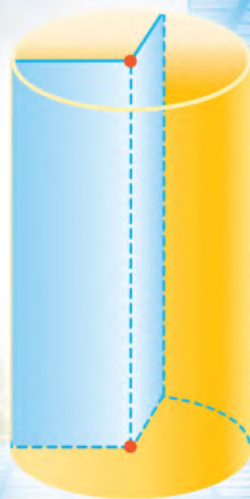


Л. А. Латоцін

Б. Д. Чабатарэўскі



10•11

ЗБОРНИК ЗАДАЧ
ПА ГЕАМЕТРЫІ

Л. А. Латоцін

Б. Д. Чабатарэўскі

ЗБОРНІК ЗАДАЧ ПА ГЕАМЕТРЫІ

Вучэбны дапаможнік для 10—11 класаў
устаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання
(базавы і павышаны ўзроўні)

*Датушчана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь*

Мінск «Народная асвета» 2021

Правообладатель Народная асвета

УДК 514(075.3=161.3)

ББК 22.151я721

Л27

Рецензенты:

кафедра методикі викладання фізика-математичних дисциплін
установы адукацыі «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»
(кандыдат педагогічных навук, дацэнт *А. П. Грынько*); метадыст вышэйшай
кваліфікацыйнай катэгорыі аддзела метадычнага забеспячэння
прыродазнаўча-матэматычнай адукацыі Нацыянальнага інстытута адукацыі
Т. А. Адамовіч

ISBN 978-985-03-3703-0

© Латоцін Л. А., Чабатарэўскі Б. Д., 2021

© Афармленне. УП «Народная асвета», 2021

Правообладатель Народная асвета

Дарагія сябры!

Кніга, якую вы трымаеце ў руках, змяшчае заданні для практычнага авалодвання тым зместам, што выкладзены ў вучэбных дапаможніках па геаметрыі для сярэдняй агульнаадукацыйнай школы.

Заданні ў прапанаваным зборніку для кожнага класа згрупаваны па параграфам, якія названы гэтаксама, як і адпаведныя параграфы вучэбнага дапаможніка. Нумары практыкаванняў у зборніку адрозніваюцца колерамі. Колер нумара, як правіла, адпавядае таму сэнсаваму блоку вучэбнага дапаможніка, які пазначаны літарай адпаведнага колеру. Напрыклад, задачы 751, 752, 779, 799, 891 звязаны з лагічнымі блокамі А), Б), В), Г), Д) параграфа 8 вучэбнага дапаможніка «Геаметрыя, 11». Асноўнае прызначэнне гэтых заданняў — актуалізаваць змест вывучанага ў адпаведным параграфу матэрыялу і паказаць яго сувязі з раней вывучаным. Зорчэкай * пазначаны заданні павышанай цяжкасці, значком  — заданні, што адпавядаюць праграме навучання на павышаным узроўні. Практыкаванні, што маюць курсіўныя нумары, непасрэдна прымыкаюць да вывучанага матэрыялу і прызначаны для паглыблення ведаў цікавых вучняў.

У курсе геаметрыі старшай ступені сярэдняй школы істотна выкарыстоўваюцца веды пра геаметрычныя ўласцівасці плоскіх фігур, якія вывучаліся ў ранейшых класах. Таму разам з вывучэннем новага матэрыялу трэба значную ўвагу надаваць абагульненню і паўтарэнню ўсяго, што вывучалася на працягу ўсіх адзінаццаці гадоў, што істотна для падрыхтоўкі як да выпускнога экзамену, так і да цэнтралізаванага тэсціравання. Гэтай мэце прысвечаны апошні раздзел, у якім заданні згрупаваныя па асноўных змястоўных лініях школьнай геаметрыі. Заданні апошняга раздзела можна выкарыстоўваць і для бягучага паўтарэння раней пройдзенага матэрыялу. Яны могуць істотна адрознівацца па ўзроўні цяжкасці. У адных заданнях патрабуецца ўспомніць матэрыял, што вывучаўся даўно, ад якога ў памяці засталіся толькі самыя агульныя ўяўленні. Такія заданні дапамогуць аднавіць істотныя моманты вывучанага раней, замацаваць іх у памяці. Іншыя заданні патрабуюць прымянення ведаў па розных тэмах. Менавіта такія заданні вучаць прымяненню матэматычных ведаў.

Пспехаў вам!

Аўтары

10 клас

1. Просторовыя фігуры

1. Назавіце мнагаграннік, які мае найменшую колькасць вяршынь. Колькі ў такога мнагагранніка:
а) вяршынь; б) кантаў; в) граняў?
2. Кожная грань мнагагранніка з'яўляецца паралелаграмам. На rysunku 1 паказаны такі нявыпуклы мнагаграннік, адрозны ад паралелепіпеда. Колькі ў гэтага мнагагранніка:
а) вяршынь; б) кантаў; в) граняў?
3. На rysunku 2 паказаны выпуклы мнагаграннік, адрозны ад паралелепіпеда, кожная грань якога з'яўляецца паралелаграмам. Колькі ў гэтага мнагагранніка:
а) вяршынь; б) кантаў; в) граняў?
4. У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вымярэнні AB , AD , AA_1 адпаведна роўны 4, 5 і 12. Знайдзіце даўжыню прасторавай ломанай $AB_1 C_1 B A_1 D_1 C C_1 D A$.
5. У прамой прызме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ усе канты маюць даўжыню 6 см. Знайдзіце даўжыню прасторавай ломанай $ABC_1 D_1 B_1 A_1 DCA$, улічыўшы, што $\angle ABC = 120^\circ$.
6. У правільнай пірамідзе $PABCD$ пункты M , N , K , L — сярэдзіны кантаў AB , BC , CP , PA адпаведна. Знайдзіце даўжыню бакавога канта, улічыўшы, што ломаная $MBNKPLM$ мае даўжыню 26 і $CD = 6$.
7. У правільнай шасцівугольнай прызме бакавы кант роўны канту асновы. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні прызмы,

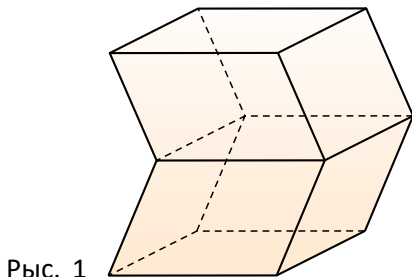


Рис. 1

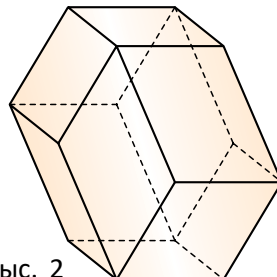
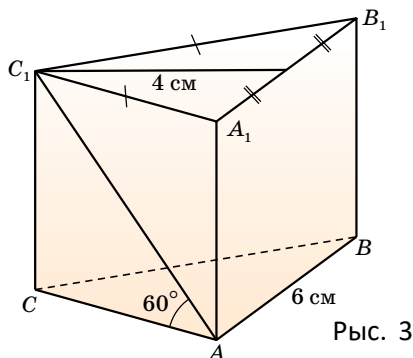
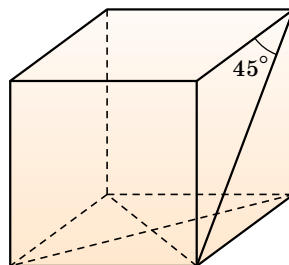


Рис. 2



Рыс. 3



Рыс. 4

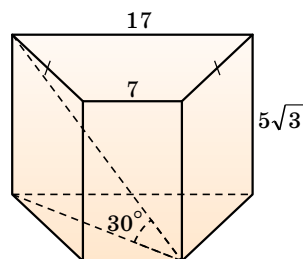
улічыўшы, што яе бакавая паверхня роўна 216 см^2 .

8. Пункты $M, N, K, L, M_1, N_1, K_1, L_1$ выбраны на кантах куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ так, што $AM : MB = A_1M_1 : M_1B_1 = BN : NC = B_1N_1 : N_1C_1 = CK : KD = C_1K_1 : K_1D_1 = DL : LA = D_1L_1 : L_1A_1 = 3 : 4$.

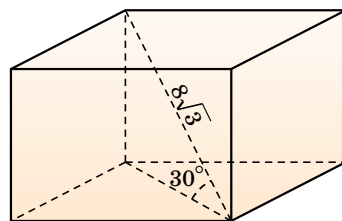
Знайдзіце даўжыню прасторавай ломанай $MM_1N_1NKK_1L_1LM$, улічыўшы, што кант куба роўны 14 см .

9. Знайдзіце поўную паверхню прамой прызмы $ABCA_1B_1C_1$ па звестках, прыведзеных на рысунку 3.
10. Знайдзіце поўную паверхню прамой прызмы, у аснове якой ляжыць ромб з дыяганалямі 10 і 24 , улічыўшы звесткі, прыведзеныя на рысунку 4.
11. Знайдзіце поўную паверхню прамой прызмы, улічыўшы звесткі, прыведзеныя на рысунку 5, і тое, што асновай прызмы з'яўляецца трапеццыя.
12. Знайдзіце поўную паверхню чатырохвугольнай правільнай прызмы з дыяганаллю 15 і дыяганаллю асновы 12 .
13. Знайдзіце поўную паверхню правільнай прызмы па звестках, прыведзеных на рысунку:

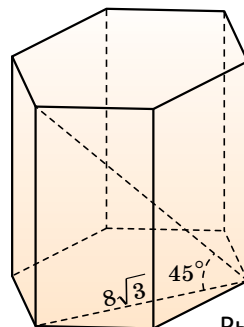
- а) 6 ; б) 7 .



Рыс. 5

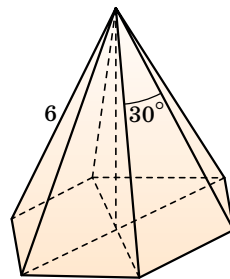


Рыс. 6



Рыс. 7

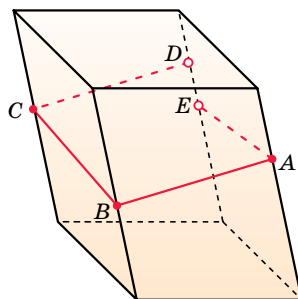
14. Знайдіть бакаву паверхню правильнай піраміды $SAB CDE F$ па звестках, прыведзеных на рысунку 8.
15. У правильнай шасцівугольнай пірамідзе бакавы кант роўны 13 см, а апафема — 12 см. Знайдзіце плошчы бакавой і поўнай паверхняў гэтай піраміды.
16. У правильнай шасцівугольнай усечанай пірамідзе бакавы кант роўны 5 см, канты асноў — 2 см і 8 см. Знайдзіце плошчы бакавой і поўнай паверхняў гэтай піраміды.



