоугольного треугольника, ромба

15.1. Найдите площадь фигуры (рис. 143, *а*)—*е*)), если размер одной клетки 1×1 см.

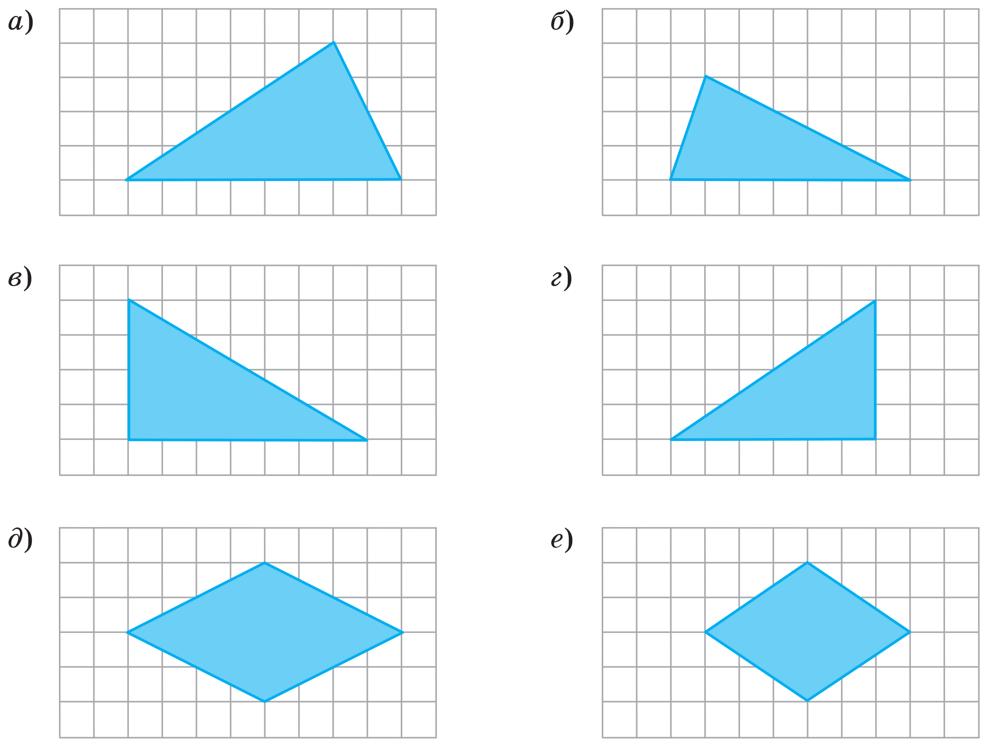


Рис. 143

15.2. а) Площадь треугольника равна 45 см^2, а сторона — 10 см. Найдите высоту треугольника, проведенную к данной стороне.

б) Площадь треугольника равна 30 см^2, высота, проведенная к одной из сторон, равна 5 см. Найдите длину этой стороны.

15.3. По данным рисунков 144, *а*), *б*) найдите площадь треугольника ABC.

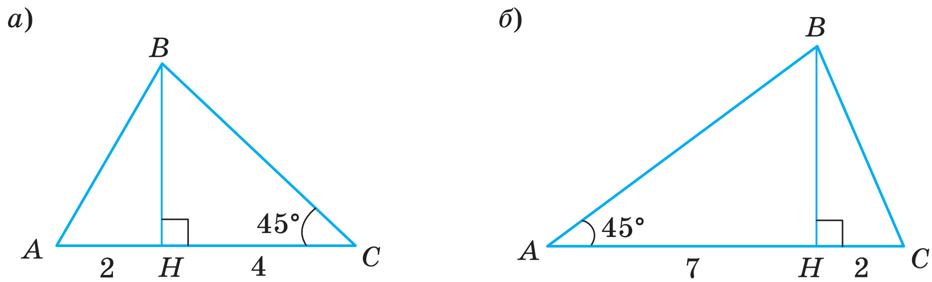


Рис. 144

15.4. а) На рисунке 145 изображен выпуклый четырехугольник $MNEF$, у которого стороны $MN = NE$, $MF = FE$, диагонали взаимно перпендикулярны, O — точка пересечения диагоналей, $MO = 5$ см, $NO = 2$ см, $\angle MEF = 45°$. Найдите площадь четырехугольника $MNEF$.

б) На рисунке 146 изображен выпуклый четырехугольник $KLMN$, у которого стороны $KL = LM$, $MN = KN$, диагонали взаимно перпендикулярны, O — точка пересечения диагоналей, $MO = 4$ см, $LO = 2$ см, $\angle MKN = 45°$. Найдите площадь четырехугольника $KLMN$.

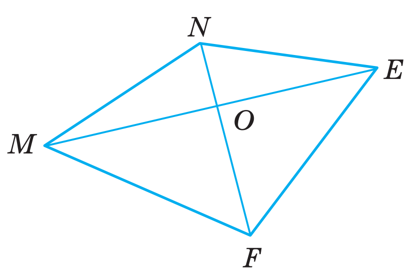


Рис. 145

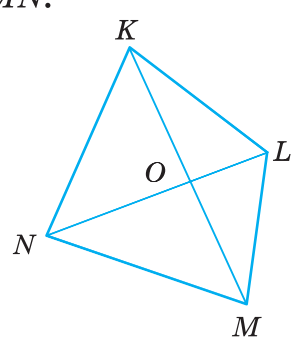


Рис. 146

15.5. а) Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 7 см и 10 см.

б) Найдите длину второй диагонали ромба, площадь которого равна 120 см^2, а одна из диагоналей — 10 см.

15.6. а) Диагонали ромба площадью 168 см^2 относятся как 3 : 7. Найдите длину большей диагонали ромба.

б) Разность длин диагоналей ромба равна 9 см, а площадь ромба — 126 см^2. Найдите длину меньшей диагонали ромба.

15.7. а) Изобразите на координатной плоскости треугольник, вершины которого имеют координаты (0; 7), (0; −7), (−4; 0). Постройте треугольник, симметричный данному относительно оси ординат. Найдите площадь полученного четырехугольника.

б) Изобразите на координатной плоскости треугольник, вершины которого имеют координаты (0; 7), (−6; 0), (6; 0). Постройте треугольник, симметричный данному относительно оси абсцисс. Найдите площадь полученного четырехугольника.

§ 16. Теорема Пифагора

16.1. а) В прямоугольном треугольнике ABC катет AC = 12 см, катет BC = 5 см (рис. 147). Найдите гипотенузу AB.

б) В прямоугольном треугольнике ABC (см. рис. 147) катет AC = 15 см, катет BC = = 8 см. Найдите гипотенузу AB.

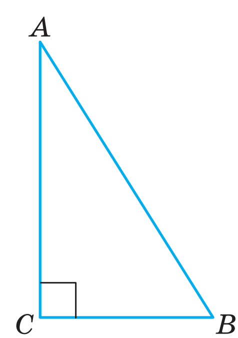


Рис. 147

16.2. а) Катет прямоугольного треугольника равен 24 см, а гипотенуза — 25 см. Найдите площадь треугольника.

б) Катет прямоугольного треугольника равен 15 см, а гипотенуза — 17 см. Найдите периметр треугольника.

16.3. а) Площадь равностороннего треугольника равна $25\sqrt{3}$ см^2. Найдите периметр треугольника.

б) Периметр равностороннего треугольника равен 24 см. Найдите площадь треугольника.

16.4. а) Основание равнобедренного треугольника равно 6 см, боковая сторона — 5 см. Найдите площадь треугольника.

б) Основание равнобедренного треугольника равно 10 см, площадь треугольника равна 60 см^2. Найдите периметр треугольника.

16.5. а) В треугольнике отношение величин углов равно 1 : 2 : 3, а площадь треугольника равна $32\sqrt{3}$ см^2. Найдите длину наибольшей стороны треугольника.

б) В треугольнике отношение величин углов равно 1 : 2 : 3, а площадь треугольника равна $18\sqrt{3}$ см^2. Найдите длину наибольшей стороны треугольника.

16.6. а) Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 20 см и 15 см, BH — высота треугольника ABC (рис. 148). Найдите длину BH.

б) Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 16 см и 12 см, DF — высота треугольника ACD (рис. 149). Найдите длину DF.

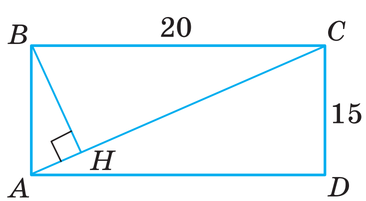


Рис. 148

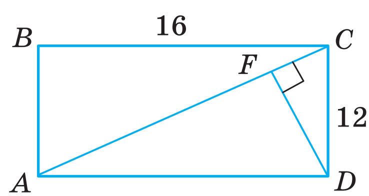


Рис. 149

16.7. а) Катеты прямоугольного треугольника площадью 39 см^2 относятся как 2 : 3. Найдите длину высоты треугольника, проведенной из вершины прямого угла.

б) Катеты прямоугольного треугольника площадью 34 см^2 относятся как $1 : 4$. Найдите длину высоты треугольника, проведенной из вершины прямого угла.

16.8. а) В треугольнике ABC биссектриса угла A делит сторону BC на два равных отрезка длиной 15 см. Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен 64 см.

б) В треугольнике ABC медиана, проведенная к стороне AC, является биссектрисой угла B. Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен 98 см, а длина стороны AC на 2 см меньше суммы длин остальных сторон.

16.9. а) Площадь равностороннего треугольника равна $12\sqrt{3}$ см^2. Найдите длину биссектрисы треугольника.

б) Площадь равностороннего треугольника равна $3\sqrt{3}$ см^2. Найдите длину медианы треугольника.

16.10. а) Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна 4 см, высота, проведенная к основанию, равна $\sqrt{7}$ см. Найдите площадь треугольника.

б) Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна 6 см, высота, проведенная к основанию, равна $\sqrt{11}$ см. Найдите площадь треугольника.

16.11. а) Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 18 см, а угол при основании равен $30°$.

б) Найдите площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно 12 см, а угол при основании равен $30°$.

16.12. а) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 8 см, его периметр равен 30 см. Найдите площадь треугольника.

б) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 9 см, его периметр равен 34 см. Найдите площадь треугольника.

16.13. а) Сторона прямоугольника равна 11 мм, а диагональ — 61 мм. Найдите площадь прямоугольника и выразите ее в квадратных сантиметрах.

б) Сторона прямоугольника равна 9 мм, а диагональ — 41 мм. Найдите площадь прямоугольника и выразите ее в квадратных сантиметрах.

16.14. а) В параллелограмме $ABCD$ $AB = 7$ см, $BC = 25$ см, диагональ BD перпендикулярна стороне CD. Найдите площадь параллелограмма.

б) В параллелограмме $ABCD$ $AB = 8$ см, $BC = 17$ см, диагональ AC перпендикулярна стороне CD. Найдите площадь параллелограмма.

16.15. а) Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 6 см, 8 см и $2\sqrt{7}$ см.

б) Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 5 см, 7 см и $2\sqrt{6}$ см.

16.16. а) Острый угол ромба равен $60°$, меньшая диагональ равна 10 см. Найдите площадь ромба.

б) Острый угол ромба равен $60°$, меньшая диагональ равна 12 см. Найдите площадь ромба.

16.17. а) Стороны треугольника равны $(a + 3)$ см, $(a + 4)$ см и $(2a - 13)$ см. Периметр треугольника равен 30 см. Найдите площадь треугольника.

б) Стороны треугольника равны $(a + 3)$ см, $3a$ см и $(3a + 2)$ см. Периметр треугольника равен 40 см. Найдите площадь треугольника.

16.18. а) Найдите длину высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, если катеты треугольника равны $\left(7 + \sqrt{15}\right)$ см и $\left(7 - \sqrt{15}\right)$ см.

б) Найдите длину высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, если катеты треугольника равны $\left(5+\sqrt{11}\right)$ см и $\left(5-\sqrt{11}\right)$ см.

16.19. а) Найдите площадь ромба, если его периметр равен 72 см, а острый угол — 45°.

б) Найдите площадь ромба, если его периметр равен 88 см, а острый угол — 45°.

16.20. а) Диагональ квадрата равна 10 см. Найдите площадь квадрата.

б) Площадь квадрата равна 200 см^2. Найдите длину диагонали квадрата.

16.21. а) В прямоугольный равнобедренный треугольник вписан квадрат так, что на гипотенузе лежат две его вершины и на каждом катете лежит по одной вершине квадрата. Найдите площадь треугольника, если площадь квадрата равна 144 см^2.

б) В прямоугольный равнобедренный треугольник вписан квадрат так, что на гипотенузе лежат две его вершины и на каждом катете лежит по одной вершине квадрата. Найдите площадь треугольника, если площадь квадрата равна 196 см^2.

16.22. а) Площадь квадрата равна $\left(12-8\sqrt{2}\right)$ см^2. Найдите сумму длин стороны и диагонали квадрата.

б) Площадь квадрата равна $\left(27+18\sqrt{2}\right)$ см^2. Найдите разность длин диагонали и стороны квадрата.

16.23. В прямоугольный треугольник с острым углом 30° вписан квадрат так, что на гипотенузе лежат две его вершины и на каждом катете лежит по одной вершине квадрата. Найдите площадь треугольника, если площадь квадрата равна 144 см^2.

§ 17. Площадь трапеции

17.1. Найдите площадь трапеци (рис. 150, *а*)—*г*)), если размер одной клетки 1×1 см.

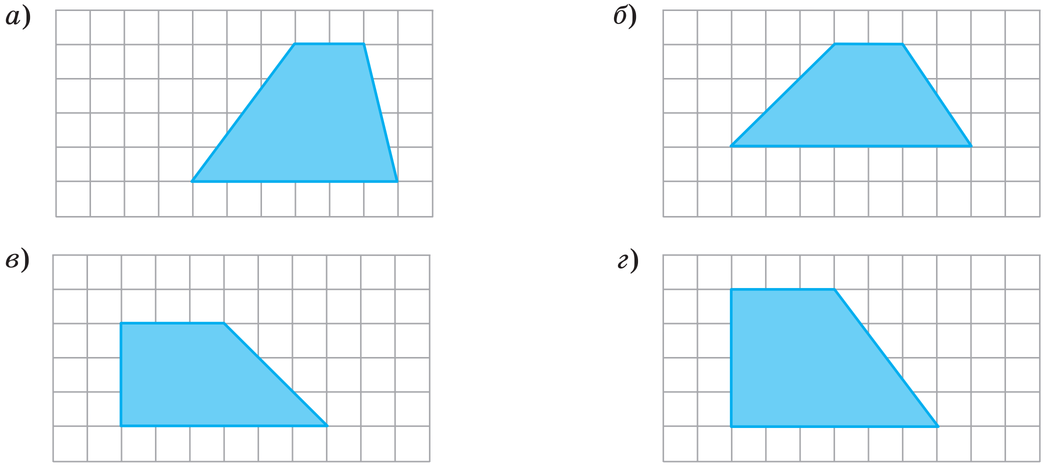


Рис. 150

17.2. а) Боковые стороны трапеции равны 4 см и 7 см, а высота — 3 см. Найдите площадь трапеции, если ее периметр равен 29 см.

б) Средняя линии трапеции равна 9 см, а высота — 2 см. Найдите площадь трапеции.

17.3. а) Длины оснований трапеции находятся в отношении $2 : 5$, высота трапеции равна 9 см, разность длин оснований трапеции равна 18 см. Найдите площадь трапеции.

б) Длины оснований трапеции находятся в отношении $3 : 7$, высота трапеции равна 11 см. Найдите разность длин оснований трапеции, если ее площадь равна 165 см^2.

17.4. а) Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны 19 см и 9 см, а боковая сторона равна 13 см.

б) Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой меньшее основание равно 12 см, боковая сторона равна 17 см, а высота — 15 см.

17.5. а) Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 15 см и 8 см, а бо́льшая боковая сторона — 25 см.

б) Найдите площадь прямоугольной трапеции, средняя линия которой равна 13 см, а меньшая боковая сторона — 5 см.

17.6. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой средняя линия равна большей боковой стороне и равна 10 см, а разность оснований — 6 см.

17.7. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 10 см и 16 см. Найдите площадь трапеции.

17.8. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 10 см и 16 см.

17.9. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее средняя линия равна 18 см.

17.10. а) Площадь равнобедренной трапеции равна $12\sqrt{3}$ см^2, длина одного основания в 2 раза больше длины другого. Диагональ трапеции является биссектрисой острого угла. Найдите периметр трапеции.

б) Периметр равнобедренной трапеции равен 30 см, длина одного основания в 2 раза меньше длины другого. Диагональ трапеции является биссектрисой острого угла. Найдите площадь трапеции.

17.11. Найдите периметр прямоугольной трапеции, площадь которой равна 576 см^2, большее основание — 30 см, а высота — 24 см.

17.12. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 14 см и 15 см, а диагонали — 20 см и 21 см.

§ 18. Задачи по теме «Площади многоугольников»

18.1. По данным рисунков 151, 1)—6) найдите фигуру, площадь которой:

а) наибольшая; б) наименьшая,

и укажите значение этой площади. Размер одной клетки 1×1 см.

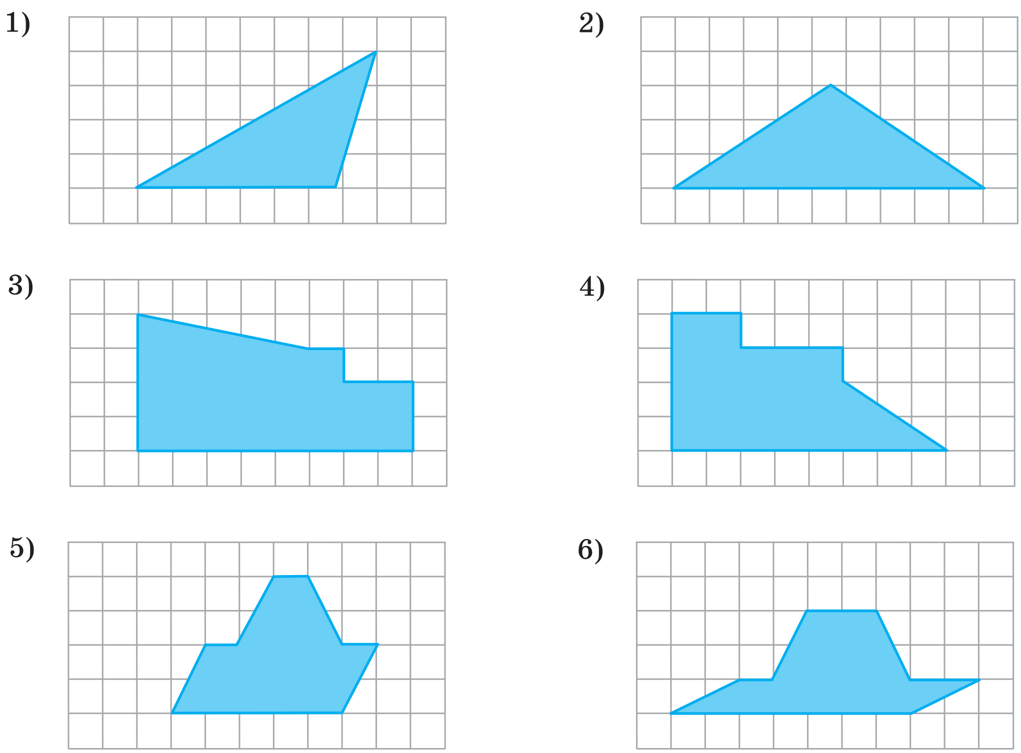


Рис. 151

18.2. а) Найдите площадь прямоугольного треугольника, катет которого равен 24 см, а гипотенуза — 26 см.

б) Найдите площадь прямоугольного треугольника, катет которого равен 16 см, а гипотенуза — 34 см.

18.3. а) В прямоугольном треугольнике отношение длин катетов равно 2 : 5, а площадь треугольника равна 20 см^2. Найдите длину гипотенузы данного треугольника.

б) В прямоугольном треугольнике отношение длин катетов равно 2 : 3, а площадь треугольника равна 12 см^2. Найдите длину гипотенузы данного треугольника.

18.4. а) Диагональ прямоугольника равна 12 см, угол между диагональю и стороной прямоугольника равен 30°. Найдите периметр и площадь прямоугольника.

б) Диагональ прямоугольника равна 18 см, угол между диагональю и стороной прямоугольника равен 60°. Найдите периметр и площадь прямоугольника.

18.5. а) В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что одна вершина прямоугольника лежит на гипотенузе и один угол у фигур общий. Найдите периметр прямоугольника, если площадь треугольника равна 18 см^2.

б) В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что одна вершина прямоугольника лежит на гипотенузе и один угол у фигур общий. Найдите площадь треугольника, если периметр прямоугольника равен 32 см.

18.6. а) Найдите площадь треугольника, периметр которого равен 24 см, а стороны равны $(a + 1)$ см, $(a + 3)$ см и $2a$ см.

б) Найдите площадь треугольника, периметр которого равен 40 см, а стороны равны $(a + 1)$ см, $(2a + 1)$ см и $(2a + 3)$ см.

18.7. а) В прямоугольном треугольнике с гипотенузой $\sqrt{65}$ см отношение длин катетов равно 2 : 3. Найдите длину медианы, проведенной к меньшему катету данного треугольника.

б) В прямоугольном треугольнике с гипотенузой $\sqrt{34}$ см отношение длин катетов равно 1 : 4. Найдите длину медианы, проведенной к большему катету данного треугольника.

18.8. а) Боковая сторона равнобедренного треугольника имеет длину 4 см, а биссектриса, проведенная к основанию треугольника, равна $\sqrt{7}$ см. Найдите площадь треугольника.

б) Боковая сторона равнобедренного треугольника имеет длину 3 см, а медиана, проведенная к основанию треугольника, равна $\sqrt{5}$ см. Найдите площадь треугольника.

18.9. а) Найдите периметр равностороннего треугольника, площадь которого равна $25\sqrt{3}$ см^2.

б) Найдите периметр равностороннего треугольника, площадь которого равна $9\sqrt{3}$ см^2.

18.10. а) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 12 см, угол при основании равен 30°. Найдите площадь треугольника.

б) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, угол при основании равен 30°. Найдите площадь треугольника.

18.11. а) Основание равнобедренного треугольника равно 16 см, угол при основании равен 45°. Найдите площадь треугольника.

б) Основание равнобедренного треугольника равно 14 см, угол при основании равен 45°. Найдите площадь треугольника.

18.12. а) Основание равнобедренного треугольника равно 8 см, а биссектриса, проведенная к основанию, равна 9 см. Найдите длину высоты, проведенной к боковой стороне треугольника.

б) Основание равнобедренного треугольника равно 10 см, а биссектриса, проведенная к основанию, равна 8 см. Найдите длину высоты, проведенной к боковой стороне треугольника.

18.13. а) Найдите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны $(x - 1)$ см и $4x$ см, а гипотенуза — $(5x - 9)$ см.

б) Найдите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны $(x + 2)$ см и $(3x + 5)$ см, а гипотенуза — $(3x + 7)$ см.

18.14. а) На рисунке 152 изображен выпуклый четырехугольник $MNEF$, у которого стороны $MN = NE = EF = 13$ см. Диагональ NF длиной 10 см перпендикулярна стороне MN. Найдите площадь четырехугольника $MNEF$.

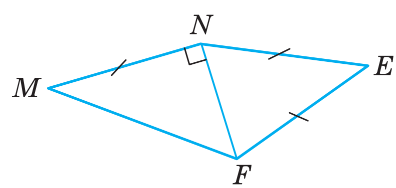


Рис. 152

б) На рисунке 153 изображен выпуклый четырехугольник $KLMN$, у которого стороны $KL = LM = MN = 17$ см. Диагональ LN длиной 16 см перпендикулярна стороне KL. Найдите площадь четырехугольника $KLMN$.

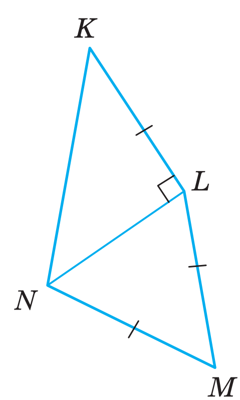


Рис. 153

18.15. Найдите длину боковой стороны равнобедренного треугольника с углом при основании 15°, площадь которого равна 1 см^2.

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 19. Обобщенная теорема Фалеса

19.1. а) На рисунке 154 $CD \parallel BE$, $AC = 6$ см, $AD = 5$ см, $CB = 30$ см. Найдите длину отрезка AE.

б) На рисунке 155 $CD \parallel BE$, $AC = 6$ см, $AD = 7$ см, $DE = 21$ см. Найдите длину отрезка AB.

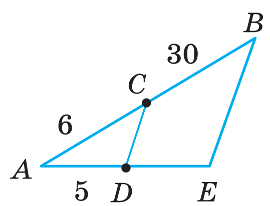


Рис. 154

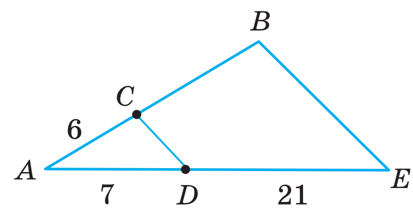


Рис. 155

19.2. а) Точка N делит отрезок AB в отношении $AN : NB = 5 : 6$. Найдите отношение $AN : AB$.

б) Точка K делит отрезок AB в отношении $AK : KB = 7 : 6$. Найдите отношение $AB : KB$.

19.3. а) На рисунке 156 $CD \parallel BE$, $MB = 20$ см, $MC = 12$ см, $MD = 18$ см. Найдите длину отрезка DE.

б) На рисунке 157 $CB \parallel KE$, $AB = 6$ см, $AE = 42$ см, $AC = 4$ см. Найдите длину отрезка AK.

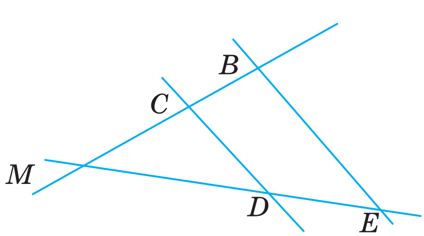


Рис. 156

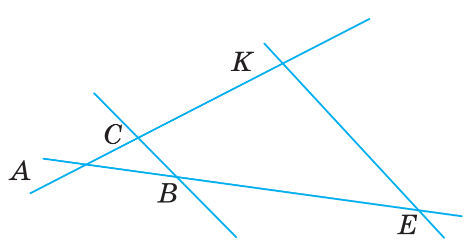


Рис. 157

19.4. По данным рисунков 158, *а*), *б*) найдите градусную меру угла α.

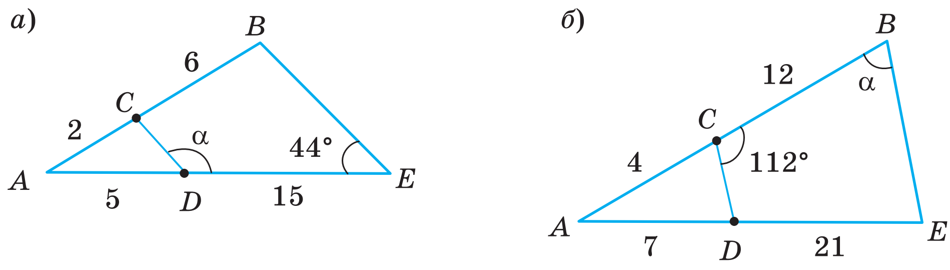


Рис. 158

19.5. По данным рисунков 159, *а*), *б*) найдите значение x.

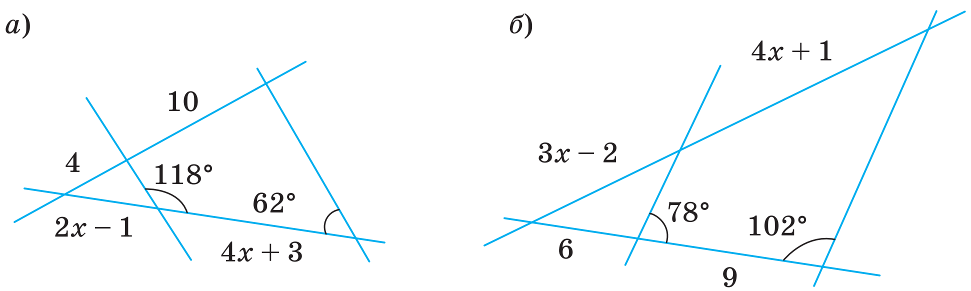


Рис. 159

19.6. Пользуясь данными рисунков 160 *а*), *б*) и учитывая, что $a \parallel b \parallel c$, найдите значение суммы $x + y$.

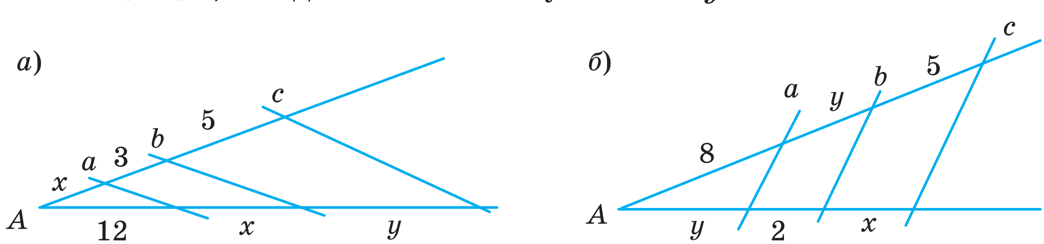


Рис. 160

19.7. а) В треугольнике ABC на стороне AB взята точка X так, что расстояние от точки A до точки X на 3 см больше, чем от точки X до точки B. Через точку X проведена прямая, параллельная стороне AC треугольника и пересекающая сторону BC в точке Y, $BY = 15$ см. Найдите периметр треугольника ABC, если $AB = 21$ см, $AC = 20$ см.

б) В треугольнике ABC на стороне AC взята точка K так, что расстояние от точки A до точки K на 4 см меньше, чем от точки K до точки C. Через точку K проведена прямая, параллельная стороне AB треугольника и пересекающая сторону BC в точке L, $CL = 15$ см. Найдите периметр треугольника ABC, если $AB = 21$ см, $AC = 20$ см.

19.8. а) В трапеции с основаниями 7 см и 34 см боковую сторону разделили на три равных отрезка и через концы отрезков провели прямые, параллельные основаниям. Найдите длины отрезков этих прямых, заключенных внутри трапеции.

б) В трапеции с основаниями 8 см и 35 см боковую сторону разделили на три равных отрезка и через концы отрезков провели прямые, параллельные основаниям. Найдите длины отрезков этих прямых, заключенных внутри трапеции.

19.9. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка M так, что $AM = MB$, а на стороне BC взята точка N так, что $BN : NC = 7 : 3$. Найдите отношение $CO : OM$, где O — точка пересечения прямых CM и AN.

§ 20. Подобие треугольников

20.1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. По данным рисунков 161, *а*), *б*) найдите значение суммы $x + y$.

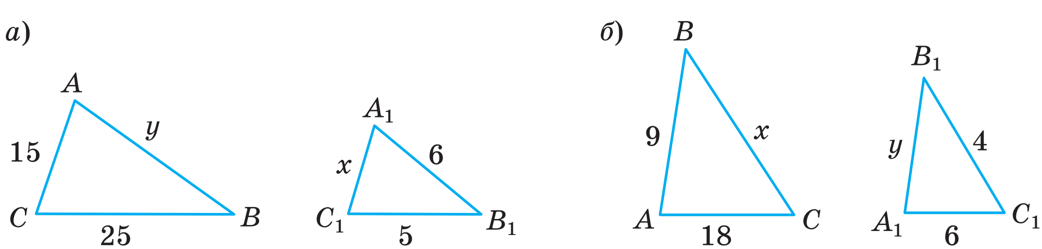


Рис. 161

20.2. Пользуясь данными рисунков 162, *а*), *б*) и учитывая, что $a \parallel b \parallel c$, найдите значение суммы $x + y$.

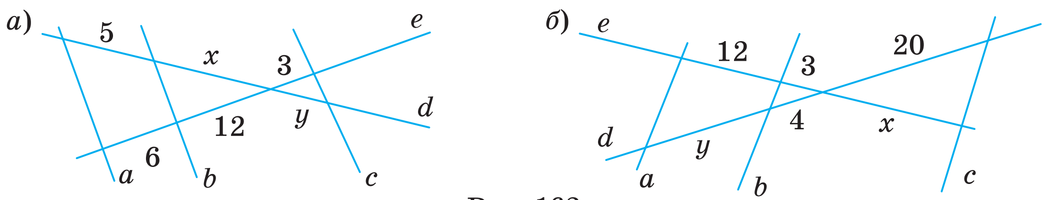


Рис. 162

20.3. а) На рисунке 163 $CD \parallel BE$, $MB = 20$ см, $BE = 16$ см, $CD = 12$ см. Найдите длину отрезка CB.

б) На рисунке 164 $AC \parallel DE$, $AC = 6$ см, $FD = 48$ см, $DE = 36$ см. Найдите длину отрезка AD.

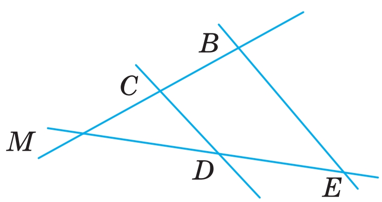


Рис. 163

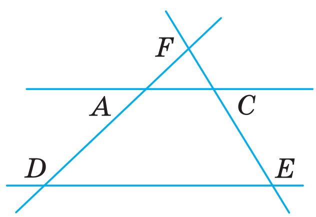


Рис. 164

20.4. а) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Сторона AB равна 8 см, соответствующая ей сторона A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ равна 24 см. Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$, если периметр треугольника ABC равен 17 см.

б) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Сторона AB равна 7 см, соответствующая ей сторона A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ равна 21 см. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника $A_1B_1C_1$ равен 54 см.

20.5. а) Даны два подобных равнобедренных треугольника. Две стороны одного из них равны 5 см и 10 см, а периметр второго — 75 см. Найдите длину основания второго треугольника.

б) Даны два подобных равнобедренных треугольника. Две стороны одного из них равны 7 см и 14 см, а периметр второго — 70 см. Найдите длину основания второго треугольника.

20.6. а) В треугольнике ABC на стороне AB взята точка P и на стороне BC взята точка L так, что $AP = 6$ см, $PB = 4$ см, $PL = 12$ см и $\triangle PBL \sim \triangle ABC$. Найдите длину AC.

б) В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M и на стороне BC взята точка N так, что $AM = 3$ см, $MC = 21$ см, $MN = 14$ см и $\triangle MNC \sim \triangle ABC$. Найдите длину AB.

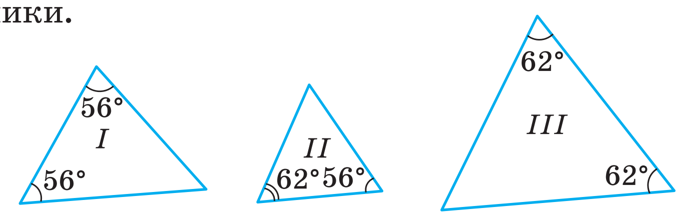
20.7. а) В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 2$ см и $AD = 8$ см найдите длину диагонали AC, если известно, что эта диагональ делит трапецию на два подобных треугольника.

б) В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 3$ см и $AD = 27$ см найдите длину диагонали BD, если известно, что эта диагональ делит трапецию на два подобных треугольника.

§ 21. Признаки подобия треугольников

21.1. По данным рисунков 165, *а*), *б*) найдите подобные треугольники.

а)



б)

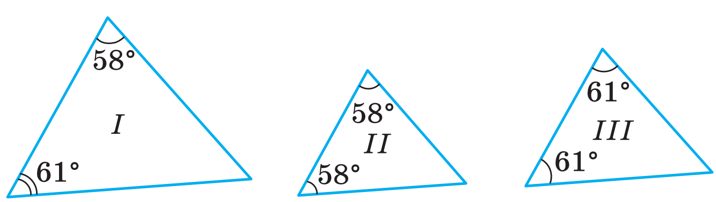


Рис. 165

21.2. По данным рисунков 166, *а*), *б*) найдите периметр треугольника ABC.

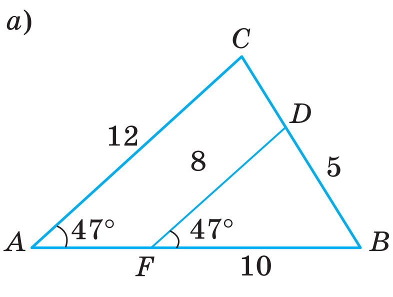


Рис. 166

21.3. Пользуясь данными рисунков 167, *а*), *б*) и учитывая, что $a \parallel b \parallel c$, найдите значение суммы $x + y + z + p$.

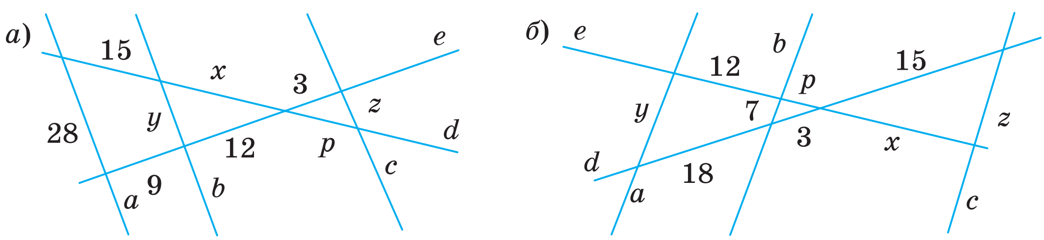


Рис. 167

21.4. а) В треугольнике ABC сторона AB разделена тремя точками на равные отрезки, через эти точки проведены прямые, параллельные стороне BC. Найдите длины отрезков этих прямых, заключенных внутри треугольника, если $BC = 24$ см.

б) В треугольнике ABC сторона BC разделена тремя точками на равные отрезки, через эти точки проведены прямые, параллельные стороне AC. Найдите длины отрезков этих прямых, заключенных внутри треугольника, если $AC = 18$ см.

21.5. а) По данным рисунка 168 найдите длину отрезка AD.

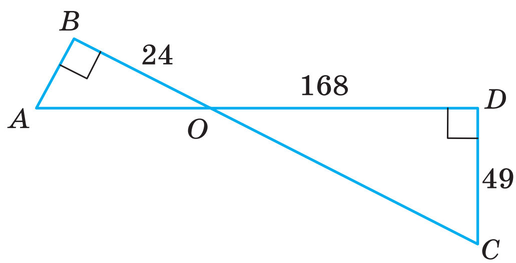


Рис. 168

б) По данным рисунка 169 найдите длину отрезка BD.

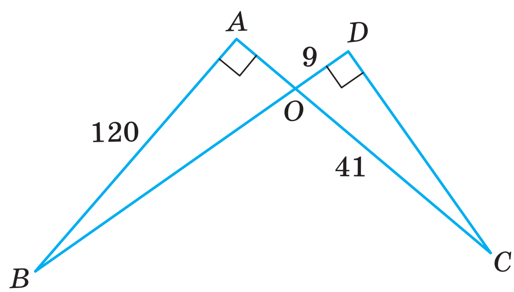


Рис. 169

21.6. а) В прямоугольном треугольнике высота делит гипотенузу на отрезки 18 см и 32 см. Найдите площадь треугольника.

б) В прямоугольном треугольнике высота делит гипотенузу на отрезки 8 см и 18 см. Найдите площадь треугольника.

21.7. Вершины квадрата лежат на сторонах ромба, а стороны квадрата параллельны диагоналям ромба. Найдите периметр квадрата, если диагонали ромба равны:

а) 8 см и 10 см;

б) 10 см и 12 см.

21.8. а) В трапеции $ABCD$ основание $BC = 10$ см, а основание $AD = 30$ см. Диагонали трапеции пересекаются в точке O, причем $OC = 6$ см. Найдите длину AC.

б) В трапеции $ABCD$ основание $BC = 15$ см, а основание $AD = 30$ см. Диагонали трапеции пересекаются в точке O, причем $OD = 12$ см. Найдите длину BD.

21.9. а) В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание $BC = 17$ см, а основание $AD = 34$ см. Диагонали трапеции пересекаются в точке O, причем $OD = 14$ см. Найдите длину AC.

б) В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание $BC = 11$ см, а основание $AD = 33$ см. Диагонали трапеции пересекаются в точке O, причем $OC = 8$ см. Найдите длину BD.

21.10. а) В треугольнике ABC медиана BM делится точкой K в отношении $BK : BM = 2 : 3$. Площадь треугольника AKB равна 30 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

б) В треугольнике ABC медиана CN делится точкой P в отношении $2 : 3$, считая от вершины C. Площадь треугольника BPN равна 12 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

21.11. а) В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $P_{\triangle AOD} = 5P_{\triangle BOC}$. Средняя линия трапеции равна 15 см. Найдите расстояние между серединами диагоналей трапеции.

б) В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $P_{\triangle AOD} = 4P_{\triangle BOC}$. Средняя линия трапеции равна 15 см. Найдите расстояние между серединами диагоналей трапеции.

21.12. а) В треугольник с основанием 10 см и высотой 8 см вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите периметр этого прямоугольника.

б) В треугольник с основанием 20 см и высотой 10 см вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите периметр этого прямоугольника.

§ 22. Свойство биссектрисы угла треугольника

22.1. По данным рисунков 170, *а*) — *г*) найдите значение x.

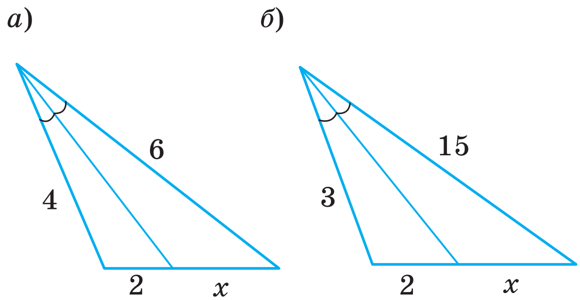


Рис. 170

22.2. а) В треугольнике ABC проведена высота AH. Биссектриса угла B делит высоту AH в отношении $17 : 8$, считая от точки A. Найдите длину высоты AH, если $AB = 34$ см.

б) В треугольнике ABC проведена высота BH. Биссектриса угла A делит высоту BH в отношении $13 : 5$, считая от точки B. Найдите длину высоты BH, если $AB = 26$ см.

22.3. а) BK — биссектриса треугольника ABC, его стороны AB и BC равны 5 см и 7 см соответственно, площадь треугольника BKC равна $\sqrt{6}$ см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

б) AN — биссектриса треугольника ABC, его стороны AB и AC равны 7 см и 9 см соответственно, площадь треугольника ABN равна $3\sqrt{5}$ см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

22.4. а) Диагональ ромба делит его высоту, проведенную из вершины тупого угла, на отрезки длинами 26 см и 10 см. Найдите площадь части ромба, заключенной между двумя высотами ромба, опущенными из вершины одного и того же тупого угла.

б) Диагональ ромба делит его высоту, проведенную из вершины тупого угла, на отрезки длинами 34 см и 16 см. Найдите площадь части ромба, заключенной между двумя высотами ромба, опущенными из вершины одного и того же тупого угла.

22.5. а) В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит одну из медиан на отрезки 5 см и 2 см. Найдите площадь треугольника.

б) В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит одну из медиан на отрезки 4 см и 5 см. Найдите площадь треугольника.

22.6. а) Боковые стороны трапеции равны большему основанию, а диагонали делятся точкой пересечения в отношении 11 : 25. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 24 см.

б) Боковые стороны трапеции равны меньшему основанию, а диагонали делятся точкой пересечения в отношении 17 : 33. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 15 см.

§ 23. Свойство площадей подобных треугольников

23.1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. По данным рисунков 171, *а*), *б*) найдите значение суммы $x + y$.

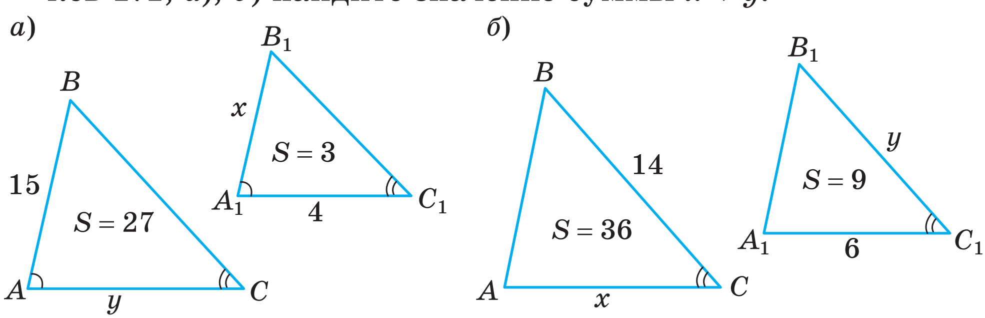


Рис. 171

23.2. В треугольнике ABC проведена прямая, параллельная стороне BC. Она разделяет этот треугольник на два многоугольника с равными площадями. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри треугольника, если длина стороны BC равна 12 см.

23.3. а) Периметры двух подобных треугольников относятся как 3 : 2. Площадь меньшего треугольника равна 36 см^2. Найдите площадь большего треугольника.

б) Периметры двух подобных треугольников относятся как 5 : 3. Площадь большего треугольника равна 225 см^2. Найдите площадь меньшего треугольника.

23.4. а) Площади двух подобных треугольников относятся как 9 : 4. Периметр меньшего треугольника равен 72 см. Найдите периметр большего треугольника.

б) Площади двух подобных треугольников относятся как 16 : 9. Периметр большего треугольника равен 144 см. Найдите периметр меньшего треугольника.

23.5. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Стороны треугольника ABC равны 5 см, 12 см и 13 см. У треугольника $A_1B_1C_1$ известны две стороны: $\frac{6}{13}$ см, $\frac{1}{2}$ см. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

23.6. а) В трапеции $ABCD$ основание BC в 4 раза меньше основания AD, диагонали пересекаются в точке O. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника COD равна 12 см^2.

б) В трапеции $ABCD$ основание AD в 5 раз больше основания BC, диагонали пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABO, если площадь трапеции равна 108 см^2.

23.7. а) Известно, что в трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали пересекаются в точке O так, что $AO : OC = 4 : 3$. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника BOC равна 18 см^2.

б) Известно, что в трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали пересекаются в точке O так, что $BO : OD = 3 : 5$. Найдите площадь треугольника AOD, если площадь трапеции равна 256 см^2.

§ 24. Задачи по теме «Подобие треугольников»

24.1. а) Отношение периметров двух квадратов равно $\frac{1}{7}$, а сумма их площадей равна 200 см^2. Найдите стороны квадратов.

б) Отношение площадей двух квадратов равно $\frac{1}{9}$, а сумма их периметров равна 64 см. Найдите стороны квадратов.

24.2. Треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$, а треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия 4. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_2B_2C_2$ равна 288.

24.3. а) В трапеции $ABCD$ AD и BC — основания, O — точка пересечения диагоналей. Площадь треугольника AOD равна 288 см^2, $BC : AD = 3 : 4$. Найдите площадь трапеции.

б) В трапеции $ABCD$ AD и BC — основания, O — точка пересечения диагоналей. Площадь треугольника BOC равна 200 см^2, $BC : AD = 2 : 5$. Найдите площадь трапеции.

ОКРУЖНОСТЬ

§ 25. Касательная к окружности

25.1. По данным рисунков 172, *а*), *б*) найдите величину угла α между двумя касательными к окружности.

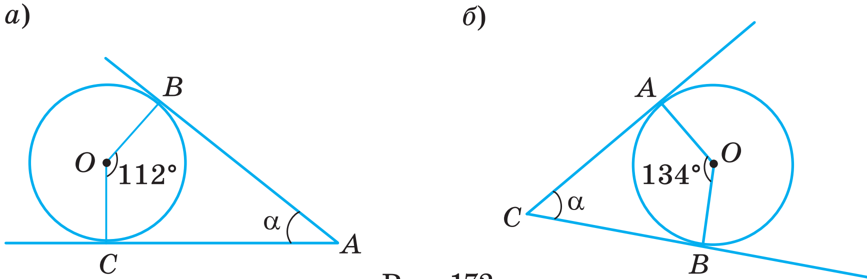


Рис. 172

25.2. По данным рисунков 173, *а*), *б*) найдите величину угла α, если прямые m и n — касательные к окружности.

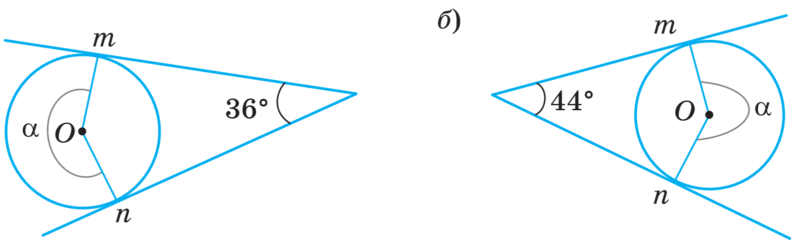


Рис. 173

25.3. Окружность касается сторон угла A в точках B и C. Пользуясь данными рисунков 174, *а*), *б*), найдите величину угла A.

а) $\angle BCO = 17°$ *б*) $\angle CBO = 16°$

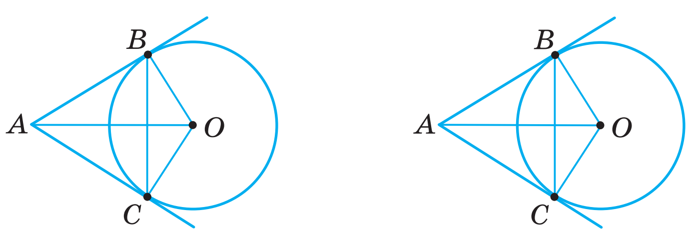


Рис. 174

25.4. а) Окружность радиусом 10 см касается сторон угла A. Найдите расстояние от центра окружности до вершины A, если $\angle A = 120°$.

б) Окружность радиусом 12 см касается сторон угла B. Найдите расстояние от вершины B до точки касания, если $\angle B = 60°$.

25.5. а) Окружность касается сторон угла $\angle C = 90°$. Найдите расстояние от вершины C до точки касания, если расстояние от точки C до центра окружности равно 12 см.

б) Окружность радиусом 8 см касается сторон угла D. Найдите расстояние от центра окружности до вершины D, если $\angle D = 90°$.

25.6. Прямая AB — касательная к окружности. По данным рисунков 175, *а*), *б*) найдите величину угла α.

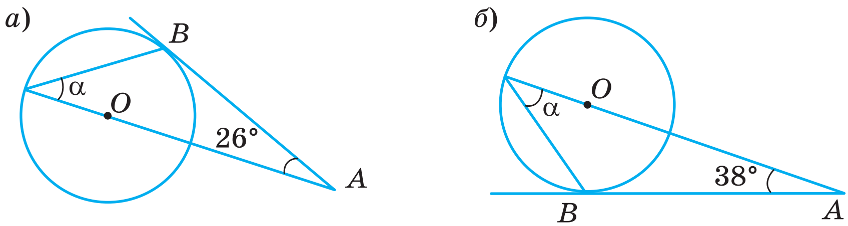


Рис. 175

25.7. а) Окружности радиусами 3 см и 5 см лежат в разных полуплоскостях от прямой l и касаются этой прямой. Отрезок, соединяющий центры окружностей, пересекает прямую l под углом 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей.

б) Окружности радиусами 7 см и 9 см лежат в разных полуплоскостях от прямой m и касаются этой прямой. Отрезок, соединяющий центры окружностей, пересекает прямую m под углом 30°. Найдите расстояние между точками касания.

25.8. Окружность касается катетов прямоугольного треугольника, центр окружности лежит на гипотенузе (рис. 176). Докажите, что радиус окружности можно найти по формуле $\frac{ab}{a+b}$, где a и b — катеты прямоугольного треугольника.

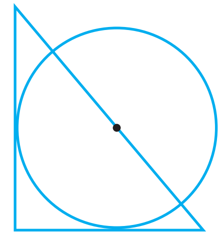


Рис. 176

§ 26. Взаимное расположение окружностей

26.1. По данным рисунков 177, *а*), *б*) найдите расстояние O_1K, где O_1 и O_2 — центры окружностей, M — точка касания окружностей, прямая O_1K — касательная к окружности.

а) $O_1M = 3$ см, $O_2M = 4$ см

б) $O_1M = 4$ см, $O_2M = 5$ см

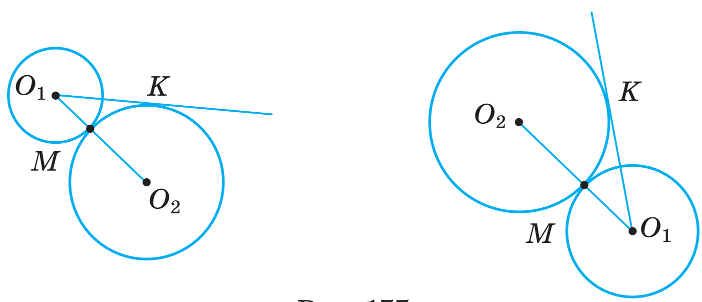


Рис. 177

26.2. а) В угол вписаны две окружности радиусами 8 см и 26 см. Расстояние между центрами окружностей равно 82 см. Найдите расстояние между точками касания, принадлежащими одной и той же стороне угла.

б) В угол вписаны две окружности радиусами 76 см и 26 см. Расстояние между точками касания, принадлежащими одной и той же стороне угла, равно 120 см. Найдите расстояние между центрами окружностей.

26.3. а) К двум окружностям радиусами 5 см и 7 см проведена общая касательная, M и N — точки касания. Расстояние между центрами окружностей равно 14 см. Найдите расстояние MN, рассмотрев все возможные случаи.

б) К двум окружностям радиусами 3 см и 4 см проведена общая касательная, A и B — точки касания, $AB = 7$ см. Найдите расстояние между центрами окружностей, рассмотрев все возможные случаи.

26.4. а) Три окружности, радиусы которых равны 12 см, 8 см и 4 см, попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются центры данных окружностей.

б) Три окружности, радиусы которых равны 2 см, 3 см и 10 см, попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются центры данных окружностей.

§ 27. Центральный и вписанный углы

27.1. По данным рисунков 178, *а*), *б*) найдите величину угла α.

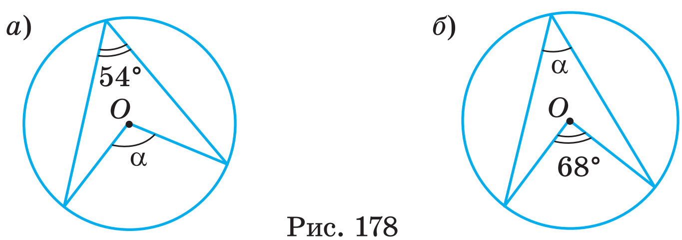


Рис. 178

27.2. По данным рисунков 179, *а*), *б*), учитывая, что AC — диаметр окружности, найдите величину угла BAC.

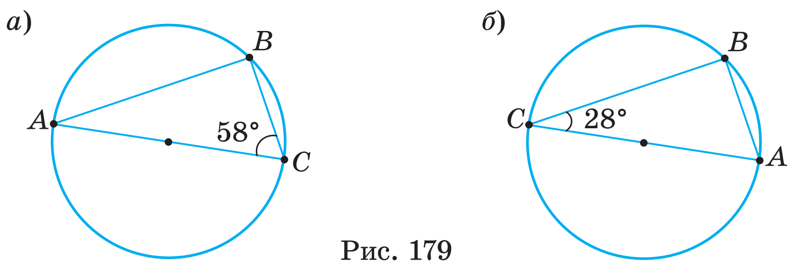


Рис. 179

27.3. По данным рисунков 180, *а*), *б*) найдите величину угла α, учитывая, что прямая m — касательная к окружности.

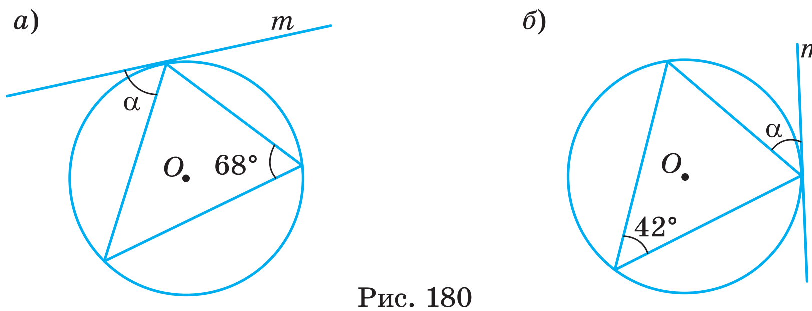


Рис. 180

27.4. а) Радиус окружности равен 12 см. Найдите длину хорды, которая стягивает дугу, содержащую 90°.

б) Длина хорды, которая стягивает дугу, содержащую 60°, равна 10 см. Найдите радиус данной окружности.

27.5. а) Угол ABC, равный 45°, вписан в окружность диаметром 12 см и опирается на дугу AC. Найдите площадь треугольника AOC, где O — центр окружности.

б) Угол MNL, равный 45°, вписан в окружность с центром O и опирается на дугу ML. Площадь треугольника MOL равна 32 см^2. Найдите радиус окружности.

27.6. а) Угол ABC, равный 30°, вписан в окружность радиусом 13 см и опирается на дугу AC. Найдите площадь треугольника AOC, где O — центр окружности.

б) Угол MNL, равный 30°, вписан в окружность и опирается на дугу ML. Площадь треугольника MOL, где O — центр окружности, равна $\frac{121\sqrt{3}}{4}$ см^2. Найдите диаметр окружности.

27.7. а) Расстояние от центра окружности до хорды равно 24 см, радиус окружности равен 25 см. Найдите длину хорды.

б) Найдите расстояние от центра окружности радиусом 13 см до хорды, длина которой равна 10 см.

27.8. а) Центральный угол *AOC* на 22° больше соответствующего вписанного угла *ABC*. Найдите градусную меру вписанного угла *ABC*.

б) Вписанный угол *ABC* на 28° меньше соответствующего центрального угла *AOC*. Найдите градусную меру центрального угла *AOC*.

27.9. По данным рисунков 181, *а*), *б*) найдите градусную меру угла α.

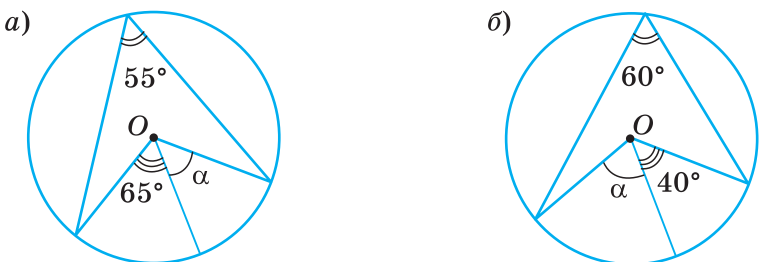


Рис. 181

27.10. По данным рисунков 182, *а*), *б*) найдите сумму градусных мер углов α и β.

а) *m* — касательная, $\angle ABO = 61°$

б) *n* — касательная, $\angle DCO = 57°$

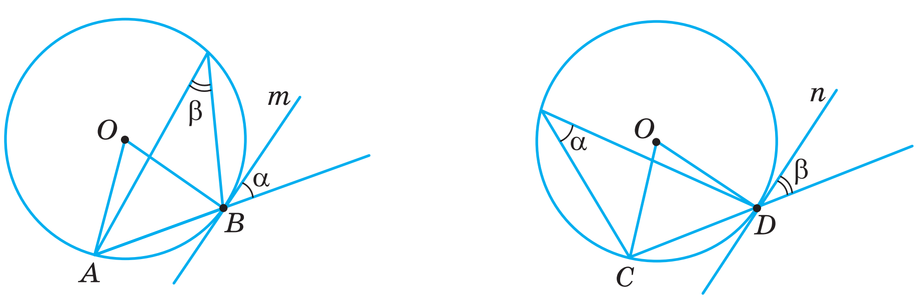


Рис. 182

27.11. а) По данным рисунка 183 найдите градусную меру угла *ACB*, если известно, что $\angle ABO = 72°$.

б) По данным рисунка 184 найдите градусную меру угла BAC, если известно, что $\angle BCO = 68°$.

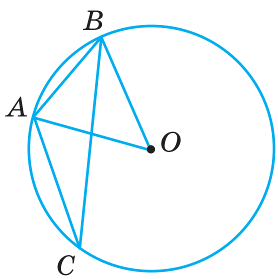


Рис. 183

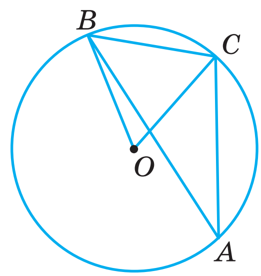


Рис. 184

27.12. а) По данным рисунка 185 найдите градусную меру угла ABC, если известно, что $\angle ABF = 30°$, $\angle BOC = 50°$ и BF — касательная к окружности.

б) По данным рисунка 186 найдите градусную меру угла ACB, если известно, что $\angle ACO = 50°$, $\angle BOC = 56°$ и CE — касательная к окружности.

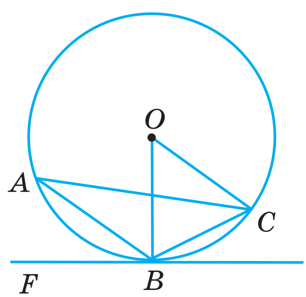


Рис. 185

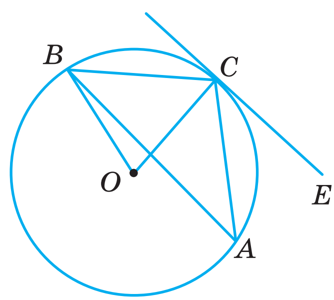


Рис. 186

27.13. а) Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды длинами 5 см и 12 см. Найдите радиус окружности.

б) Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, длина одной из хорд — 7 см, диаметр окружности равен 25 см. Найдите длину второй хорды.

27.14. а) По данным рисунка 187 найдите градусную меру угла ACB, если известно, что $\angle ABC = 51°$, отрезок AC проходит через точку пересечения окружностей и точка O — центр окружности большего радиуса.

б) По данным рисунка 188 найдите градусную меру угла ACB, если известно, что $\angle BAC = 49°$, отрезок BC проходит через точку пересечения окружностей и точка O — центр окружности большего радиуса.

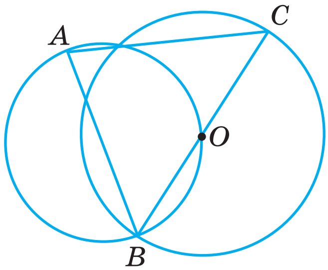


Рис. 187

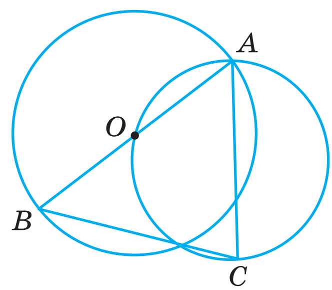


Рис. 188

§ 28. Углы, образованные хордами, секущими и касательными

28.1. а) По данным рисунка 189 найдите градусную меру угла BMC, если $\smile AD = 142°$, $\smile BC = 158°$.

б) По данным рисунка 190 найдите градусную меру угла AMC, если $\smile AC = 41°$, $\smile DB = 29°$.

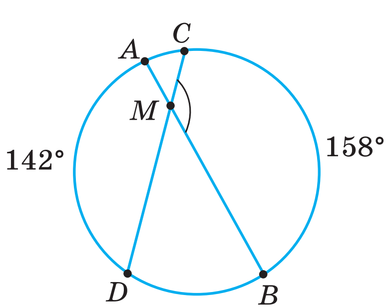


Рис. 189

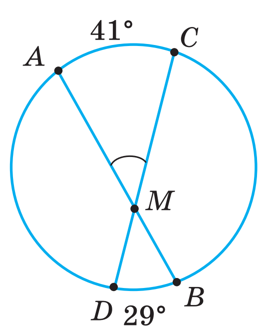


Рис. 190

28.2. а) По данным рисунка 191 найдите градусную меру угла NML, если $\smile NL = 108°$, $\smile PK = 29°$.

б) По данным рисунка 192 найдите градусную меру угла LCK, если $\smile BC = 110°$, $\angle BAC = 22°$.

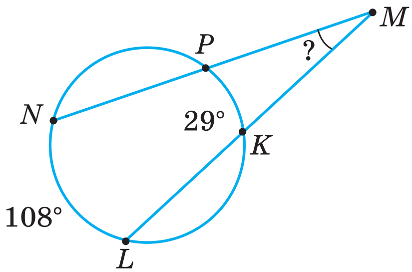


Рис. 191

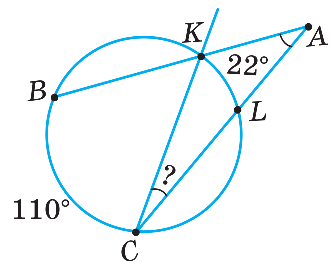


Рис. 192

28.3. По данным рисунков 193, *а*), *б*) найдите градусную меру дуги AB.

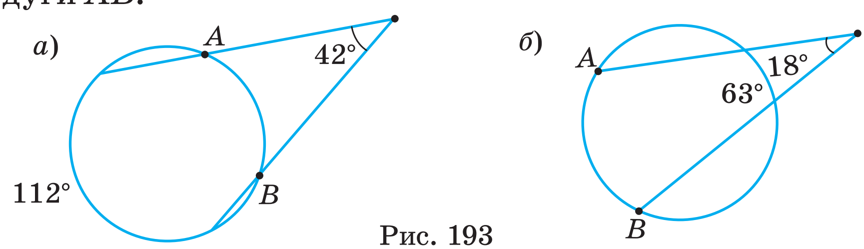


Рис. 193

28.4. По данным рисунков 194, *а*), *б*) найдите величину искомого угла.

а) $\angle ALK = 44°$,
LK — касательная,
$\smile BC = 22°$; $\angle BDC$ — ?

б) $\angle BCD = 38°$,
NK — касательная,
$\smile BD = 28°$; $\angle ANK$ — ?

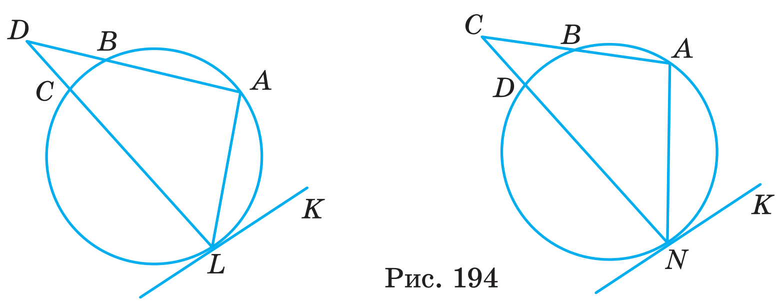


Рис. 194

28.5. а) Вершины треугольника ABC лежат на окружности с центром O. В точке C проведена касательная к окружности, пересекающаяся с прямой AB в точке D. Найдите величину угла ADC, если $\angle ACB = 80°$, $\angle ABC = 70°$.

б) Вершины треугольника MNL лежат на окружности с центром O. В точке L проведена касательная к окружности, пересекающаяся с прямой MN в точке K. Найдите величину угла MKL, если $\angle MON = 140°$, $\angle LON = 160°$.

§ 29. Свойство отрезков хорд и касательных

29.1. а) AK — касательная к окружности (K — точка касания). Найдите AB, если $AK = 6$ см, $BC = 9$ см (рис. 195).

б) NL — касательная к окружности (L — точка касания). Найдите NP, если $NL = 10$ см, $PM = 21$ см (рис. 196).

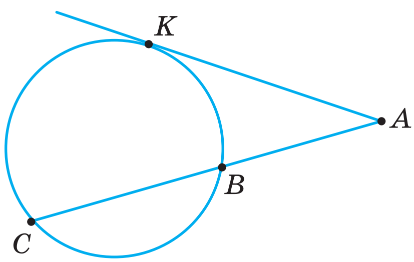


Рис. 195

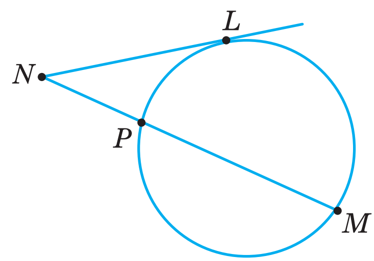


Рис. 196

29.2. По данным рисунков 197, *а*), *б*) найдите радиус окружности.