Рыс. 8

2. Прамыя і плоскасці

17. Колькі пунктаў папарных перасячэнняў могуць мець:
- тры прамыя;
 - чатыры прамыя?
- Свае адказы пацвердзіце адпаведнымі рысункамі.
18. Кожныя дзве з трох прамых перасякаюцца. Вызначце, колькі ёсць пунктаў перасячэння, улічыўшы, што прамыя не належаць адной плоскасці.
19. Праз кожныя два з чатырох адзначаных пунктаў праведзена прмая. Як размешчаны адзначаныя пункты, калі праведзеныя прамыя перасякаюцца ў:
- чатырох пунктах;
 - пяці пунктах;
 - шасці пунктах?
20. Прамыя змяшчаюць стораны правільнага шасцівугольніка. Вызначце, колькі пунктаў атрымаецца пры папарных перасячэннях гэтых прамых.
21. Кожныя дзве з трох прамых перасякаюцца. Вызначце, колькі існуе пунктаў перасячэння, улічыўшы, што прамыя не належаць адной плоскасці.
22. Кожныя дзве з трох плоскасцей перасякаюцца. Колькі прамых пры гэтым можа атрымацца?
23. Пункты A, B, C, D, E выбраны на бакавых кантах прызмы (рыс. 9). Ці могуць належаць адной плоскасці:
- усе гэтыя пункты;
 - усе гэтыя пункты, але без пункта D ;
 - усе гэтыя пункты, але без пункта E ?
- Адказ абгрунтуйце.



Рыс. 9

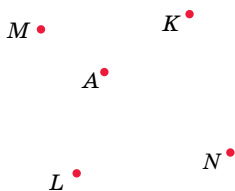


Рис. 10

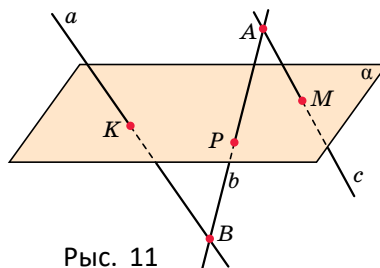


Рис. 11

24. Точки A, B, C, D, M, N, K, L не лежат в одной плоскости, точка F принадлежит прямой BC . Укажите:

- плоскости, в которой принадлежит точка F ; точка C ;
- плоскости, в которой принадлежит прямая CD ;
- прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и ACD ;
- линию пересечения плоскостей ABD и ACF .

25. Точки M, N, K, L не лежат в одной плоскости, точка A лежит между точками K и M , а точка B — между точками K и N . Вызначте:

- те принадлежат точке A плоскости MNL ;
- по которой прямой пересекаются плоскости MNL и KAB ; MBK и NLK ;
- те принадлежат прямой AL плоскости MBK .

26. Точки M, N, K, L не лежат в одной плоскости, точка A лежит между точками M и N (рис. 10). Вызначте, те пересекаются прямые LA и MK .

27. Точки A, B, C выбраны в плоскости α так, что лучи KA, KB, KC лежат в одной плоскости. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой.

28. Прямые a, b, c пересекаются плоскостью α в точках K, P и M соответственно (рис. 11). Вызначте, те лежат в одной плоскости прямые a, b, c .

29. Плоскости α и β пересекаются по прямой l , прямая a лежит в плоскости α (рис. 12). Сделайте такой рисунок в тетрадь и постройте точку пересечения прямой a с плоскостью β .

30. Точки A и B принадлежат плоскости α , точка C — плоскости β , плоскости α и β пересекаются по прямой a (рис. 13). Сделайте такой рисунок

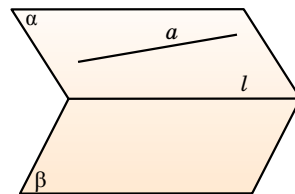


Рис. 12

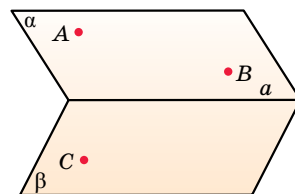


Рис. 13

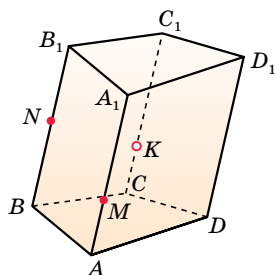


Рис. 14

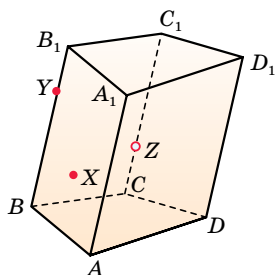


Рис. 15

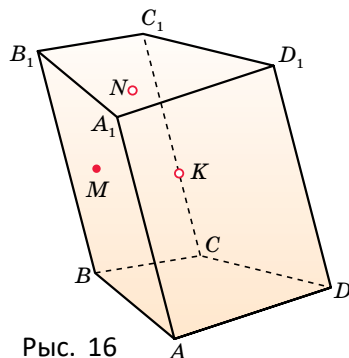


Рис. 16

у штытку і пабудуйце прамыя, па якіх плоскасць ABC перасякае плоскасці α і β .

31. Пункты M , N , K адзначаны адпаведна на кантах AA_1 , BB_1 , CC_1 прызмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 14). Зрабіце такі рысунак у штытку і пабудуйце пункт перасячэння канта DD_1 з плоскасцю MNK .
32. На грані ABA_1 і кантах BB_1 і CC_1 прызмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ адзначаны пункты X , Y , Z адпаведна (рис. 15). Зрабіце такі рысунак у штытку і пабудуйце пункт перасячэння канта DD_1 з плоскасцю XYZ .
33. На гранях ABA_1 , BCB_1 і канце CC_1 прызмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ адзначаны пункты M , N , K адпаведна (рис. 16). Зрабіце такі рысунак у штытку і пабудуйце пункт перасячэння канта DD_1 з плоскасцю MNK .
34. На гранях ABA_1 , BCB_1 і канце CC_1 прызмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ адзначаны пункты P , Q , R адпаведна (рис. 17). Зрабіце такі рысунак у штытку і пабудуйце пункт перасячэння канта DD_1 з плоскасцю PQR .
35. Пункты P , Q , R адзначаны на канце B_1C_1 прызмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, грані CC_1D_1 і плоскасці ABC адпаведна (рис. 18). Зрабіце такі рысунак у штытку і пабудуйце пункт перасячэння канта DD_1 з плоскасцю PQR .

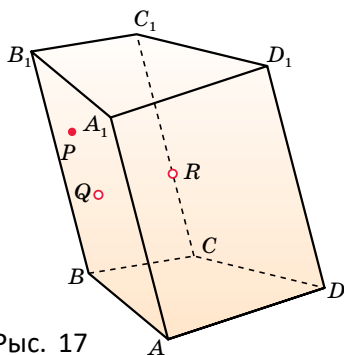


Рис. 17

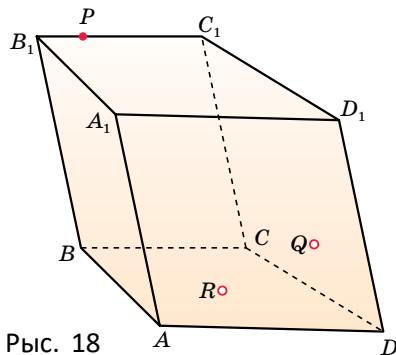
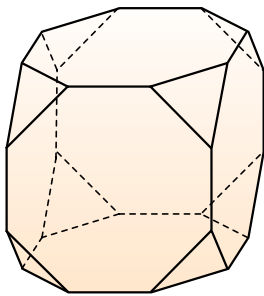


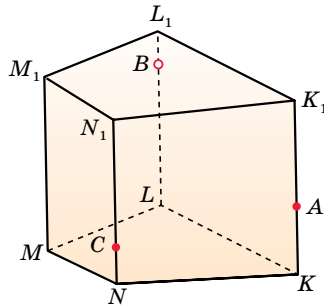
Рис. 18

3. Побудованне сячэнняў мнагаграннікаў

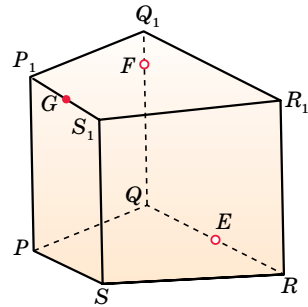
36. У куба з кантамі 12 см каля кожнай вяршыні зрабілі плоскі зрэз (рыс. 19), які з'яўляецца правільным трохвугольнікам са старонай 4 см. Знайдзіце агульную даўжыню кантаў атрыманага мнагагранніка і плошчу яго паверхні.
37. На кантах KK_1 , LL_1 , NN_1 прызмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ адзначаны адпаведна пункты A , B , C (рыс. 20). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю ABC .
38. Пункты E , F , G адзначаны адпаведна на кантах QR , QQ_1 , P_1S_1 прызмы $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (рыс. 21). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце пункт перасячэння канта SS_1 з плоскасцю EFG .



Рыс. 19

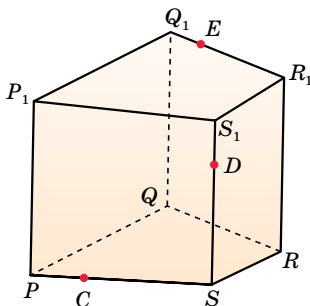


Рыс. 20

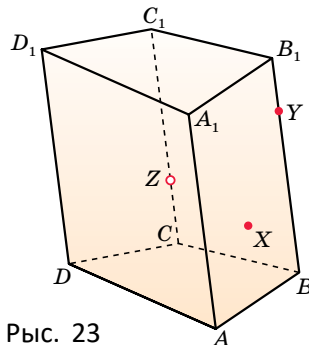


Рыс. 21

39. Пункты C , D , E адзначаны адпаведна на кантах PS , SS_1 , Q_1R_1 прызмы $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (рыс. 22). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю CDE .
40. На грані ABA_1 і кантах BB_1 і CC_1 прызмы $ABCD A_1B_1C_1D_1$ адзначаны адпаведна пункты X , Y , Z (рыс. 23). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю XYZ .