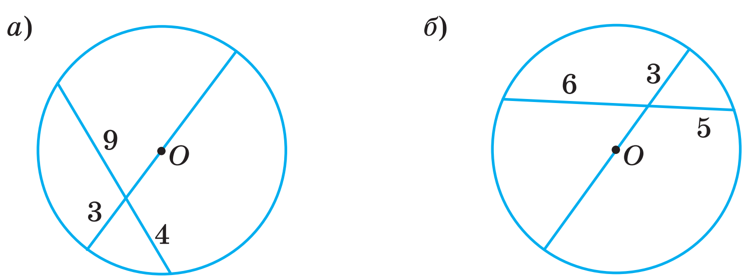


Рис. 197

29.3. По данным рисунков 198, *а*), *б*) найдите значение k.

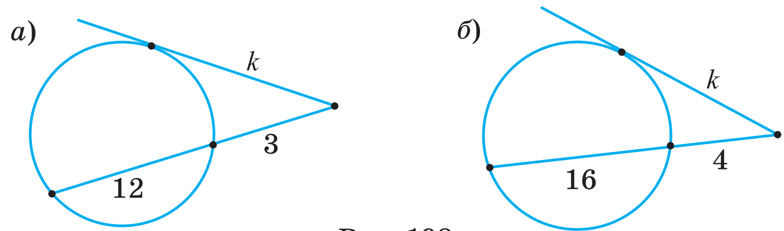


Рис. 198

29.4. По данным рисунков 199, *а*), *б*) найдите значение x.

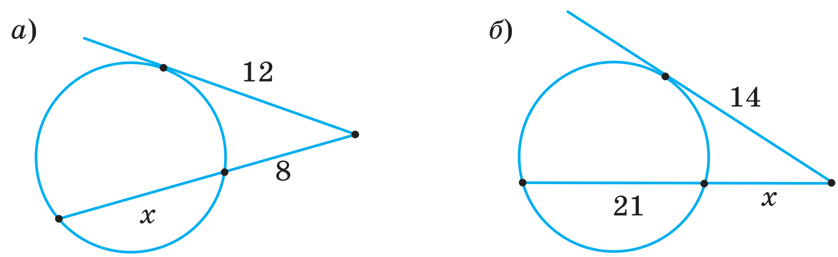


Рис. 199

29.5. По данным рисунков 200, *а*), *б*) найдите значение m.

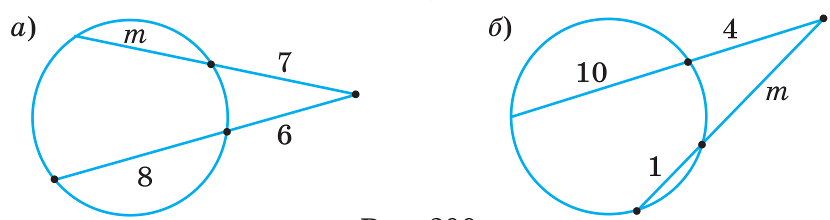


Рис. 200

29.6. По данным рисунков 201, *а*), *б*) найдите значение суммы $x + y$.

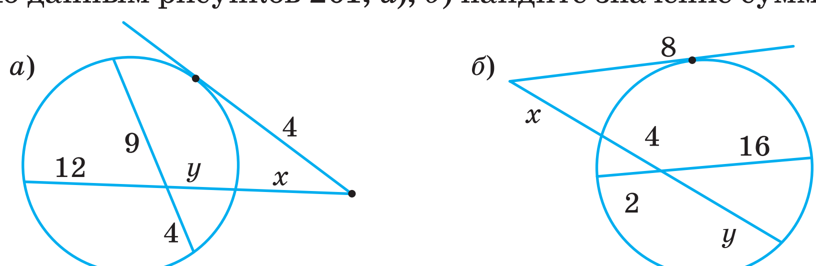


Рис. 201

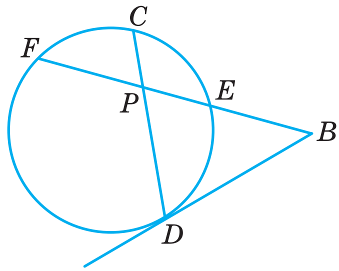


Рис. 202

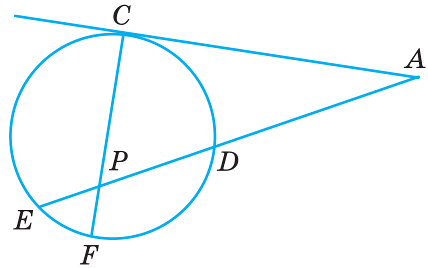


Рис. 203

29.7. а) Из точки B к окружности проведены касательная BD и секущая BF (рис. 202). Из точки касания D проведена хорда CD, пересекающая хорду FE в точке P. Отрезок FP на 2 см больше отрезка PE, $EB = 8$ см, $CP = 2$ см, $PD = 12$ см. Найдите длину отрезка касательной BD.

б) Из точки A к окружности проведены касательная AC и секущая AE (рис. 203). Из точки касания C проведена хорда CF, пересекающая хорду ED в точке P. Отрезок EP на 3 см меньше отрезка PD, $CP = 9$ см, $PF = 2$ см. Найдите длину отрезка AD, если длина отрезка касательной AC равна 20 см.

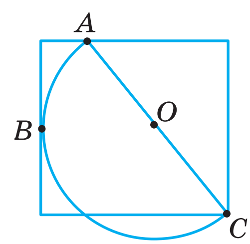


Рис. 204

29.8. Точки A, B и C принадлежат сторонам квадрата, площадь которого равна 100 см^2. Полуокружность диаметром AC касается стороны квадрата в точке B (рис. 204). Найдите длину AC.

9 класс

СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

§ 1. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла

1.1. По данным рисунков 205, *а*)—*е*) найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

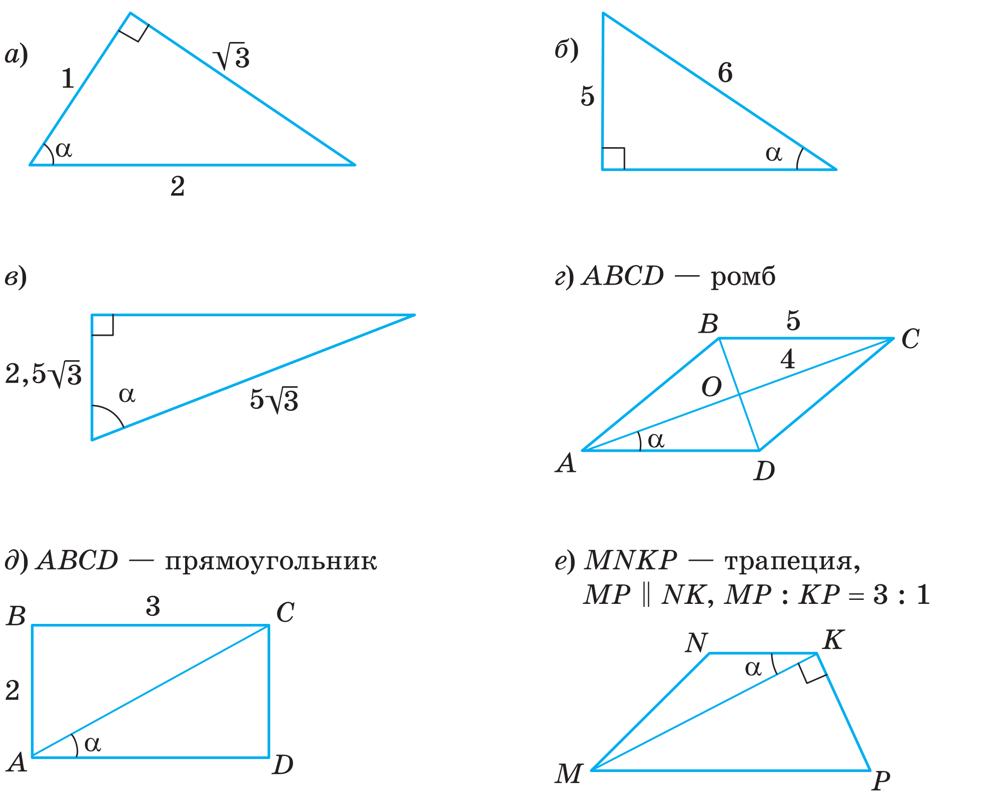


Рис. 205

1.2. а) В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна 1,2 см. Найдите площадь треугольника, если синус одного из острых углов этого треугольника равен $\frac{2}{3}$.

б) В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна 1,4 см. Найдите площадь треугольника, если косинус одного из острых углов этого треугольника равен $\frac{3}{7}$.

1.3. а) Стороны треугольника равны $4\sqrt{3}$ см, $2\sqrt{5}$ см и $2\sqrt{7}$ см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс наименьшего угла треугольника.

б) Стороны треугольника относятся как $1:\sqrt{5}:\sqrt{6}$. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс наименьшего угла треугольника.

1.4. а) Стороны прямоугольника относятся как 5 : 12. Найдите косинус большего острого угла между диагональю прямоугольника и его стороной.

б) Диагональ прямоугольника относится к одной из его сторон как 17 : 8. Найдите косинус меньшего острого угла между диагональю прямоугольника и его стороной.

1.5. а) Докажите, что $\operatorname{tg}15° = 2 - \sqrt{3}$, используя прямоугольный треугольник, один из углов которого равен 30°.

б) Докажите, что $\operatorname{tg}22{,}5° = \sqrt{2} - 1$, используя равнобедренный прямоугольный треугольник.

§ 2. Решение прямоугольного треугольника

2.1. Используя данные рисунков 206, *а*)—*г*), найдите неизвестную величину.

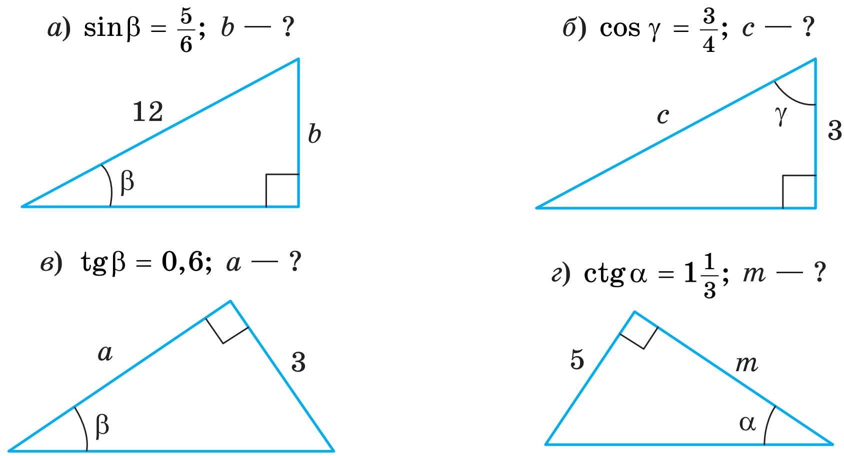


Рис. 206

2.2. Используя данные рисунков 207, *а*)—*в*), найдите длины отрезков a и b.

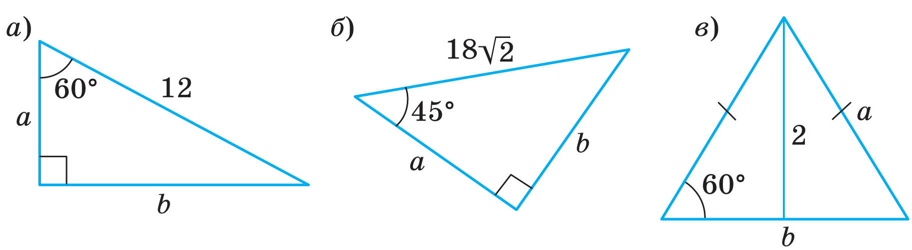


Рис. 207

2.3. а) Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{2}{9}$. Найдите площадь треугольника, если его гипотенуза равна $2\sqrt{85}$ см.

б) Котангенс острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{2}{3}$. Найдите гипотенузу треугольника, если его площадь равна 39 см^2.

2.4. а) Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{4}{3}$, гипотенуза равна 10 см. Найдите медиану треугольника, проведенную из вершины меньшего острого угла.

б) Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{12}{13}$, гипотенуза равна 26 см. Найдите медиану треугольника, проведенную из вершины большего острого угла.

2.5. а) Площадь прямоугольника равна $3\sqrt{3}$ см^2, а его диагональ делит угол прямоугольника в отношении 1 : 2. Найдите периметр прямоугольника.

б) Тангенс одного из острых углов, на которые диагональ прямоугольника делит его угол, равен 0,4. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен $14\sqrt{2}$ см.

2.6. а) В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} \angle A = 1$. Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен $\left(12 + 6\sqrt{2}\right)$ см.

б) В треугольнике MKC $\angle K = 90°$, $\operatorname{ctg} \angle C = 1$. Найдите периметр треугольника MKC, если его площадь равна 25 см^2.

2.7. а) Найдите площадь ромба, если его сторона равна 12 см, а синус острого угла равен $\frac{1}{3}$.

б) Сторона ромба равна 15 см, а его площадь — 45 см^2. Найдите синус острого угла ромба.

2.8. а) Величины двух углов равнобедренного тупоугольного треугольника относятся как 1 : 4. Меньшая высота треугольника равна 2 см. Найдите его бо́льшую высоту.

б) Величины углов треугольника относятся как 1 : 4 : 1. Бо́льшая высота треугольника равна 6 см. Найдите меньшую сторону этого треугольника.

2.9. Внутри равностороннего треугольника ABC взята произвольная точка T, из которой опущены перпендикуляры TH, TE, TK на стороны AB, BC и AC соответственно. Докажите, что $AH + BE + CK = BH + CE + AK$.

2.10. Стороны трапеции относятся как $1 : 1 : 1 : 2$. Докажите, что у этой трапеции острый угол равен $60°$ и диагональ перпендикулярна боковой стороне.

2.11. а) Основания равнобедренной трапеции равны a и b $(b > a)$. Докажите, что площадь трапеции равна $\frac{b^2 - a^2}{4}\operatorname{tg}\beta$, где β — угол при большем основании трапеции.

б) Меньшее основание равнобедренной трапеции равно a, а боковая сторона — c. Докажите, что площадь трапеции равна $\left(ac + c^2 \cdot \cos\gamma\right)\sin\gamma$, где γ — острый угол трапеции.

2.12. В равнобедренной трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями боковая сторона равна m, а острый угол — β. Докажите, что площадь трапеции равна $m^2 \sin^2 \beta$.

2.13. Докажите, что если β и α — острые углы прямоугольного треугольника, то $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sin\beta} \cdot \frac{1}{\sin\alpha}$.

§ 3. Тригонометрические формулы

3.1. а) Пусть α — острый угол и $\sin\alpha = \frac{8}{17}$. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

б) Пусть α — острый угол и $\cos\alpha = \frac{24}{25}$. Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

3.2. а) Выберите верные равенства:

1) $\sin 14° = \cos 14° - 1$;

2) $\cos^2 23°12' = 1 - \sin^2 23°12'$;

3) $\operatorname{tg} 67^\circ \cdot \operatorname{ctg} 65^\circ = 1$;

4) $\cos 88^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 88^\circ}$;

5) $\operatorname{tg} 2^\circ = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} 2^\circ}$.

б) Выберите верные равенства:

1) $\sin^2 19^\circ = 1 - \cos^2 19^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 85^\circ 42' \cdot \operatorname{ctg} 85^\circ 42' = 1$;

3) $\operatorname{tg}^2 6^\circ + \operatorname{ctg}^2 6^\circ = 1$;

4) $\cos 54^\circ 4' = \sqrt{1 - \sin^2 54^\circ}$;

5) $\operatorname{tg} 32^\circ = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} 30^\circ}$.

3.3. а) Найдите отношение меньшего катета прямоугольного треугольника к гипотенузе, если тангенс одного из углов треугольника равен $4\sqrt{5}$.

б) Найдите отношение меньшего катета прямоугольного треугольника к большему, если синус одного из углов треугольника равен $\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$.

3.4. а) Высота ромба равна $10\sqrt{2}$ см, а тангенс острого угла ромба равен $\dfrac{5}{12}$. Найдите периметр ромба.

б) Периметр ромба равен $24\sqrt{5}$ см, найдите высоту ромба, если косинус острого угла ромба равен $\dfrac{2}{3}$.

§ 4. Синус, косинус, тангенс и котангенс тупого угла

4.1. При помощи формул $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ выразите значения тригонометрических функций тупого угла через тригонометрические функции острого угла:

а) $\sin 165°$, $\cos 95°$, $\mathrm{tg}\, 109°$, $\mathrm{ctg}\, 123°$;

б) $\sin 98°$, $\cos 178°$, $\mathrm{tg}\, 101°$, $\mathrm{ctg}\, 145°$.

4.2. Известно, что $\alpha + \beta = 180°$. Найдите угол α и $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если:

а) $\mathrm{ctg}\,\beta = \sqrt{3}$;

б) $\mathrm{ctg}\,\beta = 1$.

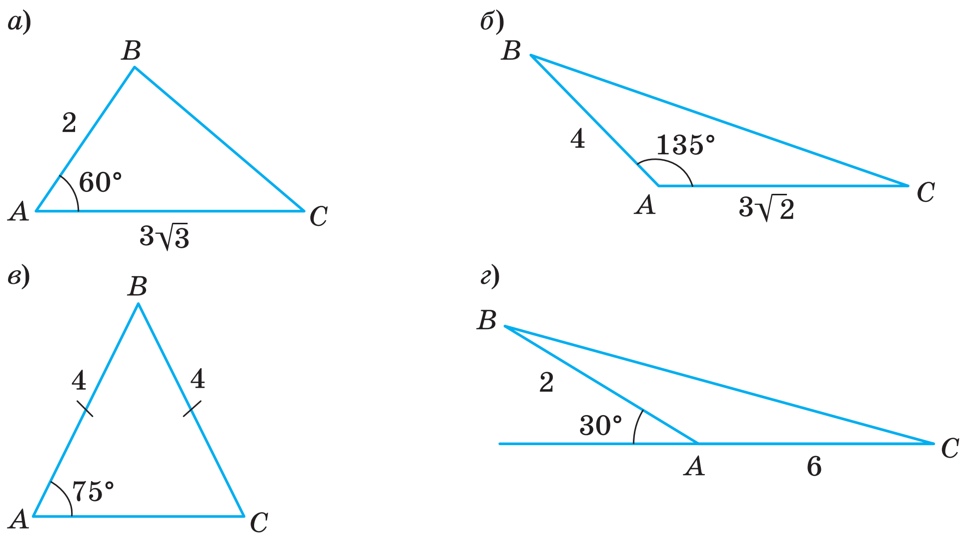
4.3. Вычислите:

а) $\sin 180° + \cos 0° \cdot \cos 180° - \sin 90°$;

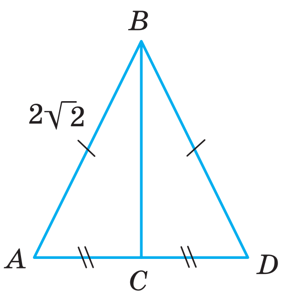
б) $\cos 180° - \sin 90° \cdot \cos 0° - \sin 0°$.

§ 5. Формулы площади треугольника и площади параллелограмма

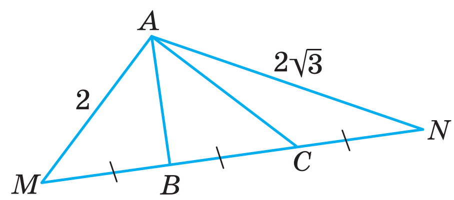
5.1. Найдите площадь треугольника ABC, используя данные рисунков 208, *а*)—*з*).



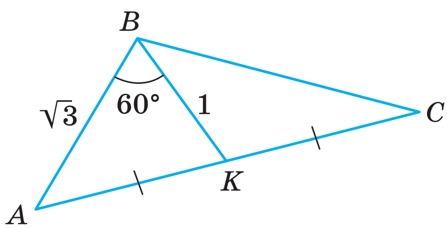
д) $\angle ABD = 45°$



е) $\angle MAN = 120°$



ж)



з) $\sin \angle ABD = \frac{3}{8}$

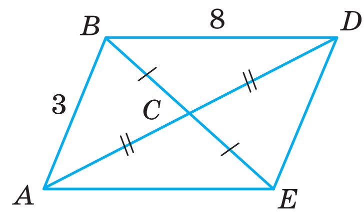


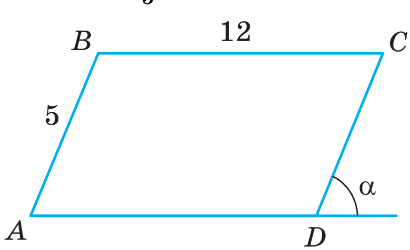
Рис. 208

5.2. а) Две стороны треугольника равны 8 см и 5 см, а косинус угла между ними равен $-0{,}5$. Найдите площадь треугольника.

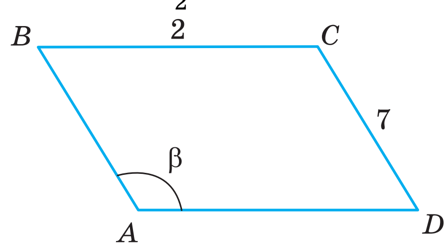
б) Площадь треугольника равна 1,5 см^2, а две его стороны — 2 см и 3 см. Найдите угол между этими сторонами.

5.3. Найдите площадь параллелограмма *ABCD*, используя данные рисунков 209, *а*)—*д*).

а) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$



б) $\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



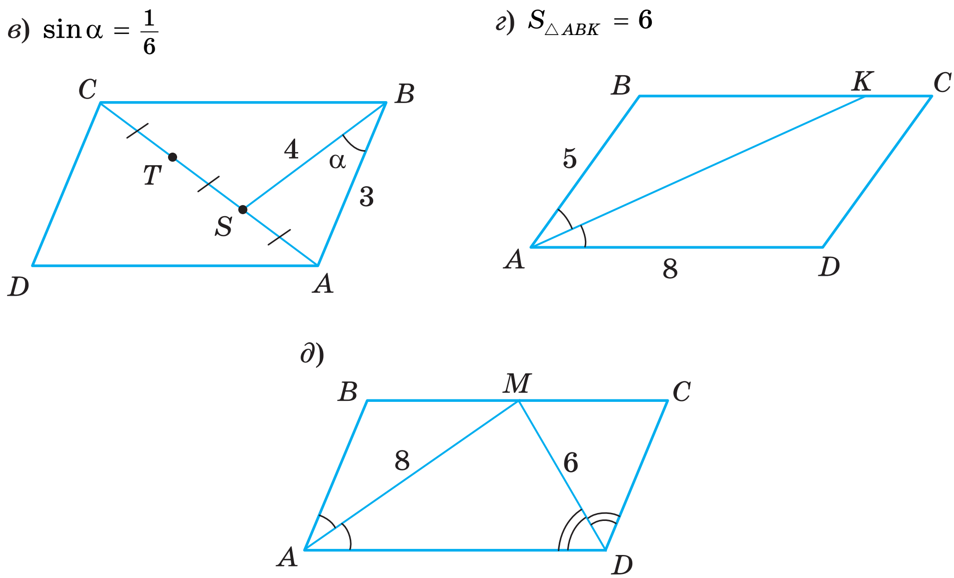


Рис. 209

5.4. а) Углы параллелограмма относятся как $1:5$, а его стороны — как $5:9$. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр равен 56 см.

б) Один угол параллелограмма на 90° больше другого, площадь параллелограмма равна $4\sqrt{2}$ см^2. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон на 2 см больше другой.

5.5. а) Косинус угла параллелограмма равен $-\frac{1}{4}$, а его стороны — $\sqrt{15}$ см и 20 см. Найдите сторону квадрата, равновеликого данному параллелограмму.

б) Квадрат со стороной $4\sqrt{3}$ см и параллелограмм со сторонами 18 см и $2\sqrt{2}$ см равновелики. Найдите косинус тупого угла параллелограмма.

5.6. а) Медианы AP и CE треугольника ABC пересекаются в точке O, угол AOE равен 30°. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 12$ см, $CE = 9$ см.

б) Медианы AP и CE треугольника ABC пересекаются в точке O, угол AOC равен 135°. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 6\sqrt{2}$ см, $CE = 15$ см.

5.7. а) Периметр ромба равен 20 см, а синус угла ромба равен 0,4. Найдите площадь ромба.

б) Площадь ромба равна 80 см^2, а синус угла ромба равен 0,8. Найдите периметр ромба.

5.8. а) Найдите площадь прямоугольника, у которого диагональ равна $4\sqrt{2}$ см, а угол между диагоналями равен 45°.

б) Площадь прямоугольника равна $4\sqrt{2}$ см^2. Найдите диагональ прямоугольника, если угол между диагоналями равен 45°.

5.9. Найдите площадь прямоугольника $NMKP$, изображенного на рисунке 210.

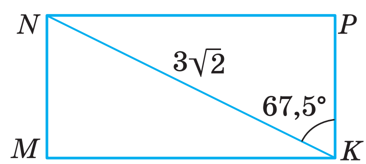


Рис. 210

5.10. а) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, изображенного на рисунке 211, если $AC = 6$, $BD = 10$, $\alpha = 120°$.

б) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, изображенного на рисунке 212, если $AC = 4$, $BD = 6$, $\cos\beta = -0{,}8$.

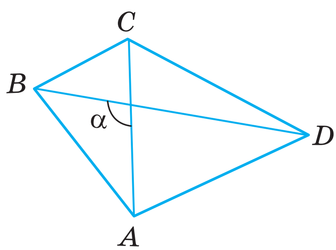


Рис. 211

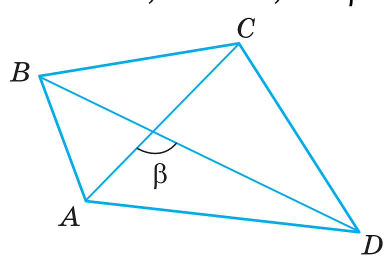


Рис. 212

5.11. На рисунке 213 изображена трапеция *FETS*. Найдите ее площадь, если $SE = 2\sqrt{2}$.

5.12. Диагонали трапеции равны n и m и составляют с одним из оснований углы α и β. Докажите, что площадь трапеции равна $0{,}5mn\sin(\alpha + \beta)$.

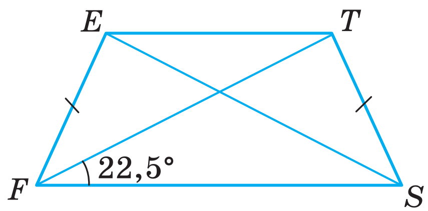


Рис. 213

§ 6. Среднее пропорциональное (среднее геометрическое) в прямоугольном треугольнике

6.1. Используя данные рисунков 214, *а*)—*г*), найдите длину отрезка x.

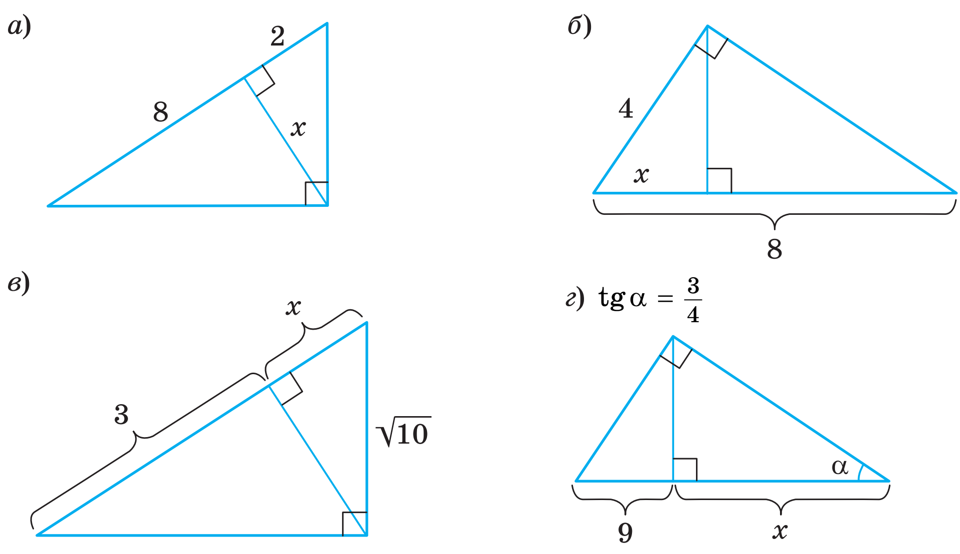


Рис. 214

6.2. а) Используя данные рисунка 215, найдите сторону *CD* прямоугольника *ABCD*.

б) AB — диаметр окружности с центром O, $CD = 8$, $AM = 2$ (рис. 216). Найдите OB.

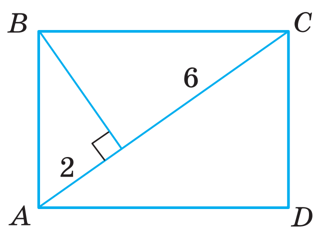


Рис. 215

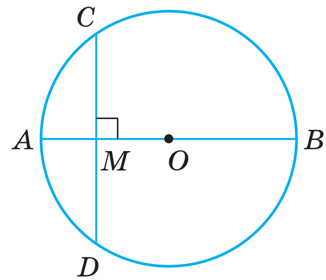


Рис. 216

6.3. а) Длина перпендикуляра TE, проведенного из точки T окружности к ее диаметру AB, равна $2\sqrt{5}$. Найдите длины хорд TA и TB, если радиус окружности равен 6.

б) Из точки P окружности проведен перпендикуляр PK к ее диаметру BC, $BK = 4$, $KC = 8$. Найдите площадь треугольника BPC.

6.4. а) Один катет прямоугольного треугольника равен $2\sqrt{5}$, а проекция другого катета на гипотенузу — $2\frac{2}{3}$. Найдите второй катет треугольника.

б) Проекции катетов на гипотенузу прямоугольного треугольника относятся как $2 : 3$, меньший катет равен $2\sqrt{10}$. Найдите больший катет треугольника.

6.5. а) В прямоугольном треугольнике MPK MT — высота к гипотенузе, $PT = x$, $TK = y$. Найдите площадь треугольника PTE, где точка E — середина катета MP.

б) BD — высота прямоугольного треугольника ABC, $AD = m$, $BD = p$. Найдите площадь треугольника BDK, где DK — медиана треугольника DBC.

6.6. а) В прямоугольном треугольнике биссектриса, проведенная к гипотенузе, делит ее в отношении $2 : 3$. В каком отношении делит гипотенузу высота треугольника?

б) Высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу в отношении 4 : 25. В каком отношении делит гипотенузу биссектриса прямого угла треугольника?

6.7. а) Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°, а высота, проведенная к гипотенузе, равна n. Найдите гипотенузу.

б) Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°, а проекция большего катета на гипотенузу равна k. Найдите гипотенузу.

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ОКРУЖНОСТИ

§ 7. Описанная и вписанная окружности треугольника

7.1. Используя данные рисунков 217, *а*), *б*), найдите длину отрезка OC.

а) *б*) $AO = OB = 6$

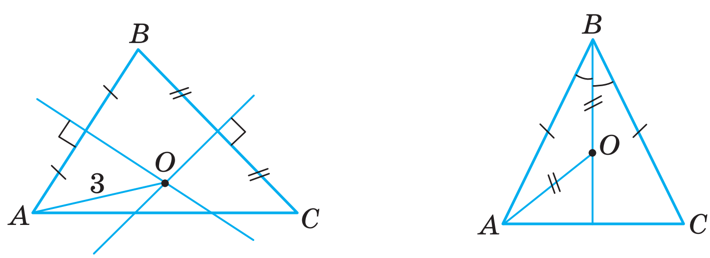


Рис. 217

7.2. Используя данные рисунков 218, *а*), *б*), найдите угол α.

а) $OA = OB = OC$ *б*)

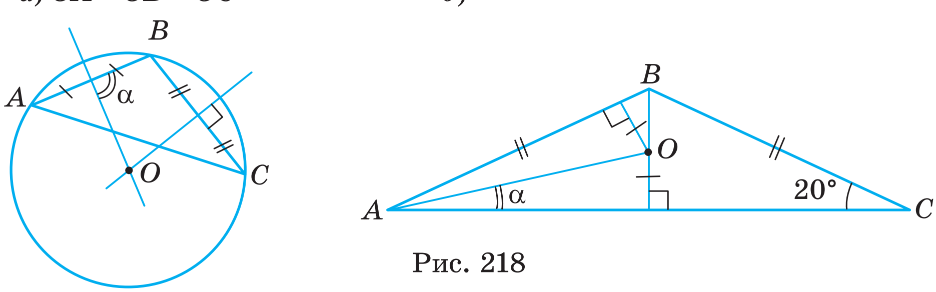


Рис. 218

7.3. Найдите расстояние от точки O до прямой AB, используя данные рисунков 219, *а*), *б*).

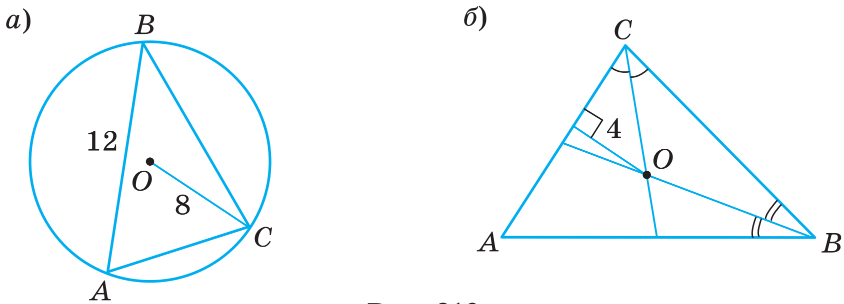


Рис. 219

7.4. а) Найдите расстояние от точки P до прямой BC, используя данные рисунка 220.

б) Найдите угол α, используя данные рисунка 221.