Рыс. 22



Рыс. 23

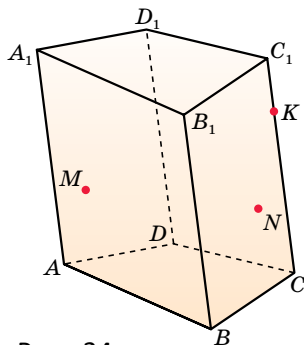


Рис. 24

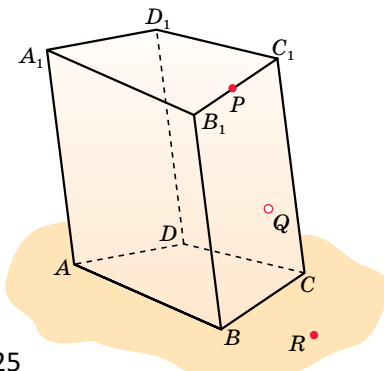


Рис. 25

41. На гранях ABA_1 , BCB_1 і канце CC_1 призми $ABCA_1B_1C_1D_1$ адзначаны адпаведна пункты M , N , K (рис. 24). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне призмы плоскасцю MNK .
42. Пункты P , Q , R адзначаны адпаведна на канце B_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$, грані CC_1D_1 і плоскасці ABC (рис. 25). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне призмы плоскасцю PQR .
43. На кантах AM , MN , AK піраміды $AMNK$ адзначаны адпаведна пункты U , V , W (рис. 26). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю UVW .
44. Пункты K , M , P адзначаны адпаведна на кантах AB , SC , SD піраміды $SABCD$ (рис. 27). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю KMP .
45. На кантах SA , SC , SD піраміды $SABCD$ адзначаны адпаведна пункты M , P , K (рис. 28). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю MPK .

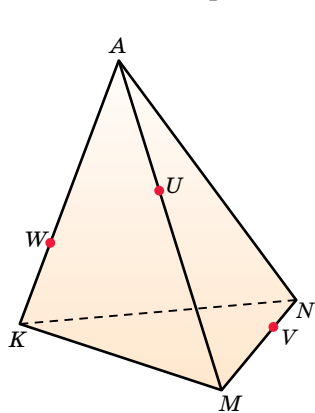


Рис. 26

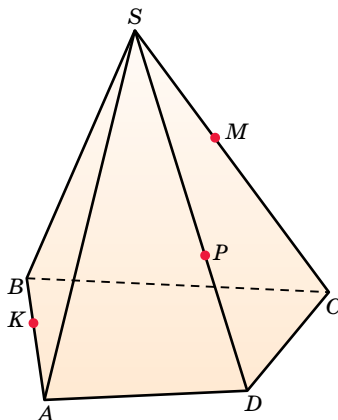


Рис. 27

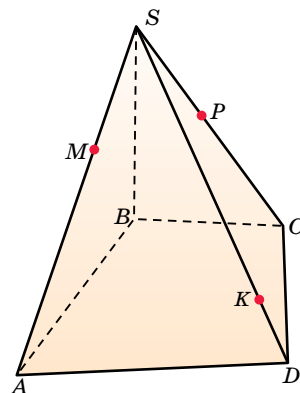
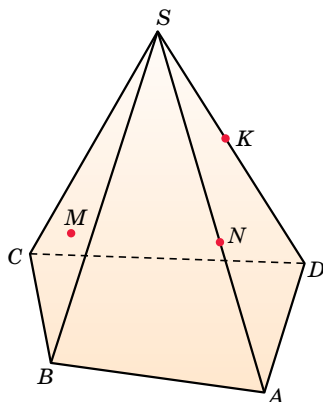
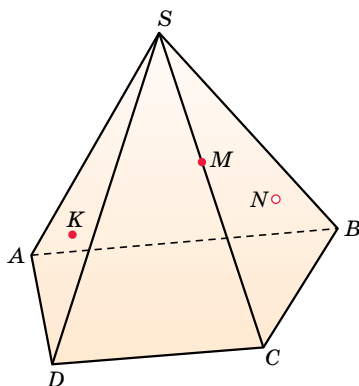


Рис. 28

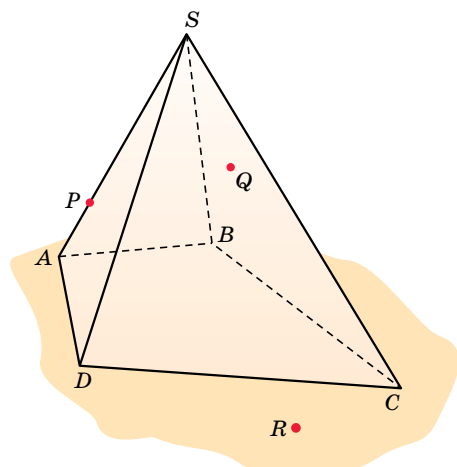


Рыс. 29

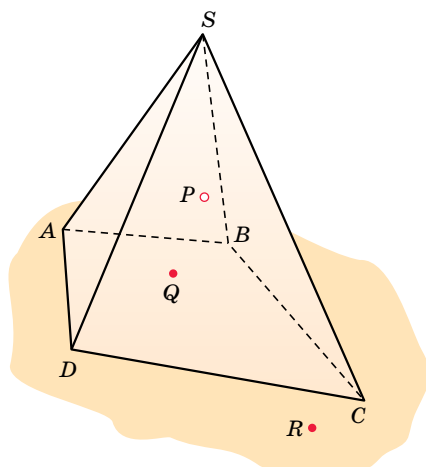


Рыс. 30

46. На грані SBC і кантах SA і SD піраміды $SABCD$ адзначаны адпаведна пункты M, N, K (рыс. 29). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю MNK .
47. На канце SC і гранях SAB, SAD піраміды $SABCD$ адзначаны адпаведна пункты M, N, K (рыс. 30). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю MNK .
48. Пабудуйце сячэнне піраміды $SABCD$ плоскасцю PQR , улічыўшы, што пункты R, Q, P адзначаны адпаведна на плоскасці ABC , грані SCD і:
- а) канце SA (рыс. 31); б) грані SAB (рыс. 32).



Рыс. 31



Рыс. 32

49. Плоскасць α праходзіць праз сярэдзіны кантаў AB , BC і CC_1 адпаведна куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Зрабіце такі рысунак у сшытку, пабудуйце сячэнне куба плоскасцю α і знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што кант куба роўны адзінцы.
50. Пабудуйце сячэнне адзінкавага куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскасцю α і знайдзіце яго плошчу, улічыўшы, што плоскасць α праходзіць праз вяршыню A і перасякае сярэдзіны кантаў:
- а) BB_1 і DD_1 ; б) $B_1 C_1$ і $C_1 D_1$; в) BC і $A_1 B_1$.
51. Плоскасць α праходзіць праз вяршыні A_1 і B адзінкавага куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і сярэдзіну канта $C_1 D_1$. Зрабіце адпаведны рысунак у сшытку, пабудуйце сячэнне куба плоскасцю α і знайдзіце плошчу сячэння.
52. Пабудуйце сячэнне адзінкавага куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскасцю PQR і знайдзіце яго плошчу, улічыўшы, што пункты P і Q — сярэдзіны кантаў AB і $C_1 D_1$ куба, а пункт R на канце:
- а) BB_1 такі, што $BR : RB_1 = 1 : 4$;
 б) BB_1 такі, што $BR : RB_1 = 1 : 3$;
 в) $A_1 B_1$ такі, што $A_1 R : RB_1 = 3 : 1$.

4. Узаемнае размяшчэнне прамых у прасторы

53. Пункты P , Q , R , S — сярэдзіны адпаведна кантаў AC , BC , BD , AD трохвугольнай піраміды $ABCD$. Знайдзіце даўжыню ломанай $PQRSP$, улічыўшы, што $AB = 12$ см, $CD = 16$ см.
54. Пункты M , N , K выбраны на бакавых кантах прызмы $ABCA_1 B_1 C_1$ так, што $AM = 5$, $BN = 7$, $CK = 12$. Знайдзіце адлегласць паміж сярэдзінамі Q і Q_1 медыян AL і ML_1 трохвугольнікаў ABC і MNK .
55. Асновы AD і BC трапецыі $ABCD$ роўны 5 і 7, старана AF трохвугольніка AFB — 8, адлегласць паміж сярэдзінамі M і N адрэзкаў CD і BF — 10. Дакажыце, што пункт F ляжыць у плоскасці ABC .
56. Прамая a перасякае кожную са скрыжавальных прамых b і c , $d \parallel a$. Дакажыце, што прамыя d і b або d і c скрыжавальныя.
57. Плоскасці α і β праходзяць праз пункт C і скрыжавальныя прамыя a і b адпаведна. Ці праўда, што лінія перасячэння плоскасцей α і β і хаця б адна з прамых a і b скрыжавальныя?
58. Паралельныя прамыя a і b належаць плоскасцям α і β , якія перасякаюцца па прамой c . Дакажыце, што $a \parallel c \parallel b$.
59. Прамая a паралельная плоскасцям α і β , якія перасякаюцца па прамой c . Дакажыце, што $a \parallel c$.

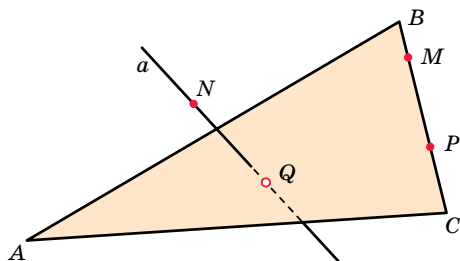


Рис. 33

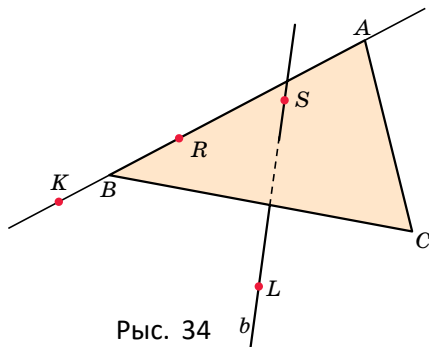


Рис. 34

60. Аснова AB трохвугольніка ABC паралельная плоскасці α , а стораны AC і BC перасякаюць плоскасць α у пунктах P і Q . Пры гэтым $AP : PC = 3 : 2$. Знайдзіце AB , улічыўшы, што $PQ = 6$.
61. Прамая a перасякае плоскасць трохвугольніка ABC , пункты M і P выбраны на прамой BC , а пункты N і Q — на прамой a (рис. 33). Ці праўда, што прамыя MN і PQ паралельныя?
62. Прамая b перасякае плоскасць трохвугольніка ABC , пункты L і S выбраны на прамой b , а пункты K і R — на прамой AB (рис. 34). Ці праўда, што прамыя KL і RS перасякаюцца?
63. Прамыя a і b скрыжавальныя, прамыя c і d іх перасякаюць. Ці праўда, што прамыя c і d таксама скрыжавальныя?
64. Дадзена прызма $ABCA_1B_1C_1D_1$. Дакажыце, што скрыжавальнымі з'яўляюцца прамыя:
- AA_1 і C_1D_1 ;
 - AA_1 і B_1D ;
 - AC і B_1D_1 .
65. На рисунку 35 прамыя AB і A_1B_1 скрыжавальныя, пункты P і Q адзначаны на прамых AA_1 і BB_1 адпаведна. Вызначце, ці могуць перасякацца прамыя PQ і A_1B_1 .
66. Тры плоскасці папарна перасякаюцца па прамых a , b , c . Прамыя a і b не перасякаюцца. Ці можа прамая c перасякацца з прамымі a і b ?
67. Вуглы ABC , ABB_1 , $CB B_1$ у паралелепіпэдзе $ABCA_1B_1C_1D_1$ адпаведна роўны 110° , 100° , 130° . Знайдзіце вугал паміж прамымі:
- AA_1 і C_1D_1 ;
 - AA_1 і B_1C_1 ;
 - A_1B_1 і AD .

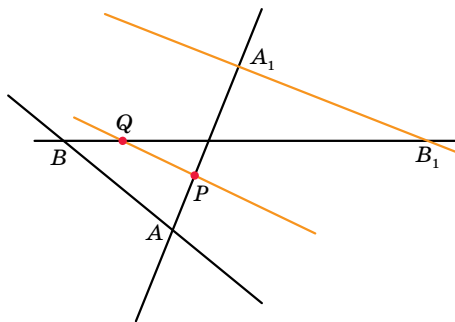


Рис. 35

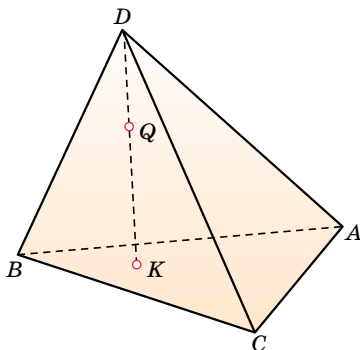


Рис. 36

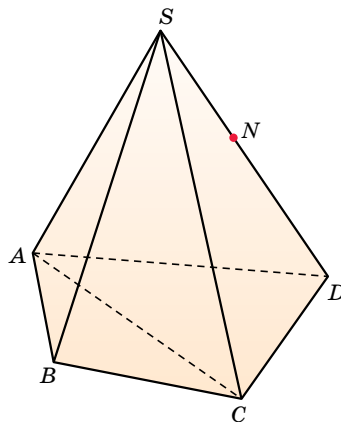


Рис. 37

68. Дакажыце, што калі пункты A, B, C, D не ляжаць у адной плоскасці, то прамыя AB і CD скрыжавальныя.
69. Праз дадзены пункт трэба правесці прамую, якая перасякае дзве дадзеныя скрыжавальныя прамыя. Ці заўсёды можна гэта зрабіць?
70. Дадзены папарна скрыжавальныя прамыя a, b і c . Ці існуе прамая, паралельная a , якая перасякае прамыя b і c ?
71. Адрэзак, што злучае пункт K плоскасці асновы ABC з вяршыняй D піраміды $ABCD$, праходзіць праз пункт Q (рыс. 36). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце пункты, у якіх прамая, што праходзіць праз Q паралельна прамой AB , перасякае паверхню піраміды.
72. На канце SD піраміды $SABCD$ адзначаны пункт N (рыс. 37). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункты B, N і паралельная прамой AC .
73. Пункты P і Q адзначаны на аснове $ABCD$ піраміды $SABCD$, пункты M і N — на канце SA і грані SBC адпаведна (рыс. 38). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункты M, N і паралельная прамой PQ .
74. Дадзены скрыжавальныя прамыя a і b і пункт C . Плоскасць, якая праходзіць праз пункт C і прамую b , перасякае прамую a ў пункце A , а плоскасць, якая праходзіць

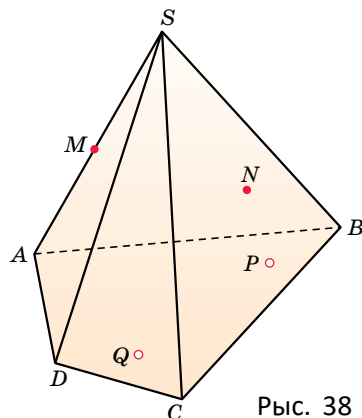
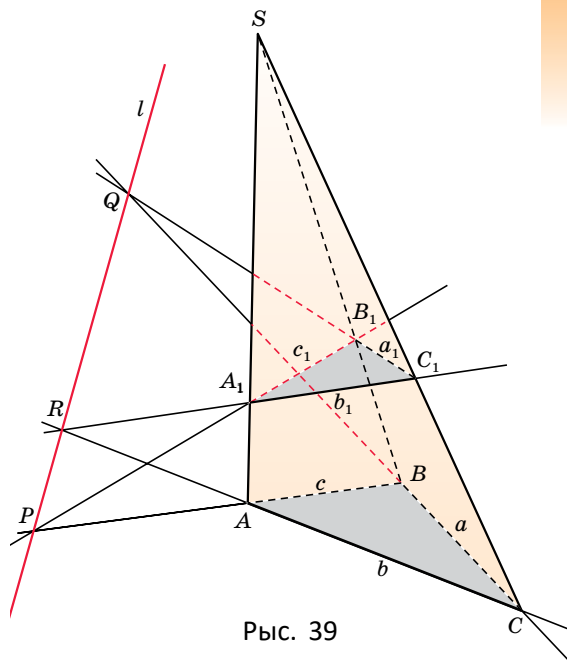


Рис. 38

праз пункт C і прамую a , перасякае прамую b у пункце B . Дакажыце, што пункты A , B і C ляжаць на адной прамой.

- 75. Тэарэма Дэзарга.** Прамыя a , b і c папарна перасякаюцца ў пунктах C , A і B , а прамыя a_1 , b_1 і c_1 — у пунктах C_1 , A_1 і B_1 (рыс. 39). Калі пры гэтым прамыя AA_1 , BB_1 і CC_1 праходзяць праз адзін пункт, то прамыя кожнай пары (AB, A_1B_1) , (BC, B_1C_1) , (AC, A_1C_1) перасякаюцца ў пунктах P , Q , R адпаведна, і ўсе гэтыя пункты перасячэння ляжаць на адной прамой. Дакажыце гэтую тэарэму.



Рыс. 39

- 76.** Ёсць куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. Знайдзіце вугал паміж прамымі:

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| а) AA_1 і B_1C ; | г) AD_1 і B_1D ; | ж) AC_1 і B_1C ; |
| б) AA_1 і BD ; | д) AD_1 і B_1C ; | з) AC_1 і A_1D ; |
| в) AA_1 і BD_1 ; | е) AD_1 і A_1B ; | і) AC_1 і D_1C . |

- 77*.** У правільнай трохвугольнай прызме $ABCA_1B_1C_1$ усе канты роўны адзінцы. Знайдзіце вугал паміж прамымі:

- | | | |
|--------------------|----------------------|----------------------|
| а) AA_1 і BC ; | б) AA_1 і BC_1 ; | в) AC_1 і B_1C . |
|--------------------|----------------------|----------------------|

- 78.** У правільнай трохвугольнай прызме $ABCA_1B_1C_1$ усе канты роўны адзінцы, а пункты M і N — сярэдзіны кантаў AA_1 і BC адпаведна. Знайдзіце вугал паміж прамымі:

- | | | | |
|----------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| а) BM і AC ; | в) BM і CC_1 ; | д) A_1N і AC ; | ж) A_1N і AC_1 ; |
| б) BM і B_1C_1 ; | г) BM і AC_1 ; | е) A_1N і CC_1 ; | з) A_1N і BM . |

- 79.** У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўны адзінцы. Знайдзіце вугал паміж прамымі:



- | | | |
|--------------------|----------------------|----------------------|
| а) AA_1 і BC ; | г) AA_1 і BD_1 ; | ж) AA_1 і ED_1 ; |
| б) AA_1 і CD ; | д) AA_1 і BE_1 ; | з) AA_1 і E_1C ; |
| в) AA_1 і BD ; | е) AA_1 і C_1D ; | і) AA_1 і C_1F . |

80. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ усе канты роўны адзінцы. Знайдзіце вугал паміж прамымі:



- а) AB_1 і FD_1 ; г) AB_1 і CF_1 ; ж) AB_1 і BC_1 ;
 б) AB_1 і DF_1 ; д) AB_1 і DC_1 ; з) AB_1 і $A_1 F$;
 в) AB_1 і CD_1 ; е) AB_1 і BE_1 ; і) AB_1 і $A_1 E$.

81. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ усе канты роўны адзінцы. Знайдзіце вугал паміж прамымі:



- а) AC_1 і $A_1 D$; в) AC_1 і $B_1 F$; д) AD_1 і CF ;
 б) AC_1 і BE_1 ; г) AD_1 і CF_1 ; е) AD_1 і BE .

82. У пірамідзе $ABCD$ усе канты роўны адзінцы, а пункты Q і M — аснова вышыні DQ піраміды і сярэдзіна канта CD адпаведна. Знайдзіце вугал паміж прамымі:



- а) AB і CD ; б) AC і BM ; в) AM і DQ .

83. У пірамідзе $SAB CDEF$ усе канты асновы $ABCDEF$ роўны адзінцы, а ўсе бакавыя канты — двум. Знайдзіце вугал паміж прамымі:



- а) SA і BC ; б) SA і BE ; в) SA і BD .

5. Узаемае размяшчэнне прамой і плоскасці ў прасторы

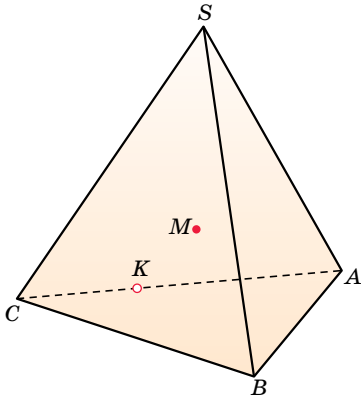
84. Пункт Q ляжыць па-за плоскасцю паралелаграма $ABCD$. Колькі плоскасцей вызначаюць пункты A , B , C , D і Q ? Колькі прамых утвараецца пры перасячэнні гэтых плоскасцей? З гэтых плоскасцей і прамых укажыце пары, у якіх плоскасць і прамая паралельныя.