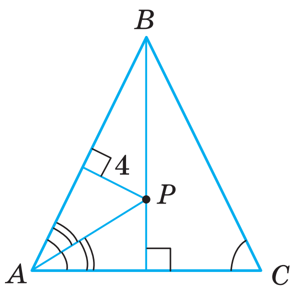


Рис. 220

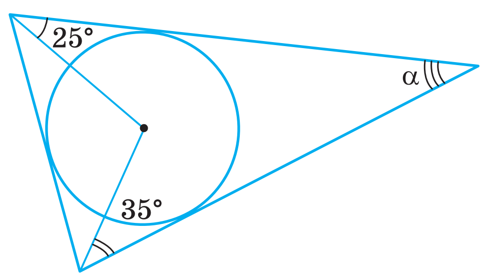


Рис. 221

7.5. а) T — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AB (рис. 222). Найдите расстояние от центра окружности O до прямой AC.

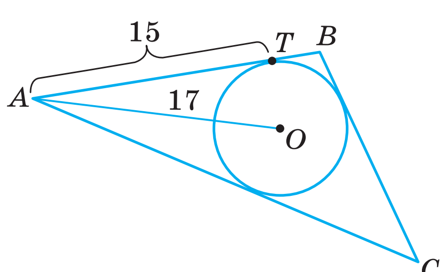


Рис. 222

б) Найдите угол β, используя данные рисунка 223.

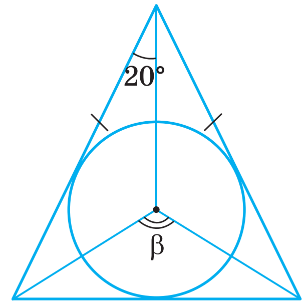


Рис. 223

7.6. а) O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Используя данные рисунка 224, найдите радиус окружности и сторону BC треугольника.

б) O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Используя данные рисунка 225, найдите расстояние от центра окружности до стороны AB треугольника и радиус окружности.

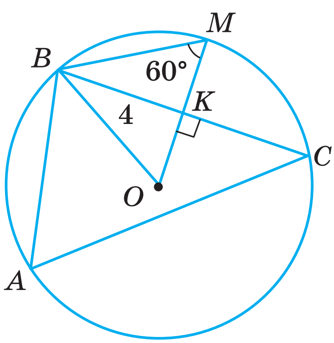


Рис. 224

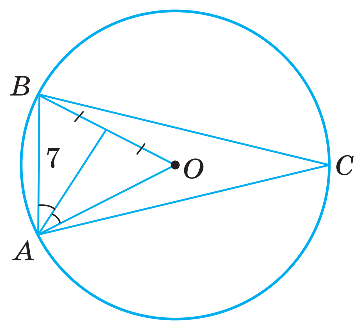


Рис. 225

7.7. а) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 6 см, а синус угла при основании равен $\frac{2}{3}$. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

б) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 8 см, а радиус описанной около треугольника окружности — $5\frac{1}{3}$ см. Найдите синус угла при основании треугольника.

7.8. а) Точка O находится на расстоянии 13 см от всех вершин треугольника ABC и на расстоянии 5 см от стороны AB. Найдите сторону AB.

б) Точка P равноудалена от всех вершин треугольника ABK. Расстояние от точки P до стороны AB равно 8 см, $AB = 30$ см. Найдите AP.

7.9. а) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 14 см, высота, проведенная к основанию, равна $6\sqrt{5}$ см. Найдите расстояние между точками касания вписанной в треугольник окружности с боковыми сторонами треугольника.

б) Синус угла при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{\sqrt{15}}{4}$, боковая сторона треугольника равна 16 см. Найдите расстояние между точками касания вписанной в треугольник окружности с боковыми сторонами треугольника.

7.10. а) Периметр треугольника равен 18 см, а его площадь — $3\sqrt{15}$ см^2. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

б) Площадь треугольника равна $24\sqrt{6}$ см^2, а радиус вписанной в него окружности — $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ см. Найдите периметр треугольника.

7.11. а) Вписанная в равносторонний треугольник ABC окружность радиусом 2 см пересекает высоту BH треугольника ABC в точке P. Через точку P проведена прямая, параллельная стороне AC, которая пересекает стороны треугольника в точках K и E. Найдите периметр треугольника BKE.

б) В равносторонний треугольник MNR вписана окружность, которая пересекает высоту NT треугольника MNR в точке O. Через точку O перпендикулярно NT проведена прямая, пересекающая стороны треугольника MNR в точках A и B. Периметр треугольника ANB равен 12 см. Найдите радиус вписанной в треугольник MNR окружности.

7.12. а) Около треугольника ABC $(\angle A = 45°)$ описана окружность с центром O. Расстояние от точки O до стороны BC равно 15 см. Найдите радиус описанной окружности.

б) Около треугольника ABC $(\angle A = 45°)$ описана окружность с центром O. Площадь треугольника BOC равна 10 см^2. Найдите радиус описанной окружности.

7.13. а) O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$. Площадь треугольника AOB равна 24. Найдите площади треугольников BOC и AOC.

б) Окружность с центром O и радиусом $\frac{\sqrt{15}}{3}$ вписана в треугольник ABC, в котором $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$. Площадь треугольника AOB равна $\frac{2\sqrt{15}}{3}$. Найдите стороны BC и AC.

7.14. а) В треугольник ABC со сторонами $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 12$ вписана окружность, которая касается сторон треугольника в точках M, K, P соответственно. Найдите наименьший из отрезков AM, BK, CP.

б) В треугольник ABC со сторонами $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 4$ вписана окружность, которая касается сторон треугольника в точках M, K, P соответственно. Найдите наибольший из отрезков AM, BK, CP.

7.15. а) Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, BE — биссектриса этого треугольника, $BO : OE = 2 : 1$, $AC = 7$, $BC = 8$. Найдите сторону AB.

б) В треугольник ABC вписана окружность с центром P. $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 12$. Найдите отношение отрезков AP и PK, если AK — биссектриса треугольника ABC.

§ 8. Прямоугольный треугольник и его описанная и вписанная окружности

8.1. Окружность с центром O радиусом R описана около треугольника ABC. Найдите R, используя данные рисунков 226, *а*)—*д*).

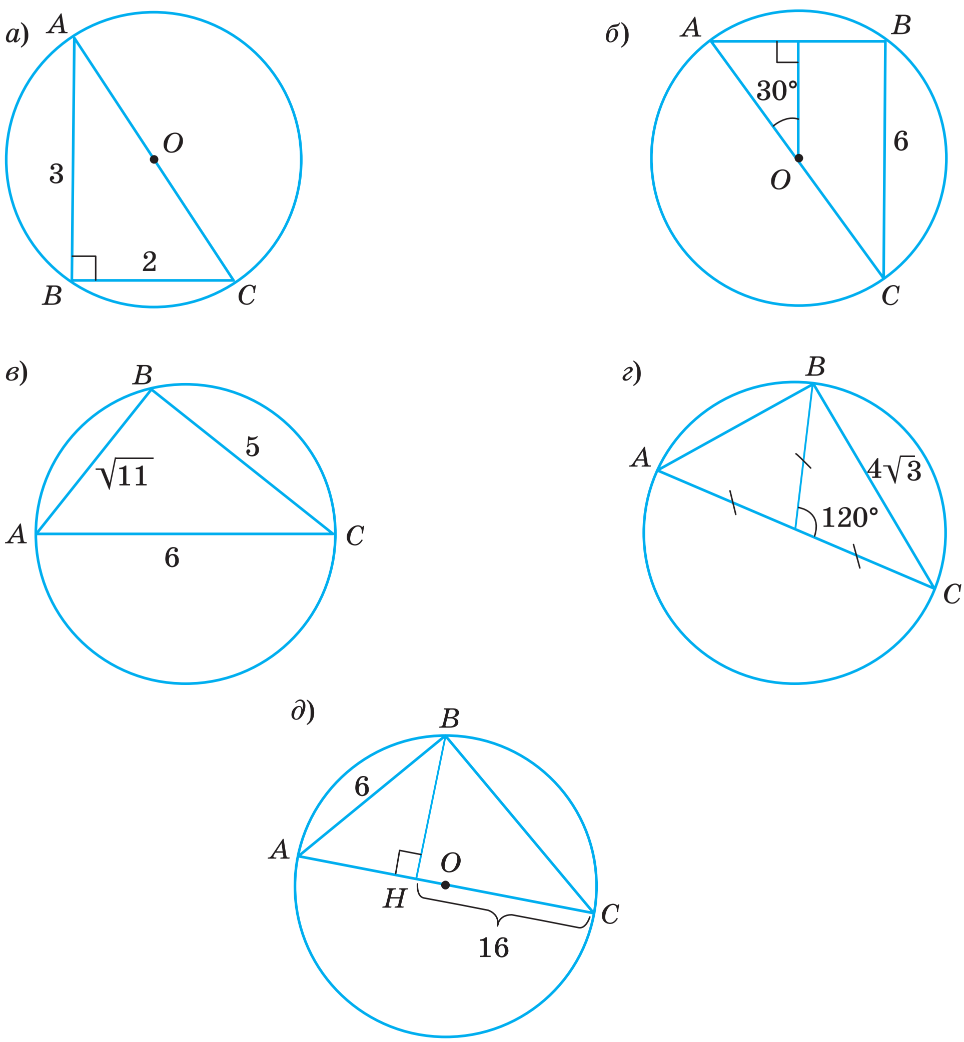


Рис. 226

8.2. Окружность с центром O радиусом r вписана в треугольник ABC. По данным рисунков 227, *а*)—*г*) найдите длины неизвестных отрезков.

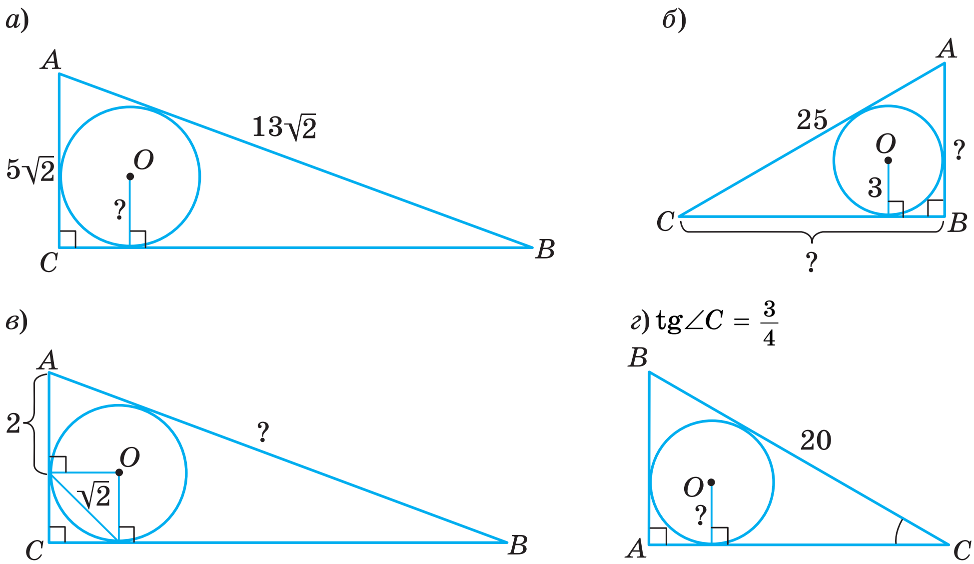


Рис. 227

8.3. а) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а сумма катетов — 35 см. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

б) Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 46 см, радиус вписанной в треугольник окружности — 6 см. Найдите гипотенузу.

8.4. а) Синус угла между высотой, равной $\frac{6\sqrt{13}}{13}$, и медианой прямоугольного треугольника, проведенными к гипотенузе, равен $\frac{12}{13}$. Найдите диаметр описанной около этого треугольника окружности.

б) Диаметр описанной около прямоугольного треугольника окружности равен 12. Найдите синус угла между высотой и медианой, проведенными к гипотенузе, если высота равна $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

8.5. а) Вокруг прямоугольного треугольника описана окружность радиусом $5\sqrt{5}$. Найдите меньший катет треугольника, зная, что один из катетов в два раза ближе к центру окружности, чем другой.

б) Наибольшая средняя линия прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{10}$. Вокруг прямоугольного треугольника описана окружность, причем центр окружности в три раза ближе к одному из катетов, чем к другому. Найдите больший катет треугольника.

8.6. а) В треугольнике ABC $AB = 4{,}8$, $AC = 3{,}6$, $BC = 6$. Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, проведена прямая, параллельная стороне BC, которая пересекает две другие стороны треугольника ABC в точках P и M. Найдите биссектрису треугольника PAM, проведенную из вершины A.

б) Через центр окружности, вписанной в треугольник со сторонами 1; 2,4 и 2,6, проведена прямая, параллельная наибольшей стороне треугольника. Найдите биссектрису треугольника, отсекаемого этой прямой, проведенную к наибольшей стороне.

8.7. а) $ABCD$ — прямоугольник со сторонами 12 м и 16 м. Точки O и P — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно. Найдите длину отрезка OP.

б) Диагональ прямоугольника $ABCD$ равна 34 м, а разность сторон прямоугольника — 14 м. Найдите расстояние между центрами вписанных в треугольники ABC и ADC окружностей.

8.8. Используя данные рисунка 228, найдите площадь треугольника ABC.

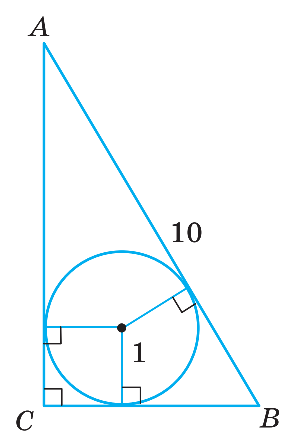


Рис. 228

8.9. а) O — центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC. Площадь треугольника OBA равна 10. Отношение радиуса вписанной окружности к высоте треугольника ABC, проведенной к гипотенузе AB, равно $\frac{5}{12}$. Найдите площадь треугольника ABC.

б) O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Площади треугольников OAB, OAC, OBC относятся как $5 : 3 : 4$. Найдите площадь треугольника ABC, если радиус описанной около него окружности равен 20.

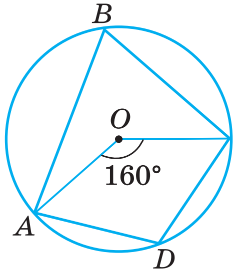
8.10. а) Биссектрисы BP и AH треугольника ABC $(\angle A = 90°)$ пересекаются в точке O. AH пересекает вписанную в треугольник ABC окружность в точке K (точка O принадлежит отрезку AK). Найдите радиус вписанной окружности, если расстояние от точки K до одного из катетов равно $6\sqrt{2}$ см.

б) Биссектрисы BP и AH треугольника ABC ($\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$) пересекаются в точке O. BP пересекает вписанную в треугольник ABC окружность в точке K (точка K принадлежит отрезку BO). Найдите радиус вписанной окружности, если расстояние от точки K до катета AC равно $4{,}5\left(2 + \sqrt{3}\right)$ см.

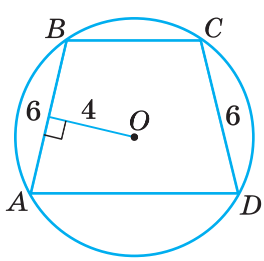
§ 9. Вписанные и описанные четырехугольники

9.1. Окружность с центром O радиусом R описана около четырехугольника $ABCD$. По данным рисунков 229, *а*)—*д*) найдите неизвестные величины.

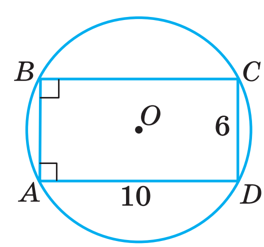
а) $\angle ADC$ — ?



б) $BC \parallel AD$; R — ?



в) R — ?



г) $S_{\triangle AOB} = 4{,}5$; R — ? *д*) $R = 5$; P_{ABCD} — ?

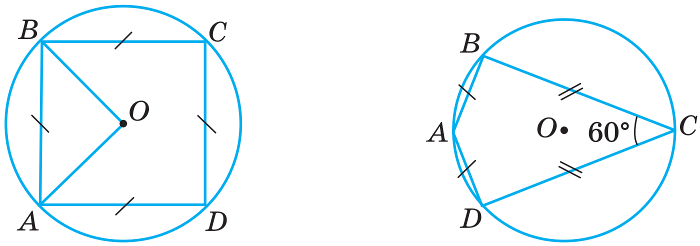
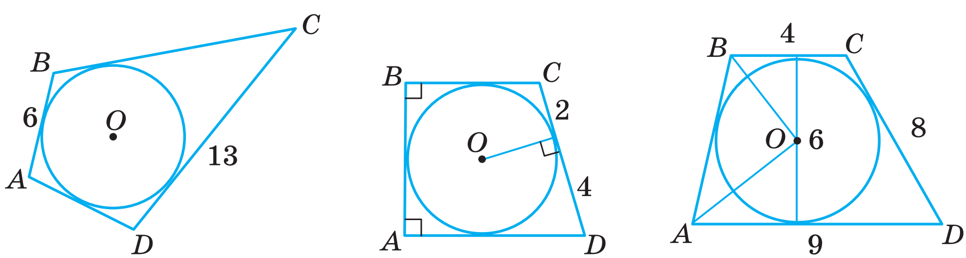


Рис. 229

9.2. Окружность с центром O радиусом r вписана в четырехугольник $ABCD$. По данным рисунков 230, *а*)—*д*) найдите неизвестные величины.

а) P_{ABCD} — ? *б*) r — ? *в*) $AD \parallel BC$; $S_{\triangle AOB}$ — ?



г) $ABCD$ — ромб, $BP : PH = 5 : 3$, $P_{ABCD} = 40$; r — ? *д*) $ABCD$ — ромб; r — ?

Рис. 230

9.3. а) Площадь прямоугольника равна $16\sqrt{2}$, а угол между диагоналями прямоугольника равен 45°. Найдите радиус описанной около прямоугольника окружности.

б) Угол между диагональю прямоугольника и одной из его сторон равен 67,5°. Найдите диаметр описанной около прямоугольника окружности, если площадь прямоугольника равна $25\sqrt{2}$.

9.4. а) Серединные перпендикуляры ко всем сторонам выпуклого четырехугольника *ABCP* пересекаются в точке *O*. Расстояние от точки *O* до стороны *BC* в два раза меньше стороны *BC*, а расстояние от точки *O* до стороны *AB* в $2\sqrt{3}$ раза меньше стороны *AB*. Найдите величину угла *APC*.

б) Серединные перпендикуляры ко всем сторонам выпуклого четырехугольника *ABCM* пересекаются в точке *O*. Отношение расстояния от точки *O* до прямой *AB* к расстоянию от точки *O* до прямой *BC* равно $\sqrt{3}:1$. Найдите величину угла *BAC*, если угол *AMC* равен 90°.

9.5. а) *ABCD* — прямоугольник, *AB* = 12 см, $\angle CAB = 30°$. Найдите расстояние между центром окружности, описанной около прямоугольника *ABCD*, и центром окружности, описанной около треугольника *BCO*, если *O* — точка пересечения диагоналей прямоугольника *ABCD*.

б) *O* — точка пересечения диагоналей прямоугольника *ABCD*, расстояние между центром окружности, описанной около прямоугольника *ABCD*, и центром окружности, описанной около треугольника *BCO*, равно 6 см. Найдите *AB*, если *AC* : *BC* = 2 : 1.

9.6. а) Около трапеции *ABCD* с основаниями *BC* и *AD* описана окружность, угол *BCD* равен 120°. Высота *BH* делит основание *AD* на отрезки, больший из которых равен 12 см. Найдите диаметр описанной около трапеции *ABCD* окружности, если диагональ трапеции делит ее острый угол пополам.

б) Около трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD описана окружность, угол BCD в два раза больше угла BAD. Высота BH делит основание AD на отрезки, меньший из которых равен 5 см. Найдите диаметр описанной около трапеции $ABCD$ окружности, если меньшее основание трапеции равно ее боковой стороне.

9.7. а) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle D = 90°$. Диаметр окружности, описанной около треугольника ABD, равен 24. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD.

б) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 2 : 7 : 9 : 4$. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 12,5. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника BCD.

9.8. а) Вокруг трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$), диагонали которой взаимно перпендикулярны, описана окружность с центром в точке O. Угол AOD равен 110°. Найдите угол AOC.

б) Окружность с центром O описана около трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$), диагонали которой взаимно перпендикулярны. Угол AOC равен 130°. Найдите угол AOD.

9.9. а) Докажите, что если биссектрисы всех четырех внутренних углов любой трапеции при пересечении образуют четырехугольник, то около него можно описать окружность.

б) Докажите, что если биссектрисы всех четырех внешних углов, взятых по одному при каждой вершине любой трапеции, при пересечении образуют четырехугольник, то около него можно описать окружность.

9.10. а) Площадь ромба равна 120. Диагонали ромба относятся как 5 : 12. Найдите радиус вписанной в ромб окружности.

б) Периметр ромба равен 40. Диагонали относятся как 3 : 4. Найдите радиус вписанной в ромб окружности.

9.11. а) В равнобедренную трапецию вписана окружность радиусом 5. Меньшее основание трапеции в два раза меньше ее высоты. Найдите площадь трапеции.

б) В равнобедренную трапецию вписана окружность радиусом 4. Высота трапеции больше меньшего основания трапеции в четыре раза. Найдите площадь трапеции.

9.12. а) В окружность вписана трапеция, боковая сторона которой равна 15, средняя линия равна 16, а большее основание является диаметром окружности. Найдите площадь трапеции.

б) В окружность вписана трапеция, большее основание которой равно 26 и является диаметром окружности. Боковая сторона трапеции равна $\sqrt{26}$. Найдите площадь трапеции.

9.13. а) Докажите, что в любом вписанном четырехугольнике угол, образованный диагональю с одной из сторон, равен углу, образованному другой диагональю с противоположной стороной четырехугольника.

б) Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике хотя бы одна диагональ делит два его угла пополам, то в такой четырехугольник можно вписать окружность.

9.14. а) $ABCD$ — описанный четырехугольник, AB меньше CD на 4 см, AD меньше CD в три раза, а $AD : BC = 1 : 4$. Найдите периметр $ABCD$.

б) $ABCD$ — описанный четырехугольник, BC больше AD на 5 см, $AB : CD = 1 : 4$. Найдите сумму AB и AD, если периметр четырехугольника $ABCD$ равен 50 см.

9.15. а) Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность. Угол ABC — прямой, сторона AB равна 5 см, а CD — 12 см. Известно, что в $ABCD$ можно вписать окружность. Найдите сумму радиусов вписанной и описанной окружностей.

б) В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность. Сторона AD равна 8 см, угол ABC — прямой. Известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, диаметр которой равен 17 см. Найдите диаметр вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности.

9.16. а) Концы большей боковой стороны прямоугольной трапеции находятся на расстояниях $\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$ от центра вписанной в трапецию окружности. Найдите площадь трапеции.

б) Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 3. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 4.

9.17. а) В ромб $ABCD$ со стороной $4\sqrt{3}$ и острым углом A, равным $60°$, вписана окружность. К окружности проведена касательная, которая пересекает сторону AB в точке P, а сторону AD — в точке K. Найдите периметр треугольника APK.

б) В ромб $ABCD$ вписана окружность. К окружности проведена касательная, которая пересекает сторону AB в точке P, а сторону AD — в точке K. Треугольник APK — равносторонний, со стороной, равной 6. Найдите радиус окружности.

9.18. а) Около окружности описана равнобедренная трапеция, средняя линия которой равна m. Найдите периметр трапеции.

б) Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиусом r, если ее боковая сторона равна n.

9.19. В прямоугольную трапецию с углом $30°$ вписана окружность. Докажите, что площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки касания окружности со сторонами трапеции, в 4 раза меньше площади трапеции.

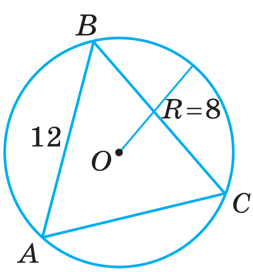
9.20. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и середину стороны BC, пересекает сторону AD в точке P. Докажите, что EP — высота треугольника AED.

ТЕОРЕМА СИНУСОВ, ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

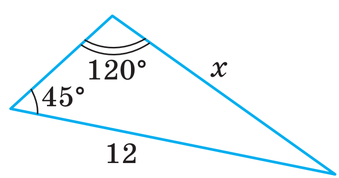
§ 10. Теорема синусов

10.1. По данным рисунков 231, *а*)—*м*) найдите неизвестные величины.

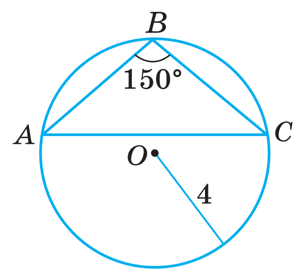
а) $\sin \angle C$ — ?



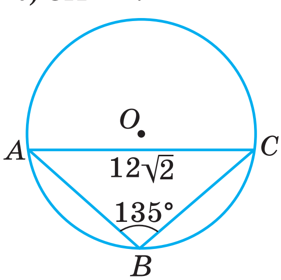
б) x — ?



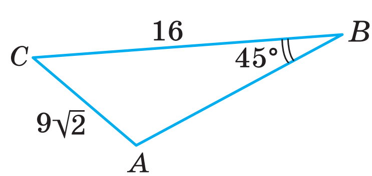
в) AC — ?



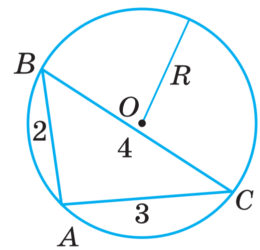
г) OA — ?



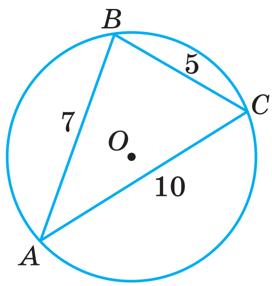
д) $\sin \angle A$ — ?



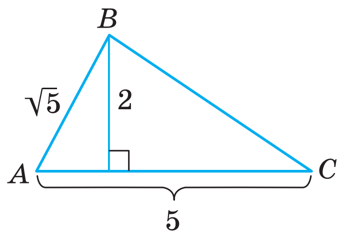
е) $R = \frac{8\sqrt{15}}{15}$; $S_{\triangle ABC}$ — ?



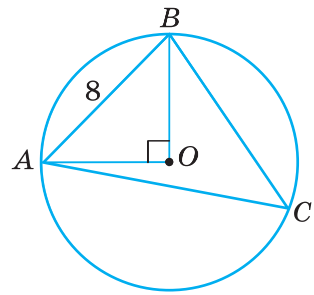
ж) $S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{6}$; $R_{\triangle ABC}$ — ?



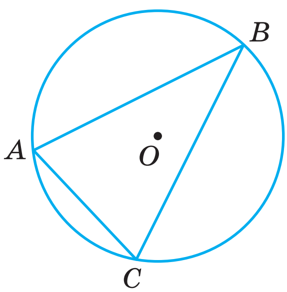
з) $R_{\triangle ABC}$ — ?



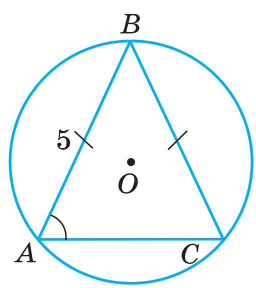
и) $\sin\angle ABC = \frac{4}{5}$; AC — ?



к) $\smile AB : \smile AC : \smile CB = 4 : 3 : 5$; $\frac{AC}{AB}$ — ?



л) $\cos\angle A = 0{,}6$; $R_{\triangle ABC}$ — ?



м) $\cos\angle B = -0{,}5$; $R_{\triangle ABC}$ — ?

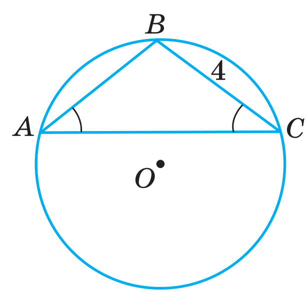


Рис. 231

10.2. а) В треугольнике ABC синус угла A равен $\frac{2\sqrt{6}}{7}$, синус угла C равен $\frac{12\sqrt{6}}{35}$, а сторона BC равна 5 см. Найдите AB.

б) В треугольнике ABC синус угла B равен $\frac{2\sqrt{6}}{5}$, сторона AB равна 6 см, а сторона AC — 7 см. Найдите синус угла C.

10.3. а) Найдите радиус описанной около треугольника окружности, если одна из его сторон равна $16\sqrt{3}$ см, а противолежащий ей угол — 120°.

б) Радиус описанной около треугольника окружности равен $8\sqrt{2}$ см. Один из углов треугольника равен 135°. Найдите противолежащую этому углу сторону треугольника.

10.4. а) В треугольнике PKC $\angle P = 5°$, $\angle K = 25°$, $PK = 23{,}4$ см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника PKC.

б) В треугольнике TOH $\angle T = 4°25'$, $\angle O = 25°35'$. Найдите сторону TO, если диаметр окружности, описанной около треугольника TOH, равен 44,2 см.

10.5. а) Две стороны треугольника равны 3 см и 6 см, а высота, проведенная к третьей стороне, — 2 см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

б) Треугольник ABC вписан в окружность, радиус которой равен 10 см, BH — высота треугольника ABC, $BH = 1$ см, $AB = 4$ см. Найдите BC.

10.6. а) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, у которого два угла равны и две стороны равны 8 см и 4 см.

б) В треугольнике одна из медиан является и высотой треугольника. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника, если две его стороны равны 12 см и 6 см.

10.7. а) В треугольнике ABC синус угла A равен $\frac{1}{3}$, $AB = 2$ см, $BC = 1\frac{1}{3}$ см. Найдите все возможные величины угла ACB.

б) В остроугольном треугольнике ABC $AB = 3\sqrt{2}$ см, $BC = 4$ см, синус угла C равен 0,75. Найдите угол A.

10.8. а) Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Меньшее основание BC равно 10 см. Найдите среднюю линию трапеции, если $\sin\angle BAC = \frac{1}{5}$, $\sin\angle ABD = \frac{6}{25}$.

б) Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Ее основания AD и BC равны 16 см и 14 см соответственно. Найдите угол BDC, если синус угла ACD равен $\frac{4}{7}$.

10.9. а) $ABCD$ — вписанный четырехугольник, диагональ AC равна $\sqrt{5}$ см, а косинус угла ABC равен $-\frac{2}{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около $ABCD$.

б) Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найдите радиус окружности, если $AC = 3\sqrt{2}$ см, $\cos\angle BCD = -\frac{1}{3}$.

10.10. а) Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ делит угол BAD на два угла, величины которых — β и φ. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AC = a$.

б) В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD > BC$) угол BCA равен β, угол CDA равен φ, $AD = n$. Найдите площадь трапеции.

10.11. а) В треугольнике ABC $\angle B = 105°$, $BC = 20$. Высота BH равна 10. Найдите периметр треугольника ABC.

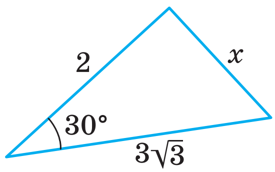
б) В треугольнике ABC $\angle B = 105°$, $BC = 10$. Высота BH равна $5\sqrt{2}$. Найдите периметр треугольника ABC.

10.12. Два угла треугольника равны β и φ. Найдите радиус описанной около треугольника окружности, если площадь треугольника равна S.

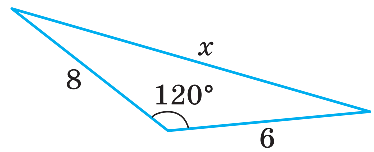
§ 11. Теорема косинусов

11.1. По данным рисунков 232, *а*)—*м*) найдите неизвестные величины.

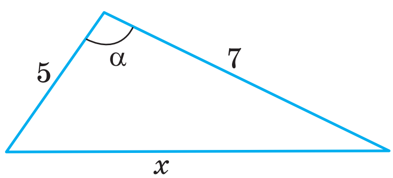
а) x — ?



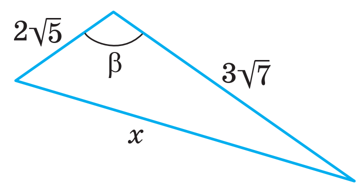
б) x — ?



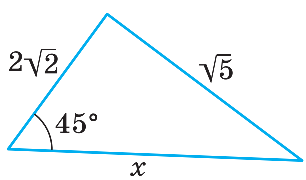
в) $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$; x — ?



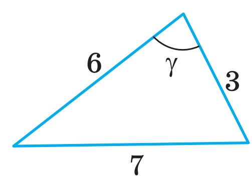
г) $\sin\beta = \frac{1}{6}$, $\beta > 90°$; x — ?



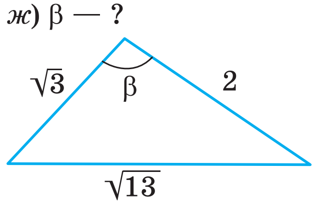
д) x — ?



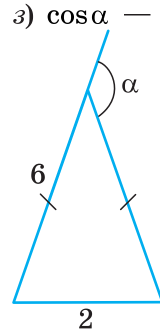
е) $\cos\gamma$ — ?



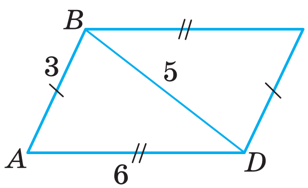
ж) β — ?



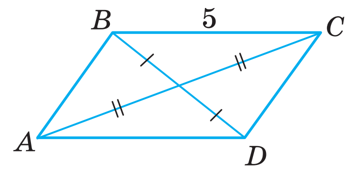
з) $\cos\alpha$ — ?



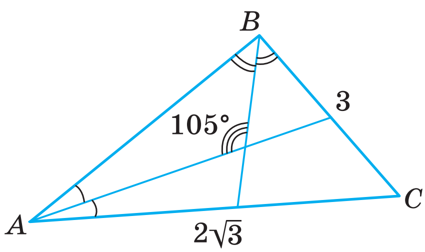
и) AC — ?



к) $AC = 4\sqrt{3}$, $BD = 4\sqrt{2}$;
AB — ?



л) AB — ?



м) $AC = BC$; AC — ?