85. Плоскасць α і прамая a паралельныя, прамая b перасякае прамую a . Якім можа быць размяшчэнне прамой b і плоскасці α ?

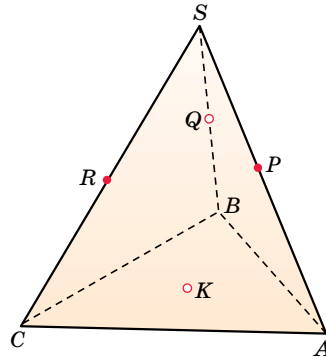
86. У аснове ABC трохвугольнай піраміды $SABC$ адзначаны пункт M , праз яго і вяршыню S праведзена плоскасць α , паралельная прамой AB . Патлумачце, як пабудоваць сячэнне піраміды плоскасцю α .

87. У грані SAB трохвугольнай піраміды $SABC$ адзначаны пункт N , праз яго праведзена прамая a , якая перасякае прамую SA і паралельная плоскасці SBC . Патлумачце, як пабудоваць пункт перасячэння прамых a і SA .

88. У грані SBC трохвугольнай піраміды $SABC$ выбраны пункт M , на канце AC — пункт K (рыс. 40). Патлумачце, як пабудоваць пункт перасячэння прамой AM з плоскасцю SBK .



Рыс. 40



Рыс. 41

89. Пункты P , Q , R , K выбраны адпаведна на кантах SA , SB , SC і грані ABC трохвугольнай піраміды $SABC$ (рыс. 41). Патлумачце, як знайсці пункт перасячэння прамой SK з плоскасцю PQR .
90. Пункты M і K на старанах AB і CD паралелаграма $ABCD$ выбраны так, што $BM : MA = CK : KD$. Плоскасць α перасякае плоскасць ABC па прамой MK . Дакажыце, што $BC \parallel \alpha$.
91. Пункт K на старане AB трохвугольніка ABC выбраны так, што $AB : AK = 3 : 2$. Плоскасць α , паралельная прамой BC , праходзіць праз пункт K . Вызначце, ці праходзіць плоскасць α праз пункт перасячэння медыян трохвугольніка ABC .
92. Прамая a паралельная плоскасці α і прамой b . Якім можа быць узаемнае размяшчэнне прамой b і плоскасці α ?
93. Прамая a паралельная плоскасці α . Дакажыце, што ў плоскасці α ёсць прамая, паралельная прамой a , якая праходзіць праз дадзены пункт гэтай плоскасці.
94. Ці праўда, што ўсе прамыя, якія перасякаюць адну са скрыжавальных прамых і паралельныя другой, ляжаць у адной плоскасці?
95. Плоскасці α і β перасякаюцца па прамой c . Паралельныя прамыя a і b ляжаць у плоскасцях α і β адпаведна. Ці праўда, што $a \parallel c$ і $b \parallel c$?
96. Пункты A , B і C адлеглыя ад плоскасці α на 2 см, 2 см і 5 см. Ці праўда, што адна з прамых AB , BC , CA паралельна плоскасці α ?
97. Плоскасць α перасякае стораны AB і AC трохвугольніка ABC у пунктах B_1 і C_1 адпаведна. Улічыўшы, што $AC_1 = 6$ см, $AB_1 : B_1B = 3 : 2$ і $BC \parallel \alpha$, знайдзіце AB .

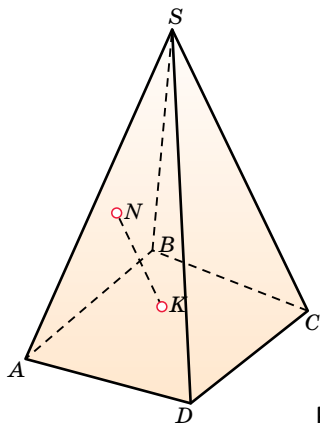


Рис. 42

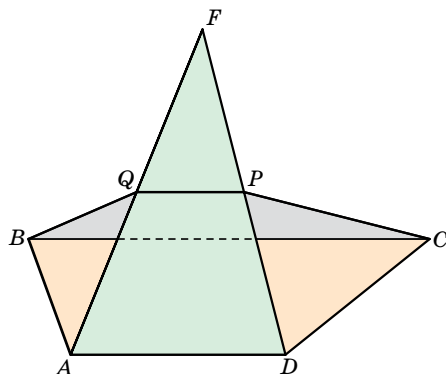


Рис. 43

98. У пірамідзе $SABCD$ адзначаны пункты K і N перасячэння медыян трохвугольнікаў ABC і ASB (рыс. 42). Ці можна сцвярджаць, што прамая KN паралельная плоскасці ASC ?
99. Пункты P , Q і M — сярэдзіны адпаведна кантаў AB , AD і адрэзка A_1B у паралелепіпедзе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайдзіце плошчу сячэння паралелепіпеда плоскасцю PQM , улічыўшы, што прамыя CC_1 і BD перпендыкулярныя, $AB = 10$, $AD = 16$, $\angle BAD = 60^\circ$ і $CC_1 = 6$.
100. Трапецыя $ABCD$ і трохвугольнік AFD ляжаць у розных плоскасцях. Плоскасць, што праходзіць праз сярэдзіну Q адрэзка AF і пункты B і C , перасякае прамую DF у пункце P (рыс. 43). Знайдзіце PQ , улічыўшы, што $AD = 12$.
101. У трапецыі $ABCD$ асновы AD і BC адносяцца як $2 : 1$. Пункт P выбралі па-за плоскасцю ABC . Праз сярэдзіну M адрэзка AP і пункты B і C правялі плоскасць, якая перасякае прамую PD у пункце N . Дакажыце, што адрэзкі BN і CM перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам.
102. Пункты A_1 і A_2 выбраны ў плоскасці α , а B_1 і B_2 — у плоскасці β так, што прамыя $A_1 B_1$ і $A_2 B_2$ перасякаюцца ў пункце K (рыс. 44).

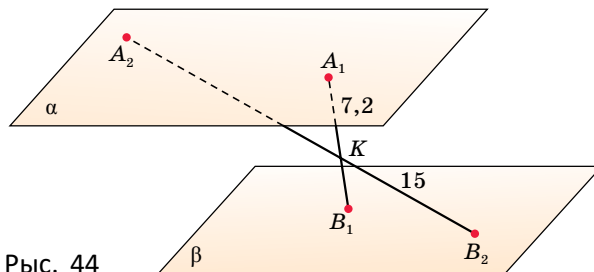


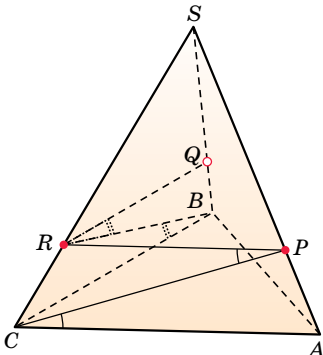
Рис. 44

Улічыўшы, што $\alpha \parallel \beta$, $KA_1 = 7,2$, $KB_2 = 15$ і $KA_1 : KA_2 = 1 : 3$, знайдзіце KA_2 і KB_1 .

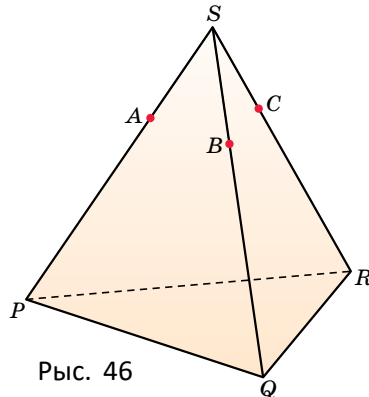
103. У аснове піраміды $QABCD$ ляжыць паралелаграм $ABCD$. Пункты M , N , K , L — сярэдзіны кантаў AB , BC , CD , DA адпаведна. Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце лінію перасячэння плоскасцей MQN і KQL .
104. У пірамідзе $SABCD$ канты AB і CD асновы $ABCD$ паралельныя. Пункты F і G — сярэдзіны адрэзкаў AC і BD . Зрабіце адпаведны рысунак у сшытку і пабудуйце лінію перасячэння плоскасцей SAB і SFG .
105. Дакажыце, што дзве прамыя паралельныя тады і толькі тады, калі кожная:
- а) плоскасць, якая перасякае адну з іх, перасякае і другую;
 - б) прамая, якая перасякае адну з іх, перасякае і другую.

6. Узаемнае размяшчэнне плоскасцей у прасторы

106. Плоскасць β перасякае прамую a , паралельную плоскасці α . Дакажыце, што плоскасці α і β перасякаюцца.
107. На кантах SA , SB і SC піраміды $SABC$ адзначаны такія пункты P , Q і R , што $\angle ACP = \angle CPR$, $\angle CBR = \angle BRQ$ (рыс. 45). Ці можна сцвярджаць, што плоскасці ABC і PQR паралельныя?
108. Пункты A , B , C , D не ляжаць у адной плоскасці. Дакажыце, што любыя дзве з трох прамых, што праходзяць праз сярэдзіны адрэзкаў AB і CD , AC і BD , AD і BC , ляжаць у адной плоскасці.
109. Пункты A , B і C адзначаны на кантах SP , SQ і SR піраміды $SPQR$ так, што $SP : SA = SQ : SB = SR : SC$ (рыс. 46). Ці можна сцвярджаць, што плоскасці ABC і PQR паралельныя?



Рыс. 45



Рыс. 46

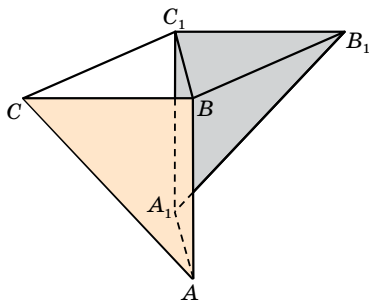


Рис. 47

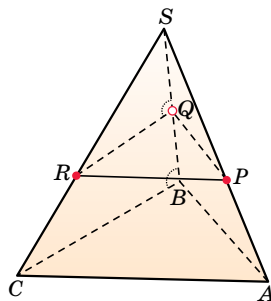


Рис. 48

110. Точки A, B, C і A_1, B_1, C_1 розміщені в просторі так, що чотирикутники CC_1B_1B і AA_1C_1B з'являються паралелограмами (рис. 47). Чи можна стверджати, що площини ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні?
111. Точки P, Q і R відзначені на ребрах SA, SB і SC піраміди $SABC$ так, що $PQ \parallel AB$ і $PR \parallel AC$ (рис. 48). Чи можна стверджати, що $\angle SQR = \angle SBC$?
112. Точки A і B відзначені в площині α , а точки A_1 і B_1 — у площині β , паралельній α . Улічуйте, що $AB = 5$ см, $BB_1 = 7$ см і $AA_1 \parallel BB_1$, знайдіть A_1B_1 і AA_1 .
113. Точки A і A_1, B і B_1 відзначені в площині α , а точки K і K_1 — поза площиною α . При цьому $KA \parallel K_1A_1, KB \parallel K_1B_1$. Доведіть, що прямих AB і A_1B_1 паралельні або супадають.
114. Точки A і A_1 відзначені в площині α , а точки B і B_1 — у площині β , паралельній площині α . Улічуйте, що прямих AB_1 і A_1B перетинаються в точці K , доведіть, що прямих AA_1 і BB_1 паралельні.
115. Точки A_1, B_1, C_1 і D_1 однієї площини відзначені на променях SA, SB, SC і SD так, що $SA : AA_1 = SB : BB_1$ (рис. 49). Чи мож-

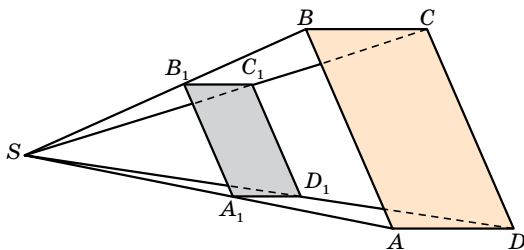


Рис. 49

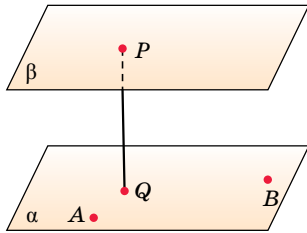


Рис. 50

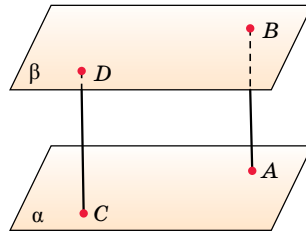


Рис. 51

на сцвярджаць, што $A_1B_1C_1D_1$ — паралелаграм, калі $ABCD$ — паралелаграм?

116. Перасякальныя прамыя a і b ляжаць у плоскасці α . Пункты M і N плоскасці β і пункт P , які не належыць плоскасці α , адзначаны так, што $MN \parallel a$, $MP \parallel b$. Што можна сцвярджаць пра ўзаемнае размяшчэнне плоскасцей α і β ?
117. Канцы адрэзка PQ ляжаць у паралельных плоскасцях α і β , а пункты A і B — у плоскасці α (рис. 50). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце лініі перасячэння з плоскасцю β плоскасцей ABP , APQ і PQB .
118. Канцы адрэзкаў AB і CD знаходзяцца ў паралельных плоскасцях α і β (рис. 51). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце лініі перасячэння плоскасцей:

а) α і ABD ; б) β і ACD .

119. Плоскасці α , β і γ паралельныя. Скрыжавальныя прамыя a і b перасякаюць іх у пунктах A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3 адпаведна. Пры гэтым $A_2A_3 = 12$, $B_1B_2 = 9$, $A_1A_2 : B_2B_3 = 4 : 3$. Знайдзіце даўжыню адрэзка:

а) A_1A_3 ; б) B_1B_3 .

120. Пункт K ляжыць на грані ACC_1 трохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1$, пункт N — на канце AC (рис. 52). Плоскасць α праходзіць праз пункт K паралельна плоскасці NBB_1 . Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце лінію перасячэння плоскасці α з плоскасцю ABB_1 .

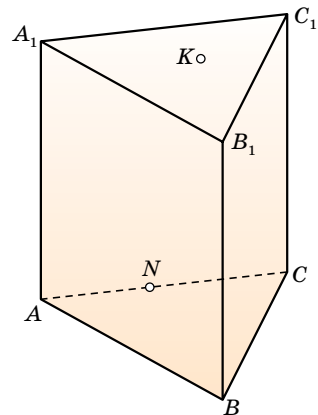


Рис. 52

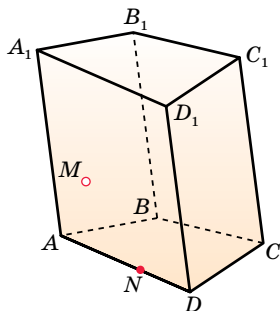


Рис. 53

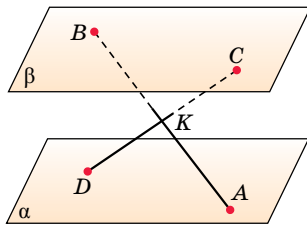


Рис. 54

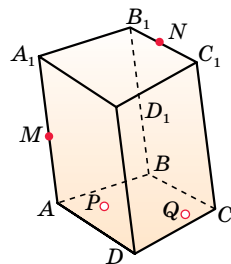


Рис. 55

121. Пункт M ляжыць на грані AA_1B чатырохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1D_1$, пункт N — на канце AD (рыс. 53). Плоскасць α праходзіць праз пункт M паралельна плоскасці NCC_1 . Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце след плоскасці α на плоскасці AA_1D_1 .
122. Адрэзкі AB і CD перасякаюцца ў пункце K , іх канцы A і D ляжаць у адной з паралельных плоскасцей, а B і C — у другой (рыс. 54). Дакажыце, што $AK : AB = DK : CD$.

123. У правільнай трохвугольнай прызме бакавы кант роўны l , а кант асновы — a . Знайдзіце плошчу сячэння, якое праходзіць праз дыяганаль адной бакавой грані паралельна дыяганалі іншай грані, скрыжавальнай з выбранай.



124. Пункты P і Q адзначаны на аснове $ABCD$ прызмы $ABCA_1B_1C_1D_1$, пункты M і N — на кантах AA_1 і B_1C_1 адпаведна (рыс. 55). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз пункты M , N і паралельная PQ .



125. Пункты P і Q адзначаны на кантах AA_1 і BB_1 прызмы $ABCA_1B_1C_1$, а пункт R — на прамой CC_1 так, што пункт C ляжыць паміж C_1 і R . Зрабіце ў сшытку адпаведны рысунак і пабудуйце лінію перасячэння плоскасці PQR з плоскасцю:



- а) ABB_1 ; б) ABC ; в) $A_1B_1C_1$.

126. На кантах AA_1 і BC прызмы $ABCA_1B_1C_1$ выбраны адпаведна пункты P і Q , а на прамой CC_1 — пункт R так, што пункт C_1 ляжыць паміж R і C (рыс. 56). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце лінію перасячэння плоскасці PQR з плоскасцю:



- а) ABC ; б) $A_1B_1C_1$; в) BCP .

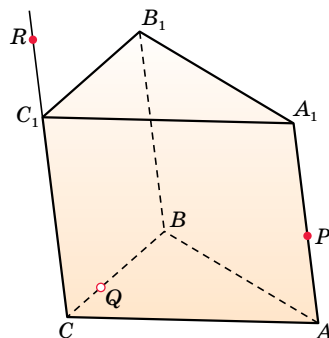


Рис. 56

127. На кантах A_1B_1 і CD прызмы $ABCD A_1B_1C_1D_1$ выбраны адпаведна пункты P і Q , а на грані ADA_1 — пункт R . Зрабіце ў сшытку такі рысунак і пабудуйце лінію перасячэння плоскасці PQR з плоскасцю:



а) ABC ; б) $A_1B_1C_1$; в) ADD_1 .

128. У прызме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ на адрэзках CC_1 , AB_1 і BD_1 выбраны адпаведна пункты P , Q і R . Зрабіце ў сшытку такі рысунак і пабудуйце лінію перасячэння плоскасці PQR з плоскасцю:



а) ABC ; б) $A_1B_1C_1$; в) ACC_1 .

129. Пункты P , Q і R выбраны адпаведна на канце SB піраміды $SABC$, на грані SAC і ў плоскасці ABC (рыс. 57). Улічыўшы, што прамень CR перасякае адрэак AB , зрабіце ў сшытку адпаведны рысунак і пабудуйце лінію перасячэння плоскасці PQR з плоскасцю:



а) SBQ ; б) ABC ; в) SBC .

130. Пункты D , E , F , G выбраны на кантах AB , SC , AC і SB піраміды $SABC$, а пункты P , Q і R — на адрэзках DG , EG і FG адпаведна. Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце лінію перасячэння плоскасці PQR з плоскасцю:



а) EFG ; б) ABC ; в) ASB .

131. Выявіце ў сшытку піраміду $SABCD$ і пабудуйце след плоскасці:

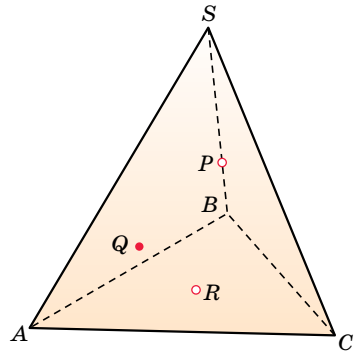


а) SAC на плоскасці SBD ;
б) SAB на плоскасці SCD ;
в) SBC на плоскасці SAD .

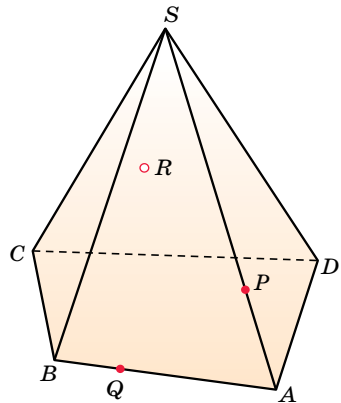
132. Пункты P , Q і R выбраны адпаведна на кантах SA , AB і грані SCD піраміды $SABCD$ (рыс. 58). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце след плоскасці SBC на плоскасці:



а) SPQ ; б) PQR ; в) CPR .