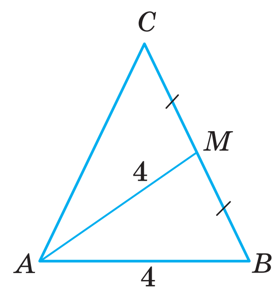


Рис. 232

11.2. а) Найдите косинус наименьшего угла треугольника, если его стороны равны $2\sqrt{3}$ см, 7 см, 5 см.

б) Найдите косинус наибольшего угла треугольника, если его стороны равны $4\sqrt{3}$ см, 6 см, 5 см.

11.3. а) Определите вид треугольника (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный), если его стороны равны $5\sqrt{3}$ см, 7 см, $2\sqrt{3}$ см.

б) Определите вид треугольника (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный), если его стороны относятся как 2 : 7 : 8.

11.4. а) Найдите сторону треугольника, если сумма прилежащих к ней углов равна 60°, а две другие стороны — 5 см и 3 см.

б) Найдите сторону треугольника, если сумма прилежащих к ней углов равна 30°, а две другие стороны — $\sqrt{3}$ см и 1 см.

11.5. а) Один из углов треугольника равен $120°$, противолежащая ему сторона — $2\sqrt{7}$ см. Найдите две другие стороны треугольника, если они относятся как $1 : 2$.

б) Один из углов треугольника равен $135°$, противолежащая ему сторона — $2\sqrt{10}$ см. Найдите две другие стороны треугольника, если они относятся как $\sqrt{2} : 1$.

11.6. а) Меньшее основание трапеции равно $2\sqrt{13}$, боковые стороны — $\sqrt{3}$ и 2. Найдите большее основание трапеции, если сумма углов, прилежащих к нему, равна $30°$.

б) Основания трапеции относятся как $1 : 3$, боковые стороны равны $\sqrt{2}$ и 2. Найдите меньшее основание трапеции, если сумма углов, прилежащих к нему, равна $315°$.

11.7. а) Площадь треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$ см^2, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $\angle ABC > 90°$. Найдите высоту BH треугольника ABC.

б) Площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{3}$ см^2, $BC = 3$ см, $AB = 4\sqrt{3}$ см. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если ее центр лежит вне треугольника.

11.8. а) Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны $\sqrt{15}$ и 1, а медиана, проведенная к третьей стороне, — 2.

б) BK — медиана треугольника ABC, $AB : BK : BC = 1 : 1{,}5 : 2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника, если его периметр равен $8 + 4\sqrt{2}$.

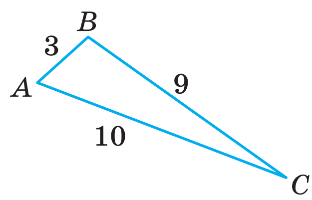
11.9. $ABCD$ — трапеция с основаниями BC и AD, $AC = 3$, $BD = 5$, а угол между диагоналями равен $120°$. Найдите сумму длин оснований BC и AD.

11.10. Биссектриса треугольника делит его сторону на два отрезка, разность длин которых равна 2 см. Найдите длину этой биссектрисы, если две другие стороны треугольника равны 15 см и 18 см.

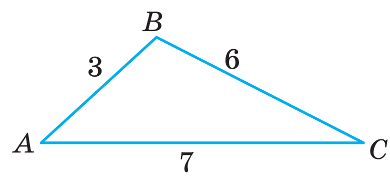
§ 12. Формула Герона. Решение треугольников

12.1. По данным рисунков 233, *а)*—*з)* найдите неизвестные величины.

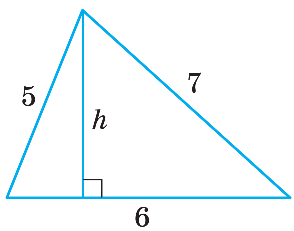
а) $S_{\triangle ABC}$ — ?



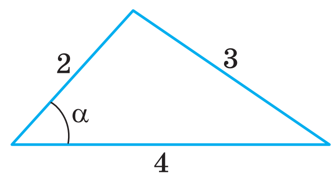
б) $R_{\triangle ABC}$ — ?



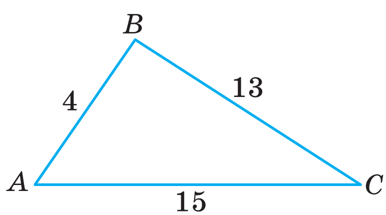
в) h — ?



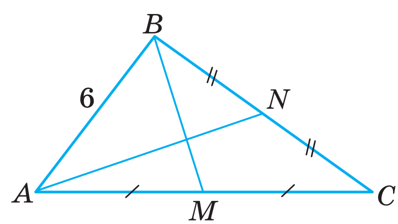
г) $\sin\alpha$ — ?



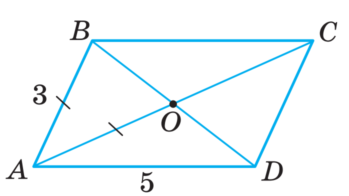
д) $r_{\triangle ABC}$ — ?



е) $AN = 7{,}5$, $BM = 6$; $S_{\triangle ABC}$ — ?



ж) $ABCD$ — параллелограмм; $S_{\triangle ABCD}$ — ?



з) $BC \parallel AD$; $S_{\triangle ABCD}$ — ?

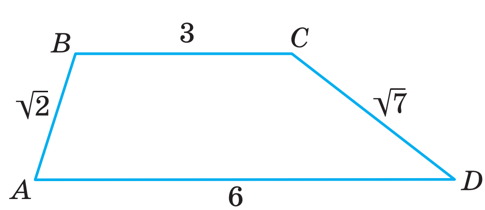


Рис. 233

12.2. Найдите площадь треугольника со сторонами:
а) 8 см, 12 см, 16 см;
б) 10 см, 17 см, 21 см.

12.3. а) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 13, 14, 15.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 37, 13, 40.

12.4. а) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 13, 17, 22.
б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 14, 18, 24.

12.5. а) Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами 5 см, 7 см и 9 см.
б) Найдите наибольшую высоту треугольника со сторонами 6 см, 11 см и 15 см.

12.6. а) В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $BC = 14$ см, $AC = 16$ см. Найдите радиус окружности, которая касается сторон AB и AC, зная, что ее центр лежит на стороне BC.
б) В треугольнике ABC $AB = 9$ см, $BC = 13$ см, $AC = 20$ см. Найдите радиус окружности, которая касается сторон BC и AC, зная, что ее центр лежит на стороне AB.

12.7. а) Диагонали параллелограмма равны 10 см и 18 см, а одна из его сторон — 8 см. Найдите площадь параллелограмма.
б) Диагонали параллелограмма равны 16 см и 24 см, а одна из его сторон — 10 см. Найдите площадь параллелограмма.

12.8. а) Стороны треугольника относятся как 5 : 7 : 8, а его площадь равна $160\sqrt{3}$ см^2. Найдите периметр треугольника.
б) Одна сторона треугольника в 1,4 раза меньше второй стороны и в 1,6 раза меньше третьей стороны треугольника. Найдите периметр треугольника, если его площадь равна $90\sqrt{3}$ см^2.

12.9. Докажите, что площадь вписанного четырехугольника равна $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d — стороны четырехугольника, а p — его полупериметр.

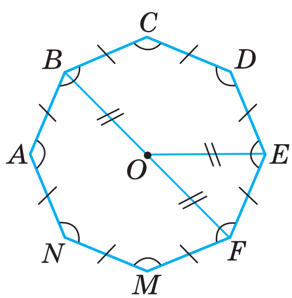
12.10. Докажите, что площадь вписанного четырехугольника, в который можно вписать окружность, равна $\sqrt{abcd}$, где a, b, c, d — стороны четырехугольника.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

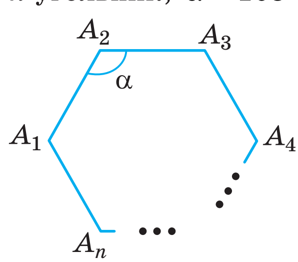
§ 13. Правильные многоугольники

13.1. По данным рисунков 234, *а)*—*д)* найдите неизвестные величины.

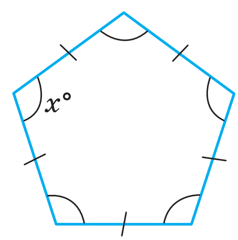
а) $\angle BOE$ — ?



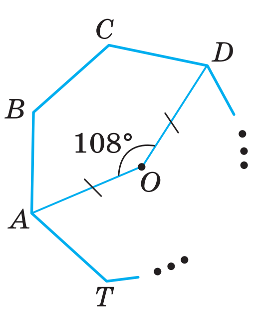
б) $A_1A_2\ldots A_n$ — правильный n-угольник, $\alpha = 168°$; n — ?



в) x — ?



г) O — центр правильного n-угольника $ABCD\ldots T$; n — ?



д) O — центр правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, $S_{A_1A_2A_3O} = 6$; $S_{A_1A_2\ldots A_n}$ — ?

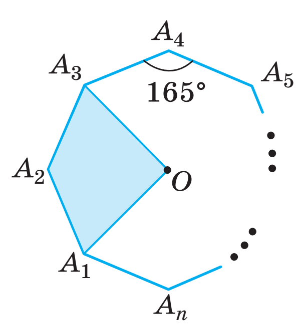


Рис. 234

13.2. а) Найдите периметр правильного 18-угольника, если сумма пяти его сторон на 42 см меньше суммы двенадцати его сторон.

б) Найдите сторону правильного 22-угольника, если его периметр больше суммы трех его сторон на 38 см.

13.3. а) Внутренний угол правильного n-угольника на $135°$ больше его внешнего угла. Найдите число сторон этого n-угольника.

б) Внешний угол правильного n-угольника в три раза меньше его внутреннего угла. Найдите число сторон этого n-угольника.

13.4. а) Сумма всех углов правильного n-угольника равна $2160°$. Найдите его периметр, если сторона правильного n-угольника равна 5 см.

б) Периметр правильного n-угольника в 29 раз больше его стороны. Найдите сумму всех углов этого n-угольника.

13.5. а) Точка O — центр правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$. Угол A_1OA_4 равен $27°$. Найдите сторону этого n-угольника, если его периметр равен 40 см.

б) Точка O — центр правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$. Угол A_1A_2O равен $85°$. Найдите периметр этого n-угольника, если его сторона равна 1,5 см.

13.6. а) $B_1B_2...B_8$ — правильный восьмиугольник со стороной a. Найдите площадь треугольника $B_1B_2B_3$.

б) $B_1B_2...B_8$ — правильный восьмиугольник со стороной a. Найдите площадь четырехугольника $B_1B_2B_3B_4$.

13.7. а) Сторона правильного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ равна 4 см. Диагонали A_1A_4 и A_2A_5 пересекаются в точке P. Найдите длину отрезка A_1P.

б) Сторона правильного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ равна 2 см. Диагонали A_1A_4 и A_2A_5 пересекаются в точке P. Найдите длину отрезка A_5P.

13.8. а) Докажите, что диагонали A_1A_3 и A_1A_4 правильного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ делят угол $A_2A_1A_5$ на три равных угла.

б) Докажите, что в правильном многоугольнике произведения отрезков любых двух пересекающихся диагоналей равны между собой.

13.9. а) На сторонах квадрата от каждой его вершины отложены отрезки, равные половине диагонали квадрата. Полученные восемь точек соединены отрезками. Найдите площадь квадрата, если периметр полученного восьмиугольника равен 8 см.

б) На сторонах квадрата от каждой его вершины отложены отрезки, равные половине диагонали квадрата. Полученные восемь точек соединены отрезками. Найдите периметр полученного восьмиугольника, если диагональ квадрата равна $3\sqrt{2}$ см.

13.10. а) $A_1A_2...A_8$ — правильный восьмиугольник. На стороне A_1A_2 лежит точка P так, что $A_1P = 3\sqrt{2}$, $PA_2 = \sqrt{2}$. Найдите расстояние от точки P до прямой A_7A_8.

б) $A_1A_2...A_8$ — правильный восьмиугольник. На стороне A_1A_2 лежит точка P так, что $A_1P = 6\sqrt{2}$, $PA_2 = \sqrt{2}$. Найдите расстояние от точки P до прямой A_4A_5.

13.11. а) Сторона правильного многоугольника равна 12 см, а радиус вписанной в него окружности — $6\sqrt{3}$ см. Найдите диаметр описанной около этого многоугольника окружности.

б) Диаметр описанной около правильного многоугольника окружности равен 20 см. Найдите сторону этого многоугольника, если радиус вписанной в многоугольник окружности равен $5\sqrt{3}$ см.

13.12. а) Наименьшая диагональ правильного восьмиугольника равна 4 см. Найдите радиус описанной около этого восьмиугольника окружности.

б) Диаметр окружности, описанной около правильного восьмиугольника, равен 16 см. Найдите наименьшую диагональ этого восьмиугольника.

13.13. а) Правильный 12-угольник $A_1A_2...A_{12}$ вписан в окружность радиусом 3,5. Найдите площадь треугольника $A_1A_2A_7$.

б) Правильный 12-угольник $A_1A_2...A_{12}$ вписан в окружность радиусом 6. Найдите площадь четырехугольника $A_1A_2A_3A_8$.

§ 14. Формулы радиусов описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника

14.1. а) $A_1A_2...A_n$ — правильный n-угольник со стороной a, O — его центр, r — радиус вписанной в него окружности, R — радиус описанной около него окружности (рис. 235). Найдите n, если:

1) $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}7{,}5°}$;

2) $r = R \cdot \cos 10°$;

3) $a = 2R \cdot \cos 87{,}5°$;

4) $R = \dfrac{a}{2\sin 12°}$.

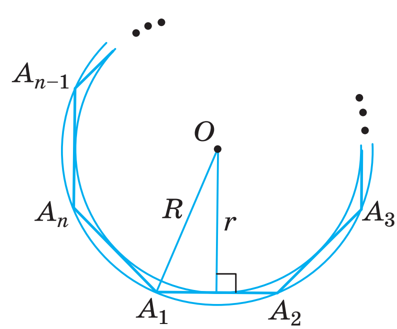


Рис. 235

б) Используя данные рисунков 236, *1)*—*3)*, найдите неизвестные величины.

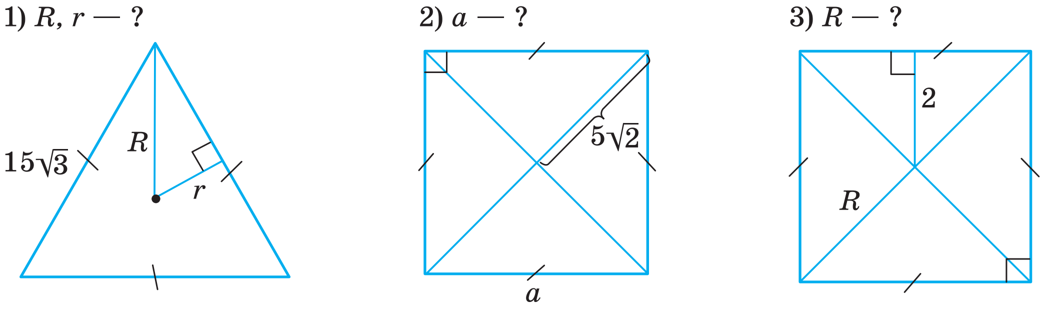


Рис. 236

14.2. а) Диаметр описанной около правильного треугольника окружности равен 24 см. Найдите площадь этого треугольника.

б) Площадь правильного треугольника равна $16\sqrt{3}$ см^2. Найдите диаметр вписанной в этот треугольник окружности.

14.3. а) Сторона правильного четырехугольника на $\left(8 - 4\sqrt{2}\right)$ см больше радиуса описанной около него окружности. Найдите периметр этого четырехугольника.

б) Радиус описанной около правильного четырехугольника окружности на $\left(2\sqrt{2} - 2\right)$ см больше радиуса вписанной в него окружности. Найдите площадь этого четырехугольника.

14.4. а) Площадь правильного шестиугольника равна $12\sqrt{3}$ см^2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот шестиугольник.

б) Диаметр окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен 8 см. Найдите площадь этого шестиугольника.

14.5. а) Выразите радиус R описанной около правильного 18-угольника окружности через сторону b этого 18-угольника.

б) Выразите сторону c правильного 36-угольника через радиус r вписанной в него окружности.

14.6. а) Радиус описанной около правильного 24-угольника окружности равен R. Найдите площадь этого 24-угольника.

б) Радиус описанной около правильного n-угольника окружности равен R. Площадь этого n-угольника равна $18R^2 \sin 10°$. Найдите n.

14.7. Треугольник ABC — равносторонний с периметром 6. Используя рисунок 237, найдите периметр треугольника OPK.

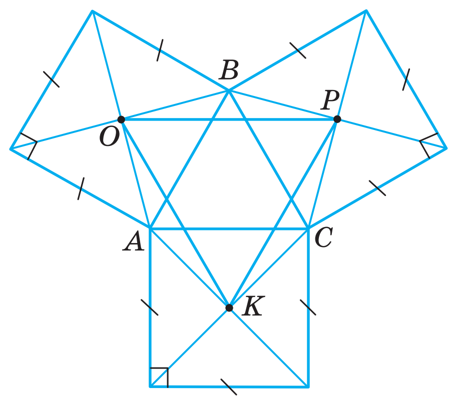


Рис. 237

14.8. Правильные $2n$-угольник и n-угольник со сторонами m и k соответственно вписаны в окружность радиусом R.

Докажите, что $m = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - k^2}}$.

14.9. а) Три окружности одного радиуса попарно касаются друг друга. Найдите радиус этих окружностей, если радиус меньшей окружности, касающейся всех данных, равен 8.

б) Три окружности одного радиуса попарно касаются друг друга. Найдите радиус этих окружностей, если радиус большей окружности, касающейся всех данных, равен 6.

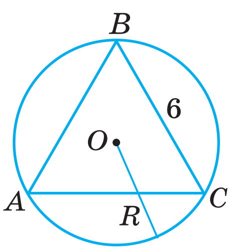
14.10. а) Вершины правильного 12-угольника соединили через одну. Найдите площадь 12-угольника, если радиус окружности, которая вписана в образовавшийся многоугольник, равен 3.

б) Вершины правильного восьмиугольника соединили через одну. Найдите площадь восьмиугольника, если периметр образовавшегося многоугольника равен 8.

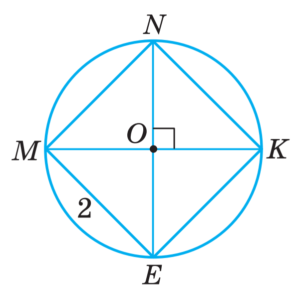
§ 15. Правильный треугольник, четырехугольник, шестиугольник

15.1. Используя данные рисунков 238, *а*)—*и*), найдите неизвестные величины.

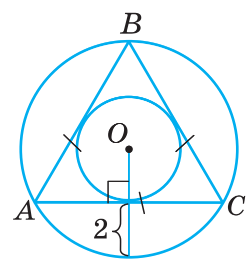
а) $\smile AB = \smile BC = \smile AC$; R — ?



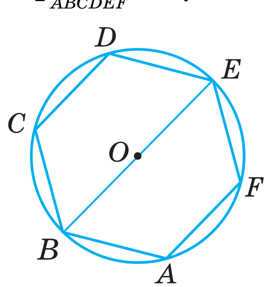
б) ON — ?



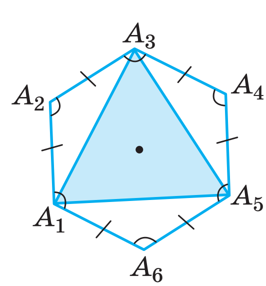
в) OA — ?



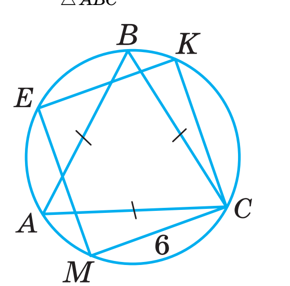
г) $ABCDEF$ — правильный 6-угольник, $BE > AF$ на 6; P_{ABCDEF} — ?



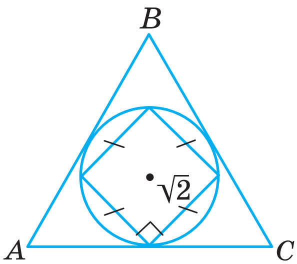
д) $S_{A_1A_3A_5} = 12$; $S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$ — ?



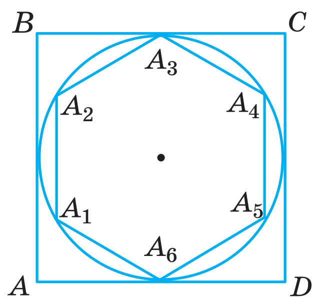
е) $CMEK$ — квадрат; $S_{\triangle ABC}$ — ?



ж) $\triangle ABC$ — равносторонний; $S_{\triangle ABC}$ — ?



з) $ABCD$ и $A_1A_2\ldots A_6$ — правильные многоугольники; $S_{ABCD} = 16$; $S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$ — ?



и) $A_1A_2\ldots A_6$ — правильный 6-угольник, $P_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} = 12$; $P_{\triangle ABC}$ — ?

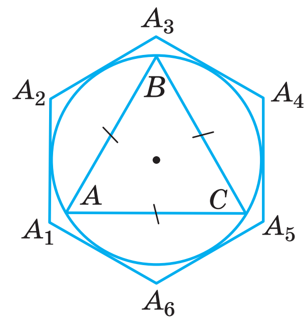


Рис. 238

15.2. а) Сторона правильного треугольника в два раза больше стороны правильного шестиугольника. Найдите отношение радиуса описанной около этого треугольника окружности к радиусу описанной около шестиугольника окружности.

б) Радиусы окружностей, вписанных в правильные шестиугольник и треугольник, равны. Найдите отношение сторон этих шестиугольника и треугольника.

15.3. а) Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен 18 см. Найдите периметр правильного четырехугольника, описанного около этой окружности.

б) Периметр правильного четырехугольника, вписанного в окружность, равен 16 см. Найдите периметр правильного треугольника, описанного около этой окружности.

15.4. а) Радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен $2\sqrt{3}$. Найдите сторону правильного четырехугольника, описанного около этой окружности.

б) Радиус окружности, вписанной в правильный четырехугольник, равен 2. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, проходящей через все вершины этого правильного четырехугольника.

15.5. а) Докажите, что площадь правильного вписанного в окружность шестиугольника равна $\frac{3}{4}$ площади правильного шестиугольника, описанного около той же окружности.

б) Докажите, что площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно стороне правильного вписанного в окружность четырехугольника, а боковая сторона — стороне правильного треугольника, вписанного в окружность того же радиуса, равна квадрату радиуса, увеличенному в $\frac{\sqrt{5}}{2}$ раза.

15.6. а) В окружности радиуом 5 см хорда CM и диаметр AB взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P, причем $AP : PB = 3 : 1$. Найдите периметр треугольника ACM.

б) Диаметр AE и хорда CK окружности взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке T, причем $ET : AT = 1 : 3$. Найдите радиус окружности, если периметр треугольника ACK равен $18\sqrt{3}$ см.

15.7. а) В квадрат вписана окружность, а в нее — правильный шестиугольник, площадь которого равна $18\sqrt{3}$. Найдите площадь квадрата.

б) В правильный треугольник вписана окружность, а в нее — правильный шестиугольник, площадь которого равна $18\sqrt{3}$. Найдите площадь правильного треугольника.

15.8. а) $ABCDMN$ — правильный шестиугольник. Площадь треугольника ABC равна 5. Найдите площадь шестиугольника.

б) Площадь правильного шестиугольника $ABCDMN$ равна 60. Найдите площадь четырехугольника $ACDM$.

15.9. а) Меньшая диагональ правильного шестиугольника равна $6\sqrt{3}$ см. Найдите периметр шестиугольника.

б) Меньшая диагональ правильного шестиугольника равна $9\sqrt{3}$ см. Найдите его бо́льшую диагональ.

15.10. а) В правильный треугольник со стороной 6 см вписана окружность. Затем в этот треугольник вписали еще три окружности, касающиеся первой окружности и двух сторон треугольника. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются центры этих трех окружностей.

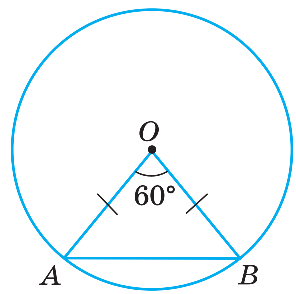
б) В правильный треугольник, сторона которого равна 8 см, вписаны три равные окружности, попарно касающиеся друг друга. Каждая из них касается двух сторон данного треугольника. Найдите радиус этих окружностей.

15.11. На сторонах квадрата вне его построены правильные треугольники. Их вершины, не являющиеся вершинами квадрата, последовательно соединены. Найдите периметр полученного таким образом четырехугольника, если сторона данного квадрата равна 5.

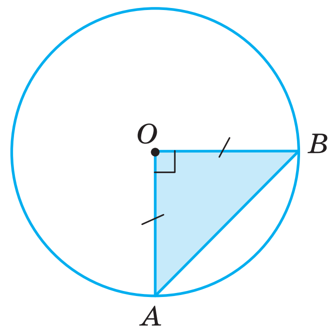
§ 16. Нахождение длины окружности и площади круга

16.1. Используя данные рисунков 239, *а)*—*ж)*, найдите неизвестные величины.

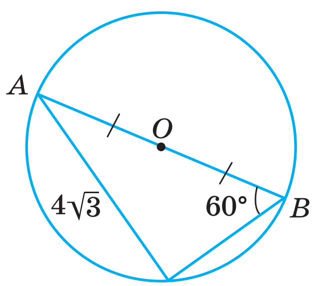
а) $P_{\triangle AOB} = 12$; $C_{\text{окр.}}$ — ?



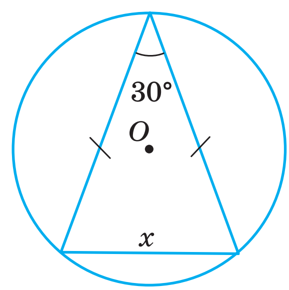
б) $S_{\triangle AOB} = 4{,}5$; $S_{\text{кр.}}$ — ?



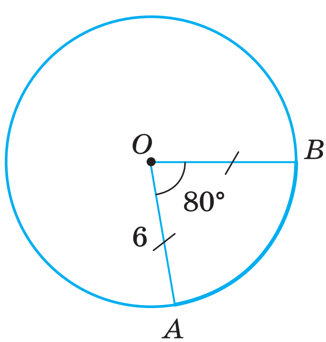
в) $S_{\text{кр.}}$ — ?



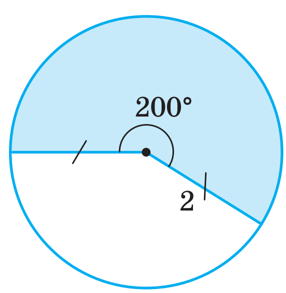
г) $C_{\text{окр.}} = 16\pi$; x — ?



д) $l_{\smile AB}$ — ?



е) $S_{\text{цв. сектора}}$ — ?



ж) $S_{\text{сегмента}}$ — ?

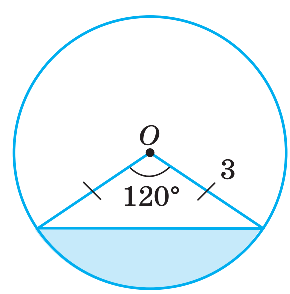


Рис. 239

16.2. а) Найдите длину окружности, вписанной в квадрат, площадь которого равна 6.

б) Найдите длину окружности, вписанной в правильный треугольник, площадь которого равна $9\sqrt{3}$.

16.3. а) Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, вписанной в правильный шестиугольник, если площадь этого шестиугольника равна $36\sqrt{3}$.

б) Найдите площадь круга, ограниченного вписанной в правильный шестиугольник окружностью, если радиус описанной около этого шестиугольника окружности равен 8.

16.4. а) Длина окружности равна 24π см. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

б) Площадь круга равна 81π см^2. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в этот круг.

16.5. а) Круг вписан в квадрат со стороной 10 см. Найдите площадь части квадрата, находящейся вне круга.

б) Круг вписан в правильный треугольник со стороной 4 см. Найдите площадь части этого треугольника, находящейся вне круга.

16.6. а) Найдите приближенно длину дуги окружности, если ее градусная мера составляет 15°, а диаметр окружности равен 16 см (при вычислениях примите $\pi \approx 3$).

б) Найдите приближенно длину дуги окружности, если ее градусная мера составляет 125°, а диаметр окружности равен 6 см (при вычислениях примите $\pi \approx 3$).

16.7. а) Найдите приближенно площадь сектора круга, если его градусная мера составляет 66°, а диаметр круга равен $4\sqrt{5}$ см (при вычислениях примите $\pi \approx 3$).

б) Найдите приближенно площадь сектора круга, если его градусная мера составляет 170°, а диаметр круга равен $4\sqrt{3}$ см (при вычислениях примите $\pi \approx 3$).

16.8. а) Найдите градусную меру дуги окружности радиусом 10, если длина этой дуги равна 4π.

б) Найдите градусную меру сектора круга радиусом 6, если площадь этого сектора равна 8π.

16.9. а) Градусная мера дуги окружности радиусом 10 см равна $288°$. Найдите диаметр окружности, длина которой равна длине данной в условии дуги.

б) Градусная мера дуги окружности с диаметром 8 см равна $18°$. Найдите радиус окружности, длина которой равна длине данной в условии дуги.

16.10. а) Площадь сектора круга с градусной мерой $54°$ равна 3π см^2. Найдите длину дуги окружности, ограничивающей этот сектор.

б) Длина дуги окружности с градусной мерой $216°$ равна 3π см. Найдите площадь сектора круга того же радиуса, ограниченного этой дугой.

16.11. а) В окружность вписан квадрат, в него вписана окружность, в которую вписан правильный треугольник со стороной $\sqrt{3}$ см. Найдите площадь части круга, ограниченного большей из окружностей, находящейся вне квадрата.

б) В окружность радиусом 2 см вписан правильный треугольник, в него вписана окружность, в которую вписан квадрат. Найдите площадь части круга, ограниченного меньшей окружностью, находящейся вне квадрата.

16.12. а) В окружности длиной 72π см проведена хорда, стягивающая дугу в $90°$. Найдите длину этой хорды.

б) В окружности длиной 24π см проведена хорда, равная 12 см. Найдите градусную меру большей из дуг, стягиваемых этой хордой.

16.13. а) Радиусы двух концентрических окружностей равны 4 и 6. Найдите отношение площади кольца к площади круга, ограниченного меньшей окружностью.

б) Радиусы двух концентрических окружностей равны $\sqrt{5}$ и 5. Найдите отношение площади кольца к площади круга, ограниченного большей окружностью.

16.14. а) Найдите площадь сегмента круга, диаметр которого равен 8 см, если хорда, ограничивающая этот сегмент, равна 4 см.

б) Найдите площадь сегмента круга, диаметр которого равен 6 см, если хорда, ограничивающая этот сегмент, равна $3\sqrt{2}$ см.

16.15. а) В круге радиусом 4 проведены две параллельные хорды так, что центр круга лежит между ними. Одна из них стягивает дугу в 60°, а другая — в 120°. Найдите площадь части круга, заключенной между хордами.

б) В круге радиусом 2 проведены две параллельные хорды по одну сторону от центра. Одна из них стягивает дугу в 60°, а другая — в 120°. Найдите площадь части круга, заключенной между хордами.

16.16. а) Дан полукруг с диаметром AC. Хорды AK и CP отсекают дуги в 30°. Найдите площадь фигуры, ограниченной дугой KP и хордами AK и AP, если площадь полукруга равна 9 см^2.

б) Дан полукруг с диаметром AB. Градусные меры дуг AC и BP равны по 45°. Найдите площадь полукруга, если площадь фигуры, ограниченной хордами AC и AP и дугой CP, равна 12 см^2.

16.17. а) Три окружности радиусами 2 см, 4 см, 6 см попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите длину окружности, которая проходит через все три точки касания этих окружностей.

б) Три круга радиусами 2 см, 3 см, 10 см попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите площадь круга, который проходит через все три точки касания этих окружностей.

16.18. Найдите площадь круга, в сегмент которого, соответствующий хорде длиной 6, вписан квадрат со стороной 2 (две вершины квадрата лежат на дуге сегмента, две — на хорде).

16.19. В полукруг радиусом 8 см вписана окружность, которая касается диаметра BP в точке K, причем $BK : KP = 1 : 3$. Найдите длину вписанной окружности.

16.20. К двум окружностям радиусами 3 и 1, касающимся внешним образом, проведена общая внешняя касательная. Найдите площадь фигуры, ограниченной окружностями и касательной.

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 7—9-х КЛАССОВ

Треугольники

1. а) Величины углов треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найдите наибольший из углов, если наименьший по величине угол равен $50°$.

б) Наибольший из углов треугольника в 11 раз больше наименьшего угла. Найдите наименьший по величине угол треугольника, если известно, что величины углов треугольника составляют арифметическую прогрессию.

2. а) Угол при вершине равнобедренного треугольника в три раза меньше внешнего угла при основании этого треугольника. Найдите угол при вершине треугольника.

б) Угол при вершине равнобедренного треугольника на $15°$ меньше внешнего угла при основании этого треугольника. Найдите внутренний угол при основании треугольника.

3. а) В треугольнике проведены две биссектрисы. Один из углов, образованных при их пересечении, равен $115°$. Найдите угол треугольника, из вершины которого не проведена биссектриса.

б) Один из углов треугольника равен $106°$. Из вершин двух других углов проведены биссектрисы треугольника. Найдите острый угол, который образуется при их пересечении.

4. а) Докажите, что если на сторонах угла от вершины отложить отрезки равной длины и из полученных точек восстановить перпендикуляры к сторонам угла, то точка пересечения этих перпендикуляров будет принадлежать биссектрисе угла.

б) Докажите, что прямая, содержащая медиану треугольника, равноудалена от двух его вершин.

5. а) Выберите наборы длин отрезков, которые не могут быть сторонами треугольника:

1) 4 см, 8 см, 9 см; 2) 12 см, 12 см, 25 см;

3) 7 см, 8 см, 15 см; 4) 3 см, $\sqrt{2}$ см, 2 см.

б) Выберите наборы длин отрезков, которые могут быть сторонами треугольника:

1) 1 см, $\sqrt{3}$ см, 2 см; 2) 10 см, 10 см, 19 см;

3) 6 см, 5 см, 11 см; 4) 3 см, 6 см, 2 см.