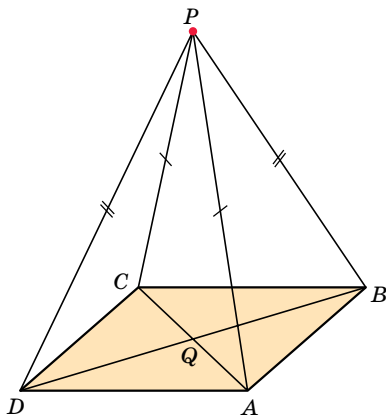
Рыс. 57



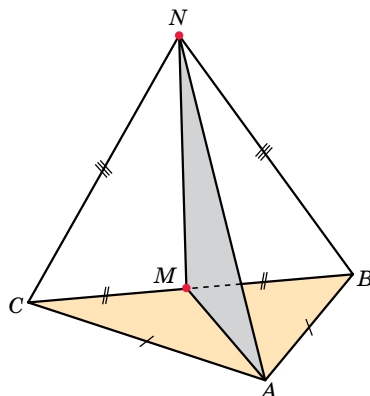
Рыс. 58

7. Перпендыкулярнасць прамой і плоскасці

133. Ці праўда, што калі дзве прамыя перпендыкулярныя трэцяй, то яны:
а) паралельныя; б) паралельныя адной плоскасці?
134. Ці можна выбраць у прасторы чатыры прамыя, якія папарна перпендыкулярныя?
135. Ці праўда, што калі прамая не перпендыкулярная плоскасці, то яна не перпендыкулярная ні адной прамой гэтай плоскасці?
136. Праз пункт M па-за плоскасцю трохвугольніка ABC праведзена прамая MA , перпендыкулярная прамым AB і AC . Улічыўшы, што N — адвольны пункт прамой BC , устанавіце від трохвугольніка MAN .
137. Прамая MA перпендыкулярная плоскасці квадрата $ABCD$. Знайдзіце вугал паміж прамымі BC і MB .
138. Пункт P па-за плоскасцю паралелаграма $ABCD$ выбраны так, што $AP = PC$ і $BP = PD$ (рыс. 59). Дыяганалі паралелаграма перасякаюцца ў пункце Q . Дакажыце, што прамая PQ перпендыкулярная плоскасці ABC .
139. Устанавіце від трохвугольніка, улічыўшы, што праз адну з яго старон можна правесці плоскасць, перпендыкулярную другой старане.
140. У трохвугольніку ABC пункт M — сярэдзіна стараны BC , $AB = AC$. Па-за плоскасцю трохвугольніка ABC узяты пункт N , роўнаадлеглы ад пунктаў B і C (рыс. 60). Дакажыце, што прамая BC перпендыкулярная плоскасці MAN .



Рыс. 59



Рыс. 60

141. З цэнтра Q правільнага трохвугольніка ABC са стараной 9 см праведзены перпендыкуляр QP даўжынёй 3 см да яго плоскасці. Знайдзіце вугал APQ .

142. Пункты A, B, C, D прасторы такія, што $AB = 2, BC = 3, BD = 4, CD = 5$ і $AB = 2\sqrt{5}$. Ці праўда, што прамая BD перпендыкулярная плоскасці ABC ?

143. З пункта A ўзведзены перпендыкуляр AK да плоскасці прамавугольнага $ABCD$ (рыс. 61). Знайдзіце адрэзак AK , улічыўшы, што адлегласці ад пункта K да іншых вяршынь прамавугольнага роўны 9 см, 13 см і 15 см.

144. Па-за плоскасцю трохвугольніка ABC з прамым вуглом C і катэтамі $4\sqrt{2}$ і $3\sqrt{5}$ ляжыць пункт P . Улічыўшы, што даўжыня перпендыкуляра PA да плоскасці ABC роўна 2, знайдзіце даўжыні адрэзкаў PB і PC .

145. Праз пункты M і N прасторы праведзены перпендыкуляры MA і NB да плоскасці α (рыс. 62). Улічыўшы, што $MA = 5$ м, $NB = 11$ м, $AB = 12$ м і адрэзак MN перасякае плоскасць α , знайдзіце адлегласць ад пункта M да: а) пункта N ; б) пункта P , у якім адрэзак MN перасякае адрэзак AB .

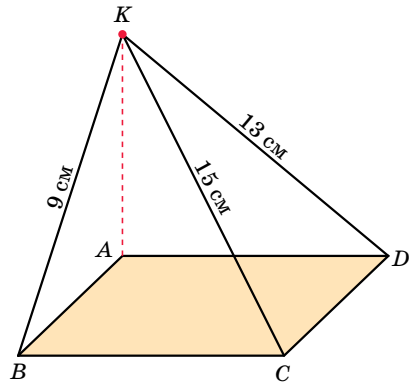


Рис. 61

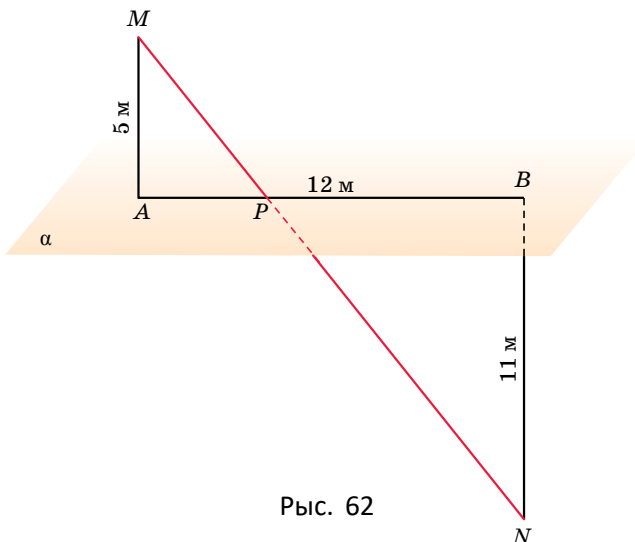


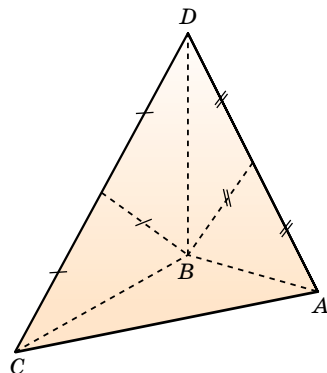
Рис. 62

146. Пункты A, B, C, D прасторы такія, што $AB = BC$ і $CD = DA$. Ці можна сцвярджаць, што прамыя AC і BD перпендыкулярныя?

147. У пірамідзе $ABCD$ медыяна да стараны AD трохвугольніка ABD роўна палавіне AD , а медыяна да стараны CD трохвугольніка BCD — палавіне CD (рыс. 63). Ці можна сцвярджаць, што прамая BD і плоскасць ABC перпендыкулярныя?

148. У пірамідзе $ABCD$ канты AB, BC і CD роўны адпаведна 7, 8 і 4. Знайдзіце AD , улічыўшы, што прамыя AC і BD перпендыкулярныя.

149. Няхай A, B, C, D — пункты прасторы. Дакажыце, што калі $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$, то прамыя AC і BD перпендыкулярныя.



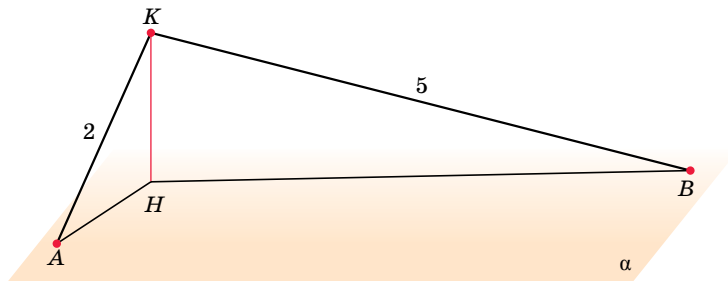
Рыс. 63

8. Адлегласці

150. Пункт N належыць плоскасці α , праекцыя адрэзка MN на гэтую плоскасць роўна адзінцы, даўжыня MN роўна 2. Знайдзіце адлегласць ад пункта M да плоскасці α .

151. Пункты A і B належаць плоскасці α , K — такі пункт прасторы, што $KA = 2$, $KB = 5$ (рыс. 64). Знайдзіце адлегласць ад пункта K да плоскасці α , улічыўшы, што праекцыя на плоскасць α адрэзка KA ўтварае меншую праекцыю адрэзка KB .

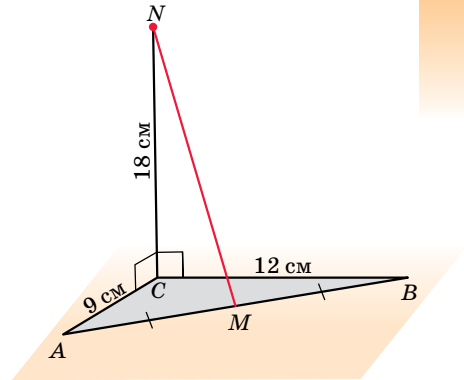
152. Прамая MQ перпендыкулярная плоскасці акружнасці з цэнтрам Q . Пункт N належыць акружнасці. Знайдзіце даўжыню адрэзка



Рыс. 64

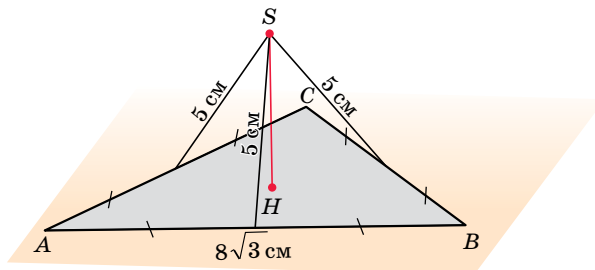
ка MN , улічыўшы, што радыус акружнасці роўны 12 см і $\angle MNQ = 60^\circ$.

153. У прамавугольным трохвугольніку ABC катэты AC і BC роўны 9 см і 12 см . Пункт N адлеглы на 18 см ад плоскасці ABC , прычым $NC \perp AC$ і $NC \perp BC$ (рыс. 65). Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі N і M , дзе M — сярэдзіна гіпатэнузы AB .