6. а) Найдите площадь треугольника, образованного средними линиями прямоугольного треугольника с гипотенузой 26 см и катетом 24 см.

б) Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 8,5 см, а один из катетов этого треугольника — 8 см. Найдите площадь треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

7. а) В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, $BC = 12$ см. Найдите проекцию катета AC на гипотенузу.

б) В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$. Проекция катета AB на гипотенузу равна 15 см. Найдите гипотенузу треугольника.

8. а) В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, равна $2\sqrt{7}$ и делит гипотенузу на отрезки, разность длин которых равна 12. Найдите площадь треугольника.

б) В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит гипотенузу на отрезки, разность длин которых равна 10. Найдите площадь треугольника, если меньший катет равен $2\sqrt{7}$.

9. а) В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CK — высота, $\sin\angle A = \frac{5}{13}$. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника AKC равна 1,44.

б) В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CH — высота, $\cos\angle A = \frac{5}{13}$. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника AHC равна 2,5.

10. а) Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 16 и 18. Найдите гипотенузу треугольника.

б) Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 25 и 18. Найдите периметр данного треугольника.

11. а) Катет прямоугольного треугольника равен 18 см. Точка, принадлежащая данному катету, находится на расстоянии 8 см от гипотенузы и от другого катета. Найдите периметр треугольника.

б) Точка, принадлежащая катету прямоугольного треугольника, делит его в отношении 3 : 5, считая от вершины прямого угла, и равноудалена от гипотенузы и другого катета. Найдите периметр данного треугольника, если гипотенуза равна 30 см.

12. а) Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в него, равен 6, а один из катетов — 20.

б) Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в него, равен 4, а один из отрезков, на которые гипотенуза делится точкой касания с вписанной окружностью, равен 6.

13. а) В разностороннем треугольнике средний по величине угол равен 60°. Наименьшая сторона треугольника в четыре раза короче наибольшей стороны. Найдите тангенс наименьшего угла треугольника.

б) В разностороннем треугольнике средний по величине угол равен 60°. Наибольшая сторона треугольника в пять раз больше наименьшей стороны. Найдите котангенс наименьшего угла треугольника.

14. а) В треугольнике HKP $HK = 8$ см, $KP = 12$ см, $HP = 15$ см, KO — биссектриса треугольника. Найдите разность длин отрезков OP и HO.

б) В треугольнике ABC $AB : BC = 3 : 4$, $AC = 14$ см, BK — биссектриса. Найдите разность длин отрезков KC и AK.

15. а) Одна из сторон треугольника равна 8 см. Расстояние от точки пересечения медиан треугольника до этой стороны равно 4 см. Найдите площадь данного треугольника.

б) Площадь треугольника равна 30 см^2, одна из его сторон — 12 см. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до этой стороны.

16. а) Одна из сторон треугольника равна 26 см, а медианы, проведенные к двум другим сторонам, равны 30 см и 39 см. Найдите площадь треугольника.

б) Одна из сторон треугольника равна 20 см, а медианы, проведенные к двум другим сторонам, равны 18 см и 24 см. Найдите площадь треугольника.

17. а) Стороны треугольника равны 6 см, 7 см и 8 см. Найдите синус наибольшего угла треугольника.

б) В треугольнике ABC $\angle B > 90°$, $BC = 2$ см, $AB = 10$ см, $\sin \angle B = 0{,}6$. Найдите длину стороны AC.

18. а) В треугольнике ABC $BC = 6$ см, $\cos \angle C = \frac{4}{9}$, $\sin \angle A = \frac{\sqrt{65}}{12}$. Найдите длину стороны AB.

б) В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $\cos \angle A = \frac{3}{8}$, $\sin \angle C = \frac{\sqrt{55}}{10}$. Найдите длину стороны BC.

19. а) В равнобедренном треугольнике боковая сторона в полтора раза больше радиуса описанной около него окружности. Найдите синус угла при основании треугольника.

б) Основание равнобедренного треугольника в полтора раза меньше радиуса описанной около него окружности. Найдите синус угла при вершине треугольника.

20. а) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 40. Найдите основание треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении 8 : 3.

б) Основание равнобедренного треугольника равно 20. Найдите боковую сторону треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении 7 : 2.

21. а) В треугольнике ABC $AB = BC = 12$ см, BK — высота треугольника. Точка P делит BK в отношении 1 : 2, считая от вершины B. Через точку P проведена прямая, параллельная стороне BC. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника ABC.

б) На высоте CP равнобедренного треугольника ABC ($AC = CB$) взята точка T так, что $PT : PC = 4 : 5$. Через точку T проведена прямая, параллельная стороне AC. Найдите отрезок этой прямой, концы которого лежат на сторонах треугольника ABC, если $CB = 20$ см.

22. а) Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника со сторонами 36 см и 18 см.

б) Найдите диаметр окружности, описанной около равнобедренного треугольника со сторонами 8 см и 20 см.

23. а) Площади двух подобных прямоугольных треугольников равны $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{225\sqrt{3}}{8}$. Найдите гипотенузу большего треугольника, если один из катетов меньшего треугольника равен $5\sqrt{3}$.

б) Отношение площадей двух подобных прямоугольных треугольников равно $2 : 9$. Найдите гипотенузу большего треугольника, если катеты меньшего треугольника равны $4\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$.

24. а) Две меньшие стороны тупоугольного треугольника равны 3 и 8. Площадь треугольника равна $6\sqrt{3}$. Найдите длину большей стороны треугольника.

б) Две стороны остроугольного треугольника равны 4 и 3. Площадь треугольника равна $3\sqrt{3}$. Найдите длину третьей стороны треугольника.

25. а) В треугольнике ABC точка P лежит на стороне AC, а точка E — на стороне AB. Известно, что $AP = 2PC$ и $AE = 3BE$. Найдите отношение площадей треугольников ABC и BPE.

б) В треугольнике ABC точка P — середина стороны AC, а точка E лежит на стороне AB так, что $2AE = 3BE$. Найдите отношение площадей треугольников ABC и BPE.

26. а) Дан треугольник ABC. На стороне AC взята точка K, а на стороне BC — точка M так, что $CK : AC = 5 : 6$, $S_{\triangle KMC} : S_{AKMB} = 5 : 6$. Найдите отношение $CM : MB$.

б) Дан треугольник ABC. На стороне AB взята точка T, а на стороне CB — точка E так, что $AT : TB = 2 : 3$, $S_{ACET} : S_{\triangle TBE} = 5 : 4$. Найдите отношение $CE : BE$.

27. а) В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка K так, что $AM = \frac{2}{5}AC$, $BK = \frac{1}{3}BC$. Отрезки BM и AK пересекаются в точке O. Найдите отношение $AO : OK$.

б) В треугольнике ABC на стороне AB взята точка T, а на стороне BC — точка P так, что $AT = 4BT$, $5PC = 3BP$. Отрезки AP и CT пересекаются в точке O. Найдите отношение $CO : OT$.

28. а) В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки P и E соответственно, причем $AP : BP = 11 : 1$, $CE : BE = 2 : 1$, $\angle BAE = \angle BCP$, а $\angle ABC = 60°$. Найдите отношение радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, к радиусу окружности, вписанной в этот треугольник.

б) В треугольнике PKE на сторонах PK и KE взяты точки C и A соответственно, причем $PC : CK = 10 : 1$, $KA : AE = 2 : 9$, $\angle APK = \angle CEK$, а $\angle PKE = 45°$. Найдите отношение радиуса окружности, описанной около треугольника PKE, к радиусу окружности, вписанной в этот треугольник.

29. а) Треугольник ABC, площадь которого равна 60, разделен на четыре равные по площади части тремя отрезками, параллельными стороне AB. Найдите расстояние от вершины C до отрезка наименьшей длины, если $AB = 10$.

б) Треугольник ABC, площадь которого равна 80, разделен на четыре равные по площади части тремя отрезками, параллельными стороне AC. Высота треугольника, проведенная к стороне AC, равна 10. Найдите длину наименьшего из проведенных трех отрезков.

30. а) Высота треугольника, равная 4 см, делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, относящиеся как 1 : 8. Отрезок, параллельный этой высоте, делит треугольник на две равновеликие части. Найдите длину этого отрезка.

б) В треугольнике проведен отрезок, перпендикулярный одной из сторон, так, что треугольник делится на две равновеликие части. Длина отрезка равна 6 см. Найдите высоту треугольника, параллельную этому отрезку, зная, что она делит сторону, к которой проведена, на отрезки, отношение которых равно 1 : 3.

31. а) BP — высота треугольника ABC, точка E — середина стороны BC, $AB = 30$, $BC = 26$, $AC = 28$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BPE.

б) BH — высота треугольника ABC, точка E — середина стороны BC, $AB = 10\sqrt{10}$, $AC = 26$, $BC = 34$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BEH.

32*. а) В треугольнике ABC биссектриса BM и медиана AE взаимно перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4 см. Найдите бо́льшую из сторон треугольника ABC.

б) В треугольнике ABC биссектриса BK и медиана AH взаимно перпендикулярны и равны 3 см и 6 см соответственно. Найдите наибольшую из сторон треугольника ABC.

33*. Докажите, что если длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то отрезок прямой, соединяющий точку пересечения медиан с центром вписанной в треугольник окружности, параллелен средней по длине стороне.

Четырехугольники

34. а) Одна из сторон параллелограмма равна 3 см, а один из углов — 150°. Найдите периметр параллелограмма, если его площадь равна 6 см^2.

б) Площадь параллелограмма равна $8\sqrt{3}$ см^2. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 2 см, а один из углов — 120°.

35. а) В параллелограмме $ABCK$ $AB = 6$ см, BM — биссектриса угла B, причем точка M делит сторону AK в отношении $2 : 1$, считая от точки A. Найдите периметр параллелограмма.

б) В параллелограмме $EKOP$ $EP = 12$ см, EA — биссектриса угла E, причем точка A лежит на стороне OK и KA больше AO на 2 см. Найдите периметр параллелограмма.

36. а) Найдите площадь параллелограмма, если его диагонали равны 4 см и 6 см, а отношение двух его углов — $1 : 2$.

б) Найдите площадь параллелограмма, если его диагонали равны 8 см и 6 см, а отношение двух его углов — $1 : 5$.

37*. а) Четырехугольник $ABCK$ такой, что около него можно описать и в него можно вписать окружности. Разность длин сторон AK и BC равна разности длин сторон AB и CK. Докажите, что диагональ AC — диаметр описанной окружности.

б) Около четырехугольника $ABCE$ описана окружность. Продолжения хорды AB за точку B и хорды CE за точку C пересекаются в точке P, причем угол APE равен $60°$. Угол ABE в три раза больше угла BAC. Докажите, что AE — диаметр окружности.

38. а) Стороны параллелограмма равны 1 см и 2 см, а одна из диагоналей — $\sqrt{7}$ см. Найдите меньшую высоту параллелограмма.

б) Стороны параллелограмма равны 5 см и $2\sqrt{3}$ см, а одна из диагоналей — $\sqrt{7}$ см. Найдите бóльшую высоту параллелограмма.

39. а) В параллелограмме $ABCD$ угол CAD равен $30°$, вершина B удалена от диагонали AC на 3 см, а от стороны AD — на 7 см. Найдите площадь параллелограмма.

б) В параллелограмме $ABCD$ угол CAD равен $45°$, вершина B удалена от диагонали AC на 2 см, а от стороны AD — на $2\sqrt{2}$ см. Найдите площадь параллелограмма.

40. а) Одна из диагоналей параллелограмма является его высотой, а углы параллелограмма относятся как 3 : 1. Найдите меньшую сторону параллелограмма, если его периметр равен $4(1+\sqrt{2})$ см.

б) Периметр параллелограмма равен 30 см. Диагональ параллелограмма перпендикулярна его стороне. Найдите бóльшую сторону параллелограмма, если его углы относятся как 1 : 2.

41. а) Стороны параллелограмма равны $7\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2}$. Острый угол параллелограмма равен меньшему углу между его диагоналями. Найдите бóльшую диагональ параллелограмма.

б) Стороны параллелограмма равны $7\sqrt{2}$ и $6\sqrt{2}$. Острый угол параллелограмма равен меньшему углу между его диагоналями. Найдите сумму длин диагоналей параллелограмма.

42. а) В квадрат, площадь которого равна 18, вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон прямоугольника относятся как 2 : 1. Найдите площадь прямоугольника.

б) В квадрат, площадь которого равна 32, вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон прямоугольника относятся как 4 : 1. Найдите площадь прямоугольника.

43. а) Диагональ прямоугольника равна 10, а косинус угла между диагоналями равен 0,8. Найдите площадь прямоугольника.

б) Площадь прямоугольника равна 40, а косинус угла между диагоналями равен 0,6. Найдите длину диагонали прямоугольника.

44. а) Бóльшая сторона прямоугольника равна $\sqrt{10}$, а косинус угла между диагоналями равен 0,25. Найдите длину диагонали.

б) Меньшая сторона прямоугольника равна $2\sqrt{3}$, а косинус угла между диагоналями равен $-\frac{1}{3}$. Найдите длину диагонали.

45. а) Найдите сторону ромба, если его площадь равна 32, а один из углов равен $150°$.

б) Найдите периметр ромба, если один из его углов равен 45°, а площадь равна $18\sqrt{2}$.

46. а) Высота ромба равна 5 см, синус угла ромба равен 0,4. Найдите площадь ромба.

б) Высота ромба равна 6 см, синус угла ромба равен 0,6. Найдите периметр ромба.

47. а) Периметр ромба равен 16 см, а отношение величин углов ромба — 2 : 1. Найдите площадь ромба.

б) Один из углов ромба в два раза больше другого. Найдите длину большей диагонали ромба, если его меньшая диагональ равна 4 см.

48. а) В ромбе $ABCD$ угол A — острый, BH — высота, косинус угла DBH равен $\frac{2}{3}$. Найдите площадь ромба, если $BH = 4\sqrt{5}$.

б) В ромбе $ABCD$ угол A — острый, BH — высота, косинус угла DBH равен $\frac{2}{3}$. Найдите площадь ромба, если $BD = 6\sqrt{5}$.

49. а) Окружность, вписанная в ромб, точкой касания делит его сторону в отношении 1 : 4. Найдите синус угла ромба.

б) В ромб, синус угла которого равен 0,6, вписана окружность. Найдите, в каком отношении точка касания делит сторону ромба.

50. а) В ромб вписана окружность. Сторона ромба точкой касания делится на отрезки, длины которых равны 16 см и 9 см. Найдите площадь ромба.

б) В ромб вписана окружность. Один из отрезков, на которые сторона ромба делится точкой касания, равен 4 см. Найдите площадь ромба, если высота ромба равна 12 см.

51. а) Диагонали ромба, площадь которого равна 24, относятся как 3 : 4. Найдите высоту ромба.

б) Диагонали ромба, площадь которого равна $\frac{20\sqrt{3}}{3}$, относятся как $1 : \sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

52. а) Периметр ромба равен 68. Периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон ромба, равен 46. Найдите площадь этого четырехугольника.

б) Середины сторон ромба последовательно соединили и получили четырехугольник с периметром 56. Найдите площадь ромба, если его периметр равен 80.

53. а) Высота ромба равна 4, а косинус угла между высотой и большей диагональю ромба равен 0,6. Найдите площадь ромба.

б) Высота ромба равна 2, а тангенс угла между высотой и большей диагональю ромба равен $\frac{4}{3}$. Найдите площадь ромба.

54. а) Найдите площадь равнобедренной трапеции, основания которой равны 4 см и 12 см, а острый угол равен 60°.

б) Один из углов равнобедренной трапеции равен 30°. Найдите площадь трапеции, если ее боковая сторона равна $8\sqrt{3}$ см, а меньшее основание — 6 см.

55. а) Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 5 см, а величины углов трапеции относятся как 2 : 1. Длина отрезка, соединяющего вершину тупого угла трапеции с серединой большего основания, также равна 5 см. Найдите периметр трапеции.

б) В равнобедренной трапеции меньшее основание равно боковой стороне, а отношение большего основания к боковой стороне — 2 : 1. Найдите величину острого угла трапеции.

56. а) Большее основание равнобедренной трапеции равно $6\sqrt{3}$, а угол при этом основании — 75°. Диагональ трапеции образует с основанием угол 45°. Найдите меньшее основание трапеции.

б) Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 8, один из углов трапеции — $75°$. Диагональ трапеции образует с основанием угол $45°$. Найдите большее основание трапеции.

57. а) Основания трапеции равны 18 см и 4 см. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

б) Меньшее основание трапеции равно 6 см, а длина отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции, равна 5 см. Найдите большее основание трапеции.

58. а) В равнобедренной трапеции из вершины тупого угла проведена высота. Больший из отрезков, на которые делится большее основание этой высотой, равен 12 см. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 5 см.

б) В равнобедренной трапеции из вершины тупого угла проведена высота. Больший из отрезков, на которые делится большее основание этой высотой, равен 10 см. Найдите высоту трапеции, если ее площадь равна 60 см^2.

59. а) Диагонали трапеции равны 4 см и 6 см, а средняя линия — 3 см. Найдите площадь трапеции.

б) Диагонали трапеции равны 2 см и 8 см, а средняя линия — 4 см. Найдите площадь трапеции.

60. а) В равнобедренной трапеции основания равны 10 и 6, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

б) Высота равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 15. Найдите площадь трапеции.

61. а) В равнобедренной трапеции большее основание равно 10, боковая сторона — $2\sqrt{10}$, а диагональ — $2\sqrt{15}$. Найдите площадь трапеции.

б) В равнобедренной трапеции диагональ и большее основание равны по 5, а боковая сторона трапеции — 4. Найдите площадь трапеции.

62. а) Диагональ равнобедренной трапеции является биссектрисой ее тупого угла. Меньшее основание трапеции равно 6, а боковая сторона — 10. Найдите площадь трапеции.

б) Диагональ равнобедренной трапеции является биссектрисой ее острого угла. Большее основание трапеции равно 6, а боковая сторона — 4. Найдите площадь трапеции.

63. а) Через точку O пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Докажите, что точка O делит пополам отрезок, отсекаемый от прямой боковыми сторонами трапеции.

б) Докажите, что в трапеции, диагонали которой являются биссектрисами углов при одном из оснований, длины трех сторон равны.

64. а) BC и AD — основания трапеции $ABCD$, причем $AD > BC$, $\angle ABD = \angle BCD$, $CB = 6$, $DB = 9$. Найдите основание AD.

б) $MNPK$ — трапеция с основаниями MK и NP, причем $MK > NP, \angle MNK = \angle NPK$, $NP = 4$, $NK = 6$. Найдите основание MK.

65. а) В прямоугольной трапеции диагональ, равная 8 см, является биссектрисой ее острого угла. Расстояние от вершины тупого угла трапеции до этой диагонали равно 3 см. Найдите большее основание трапеции.

б) В прямоугольной трапеции диагональ, равная $4\sqrt{6}$ см, является биссектрисой ее острого угла. Расстояние от вершины тупого угла трапеции до этой диагонали равно 1 см. Найдите высоту трапеции.

66. а) Длина большей диагонали прямоугольной трапеции равна $\sqrt{58}$, средняя линия — 5,5, а площадь — 16,5. Найдите градусную меру острого угла трапеции.

б) Длина большей диагонали прямоугольной трапеции равна $2\sqrt{19}$, средняя линия — 5, а площадь — $10\sqrt{3}$. Найдите градусную меру острого угла трапеции.

67. а) BC и AD — основания трапеции $ABCD$, причем $AD > BC$, O — точка пересечения ее диагоналей. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $BC : AD = 2 : 3$, а площадь треугольника ABO равна 15.

б) BC и AD — основания трапеции $ABCD$, причем $AD > BC$, O — точка пересечения ее диагоналей. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AO : OC = 5 : 2$, а площадь треугольника BOC равна 8.

68. а) В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD продолжены до пересечения в точке P. Найдите длину CD, если $AB : AP = 15 : 22$, а $PD = 66$ см.

б) В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD продолжены до пересечения в точке O. Найдите длину CD, если $AB : OB = 12 : 7$, а $OD = 57$ см.

69. а) Острые углы трапеции равны $72°$ и $18°$, основания — 10 см и 26 см. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

б) Большее основание трапеции равно 30 см, а острые углы равны $64°$ и $26°$. Найдите меньшее основание трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины ее оснований, равна 11 см.

70. а) Биссектриса острого угла равнобедренной трапеции делит боковую сторону на отрезки 20 см и 30 см, считая от меньшего основания. Найдите площадь трапеции, если ее большее основание равно 66 см.

б) Биссектриса острого угла равнобедренной трапеции делит боковую сторону на отрезки, отношение которых равно 11 : 12, считая от меньшего основания. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 2 см и 12 см.

71. а) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 12$ и $BC = 8$ на луче BC взята точка P так, что луч AP делит трапецию на две равновеликие части. Найдите длину отрезка CP.

б) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 9$ и $BC = 6$ на луче BC взята точка P так, что луч AP делит трапецию на треугольник и четырехугольник, причем площадь треугольника в два раза меньше площади четырехугольника. Найдите длину отрезка CP.

72. а) Диагонали трапеции, длина одной из которых равна 5, взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 4.

б) Диагонали трапеции, длина одной из которых равна 13, взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 12.

73. а) Средняя линия, равная 10 см, делит трапецию на две части, площади которых относятся как 3 : 5. Найдите меньшее основание трапеции.

б) Средняя линия делит трапецию на две части, площади которых относятся как 3 : 4. Найдите длину средней линии трапеции, если ее меньшее основание равно 10 см.

74. а) В равнобедренную трапецию вписана окружность радиусом 2. Найдите меньшую сторону этой трапеции, если ее площадь равна 20.

б) Около окружности диаметром $2\sqrt{6}$ описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна $10\sqrt{6}$. Найдите бо́льшую сторону трапеции.

75. а) В равнобедренную трапецию, одно из оснований которой равно 4, вписана окружность радиусом 1. Найдите периметр трапеции.

б) В равнобедренную трапецию, одно из оснований которой равно 18, вписана окружность радиусом 3. Найдите боковую сторону трапеции.

76. а) В трапецию вписана окружность радиусом 6. Точка касания делит большее основание на отрезки 9 и 12. Найдите площадь трапеции.

б) В трапецию вписана окружность радиусом 4. Точка касания делит меньшее основание на отрезки 1 и 2. Найдите площадь трапеции.

77. а) Трапеция вписана в окружность радиусом 5 см, диагональ трапеции, равная 8 см, перпендикулярна ее боковой стороне. Найдите высоту трапеции.

б) В окружность радиусом 6,5 см вписана трапеция. Диагональ трапеции равна 12 см и перпендикулярна ее боковой стороне. Найдите среднюю линию трапеции.

78. а) В окружность вписана трапеция, боковая сторона которой равна 15, а средняя линия — 16. Большее основание трапеции является диаметром окружности. Найдите площадь трапеции.

б) Трапеция вписана в окружность, диаметром которой является большее основание трапеции. Боковая сторона трапеции равна $\sqrt{17}$, а средняя линия — 16. Найдите площадь трапеции.

79. а) Около трапеции, основания которой равны 12 и 20, описана окружность. Центр окружности лежит на большем основании трапеции. Найдите площадь трапеции.

б) Трапеция вписана в окружность радиусом 17, меньшее основание трапеции равно 16. Найдите площадь трапеции, если центр окружности лежит на большем основании трапеции.

80*. Докажите, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов ее боковых сторон и удвоенного произведения ее оснований, т. е. $d_1^2 + d_2^2 = b^2 + d^2 + 2ac$, где b, d — боковые стороны трапеции, a, c — основания трапеции, d_1, d_2 — диагонали трапеции.

81. а) Четырехугольник $ABCD$ с равными углами B и D вписан в окружность. Найдите площадь четырехугольника, если $AC = 13$ см, $BC = 5$ см, а $AD = 12$ см.

б) Четырехугольник $ABCD$ с равными углами B и D вписан в окружность. Найдите бо́льшую сторону четырехугольника, если $AC = 2\sqrt{13}$ см, $BC = 4$ см, а $AD = 5$ см.

82. а) Четырехугольник описан около окружности, радиус которой равен 3 см, сумма двух противоположных сторон четырехугольника равна 12 см. Найдите площадь четырехугольника.

б) В четырехугольник вписана окружность. Найдите радиус этой окружности, если площадь четырехугольника равна 40 см^2, а сумма двух противоположных сторон равна 10 см.

83. а) Прямоугольная трапеция описана около окружности. Найдите бóльшую боковую сторону трапеции, если ее основания равны 2 и 3.

б) Около прямоугольной трапеции описана окружность. Найдите меньшую боковую сторону трапеции, если ее основания равны 3 и 6.

84. а) Диагонали AC и BK четырехугольника $ABCK$ пересекаются в точке O. Площади треугольников ABO и COK равны 3 и 4 соответственно, а площадь треугольника BOC на 200 % больше площади треугольника COK. Найдите площадь четырехугольника $ABCK$.

б) Диагонали AC и BP четырехугольника $ABCP$ пересекаются в точке O. Площади треугольников ABO и COP равны 6 и 18 соответственно, а площадь треугольника BOC на 100 % больше площади треугольника COP. Найдите площадь четырехугольника $ABCP$.

85*. а) В параллелограмме $ABCK$ угол A острый. Из вершины A проведены высоты параллелограмма AM и AH к сторонам BC и CK соответственно, $MH : AC = 3 : 4$. Найдите отношение площадей треугольников MAH и ABC.

б) В параллелограмме $ABCP$ угол A острый, BM и BH — высоты параллелограмма, проведенные к сторонам AP и PC соответственно, $MH : BP = 2 : 3$. Найдите отношение площадей треугольников MBH и BPC.

Окружность

86. а) Окружность разделена тремя точками на дуги, градусные меры которых относятся как 2 : 7 : 3. Найдите градусную меру большего угла треугольника, вершинами которого являются эти точки.

б) Окружность разделена четырьмя точками на дуги, градусные меры которых относятся как 1 : 3 : 15 : 17 в указанном порядке. Найдите величину большего угла четырехугольника, вершинами которого являются эти точки.

87. а) Точка удалена от центра окружности на 4 и делит хорду этой окружности на отрезки 6 и 8. Найдите радиус окружности.

б) Точка делит хорду окружности на отрезки 2 и 8. Расстояние от этой точки до центра окружности равно 3. Найдите диаметр окружности.

88. а) В четырехугольнике $ABCD$ угол CBD равен 58°, угол ABD — 44°, а угол ADC — 78°. Найдите градусную меру угла CAD.

б) В четырехугольнике $ABCD$ угол BCA равен 80°, угол ACD — 28°, а угол BAD — 72°. Найдите градусную меру угла ABD.

89. а) Докажите, что перпендикуляры к хорде окружности, проведенные через ее концы, пересекают произвольный диаметр в точках, которые одинаково удалены от центра окружности.

б) Докажите, что если провести перпендикуляры из концов произвольного диаметра окружности на любую хорду этой окружности или ее продолжение, то основания этих перпендикуляров будут одинаково отстоять от соответствующих концов хорды.

90. а) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность так, что сторона AD является диаметром окружности и угол ABC равен 134°. Найдите градусную меру угла CAD.

б) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность так, что сторона AB является диаметром окружности и угол ADC равен 122°. Найдите градусную меру угла CAB.

91. а) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, угол BAD равен 70°, угол ADC — 80°, а угол ABD — 50°. Найдите величину острого угла между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

б) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, угол ADC равен 75°, угол BCD — 80°, а угол CBD — 30°. Найдите величину острого угла между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

92. а) Из точки вне окружности к ней проведены две секущие, образующие угол 45°. Градусная мера меньшей дуги, заключенной между сторонами угла, равна 30°. Найдите величину большей дуги.

б) Из точки вне окружности к ней проведены две секущие, образующие угол 50°. Градусная мера большей дуги, заключенной между сторонами угла, равна 120°. Найдите величину меньшей дуги.

93. а) Хорды MT и PK пересекаются в точке A, угол MAP равен 15°. Найдите градусную меру дуги MP, если она меньше градусной меры дуги TK в два раза.

б) Хорды AE и OC пересекаются в точке B, угол OBA равен 40°. Найдите градусную меру дуги OA, если она на 10° больше градусной меры дуги CE.

94. а) На прямой, содержащей хорду BC, взята точка A (точка B лежит между точками A и C). Градусная мера дуги BC равна $112°$. Касательная AK точкой касания K делит эту дугу в отношении $3 : 4$. Найдите величину угла BAK.

б) Хорда AC стягивает дугу AKC. Из точки B, взятой на прямой AC (точка A лежит между точками B и C), проведена касательная BT, причем точка касания T делит дугу AKC на две дуги, разность градусных мер которых равна $18°$. Найдите величину угла ABT.

95. а) В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = 5$, $BC = 12$. Найдите радиус окружности.

б) В окружности радиусом 8,5 пересекающиеся хорды AB и MK перпендикулярны, $MB = 15$. Найдите длину хорды AK.

96. а) В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, стороны AB и BC равны, M — точка пересечения диагоналей. Найдите AB, если $BM = 2$, а $MD = 6$.

б) Четырехугольник $ABCD$, в котором $AD = CD$, вписан в окружность. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке E. Найдите AD, если $BE = 4$, а $ED = 6$.

97. а) Из точки вне окружности к ней проведены две касательные. Угол между касательными равен $60°$, а расстояние между точками касания равно $8\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности.

б) Из точки вне окружности к ней проведены две касательные. Угол между касательными равен $120°$, а расстояние между точками касания равно $6\sqrt{3}$. Найдите диаметр окружности.

98. а) Из точки A вне окружности к ней проведена касательная. Расстояние от точки A до точки касания равно 15. Отрезок, соединяющий точку A с центром окружности O, пересекает окружность в точке P, причем AP больше PO на 1. Найдите радиус окружности.

б) Из точки A вне окружности к ней проведена касательная. Расстояние от точки A до точки касания равно 12. Отрезок, соединяющий точку A с центром окружности O, пересекает окружность в точке K, причем отрезок AK равен 8. Найдите диаметр окружности.

99. а) Хорда AB окружности находится на расстоянии, равном половине радиуса, от центра окружности. Через точку B проведена касательная к окружности, которая пересекает продолжение ее диаметра AP в точке M. Найдите расстояние от точки M до центра окружности, если ее диаметр равен 10.

б) Хорда AB, длина которой равна $2\sqrt{3}$, удалена от центра окружности на расстояние, равное половине радиуса окружности. Через точку B проведена касательная к окружности, которая пересекает продолжение ее диаметра AT в точке H. Найдите расстояние от точки H до точки A.

100. а) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Найдите величину угла BCD, если угол COD равен $44°$, а угол BAC равен $62°$.

б) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Найдите величину угла BAD, если угол AOD равен $88°$, а угол BCA равен $40°$.

101. а) Вершины A, B и C параллелограмма $ABCK$ лежат на окружности, прямая AK касается этой окружности, а сторона CK пересекает окружность в точке P и делится этой точкой в отношении $2 : 1$, считая от вершины K. Найдите сумму квадратов диагоналей параллелограмма, если сторона BC равна $2\sqrt{6}$.

б) Вершины K, P и E параллелограмма $KPTE$ лежат на окружности, прямая TP касается этой окружности, а сторона TE пересекает окружность в точке M и делится этой точкой в отношении $5 : 1$, считая от вершины E. Найдите сумму квадратов диагоналей параллелограмма, если сторона KP равна 12.

102. а) MK — диаметр окружности, MC — ее хорда. Через точку K проведена касательная к окружности, которая пересекает прямую MC в точке P. Найдите расстояние от точки P до центра окружности, если расстояние от точки K до прямой MP равно 6 см, а $MK = 2\sqrt{13}$ см.

б) PE — диаметр окружности, PA — ее хорда. Через точку E проведена касательная к окружности, которая пересекает прямую AP в точке H. Найдите расстояние от точки E до прямой HP, если расстояние от точки H до прямой PE равно $3\sqrt{5}$ см, а $AP = 4$ см.

103. а) Прямые, содержащие хорды BC и PK окружности, пересекаются в точке A (точка B лежит между точками A и C, а точка P — между точками A и K). Найдите длину хорды BC, если точка B — середина AC, $AP = 2$ см, а $PK = 6$ см.

б) Прямые, содержащие хорды MP и TE окружности, пересекаются в точке A (точка M лежит между точками A и P, а точка T — между точками A и E). Найдите длину хорды MP, если $AM : MP = 1 : 3$, $AE = 9$ см, а $AT = 4$ см.

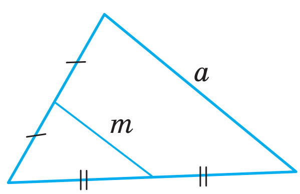
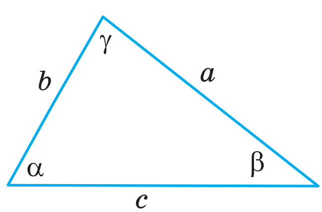
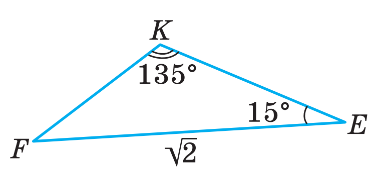
104. а) AP и AT — две касательные к одной окружности радиусом 8 (P и T — точки касания). Точка H лежит на большей из дуг PT. Найдите угол PHT, если отрезок AP равен 8.

б) AB и AC — касательные к одной окружности (B и C — точки касания). Расстояние от точки A до центра окружности равно 8, а до хорды BC — 6. Найдите градусную меру меньшей из дуг BC.

105*. а) Окружности радиусами 16 и 4 касаются внешним образом. Боковые стороны равнобедренного треугольника являются их внешними касательными, а основание касается только большей окружности. Найдите основание треугольника.

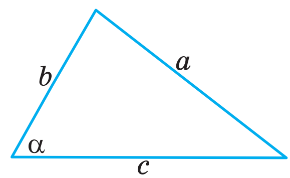
б) Окружности радиусами 16 и 4 касаются внешним образом. Боковые стороны равнобедренного треугольника являются их внешними касательными, а основание касается только большей окружности. Найдите боковую сторону треугольника.

ИТОГОВЫЙ САМОКОНТРОЛЬ

<table>
<tr><td colspan="2">1. Неравенство треугольника</td></tr>
<tr><td>Сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны.</td><td>Укажите набор отрезков, из которых можно составить треугольник, и объясните почему:
а) 13 см; 6 см; 5 см;
б) 10 см; 14 см; 16 см;
в) 7 дм; 8 дм; 15 дм.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Теорема о средней линии треугольника</td></tr>
<tr><td>Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине:
$m = \frac{a}{2}$.

</td><td>Средняя линия треугольника на 3,6 см меньше параллельной ей стороны. Найдите среднюю линию и эту сторону треугольника.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Теорема синусов</td></tr>
<tr><td>Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

</td><td>Используя данные рисунка, вычислите длину стороны KE.

</td></tr>
</table>

4. Теорема косинусов

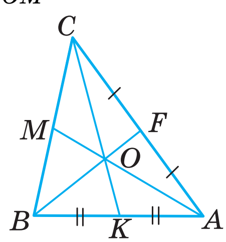
Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.



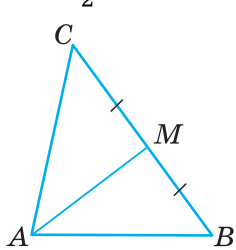
В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 60°$, $AB = 8$, $BC = 7$. Найдите периметр треугольника.

5. Свойства медиан треугольника

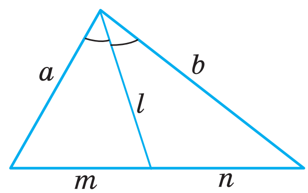
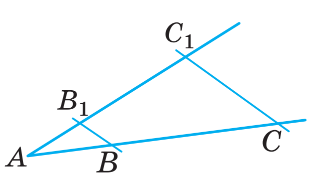
1. Медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины:
$\frac{BO}{OF} = \frac{CO}{OK} = \frac{AO}{OM} = 2:1$.



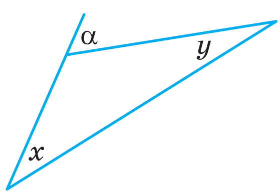
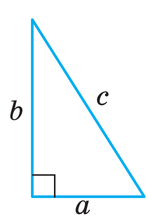
2. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника:
$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

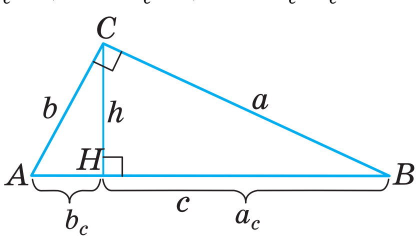


В треугольнике ABC медианы BK и CD пересекаются в точке O. Площадь треугольника COK равна 30 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

6. Теорема о биссектрисе треугольника	
Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$. 	Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки 7 см и 5 см. Периметр треугольника равен 36 см. Найдите стороны треугольника.
7. Признаки подобия треугольников	
Два треугольника подобны, если: 1) два угла одного треугольника соответственно равны двум углам второго треугольника; 2) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам второго треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны; 3) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам второго треугольника.	В треугольниках ABC и MPL $\angle A = \angle M$, $\angle C = \angle L$, $AB : MP = 2 : 3$, $AC = 10$ см. Найдите сторону ML.
8. Теорема Фалеса	
Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую прямую, то они отсекут на ней равные между собой отрезки.	*Дано:* $AB : BC = 5 : 7$; $BB_1 \parallel CC_1$; $AC_1 = 36$. *Найти:* $B_1C_1 - AB_1$. 

9. Теорема о центре вписанной в треугольник окружности	
Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной в треугольник окружности.	Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна 5 см, а основание — 8 см.
10. Теорема о центре описанной окружности (расположение центра описанной около треугольника окружности для разных видов треугольников)	
Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром описанной около треугольника окружности. 1) Центр описанной около *остроугольного* треугольника окружности находится внутри треугольника. 2) Центр описанной около *прямоугольного* треугольника окружности совпадает с серединой гипотенузы. 3) Центр описанной около *тупоугольного* треугольника окружности находится вне треугольника.	Стороны треугольника равны 7 см, 15 см и 20 см. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей этого треугольника.
11. Отношение площадей и линейных элементов подобных треугольников	
У подобных треугольников: 1) площади относятся как квадрат коэффициента подобия;	В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1 = 5 : 2$. Сумма площадей этих треугольников равна 58 см^2. Найдите площадь каждого треугольника.

<table>
<tr><td>2) все соответствующие линейные элементы (медианы, высоты, биссектрисы, радиусы вписанной и описанной окружностей, периметры) относятся как коэффициент подобия.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">12. Формулы площади треугольника</td></tr>
<tr><td>1. $S = \frac{ah_a}{2}$;
2. $S = p \cdot r$;
3. $S = \frac{abc}{4R}$;
4. $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;
5. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.</td><td>В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна 10, а угол при основании равен 15°. Найдите площадь треугольника.</td></tr>
<tr><td colspan="2">13. Теорема о внешнем угле треугольника</td></tr>
<tr><td>Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним: $\alpha = x + y$.

</td><td>Внешний угол треугольника равен 99°. Найдите углы треугольника, если внутренние углы, не смежные с ним, относятся как 3 : 7.</td></tr>
<tr><td colspan="2">14. Теорема Пифагора</td></tr>
<tr><td>Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$.

</td><td>Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна $2\sqrt{22}$ см, а катет BC равен 6 см. Найдите длину медианы BK.</td></tr>
</table>

15. Теорема, обратная теореме Пифагора	
Если квадрат большей стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то такой треугольник является прямоугольным.	В треугольнике ABC $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 2\sqrt{6}$ см. Найдите площадь треугольника.
16. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике	
$AH = b_c$ — проекция катета AC на гипотенузу; $BH = a_c$ — проекция катета BC на гипотенузу. $a^2 = a_c \cdot c$; $b^2 = b_c \cdot c$; $h^2 = a_c \cdot b_c$.  	Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если проекции катетов на гипотенузу равны 2 см и 6 см.
17. Свойства прямоугольных треугольников с углами 30° и 45°	
1. Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. 2. Если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла в 30°. 3. Если в прямоугольном треугольнике с углом 30° меньший катет равен a, то больший катет равен $a\sqrt{3}$. 4. Если в равнобедренном прямоугольном треугольнике катет равен a, то гипотенуза равна $a\sqrt{2}$.	а) В прямоугольном треугольнике ABC угол B равен 60°, а гипотенуза AB равна 4 см. Найдите BC, AC и площадь треугольника ABC. б) В равнобедренном прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, равна 14 см. Найдите катеты этого треугольника.

18. Теорема о сумме острых углов прямоугольного треугольника

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.	Острые углы прямоугольного треугольника относятся как 1 : 8. Найдите наименьший угол треугольника.

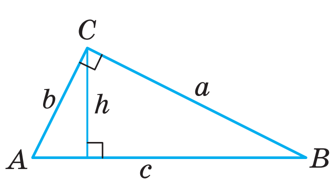
19. Свойство медианы прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла

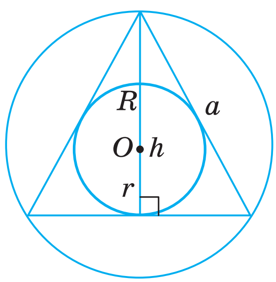
Медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.	Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 15, больший острый угол равен 60°. Найдите длину меньшего катета.

20. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник

$r = p - c$; $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a и b — катеты, c — гипотенуза, $p = \frac{a+b+c}{2}$.	Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 6, а радиус описанной около этого треугольника окружности равен $\sqrt{5}$. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

21. Формулы площади прямоугольного треугольника

$S_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2}$; $S_{\triangle ABC} = \frac{ch}{2}$. 	Вычислите длину высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла, если его катеты равны 9 и 12.

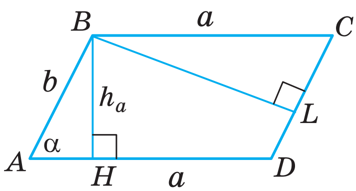
<table>
<tr><td colspan="2">22. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника</td></tr>
<tr><td>Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.
Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему.</td><td>В прямоугольном треугольнике косинус острого угла равен $\frac{4}{5}$. Найдите синус и тангенс этого угла.</td></tr>
<tr><td colspan="2">23. Формулы, связывающие высоту, радиус вписанной окружности, радиус описанной окружности</td></tr>
<tr><td>$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;
$r = \frac{h}{3}$;
$R = \frac{2h}{3}$.
</td><td>Биссектриса равностороннего треугольника равна $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь этого треугольника.</td></tr>
<tr><td colspan="2">24. Расстояние от точки до прямой</td></tr>
<tr><td>Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к прямой.</td><td>Точки A и B лежат по разные стороны от прямой a. Расстояние от точки A до этой прямой равно 6 см, а от точки B — 4 см. Может ли расстояние между точками A и B быть равным 8 см?</td></tr>
</table>

25. Расстояние между параллельными прямыми	
Расстоянием между параллельными прямыми называется расстояние от любой точки одной прямой до второй прямой.	В прямоугольном треугольнике AMK через вершину K проведена прямая b, параллельная катету AM. Найдите расстояние между прямыми b и MA, если катет MK равен 14 см.
26. Теорема о сумме внутренних углов четырехугольника	
Сумма внутренних углов произвольного четырехугольника равна 360°.	Известно, что в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 74°$, $\angle D = 120°$. Найдите тупой угол между биссектрисами углов B и C.
27. Формула площади произвольного четырехугольника	
$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$, где d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними.	Одна из диагоналей четырехугольника на 1 см больше второй диагонали. Площадь четырехугольника равна 2 см^2, а синус угла между диагоналями равен $\frac{1}{3}$. Найдите длину меньшей диагонали четырехугольника.
28. Теорема о четырехугольнике, описанном около окружности. Формула площади четырехугольника через радиус вписанной окружности	
Если четырехугольник описан около окружности, то суммы его противоположных сторон равны. $S = pr$.	Сумма двух противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равна 12 см, а площадь данного четырехугольника — 36 см^2. Найдите радиус окружности.

29. Теорема о четырехугольнике, вписанном в окружность	
Если четырехугольник вписан в окружность, то суммы его противоположных углов равны 180°.	Четырехугольник $MNKL$ вписан в окружность, $\angle M : \angle N : \angle K = 2 : 3 : 7$. Найдите угол L.
30. Признаки и свойства параллелограмма	
Признаки параллелограмма. Если в четырехугольнике: • диагонали точкой пересечения делятся пополам; • противоположные стороны попарно равны; • две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник является параллелограммом. ***У параллелограмма:*** 1) противоположные стороны равны; 2) противоположные стороны параллельны; 3) противоположные углы равны; 4) сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°; 5) диагонали точкой пересечения делятся пополам; 6) диагонали делят его на четыре равновеликих треугольника.	а) Два угла параллелограмма относятся как 5 : 7. Найдите больший угол параллелограмма. б) Периметр параллелограмма равен 96 см. Найдите стороны параллелограмма, если известно, что одна из них составляет 140 % второй.
31. Формула, связывающая диагонали параллелограмма и его стороны	
$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$.	Найдите длины диагоналей параллелограмма, если известно, что они относятся как 2 : 3, а стороны параллелограмма равны 11 см и 23 см.

32. Формулы площади параллелограмма

$S = ah_a$;
$S = ab\sin\alpha$.



Высоты, проведенные из вершины тупого угла параллелограмма, составляют угол 45°. Одна из высот делит сторону, на которую она опущена, на отрезки 3 см и 8 см, считая от вершины острого угла. Найдите площадь параллелограмма.

33. Свойства и признак ромба

Признак ромба. Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом.
У ромба:
1) все стороны равны;
2) противоположные стороны параллельны;
3) противоположные углы равны;
4) сумма углов, прилежащих к одной стороне ромба, равна 180°;
5) диагонали являются биссектрисами его углов;
6) диагонали взаимно перпендикулярны;
7) диагонали точкой пересечения делятся пополам;
8) диагонали делят его на четыре равных прямоугольных треугольника.

Диагональ ромба разбивает его на два треугольника. Найдите длину диагонали, если известно, что сумма периметров обоих треугольников на 15 см больше периметра ромба.

34. Формулы площади ромба

$S = ah$;

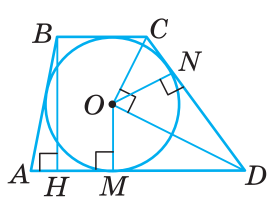
$S = \frac{d_1 d_2}{2}$;

$S = pr$;

$S = a^2 \sin\alpha$.

Бо́льшая диагональ ромба равна 40, а меньшая диагональ относится к стороне как 6 : 5. Найдите высоту ромба.

35. Свойства и признак прямоугольника	
Признак прямоугольника. Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм является прямоугольником. ***У прямоугольника:*** 1) противоположные стороны равны; 2) противоположные стороны параллельны; 3) все углы прямые; 4) диагонали равны; 5) диагонали точкой пересечения делятся пополам; 6) диагонали делят его на четыре равновеликих треугольника.	В прямоугольнике $ABCD$ $AD = 4\sqrt{5}$ см, вершина A удалена от диагонали BD на 8 см. Найдите площадь прямоугольника.
36. Формулы площади квадрата	
$S = a^2$; $S = \frac{d^2}{2}$.	Найдите периметр квадрата, если его площадь равна 32.
37. Формула, связывающая диагональ квадрата и его сторону	
$d = a\sqrt{2}$.	Диагональ квадрата равна $3\sqrt{2}$. Найдите периметр этого квадрата.
38. Теорема о средней линии трапеции	
Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме: $m = \frac{a+b}{2}$, где a и b — основания трапеции.	Средняя линия трапеции равна 7, а большее основание равно 10. Найдите меньшее основание трапеции.

39. Формула площади трапеции	
$S = \frac{a+b}{2}h = mh$, где a и b — основания, h — высота, m — средняя линия трапеции.	Средняя линия трапеции равна 19, а боковая сторона AB, равная 10, образует с основанием BC угол в 150°. Найдите площадь трапеции.
40. Свойства равнобедренной трапеции	
У равнобедренной трапеции: 1) углы при основании равны; 2) диагонали равны; 3) высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки, равные полусумме оснований и полуразности оснований.	Основание AD равнобедренной трапеции $ABCD$ в 5 раз больше основания BC. Высота BH пересекает диагональ AC в точке M, площадь треугольника AMH равна 4 см^2. Найдите площадь трапеции $ABCD$.
41. Площадь равнобедренной трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями	
У равнобедренной трапеции с перпендикулярными диагоналями высота равна средней линии ($h = m$) и $S = h^2 = m^2$.	У равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Площадь трапеции равна 144 см^2. Найдите: а) высоту трапеции; б) среднюю линию трапеции.
42. Трапеция, в которую можно вписать окружность	
1. В трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.  	Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 3 см, а сумма ее боковых сторон равна 20 см. Найдите площадь трапеции.

2. Центром вписанной в трапецию окружности является точка пересечения биссектрис углов трапеции.
3. Радиус вписанной в трапецию окружности равен половине высоты трапеции.
4. Треугольник COD является прямоугольным и $ON^2 = CN \cdot ND$.

43. Формулы, связывающие стороны правильного треугольника, четырехугольника, шестиугольника с радиусами вписанной и описанной окружностей

	R	r
a_3	$R\sqrt{3}$	$2r\sqrt{3}$
a_4	$R\sqrt{2}$	$2r$
a_6	R	$\frac{2r}{\sqrt{3}}$

Длина окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равна 24π. Найдите длину окружности, описанной около треугольника.

44. Формулы площадей правильного треугольника, четырехугольника, шестиугольника, *n*-угольника

$S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_4 = a^2$;

$S_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$; $S_n = p \cdot r$.

Правильный шестиугольник со стороной $2\sqrt{3}$ описан около окружности. Найдите площадь квадрата, вписанного в эту же окружность.

45. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30°, 45°, 60°

	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Вычислите:

$\sqrt{6}\ \mathrm{tg}\ 60° \cdot \sin 45° + 4 \cos 30°$.

46. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 150°, 135°, 120°

	150°	135°	120°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
tg α	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
ctg α	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Используя формулы $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}(180° - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$, найдите значение выражения $\frac{\sqrt{2}\cos 135° - 6\sin 150°}{\mathrm{tg}\,135° + \mathrm{ctg}\,135°}$.

47. Свойство касательной

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведенному в точку касания.

Из точки A к окружности с центром O проведена касательная AB (B — точка касания). Сравните длины отрезков OB и OA.

48. Теорема об отрезках касательных

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

К окружности с центром в точке O и радиусом 5 из точки A проведены две касательные (B и C — точки касания). Найдите градусную меру угла BAC, если $AB = 5\sqrt{3}$.

49. Теорема о вписанном угле

Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

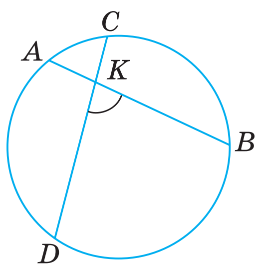
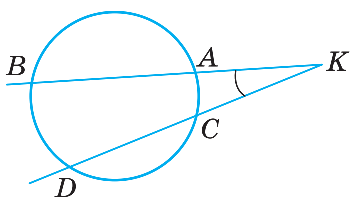
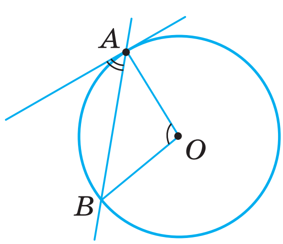
Точки A, B и C лежат на окружности с центром O, $\angle ABC = 50°$, $\smile AB : \smile CB = 5 : 8$. Найдите эти дуги и угол AOC.

50. Свойство вписанных углов, опирающихся на диаметр

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.

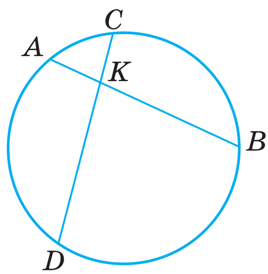
На полуокружности с диаметром AB взята точка C. Найдите хорду AC, если радиус окружности равен $2\sqrt{3}$ см, а хорда CB равна $\sqrt{23}$ см.

51. Углы между пересекающимися хордами, секущими, касательной и хордой

$\angle DKB = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile DB)$. 	а) Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E. Найдите угол BEC, если $\smile AD = 54°$, $\smile BC = 70°$.
$\angle DKB = \frac{1}{2}(\smile DB - \smile AC)$. 	б) Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие, образующие угол в 32°. Меньшая дуга окружности, заключенная между сторонами этого угла, равна 56°. Найдите бóльшую дугу.
Угол, образованный *касательной* к окружности и *секущей* (*хордой*), проведенной через точку касания, равен половине дуги, заключенной между его сторонами. 	в) Через точку B хорды AB проведена касательная к окружности, бóльшая дуга AB равна 290°. Найдите острый угол между касательной и хордой.

<table>
<tr><td colspan="2">52. Соотношения между длинами хорд, отрезков касательных и секущих</td></tr>
<tr><td>

$AK \cdot KB = CK \cdot KD.$

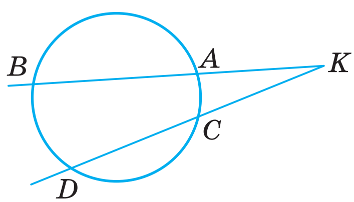


</td><td>

а) BD и CE — хорды одной окружности, A — точка пересечения этих хорд. $AC = 6$ см, $AE = 12$ см. AB на 1 см меньше AD. Найдите BD.

</td></tr>
<tr><td>

$AK \cdot KB = CK \cdot KD.$

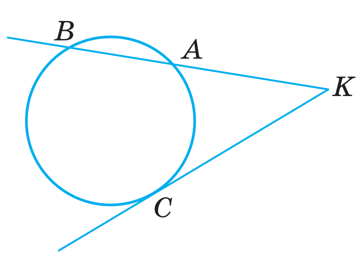


</td><td>

б) Из точки A, взятой вне окружности, проведены две секущие, пересекающие окружность в точках B и C (точка B лежит между точками A и C) и в точках D и E (точка D лежит между точками A и E). Найдите длину отрезка AD, если $AB = BC = 4$, $DE = 14$.

</td></tr>
<tr><td>

$CK^2 = AK \cdot KB.$



</td><td>

в) Секущая MN проходит через диаметр окружности PN (точка P лежит между точками M и N), MK — касательная к этой окружности (K — точка касания). Найдите MK, если MK в два раза меньше MN, а радиус окружности равен 6.

</td></tr>
</table>

53. Площадь круга, сектора	
$S = \pi r^2$ — формула площади круга. $S = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha$ — формула площади сектора.	Угол, равный 36°, вписан в круг. Найдите площадь сектора круга, заключенного между сторонами центрального угла, опирающегося на ту же дугу, что и данный угол, если радиус круга равен 5.
54. Длина окружности, дуги	
$C = 2\pi r$ — формула длины окружности. $l = \frac{\pi r}{180^\circ} \cdot \alpha$ — формула длины дуги, градусная мера которой равна α.	Вершины правильного треугольника делят окружность на три дуги. Найдите длину одной из этих дуг, если сторона правильного треугольника равна $4\sqrt{3}$.
55. Определение вида треугольника по его сторонам	
Пусть a — наибольшая сторона треугольника, тогда: 1) если $a^2 = b^2 + c^2$, то треугольник прямоугольный; 2) если $a^2 < b^2 + c^2$, то треугольник остроугольный; 3) если $a^2 > b^2 + c^2$, то треугольник тупоугольный.	Определите вид треугольника, стороны которого равны 15, 11 и 9.

ОТВЕТЫ

7 КЛАСС

§ 1

1.3. а) 4 см; 6 см; б) 3 см; 4 см. **1.12.** 8. **1.13.** а) 180°; б) 90°. **1.15.** а) B — на окружности; A, K — вне окружности; б) P — на окружности; F, K — внутри окружности. **1.16.** а) 60°; б) 180°.

§ 2

2.4. 108. **2.5.** 192. **2.6.** а) 1,8 см; б) 1,2 см. **2.7.** а) 96 дм^2; б) 216 дм^2. **2.8.** а) 11 : 3; б) 7 : 1. **2.9.** а) 28 800 см^3; б) 6500 см^3.

§ 3

3.2. а) 4 см; б) 8 см. **3.3.** а) 11 см; б) 5 см. **3.4.** 1,74 дм. **3.5.** 0,1935 дм^2. **3.6.** а) Нет; б) да. **3.7.** а) 12 см; б) 42 см. **3.8.** а) 4 см; б) 40 см. **3.9.** 64 см. **3.10.** 5 см.

§ 4

4.2. $2R$. **4.3.** 2,8 дм. **4.4.** 4,6 мм. **4.5.** а)—б) ABC и BCD, BAD и ADC, CBD и BCA. **4.6.** а) 25,75 см; б) 13,19 дм. **4.8.** а) 30,18 см^2; б) 40,69 см^2. **4.9.** 50 см. **4.10.** а) 7536 см; б) 7536 см. **4.11.** а) $MO \geqslant R$; б) $MO \leqslant R$. **4.12.** а) 135°; б) 90°, 30°, 120°; в) 30°.

§ 5

5.1. $\angle A$ и $\angle B$ — острые; $\angle C$ — тупой. **5.2.** $\angle BOC = 30°$, $\angle BOA = 150°$. **5.3.** Например, $\angle AOD$ и $\angle BOC$. **5.4.** $\angle AOB$ и $\angle DOE$, $\angle BOC$ и $\angle EOF$, $\angle AOF$ и $\angle DOC$, $\angle AOC$ и $\angle DOF$, $\angle BOF$ и $\angle EOC$. **5.6.** $\alpha + \beta$; $360 - (\alpha + \beta)$. **5.7.** а) Нет; б) да. **5.8.** а) 70°; б) 60°. **5.9.** 80°. **5.11.** а) 45°, 38°, 89°, 78°; б) 126°, 147°, 95°, 211°.

§ 6

6.1. а) Нет; б) да. **6.2.** а) 60°; б) 124°. **6.3.** На 20°. **6.4.** а) 30°; б) 130°. **6.5.** а) 70°, 110°; б) 40°, 140°. **6.6.** а) Нет, да, нет; б) нет. **6.7.** 40° и 140°. **6.8.** 135° и 45°. **6.9.** 90°. **6.10.** а) 70°; б) 110°. **6.11.** а) 150°; б) 36°. **6.12.** $\angle 2 = 54°$, $\angle 4 = 70°$, $\angle 5 = 54°$, $\angle 6 = 56°$.

6.13. $\angle 1 = 80°$, $\angle 2 = 50°$, $\angle 4 = 80°$, $\angle 6 = 50°$. **6.14.** а) 70°, 110°, 70°, 110°; б) 65°, 115°, 65°, 115°. **6.16.** Да.

§ 7

7.1. а) $\angle 2 = 90°$, $\angle 3 = 90°$, $\angle 4 = 50°$; б) $\angle 2 = 50°$, $\angle 3 = 50°$, $\angle 4 = 40°$. **7.2.** а) $\angle AOK = 65°$, $\angle AOC = 40°$, $\angle KOB = 25°$; б) $\angle AOK = 120°$, $\angle BOK = 30°$, $\angle AOC = 150°$. **7.3.** Нет. **7.4.** 135°, 45°. **7.5.** 25° или 155°. **7.6.** 135°.

§ 8

8.1. а) $\angle A = \angle C$, или $\angle B = \angle C$, или $\angle A = \angle B$; б) $\angle A = \angle B = \angle C$. **8.2.** а) $AB = BC$, или $AB = AC$, или $AC = BC$; б) $AB = BC = AC$; в) $AB \neq BC \neq AC$, $AB \neq AC$. **8.3.** Прямоугольный. **8.4.** 17 см. **8.5.** 8 см, 8 см, 8 см, 10 см, 10 см, 8 см.

§ 9

9.1. Нет. **9.2.** а) Да; б) да. **9.3.** а) 8; б) 46°. **9.5.** а) 26; б) 32°. **9.7.** а) Да; б) нет.

§ 10

10.1. Биссектриса угла — луч, биссектриса треугольника — отрезок. **10.6.** 80°; 50°. **10.8.** 135°. **10.10.** 8 см, 50°. **10.11.** 6 см. **10.12.** 30°. **10.13.** 5 см. **10.14.** а) 90°; б) 90°.

§ 11

11.2. 45°, 45° и 90°. **11.3.** 32 см. **11.4.** а) 20 см; б) 22 см.

§ 12

12.1. а) $\angle A = \angle C$, или $\angle A = \angle B$, или $\angle B = \angle C$; б) $\angle A = \angle B = \angle C$. **12.3.** а) 10 см; б) 20 см. **12.4.** а) Да; б) нет; в) нет. **12.7.** 68°. **12.8.** 56°. **12.9.** 20°. **12.10.** 58°.

§ 14

14.1. Указание. Постройте серединный перпендикуляр к отрезку AC. **14.3.** 10 см. **14.4.** 55°. **14.5.** 16 см.

§ 15

15.1. Рис. 53 — б); рис. 54 — б). **15.2.** а) Вертикальные; б) внутренние накрест лежащие; в) внутренние односторонние; г) соответственные; д) смежные; е) внешние односторонние. **15.3.** а) $\angle 3$; б) $\angle 4$, $\angle 2$; в) нет; г) $\angle 5$; д) нет. **15.4.** а) Нет; б) да; в) да; г) да. **15.5.** 66°, 114°, 66°, 114°, 66°, 114°, 66°, 114°. **15.6.** а) Да; б) да; в) да; г) да. **15.7.** а) $\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$; б) $\angle 2$ и $\angle 8$, $\angle 1$ и $\angle 7$; в) $\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$; г) $\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$; д) $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$. **15.11.** а) Пересекаются или совпадают; б) пересекаются или параллельны.

§ 16

16.5. $\angle C = 61°$. **16.7.** Не может.

§ 17

17.2. Нельзя. Если равные углы являются внутренними односторонними, отличными от 90°, то прямые пересекаются. **17.3.** а) 65°; б) 118°. **17.4.** а) 216°; б) 220°. **17.5.** Нет, так как эти биссектрисы образуют со стороной треугольника внутренние односторонние углы, сумма которых меньше 180°.

§ 18

18.1. а) 55°; б) 49°. **18.2.** а) 40°; б) 120°. **18.3.** Прямая должна быть перпендикулярна данным параллельным прямым. **18.4.** а) $\angle 3 = 80°$; б) $\angle 2 = 118°$. **18.5.** а) 66°, 114°; б) 60°, 120°.

§ 19

19.1. 42°, 42°. **19.2.** а) 70°; б) 65°. **19.3.** Да. **19.4.** а) 30°, 30°, 120°; б) 36°, 72°, 72°. **19.5.** 120°. **19.6.** 20°, 60°, 100°. **19.7.** 100°. **19.8.** 30°. **19.9.** 105°. **19.10.** 150°. **19.11.** а) 42° и 42°; б) 50° и 80° или 65° и 65°. **19.12.** 110°. **19.13.** 68°. **19.14.** 21°. **19.15.** а) 6 см; б) 8 см. **19.16.** 40°, 50°, 90°. **19.17.** 90°.

§ 20

20.1. 720°. **20.2.** Да. **20.3.** 70°. **20.4.** 140°. **20.5.** 130°. **20.6.** Да. **20.7.** а) 56°; б) 44°. **20.8.** а) 70°; б) 70°. **20.9.** а) 25°; б) 30°. **20.10.** а) 111°; б) 106°. **20.11.** а) 40°; б) 120°. **20.12.** 60°, 80°, 40°. **20.13.** Один. **20.14.** Указание. Дважды воспользуйтесь теоремой о внешнем угле треугольника.

§ 21

21.6. а) $\angle B$; б) MN. **21.7.** а) $\angle C$; б) MN.

§ 22

22.1. а) Нет; б) нет; в) да. **22.2.** а) 35 см; б) 16 см или 17 см. **22.3.** 42 см. **22.4.** Не может. **22.10.** а) $1 < x < 7$; б) $1 < x < 5$.

§ 23

23.2. Может, в прямоугольном равнобедренном треугольнике. **23.3.** Нет. **23.7.** 55°. **23.8.** а) Да; б) да; в) нет.

§ 24

24.2. 40°. **24.3.** 80°.

§ 25

25.1. 30°, 60°. **25.2.** 6 см, 12 см. **25.3.** 6 см. **25.4.** 30°. **25.5.** 8 см. **25.6.** 4 см. **25.7.** 60°. **25.8.** 10 см. **25.9.** 120°. **25.10.** 150°. **25.11.** 20 см; 60°. **25.12.** 4 см.

§ 26

26.1. 5 см. **26.3.** а) 4 см; б) 5 см. **26.4.** 15 см. **26.7.** 7 см.

§ 27

27.2. Три точки или одна точка. **27.7.** Две точки.

§ 31

31.4. Одна, ни одной. **31.5.** Часть окружности, ограниченная сторонами данного угла. **31.6.** Две взаимно перпендикулярные прямые.

31.7. Указание. Внутри угла постройте две прямые, параллельные его сторонам и равноудаленные от них. Они образуют угол A, биссектриса которого лежит на биссектрисе данного угла.

8 КЛАСС

§ 1

1.1. 1, 3, 5. **1.2.** Треугольник. **1.4.** а) 15; б) 20. **1.5.** а) 54; б) 6. **1.6.**

а)

Количество сторон выпуклого многоугольника, n	6	4	5	3	8	9	12
Сумма внутренних углов n-угольника	720°	360°	540°	180°	1080°	1260°	1800°
Число диагоналей n-угольника	9	2	5	0	20	27	54

б)

Количество сторон выпуклого многоугольника, n	3	4	5	6	7	10	11
Сумма внутренних углов n-угольника	180°	360°	540°	720°	900°	1440°	1620°
Число диагоналей n-угольника	0	2	5	9	14	35	44

1.7. а) 139°; б) 131°. **1.8.** а) 60°; б) 160°. **1.9.** а) 120°; б) 108°. **1.10.** а) 35; б) 13. **1.11.** а) 170; б) 1800°. **1.12.** а) 108 см; б) 360 см.

§ 2

2.1. а) 46°; б) 52°; в) 116°; г) 124°. **2.2.** а) 152°, 28°, 152°; б) 34°, 146°, 34°. **2.3.** а) 18; б) 26. **2.4.** а) 9 см и 15 см; б) 6 : 1. **2.5.** а) 72°, 108°, 72°, 108°; б) 1 : 5 : 1 : 5. **2.6.** а) 69°, 111°, 69°, 111°; б) 71°, 109°, 71°, 109°. **2.7.** а) 56°, 124°, 56°, 124°; б) 64°, 116°, 64°, 116°.

2.9. а) 62 см; б) 17 см и 14 см. **2.10.** а) 8 см и 12 см; б) 12 см и 18 см. **2.11.** 34 см или 54 см. **2.12.** а) 2 см; б) 12 см. **2.13.** а) 54 см; б) 6 см и 12 см. **2.14.** а) 4 см, 3 см, 4 см; б) 46 см. **2.15.** а) 12 см и 4 см; б) 6 см и 4 см. **2.17.** а) 2 : 1; б) 1 : 5.

§ 3

3.3. а) (12; −6); б) (13; 1), (8; −6). **3.9.** а) Параллелограмм, 36 см; б) 16 см. **3.10.** а) 80 см; б) 56 см.

§ 4

4.2. а) 240 см; б) 15 см и 30 см. **4.3.** а) 126°; б) 117°. **4.4.** а) 4 см; б) 18 см. **4.6.** 44 см. **4.7.** а) 9 см; б) 16 см. **4.8.** а) 48 см; б) 60 см. **4.9.** а) 68 см; б) 84 см. **4.10.** 44 см или 46 см. **4.11.** а) 1 : 1; б) 0°. **4.12.** а) 42 см; б) 40 см. **4.13.** а) 6 см; б) 4 см. **4.14.** а) 60°; б) 40°.

§ 5

5.2. а) 72° и 108°; б) 92° и 88°. **5.3.** а) 40 см; б) 60° и 120°. **5.4.** а) 56 см; б) 3 см. **5.5.** а) 150°; б) 1 : 8. **5.6.** а) 8 см; б) 60°. **5.7.** а) 40 см; б) 6 см. **5.8.** а) 10 см; б) 48 см. **5.9.** 102° и 78°.

§ 6

6.1. а) 8 см; б) 6 см. **6.2.** а) (−3; 7) и (5; 7), или (−3; −9) и (5; −9), или (1; 3) и (1; −5); б) (−4; 8) и (6; 8), или (−4; −12) и (6; −12), или (1; 3) и (1; −7). **6.3.** а) 26 см; б) 8,12 м. **6.4.** а) 112 см; б) 54 см. **6.6.** а) 90°; б) 150°. **6.7.** 75°.

§ 7

7.1. а) 5; б) 3. **7.2.** а) 16 см; б) 27 см. **7.3.** а) 24 см; б) 18 см. **7.4.** а) 47°; б) 75°. **7.5.** а) 7 см, 3,5 см и 11,5 см; б) 13,5 см, 4,5 см и 9 см. **7.6.** а) 10 см; б) 48 см.

§ 8

8.1. а) 6 см; б) 20 см. **8.2.** а) 28 см; б) 43 см. **8.3.** а) 48 см; б) 7 см. **8.4.** а) 10 см, 24 см, 26 см; б) 20 см. **8.5.** а) Параллелограмм, 20 см; б) 44 см. **8.6.** а) 28 см; б) 20 см. **8.7.** а) 36 см; б) 5 см. **8.8.** Параллелограмм, 27 см. **8.9.** $16\sqrt{13}$ см.

§ 9

9.1. а) 15 см; б) 15 см. **9.2.** а) 13; б) 21. **9.3.** а) 18 см; б) 12 см. **9.4.** а) 60 см; б) 24 см. **9.5.** а) 18 см; б) 12 см. **9.6.** а) 16 см; б) 24 см. **9.7.** а) 12 см; б) 16 см.

§ 10

10.1. а) 13 см; б) 14 см. **10.2.** а) 13 см; б) 18 см. **10.3.** а) 45°, 135°, 144° и 36°; б) 36°, 144°, 150° и 30°. **10.4.** а) 8,5 см; б) 7 см. **10.5.** а) 20 см; б) 19 см и 15 см. **10.6.** 15 см.

§ 11

11.1. а) 13 см и 4 см; б) 7 см и 12 см. **11.2.** а) 33 см; б) 42 см. **11.3.** а) 4 см; б) 4 см. **11.4.** а) 45°, 135°, 135° и 45°; б) 36°, 144°, 144° и 36°. **11.5.** а) 10 см; б) 9 см. **11.6.** а) (−2; 6) или (9; 6), 7 см; б) (3; 2) или (3; −3), 10 см. **11.7.** а) 20 см; б) 80 см. **11.8.** а) 120°; б) 60°. **11.9.** а) 22 см; б) 60°, 120°, 120° и 60°. **11.10.** 45°, 135°, 135° и 45°. **11.11.** 72°, 108°, 108°, 72°.

§ 12

12.1. а) 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8; б) 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9. **12.2.** а) Ф А П О Н Ш Х Е; б) W I U T V M. **12.3.** а) 24 см; б) 18 см. **12.4.** а) (7; −1); б) (8; −2).

§ 13

13.1. а) 20 см^2; б) 19 см^2. **13.2.** а) 1024 см^2; б) 44 100 см^2. **13.3.** а) 32 см; б) 256 см^2. **13.4.** а) 28,7; б) 48. **13.5.** а) 49 см^2; б) 225 см^2. **13.6.** а) $100\sqrt{3}$; б) $64\sqrt{3}$. **13.7.** а) 54 см; б) 1452 см^2. **13.8.** а) 20 м; б) 1 : 20. **13.9.** а) 52 см, или 32 см, или 28 см; б) 68 см, или 40 см, или 32 см.

§ 14

14.1. а) 180 см^2; б) 135 см^2. **14.2.** а) 68; б) 66. **14.3.** а) 88; б) 50. **14.4.** а) 72 см^2; б) 64 см^2. **14.5.** а) 90°; б) 120°. **14.6.** а) 4 см; б) 48 см. **14.7.** а) 18 см^2; б) 64 см. **14.8.** а) 24 см^2; б) 160 см^2. **14.9.** а) 48; б) 42.

§ 15

15.1. а) 16 см^2; б) 10,5 см^2; в) 14 см^2; г) 12 см^2; д) 16 см^2; е) 12 см^2. **15.2.** а) 9 см; б) 12 см. **15.3.** а) 16; б) 49. **15.4.** а) 35 см^2; б) 24 см^2. **15.5.** а) 35 см^2; б) 24 см. **15.6.** а) 28 см; б) 12 см. **15.7.** а) 56; б) 84.

§ 16

16.1. а) 13 см; б) 17 см. **16.2.** а) 84 см^2; б) 40 см. **16.3.** а) 30 см; б) $16\sqrt{3}$ см^2. **16.4.** а) 12 см^2; б) 36 см. **16.5.** а) 16 см; б) 12 см. **16.6.** а) 12 см; б) 9,6 см. **16.7.** а) 6 см; б) 4 см. **16.8.** а) 120 см^2; б) 168 см^2. **16.9.** а) 6 см; б) 3 см. **16.10.** а) $3\sqrt{7}$ см^2; б) $5\sqrt{11}$ см^2. **16.11.** а) $81\sqrt{3}$ см^2; б) $12\sqrt{3}$ см^2. **16.12.** а) $7\sqrt{15}$ см^2; б) $8\sqrt{17}$ см^2. **16.13.** а) 6,6 см^2; б) 3,6 см^2. **16.14.** а) 168 см^2; б) 120 см^2. **16.15.** а) $6\sqrt{7}$ см^2; б) $5\sqrt{6}$ см^2. **16.16.** а) $50\sqrt{3}$ см^2; б) $72\sqrt{3}$ см^2. **16.17.** а) 30 см^2; б) 60 см^2. **16.18.** а) $\frac{17\sqrt{2}}{8}$ см; б) $\frac{7\sqrt{2}}{6}$ см. **16.19.** а) $162\sqrt{2}$ см^2; б) $242\sqrt{2}$ см^2. **16.20.** а) 50 см^2; б) 20 см. **16.21.** а) 324 см^2; б) 441 см^2. **16.22.** а) 2 см; б) 3 см. **16.23.** $144 + 114\sqrt{3}$ см^2.

§ 17

17.1. а) 16 см^2; б) 13,5 см^2; в) 13,5 см^2; г) 18 см^2. **17.2.** а) 27 см^2; б) 18 см^2. **17.3.** а) 189 см^2; б) 12 см. **17.4.** а) 168 см^2; б) 300 см^2. **17.5.** а) 276 см^2; б) 65 см^2. **17.6.** 80 см^2. **17.7.** 80 см^2. **17.8.** 169 см^2. **17.9.** 324 см^2. **17.10.** а) 20 см; б) $27\sqrt{3}$ см^2. **17.11.** $12\left(6 + \sqrt{5}\right)$ см. **7.12.** 210 см^2.

§ 18

18.1. а) 24,5 см^2; б) 12 см^2. **18.2.** а) 120 см^2; б) 240 см^2. **18.3.** а) $2\sqrt{29}$ см; б) $2\sqrt{13}$ см. **18.4.** а) $12\left(1 + \sqrt{3}\right)$ см и $36\sqrt{3}$ см^2; б) $18\left(1 + \sqrt{3}\right)$ см и **$81\sqrt{3}$** см^2. **18.5.** а) 12 см; б) 128 см^2. **18.6.** а) 24 см^2; б) 60 см^2. **18.7.** а) $5\sqrt{2}$ см; б) $\sqrt{10}$ см. **18.8.** а) $3\sqrt{7}$ см^2; б) $2\sqrt{5}$ см^2. **18.9.** а) 30 см; б) 18 см. **18.10.** а) $36\sqrt{3}$ см^2; б) $25\sqrt{3}$ см^2. **18.11.** а) 64 см^2; б) 49 см^2. **18.12.** а) $\frac{72\sqrt{97}}{97}$ см; б) $\frac{80\sqrt{89}}{89}$ см. **18.13.** а) 180 см^2; б) 210 см^2. **18.14.** а) 125 см^2; б) 256 см^2. **18.15.** 2 см.

§ 19

19.1. а) 30 см; б) 24 см. **19.2.** а) 5 : 11; б) 13 : 6. **19.3.** а) 12 см; б) 28 см. **19.4.** а) 136°; б) 68°. **19.5.** а) 5,5; б) 8. **19.6.** а) 16; б) 6,5. **19.7.** а) 76 см; б) 66 см. **19.8.** а) 16 см и 25 см; б) 17 см и 26 см. **19.9.** 6 : 7.

§ 20

20.1. а) 33; б) 15. **20.2.** а) 12,5; б) 31. **20.3.** а) 5 см; б) 40 см. **20.4.** а) 51 см; б) 18 см. **20.5.** Указание. Воспользуйтесь неравенством треугольника. а) 15 см; б) 14 см. **20.6.** а) 30 см; б) 16 см. **20.7.** а) 4 см; б) 9 см.

§ 21

21.1. а) II и III; б) I и III. **21.2.** а) 34,5 см; б) 66,5 см. **21.3.** а) 45; б) 96. **21.4.** а) 8 см и 16 см; б) 6 см и 12 см. **21.5.** а) 193; б) 132. **21.6.** а) 600 см^2; б) 156 см^2. **21.7.** а) $17\frac{7}{9}$ см; б) $21\frac{9}{11}$ см. **21.8.** а) 24 см; б) 18 см. **21.9.** а) 21 см; б) 32 см. **21.10.** а) 90 см^2; б) 72 см^2. **21.11.** а) 10 см; б) 9 см. **21.12.** а) 18 см; б) 30 см.

§ 22

22.1. а) 3; б) 10; в) $2\frac{2}{3}$; г) $11\frac{2}{3}$. **22.2.** а) 30 см; б) 24 см. **22.3.** а) $\frac{12\sqrt{6}}{7}$ см^2; б) $\frac{48\sqrt{5}}{7}$ см^2. **22.4.** а) 864 см^2; б) 1500 см^2. **22.5.** а) $\frac{490}{29}$ см^2; б) $\frac{1650}{41}$ см^2. **22.6.** а) 432 м^2; б) 375 см^2.

§ 23

23.1. а) 17; б) 19. **23.2.** $6\sqrt{2}$ см. **23.3.** а) 81 см^2; б) 81 см^2. **23.4.** а) 108 см; б) 108 см. **23.5.** $\frac{15}{338}$ см^2. **23.6.** а) 75 см^2; б) 15 см^2. **23.7.** а) 98 см^2; б) 100 см^2.

§ 24

24.1. а) 2 см и 14 см; б) 4 см и 12 см. **24.2.** 162 см. **24.3.** а) 882 см^2; б) 2450 см^2.

§ 25

25.1. а) 68°; б) 46°. **25.2.** а) 216°; б) 224°. **25.3.** а) 34°; б) 32°. **25.4.** а) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ см; б) $12\sqrt{3}$ см. **25.5.** а) $6\sqrt{2}$ см; б) $8\sqrt{2}$ см. **25.6.** а) 32°; б) 26°. **25.7.** а) 16 см; б) $16\sqrt{3}$ см.

§ 26

26.1. а) $\sqrt{33}$ см; б) $2\sqrt{14}$ см. **26.2.** а) 80 см; б) 130 см. **26.3.** а) $8\sqrt{3}$ см или $2\sqrt{13}$ см; б) $5\sqrt{2}$ см или $7\sqrt{2}$ см. **26.4.** а) 96 см^2; б) 30 см^2.

§ 27

27.1. а) 108°; б) 34°. **27.2.** а) 32°; б) 62°. **27.3.** а) 68°; б) 42°. **27.4.** а) $12\sqrt{2}$ см; б) 10 см. **27.5.** а) 18 см^2; б) 8 см. **27.6.** а) $\frac{169\sqrt{3}}{4}$ см^2; б) 22 см. **27.7.** а) 14 см; б) 12 см. **27.8.** а) 22°; б) 56°. **27.9.** а) 45°; б) 80°. **27.10.** а) 58°; б) 66°. **27.11.** а) 18°; б) 22°. **27.12.** а) 125°; б) 112°. **27.13.** а) 6,5 см; б) 24 см. **27.14.** а) 78°; б) 82°.

§ 28

28.1. а) 150°; б) 35°. **28.2.** а) 39,5°; б) 33°. **28.3.** а) 28°; б) 99°. **28.4.** а) 33°; б) 52°. **28.5.** а) 40°; б) 50°.

§ 29

29.1. а) 3 см; б) 4 см. **29.2.** а) 7,5; б) 6,5. **29.3.** а) $3\sqrt{5}$; б) $4\sqrt{5}$. **29.4.** а) 10; б) 7. **29.5.** а) 5; б) 7. **29.6.** а) 4; б) 12. **29.7.** а) 12 см; б) 16 см. **29.8.** 12,5 см.

9 КЛАСС

§ 1

1.1. а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sin\alpha = \frac{5}{6}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5}{\sqrt{11}}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$; в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{4}{3}$; д) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{3}{2}$; е) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = 2\sqrt{2}$. **1.2.** а) $\frac{16\sqrt{5}}{25}$ см^2; б) $\frac{12\sqrt{10}}{25}$ см^2. **1.3.** а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{6}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{6}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{35}}{7}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\sqrt{35}}{5}$; б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \sqrt{5}$. **1.4.** а) $\frac{5}{13}$; б) $\frac{15}{17}$.

§ 2

2.1. а) 10; б) 4; в) 5; г) $6\frac{2}{3}$. **2.2.** а) $a = 6$; $b = 6\sqrt{3}$; б) $a = b = 18$; в) $a = b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. **2.3.** а) 36 см^2; б) 13 см. **2.4.** а) $\sqrt{73}$ см; б) $2\sqrt{61}$ см. **2.5.** а) $2(3+\sqrt{3})$ см; б) 20 см^2. **2.6.** а) 18 см^2; б) $10(\sqrt{2}+1)$ см. **2.7.** а) 48 см^2; б) 0,2. **2.8.** а) $2\sqrt{3}$ см; б) $4\sqrt{3}$ см.

§ 3

3.1. а) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{8}{15}$, $\mathrm{ct}\alpha = 1\frac{7}{8}$; б) $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{7}{24}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = 3\frac{3}{7}$. **3.2.** а) 2); 4); 5); б) 1); 2). **3.3.** а) 1 : 9; б) 2 : 11. **3.4.** а) $104\sqrt{2}$ см; б) 10 см.

§ 4

4.1. а) $\sin 15°, -\cos 85°, -\mathrm{tg}\,71°, -\mathrm{ctg}\,57°$; б) $\sin 82°, -\cos 2°, -\mathrm{tg}\,79°, -\mathrm{ctg}\,35°$. **4.2.** а) $150°$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\sqrt{3}$; б) $135°$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -1$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = -1$. **4.3.** а) -2; б) -2.

§ 5

5.1. а) 4,5; б) 6; в) 4; г) 3; д) $\sqrt{2}$; е) 1; ж) 1,5; з) 2,25. **5.2.** а) $10\sqrt{3}$ см^2; б) 30° или 150°. **5.3.** а) 48; б) 7; в) 6; г) 19,2; д) 48. **5.4.** а) 90 см^2; б) 12 см. **5.5.** а) $5\sqrt{3}$ см; б) $-\frac{1}{3}$. **5.6.** а) 36 см^2; б) 60 см^2. **5.7.** а) 10 см^2; б) 40 см. **5.8.** а) $8\sqrt{2}$ см^2; б) 4 см. **5.9.** $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. **5.10.** а) $15\sqrt{3}$; б) 7,2. **5.11.** $2\sqrt{2}$.

§ 6

6.1. а) 4; б) 2; в) 2; г) 16. **6.2.** а) 4; б) 5. **6.3.** а) $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{30}$; б) $24\sqrt{2}$. **6.4.** а) 4; б) $2\sqrt{15}$. **6.5.** а) $\frac{x\sqrt{xy}}{4}$; б) $\frac{p^3}{4m}$. **6.6.** а) 4 : 9; б) 2 : 5. **6.7.** а) $\frac{4\sqrt{3}n}{3}$; б) $\frac{4k}{3}$.

§ 7

7.1. а) 3; б) 6. **7.2.** а) 90°; б) 10°. **7.3.** а) $2\sqrt{7}$; б) 4. **7.4.** а) 4; б) 60°. **7.5.** а) 8; б) 110°. **7.6.** а) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, 8; б) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$, 7. **7.7.** а) 4,5 см; б) $\frac{3}{4}$. **7.8.** а) 24 см; б) 17 см. **7.9.** а) $5\frac{5}{7}$ см; б) 6 см. **7.10.** а) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ см; б) 36 см. **7.11.** а) $4\sqrt{3}$ см; б) $2\sqrt{3}$ см. **7.12.** а) $15\sqrt{2}$ см; б) $2\sqrt{5}$ см. **7.13.** а) 36, 48; б) 6, 8. **7.14.** а) 3; б) 5. **7.15.** а) 6; б) 2 : 1.

§ 8

8.1. а) $\frac{\sqrt{13}}{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) 3; г) 4; д) 9. **8.2.** а) $2\sqrt{2}$; б) 24; 7; в) 5; г) 4. **8.3.** а) 5 см; б) 34 см. **8.4.** а) $2{,}4\sqrt{13}$; б) $\frac{\sqrt{69}}{9}$. **8.5.** а) 10; б) 18. **8.6.** а) $\frac{6\sqrt{2}}{5}$; б) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **8.7.** а) $4\sqrt{5}$ м; б) $2\sqrt{85}$ м. **8.8.** 11. **8.9.** а) 24; б) 384. **8.10.** а) $12\left(\sqrt{2}-1\right)$ см; б) 9 см.

§ 9

9.1. а) 100°; б) 5; в) $\sqrt{34}$; г) 3; д) $10\left(1+\sqrt{3}\right)$. **9.2.** а) 38; б) $2\sqrt{2}$; в) 7,5; г) 4; д) $\sqrt{3}$. **9.3.** а) 4; б) 10. **9.4.** а) 105°; б) 60°. **9.5.** а) 4 см;

б) 18 см. **9.6.** а) 16 см; б) 20 см. **9.7.** а) 12; б) 25. **9.8.** а) 160°; б) 140°. **9.10.** а) $4\frac{8}{13}$; б) 4,8. **9.11.** а) 125; б) 136. **9.12.** а) 192; б) 125. **9.14.** а) 40 см; б) 15 см. **9.15.** а) $10\frac{1}{34}$ см; б) $10\frac{10}{23}$ см. **9.16.** а) 7,2; б) 48. **9.17.** а) $6\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$. **9.18.** а) $4m$; б) $2nr$.

§ 10

10.1. а) 0,75; б) $4\sqrt{6}$; в) 4; г) 12; д) $\frac{8}{9}$; е) $\frac{3\sqrt{15}}{4}$; ж) $\frac{175\sqrt{6}}{72}$; з) 2,5; и) $\frac{32\sqrt{2}}{5}$; к) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; л) 3,125; м) 4. **10.2.** а) 6 см; б) $\frac{12\sqrt{6}}{35}$. **10.3.** а) 16 см; б) 16 см. **10.4.** а) 23,4 см; б) 22,1 см. **10.5.** а) 4,5 см; б) 5 см. **10.6.** а) $\frac{16\sqrt{15}}{15}$ см; б) $\frac{48\sqrt{15}}{15}$ см. **10.7.** а) 30°, 150°; б) 45°. **10.8.** а) 11 см; б) 30°. **10.9.** а) 1,5 см; б) 2,25 см. **10.10.** а) $\frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\varphi}{\sin(\beta+\varphi)}$; б) $\frac{n^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta \cdot \sin^2\varphi}{\sin^2(\beta+\varphi)}$. **10.11.** а) $10\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; б) $5\left(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$. **10.12.** $\sqrt{\frac{S}{2\sin(\beta+\varphi)\sin\beta\sin\varphi}}$.

§ 11

11.1. а) $\sqrt{13}$; б) $2\sqrt{37}$; в) $2\sqrt{26}$; г) $3\sqrt{17}$; д) 1 или 3; е) $-\frac{1}{9}$; ж) 150°; з) $-\frac{17}{18}$; и) $\sqrt{65}$; к) $\sqrt{15}$; л) $\sqrt{3}$; м) $4\sqrt{2}$. **11.2.** а) $\frac{31}{35}$; б) $\frac{13}{60}$. **11.3.** а) Тупоугольный; б) тупоугольный. **11.4.** а) 7 см; б) $\sqrt{7}$ см. **11.5.** а) 2 см, 4 см; б) $2\sqrt{2}$ см, 4 см. **11.6.** а) $3\sqrt{13}$; б) $0{,}5\sqrt{10}$. **11.7.** а) $\frac{6\sqrt{57}}{19}$ см; б) $\sqrt{93}$ см или $\sqrt{21}$ см. **11.8.** а) $0{,}5\sqrt{15}$; б) $4\sqrt{2}$. **11.9.** 7. **11.10.** $5\sqrt{6}$ см.

§ 12

12.1. а) $4\sqrt{11}$; б) $\frac{63\sqrt{5}}{40}$; в) $2\sqrt{6}$; г) $\frac{2\sqrt{15}}{16}$; д) 1,5; е) $\frac{45\sqrt{7}}{4}$; ж) $4\sqrt{14}$; з) $\frac{3\sqrt{14}}{2}$. **12.2.** а) $12\sqrt{15}$ см^2; б) 84 см^2. **12.3.** а) 8,125;

б) $20\frac{1}{24}$. **12.4.** а) $3\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{5}$. **12.5.** а) $\frac{7\sqrt{11}}{6}$ см; б) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ см. **12.6.** а) $\frac{24\sqrt{3}}{11}$ см; б) $\frac{8\sqrt{14}}{11}$ см. **12.7.** а) $24\sqrt{11}$ см^2; б) $60\sqrt{7}$ см^2. **12.8.** а) 80 см; б) 60 см.

§ 13

13.1. а) 135°; б) 30; в) 108°; г) 10; д) 72. **13.2.** а) 108 см; б) 2 см. **13.3.** а) 16; б) 8. **13.4.** а) 70 см; б) 4860°. **13.5.** а) 1 см; б) 54 см. **13.6.** а) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{a^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$. **13.7.** а) $\left(2\sqrt{5}-2\right)$ см; б) $\left(\sqrt{5}-1\right)$ см. **13.9.** а) $\left(3+2\sqrt{2}\right)$ см^2; б) $24\left(\sqrt{2}-1\right)$ см. **13.10.** а) $4+3\sqrt{2}$; б) $8+7\sqrt{2}$. **13.11.** а) 12 см; б) 10 см. **13.12.** а) $2\sqrt{2}$ см; б) $8\sqrt{2}$ см. **13.13.** а) 6,125; б) 36.

§ 14

14.1. а) 1) 24; 2) 18; 3) 72; 4) 15; б) 1) 15; 7,5; 2) 10; 3) $2\sqrt{2}$. **14.2.** а) $108\sqrt{3}$ см^2; б) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см. **14.3.** а) 32 см; б) 16 см^2. **14.4.** а) $\sqrt{6}$ см; б) $32\sqrt{3}$ см^2. **14.5.** а) $R=\frac{b}{2\sin 10°}$; б) $c=2r\operatorname{tg}5°$. **14.6.** а) $12R^2\sin 15°$; б) 36. **14.7.** $3\left(1+\sqrt{3}\right)$. **14.9.** а) $8\left(3+2\sqrt{3}\right)$; б) $6\left(2\sqrt{3}-3\right)$. **14.10.** а) 36; б) $4\sqrt{2}$.

§ 15

15.1. а) $2\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$; в) 4; г) 36; д) 24; е) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$; ж) $3\sqrt{3}$; з) $6\sqrt{3}$; и) $6\sqrt{3}$. **15.2.** а) $2:\sqrt{3}$; б) $1:3$. **15.3.** а) $16\sqrt{3}$ см; б) $12\sqrt{6}$ см. **15.4.** а) 8; б) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$. **15.6.** а) $15\sqrt{3}$ см; б) 6 см. **15.7.** а) 48; б) $36\sqrt{3}$. **15.8.** а) 30; б) 40. **15.9.** а) 36 см; б) 18 см. **15.10.** а) 12 см; б) $2\left(\sqrt{3}-1\right)$ см. **15.11.** $20\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

§ 16

16.1. а) 8π; б) 9π; в) 16π; г) 8; д) $\frac{8\pi}{3}$; е) $\frac{20\pi}{9}$; ж) $\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{4}$. **16.2.** а) $\sqrt{6}\pi$; б) $2\sqrt{3}\pi$. **16.3.** а) 18π; б) 48π. **16.4.** а) $12\sqrt{2}$ см; б) $9\sqrt{3}$ см. **16.5.** а) $(100-25\pi)$ см^2; б) $\frac{4(3\sqrt{3}-\pi)}{3}$ см^2. **16.6.** а) 2 см; б) 6,25 см. **16.7.** а) 11 см^2; б) 17 см^2. **16.8.** а) 72°; б) 80°. **16.9.** а) 16 см; б) 0,2 см. **16.10.** а) $\frac{3\sqrt{5}\pi}{5}$ см; б) $3{,}75\pi$ см^2. **16.11.** а) $(2\pi-4)$ см^2; б) $(\pi-2)$ см^2. **16.12.** а) $36\sqrt{2}$ см; б) 300°. **16.13.** а) 5 : 4; б) 4 : 5. **16.14.** а) $\frac{4(2\pi-3\sqrt{3})}{3}$ см^2; б) $\frac{9(\pi-2)}{4}$ см^2. **16.15.** а) $8(\sqrt{3}+\pi)$; б) $\frac{2\pi}{3}$. **16.16.** а) 6 см^2; б) 24 см^2. **16.17.** а) 4π см; б) 4π см^2. **16.18.** 10π. **16.19.** 6π см. **16.20.** $\frac{24\sqrt{3}-11\pi}{6}$.

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 7—9-х КЛАССОВ

Треугольники

1. а) 70°; б) 10°. **2.** а) 36°; б) 15°. **3.** а) 50°; б) 37°. **5.** а) 2), 3); б) 1), 2). **6.** а) 30 см^2; б) 15 см^2. **7.** а) 9 см; б) 20 см. **8.** а) $16\sqrt{7}$; б) $14\sqrt{6}$. **9.** а) 1,69; б) 16,9. **10.** а) 10; б) 30. **11.** а) 72 см; б) 72 см. **12.** а) 29; б) 13. **13.** а) $\frac{\sqrt{3}}{7}$; б) $3\sqrt{3}$. **14.** а) 3 см; б) 2 см. **15.** а) 48 см^2; б) $1\frac{2}{3}$ см. **16.** а) 720 см^2; б) 288 см^2. **17.** а) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; б) $2\sqrt{34}$ см. **18.** а) 8 см; б) 5 см. **19.** а) 0,75; б) $\frac{1}{3}$. **20.** а) 30; б) 35. **21.** а) 10 см; б) 18 см. **22.** а) $\frac{24\sqrt{15}}{5}$ см; б) $\frac{25\sqrt{6}}{3}$ см. **23.** а) 15; б) 15. **24.** а) $\sqrt{97}$; б) $\sqrt{13}$. **25.** а) 6 : 1; б) 5 : 1. **26.** а) 6 : 5; б) 7 : 20. **27.** а) 2 : 1; б) 3 : 4. **28.** а) $(\sqrt{3}+1):1$; б) $(\sqrt{2}+1):1$. **29.** а) 6; б) 8. **30.** а) 3 см; б) $3\sqrt{6}$ см. **31.** а) 16,9; б) 3,75. **32.** а) $2\sqrt{13}$ см; б) $\frac{9\sqrt{17}}{4}$ см.

Четырехугольники

34. а) 14 см; б) 20 см. **35.** а) 30 см; б) 38 см. **36.** а) $5\sqrt{3}$ см^2; б) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см^2. **38.** а) $0{,}5\sqrt{3}$ см; б) 2,5 см. **39.** а) 42 см^2; б) 8 см^2. **40.** а) 2 см; б) 10 см. **41.** а) 14; б) 26. **42.** а) 8; б) 10,24. **43.** а) 30; б) 10. **44.** а) 4; б) 6. **45.** а) 8; б) 24. **46.** а) 62,5 см^2; б) 40 см. **47.** а) $8\sqrt{3}$ см^2; б) $4\sqrt{3}$ см. **48.** а) $36\sqrt{5}$; б) $36\sqrt{5}$. **49.** а) 0,8; б) 9 : 1. **50.** а) 600 см^2; б) 156 см^2. **51.** а) 4,8; б) $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **52.** а) 120; б) 384. **53.** а) $16\frac{2}{3}$; б) $4\frac{1}{6}$. **54.** а) $32\sqrt{3}$ см^2; б) $72\sqrt{3}$ см^2. **55.** а) 25 см; б) 60°. **56.** а) 6; б) $8\sqrt{3}$. **57.** а) 7 см; б) 16 см. **58.** а) 60 см^2; б) 6 см. **59.** а) $8\sqrt{2}$ см^2; б) $3\sqrt{7}$ см^2. **60.** а) 64; б) 225. **61.** а) $12\sqrt{6}$; б) $\frac{68\sqrt{21}}{25}$. **62.** а) $32\sqrt{6}$; б) $5\sqrt{15}$. **64.** а) 13,5; б) 9. **65.** а) 6,4 см; б) $\frac{4\sqrt{6}}{5}$ см. **66.** а) 45°; б) 30°. **67.** а) 62,5; б) 98. **68.** а) 45 см; б) 36 см. **69.** а) 8 см; б) 8 см. **70.** а) 1440 см^2; б) 84 см^2. **71.** а) 2,4; б) 7,2. **72.** а) $16\frac{2}{3}$; б) 202,8. **73.** а) 5 см; б) 14 см. **74.** а) 2; б) 6. **75.** а) 10; б) 10. **76.** а) 168; б) 108. **77.** а) 4,8 см; б) $11\frac{1}{13}$ см. **78.** а) 192; б) 64. **79.** а) 128; б) 375. **81.** а) 60 см^2; б) 6 см. **82.** а) 36 см^2; б) 4 см. **83.** а) 2,6; б) 4. **84.** а) 20; б) 63. **85.** а) 9 : 16; б) 4 : 9.

Окружность

86. а) 105°; б) 160°. **87.** а) 8; б) 10. **88.** а) 58°; б) 28°. **90.** а) 44°; б) 32°. **91.** а) 70°; б) 35°. **92.** а) 120°; б) 20°. **93.** а) 10°; б) 45°. **94.** а) 8°; б) 9°. **95.** а) 6,5; б) 8. **96.** а) 4; б) $2\sqrt{15}$. **97.** а) 8; б) $12\sqrt{3}$. **98.** а) 8; б) 10. **99.** а) 10; б) 6. **100.** а) 96°; б) 96°. **101.** а) 120; б) 336. **102.** а) $\sqrt{130}$ см; б) $2\sqrt{5}$ см. **103.** а) $2\sqrt{2}$ см; б) 9 см. **104.** а) 45°; б) 120°. **105.** а) 64; б) $53\frac{1}{3}$.

ИТОГОВЫЙ САМОКОНТРОЛЬ

1. б). **2.** 3,6 см; 7,2 см. **3.** 1. **4.** 20. **5.** 180 см^2. **6.** 14 см, 10 см, 12 см. **7.** 15 см. **8.** 6. **9.** $1\frac{1}{3}$ см. **10.** 12,5 см; 2 см. **11.** 8 см^2; 50 см^2. **12.** 25. **13.** 29,7°, 69,3° и 81°. **14.** 7 см. **15.** $5\sqrt{6}$ см^2. **16.** 30°; 60°. **17.** а) 2 см; $2\sqrt{3}$ см; $2\sqrt{3}$ см^2; б) $14\sqrt{2}$ см. **18.** 10°. **19.** 15. **20.** $3-\sqrt{5}$. **21.** 7,2. **22.** $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}$. **23.** $4\sqrt{3}$ см^2. **24.** Нет. **25.** 14 см. **26.** 97°. **27.** 3 см. **28.** 3 см. **29.** 120°. **30.** а) 105°; б) 20 см; 28 см. **31.** 30 см и 20 см. **32.** 33 см^2. **33.** 7,5 см. **34.** 24. **35.** 160 см^2. **36.** $16\sqrt{2}$. **37.** 12. **38.** 4. **39.** 95. **40.** 18 см^2. **41.** а) 12 см; б) 12 см. **42.** 60 см^2. **43.** 48π. **44.** 18. **45.** $3+2\sqrt{3}$. **46.** 2. **47.** $OB < OA$. **48.** 60°. **49.** 100°; 160°; 100°. **50.** 5 см. **51.** а) 62°; б) 120°; в) 35°. **52.** а) 17; б) 2; в) 8. **53.** 5π. **54.** $\frac{8\pi}{3}$. **55.** Тупоугольный.

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

8 класс

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ОКРУЖНОСТЬ

9 класс

СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ОКРУЖНОСТИ

ТЕОРЕМА СИНУСОВ, ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 7—9-х КЛАССОВ

(Название учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Кононов Сергей Гаврилович
Адамович Тамара Антоновна
Ефимцева Ирина Валерьяновна
Ячейко Таиса Владимировна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие для 7–9 классов учреждений образования, реализующих образовательные программы общего среднего образования с русским языком обучения и воспитания

Зав. редакцией *Г. А. Бабаева*. Редактор *Н. М. Алганова*. Художественный редактор *О. Н. Карпович*. Техническое редактирование и компьютерная верстка *И. И. Дубровской*. Корректор *О. С. Козицкая*.

Подписано в печать 14.11.2023. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,55. Уч.-изд. л. 9,4. Тираж 79 000 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/2 от 08.07.2013. Пр. Победителей, 11, 220004, Минск, Республика Беларусь.

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/3 от 10.09.2018. Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск, Республика Беларусь.

С23 **Сборник задач по геометрии** : учебное пособие для 7–9-х классов учреждений образования, реализующих образовательные программы общего среднего образования с русским языком обучения и воспитания / С. Г. Кононов [и др.]. — Минск : Народная асвета, 2023. — 240 с. : ил.

ISBN 978-985-03-4012-2.

Сборник содержит дополнительные задачи к учебным пособиям «Геометрия» для 7-го класса, «Геометрия» для 8-го класса, «Геометрия» для 9-го класса автора В. В. Казакова. Структура сборника соответствует структуре названных учебных пособий. Содержит задания базового и повышенного уровней. Может использоваться при самостоятельной подготовке к экзаменам.

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721