Рыс. 65

154. Прамая PA перпендыкулярная да плоскасці квадрата $ABCD$ са стараной a . Знайдзіце адлегласці ад пункта P да старон і вяршынь квадрата, улічыўшы, што $PA = b$.
155. Пункт S знаходзіцца на адлегласці 5 см ад кожнай вяршыні трохвугольніка ABC , у якім $AB = AC = 6\text{ см}$, $BC = 8\text{ см}$. Знайдзіце адлегласць ад пункта S да плоскасці ABC .
156. Пункт S знаходзіцца на адлегласці 5 см ад кожнай стараны правільнага трохвугольніка ABC , у якім $AB = 8\sqrt{3}\text{ см}$ (рыс. 66). Знайдзіце адлегласць ад пункта S да плоскасці ABC .
157. Пункт S роўнаадлеглы ад вяршынь квадрата $ABCD$. Улічыўшы, што $SA = AB = a$, знайдзіце:
- адлегласць ад пункта S да плоскасці ABC ;
 - вугал ASC .
158. Адлегласці ад канцоў адрэзка да плоскасці α роўны 3 і 7 . Якой можа быць адлегласць ад сярэдзіны гэтага адрэзка да плоскасці α ?
159. Вяршыні A, B, C трохвугольніка ABC адлеглыя ад плоскасці α на 10 см , 12 см і 14 см адпаведна. Знайдзіце адлегласць да плоскасці α ад пункта перасячэння медыян, улічыўшы, што:



Рыс. 66

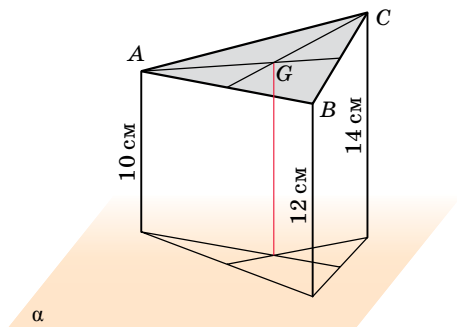


Рис. 67

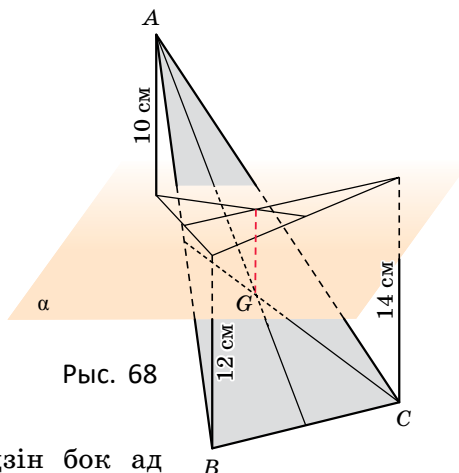


Рис. 68

- а) вяршыні знаходзяцца па адзін бок ад плоскасці α (рыс. 67);
 б) адрэзкі AB і AC перасякаюць плоскасць α (рыс. 68);
 в) адрэзкі AB і BC перасякаюць плоскасць α ;
 г) адрэзкі BC і AC перасякаюць плоскасць α .
- 160.** Адлегласці ад трох паслядоўных вяршынь паралелаграма да плоскасці α роўны 3, 9 і 12. Якой можа быць адлегласць ад чацвёртай вяршыні паралелаграма да плоскасці α ?
- 161.** Ёсць тры папарна скрыжавальныя прамыя, адлегласць паміж кожнымі дзвюма з якіх роўна a . Знайдзіце плошчу паралелаграма, у якога дзве вяршыні знаходзяцца на адной з дадзеных прамых, а дзве іншыя — на дзвюх астатніх прамых.
- 162.** Дакажыце, што дыяганаль AC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендыкулярная да плоскасцей $B_1 CD_1$ і $A_1 BD$.
- 163.** У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дыяганаль AC_1 перпендыкулярная да плоскасці $A_1 BD$. Дакажыце, што $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб.
- 164.** У трохвугольнай пірамідзе скрыжавальныя канты папарна роўныя (рыс. 69). Дакажыце, што прамыя, якія праходзяць праз сярэдзіны скрыжавальных кантаў, папарна перпендыкулярныя.
- 165.** У правільнай прызме $ABCA_1 B_1 C_1$ кант асновы ў $\sqrt{5}$ разоў большы за бакавы кант. Знайдзіце вугал паміж прамымі AB_1 і BC_1 .
- 166.** У правільнай прызме $ABCA_1 B_1 C_1$ косінус вугла паміж прамымі AB_1 і BC_1 роўны $\frac{3}{4}$, а кант асновы — a . Знайдзіце бакавы кант.

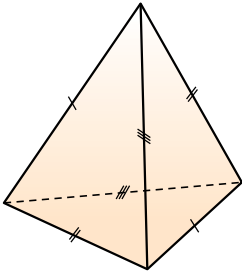


Рис. 69

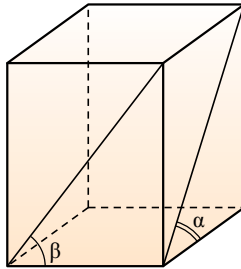


Рис. 70

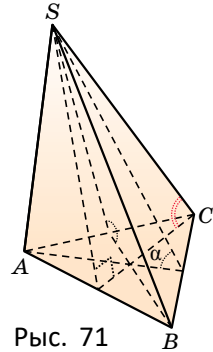


Рис. 71

167*. У правільнай прызме $ABCA_1B_1C_1D_1$ кант асновы роўны a , а бакавы кант — b . Знайдзіце адлегласць ад пункта B_1 да плоскасці ACD_1 .

168*. У прамавугольным паралелепіпедзе скрыжавальныя дыяганалі суседніх граняў нахілены да плоскасці асновы пад вугламі α і β (рис. 70). Знайдзіце вугал паміж гэтымі дыяганалямі.

169*. У кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ праведзена плоскасць праз вяршыню B і сярэдзіны кантаў AD і CC_1 . Знайдзіце вугал, які яна ўтварае з плоскасцю ABC .

170. У правільнай трохвугольнай прызме ўсе канты роўныя. Знайдзіце вугал паміж медыянай асновы і дыяганаллю бакавой грані.



171*. У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCA_1B_1C_1D_1$ дыяганаль AC_1 утварае з гранямі BB_1C_1 і CDD_1 вуглы, роўныя α . Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі BC_1D і $A_1B_1C_1$.

172*. У аснове піраміды $SABC$ ляжыць правільны трохвугольнік, бакавая грань SAB перпендыкулярная да плоскасці асновы, а дзве іншыя ўтвараюць з плоскасцю асновы вуглы, роўныя α (рис. 71). Знайдзіце вугал паміж кантамі SC і плоскасцю асновы.

173. У правільнай пірамідзе $SABCD$ даўжыні апофемы і канта асновы роўны a . Выявіце на рысунку агульны перпендыкуляр канта асновы і скрыжавальнага з ім бакавога канта і знайдзіце даўжыню гэтага агульнага перпендыкуляра.



174. У правільнай пірамідзе $SABC$ кант асновы роўны a , а вышыня — h (рис. 72). Знайдзіце адлегласць паміж бакавым кантамі і скрыжавальнай з ім вышыняй асновы.

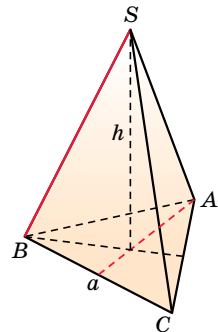
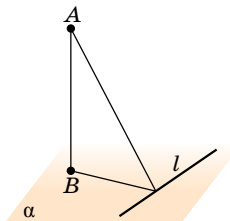


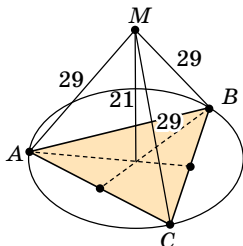
Рис. 72

9. Вугал паміж прамой і плоскасцю

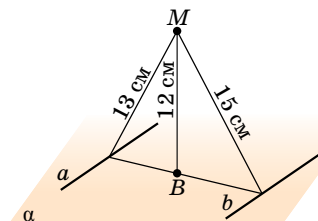
175. Прамая KB перпендыкулярная да плоскасці ромба $ABCD$. Знайдзіце вугал паміж прамымі AC і KD .
176. У трохвугольнай пірамідзе $ABCD$ $AB = BC$, $AD = BD = CD$. Знайдзіце вугал паміж прамымі AC і BD .
177. У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = CC_1$. Знайдзіце вугал паміж прамымі:
- а) BB_1 і AD ; б) AB_1 і CD ; в) $A_1 B$ і AD .
178. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Улічыўшы, што $AB = 4$, $CC_1 = 3$, $BC = 5\sqrt{3}$, знайдзіце вугал паміж прамымі AB і $A_1 C$.
179. Няхай B — праекцыя пункта A на плоскасць α , l — некаторая прмая гэтай плоскасці (рыс. 73). Дакажыце, што праекцыі пунктаў A і B на прамую l супадаюць.
180. Прамая l належыць плоскасці α . Праз пункт A прасторы праходзіць плоскасць β , перпендыкулярная плоскасці α . Дакажыце, што праекцыя пункта A на плоскасць α належыць плоскасці β .
181. Пункт M знаходзіцца на адлегласці a ад плоскасці α і на адлегласці b ад прамой l гэтай плоскасці. Няхай N — праекцыя пункта M на плоскасць α . Знайдзіце адлегласць ад пункта N да прамой l .
182. Пункт M знаходзіцца на адлегласці 29 ад пунктаў A , B і C і на адлегласці 21 ад плоскасці ABC (рыс. 74). Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC .
183. Пункт M роўнаадлеглы ад перасякальных прамых a і b плоскасці α . Дакажыце, што праекцыя пункта M на плоскасць α знаходзіцца на адной з бісектрыс паміж прамымі a і b .
184. Пункт M адлеглы на 13 см і 15 см ад паралельных прамых a і b плоскасці α (рыс. 75). Знайдзіце адлегласць паміж прамымі a і b , улічыўшы, што адлегласць ад пункта M да плоскасці α роўна 12 см.



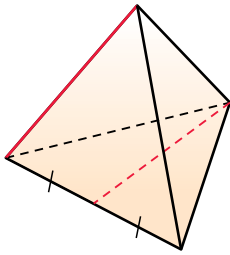
Рыс. 73



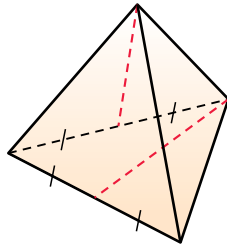
Рыс. 74



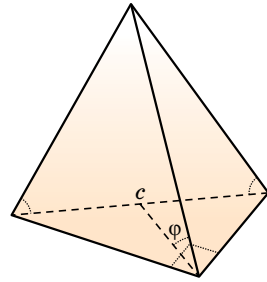
Рыс. 75



Рыс. 76



Рыс. 77



Рыс. 78

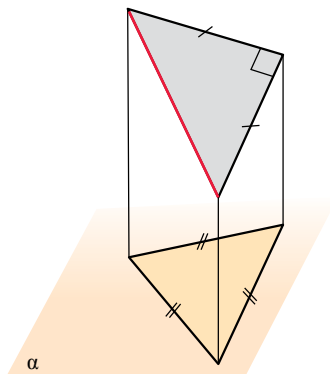
185. Акружнасць ω з цэнтрам O мае радыус r . Прамая l перасякае плоскасць α у пункце K акружнасці ω . Праекцыя прамой l на плоскасць α датыкаецца да акружнасці ω . Знайдзіце адлегласць ад пункта O да прамой l .
186. У трохвугольнай пірамідзе праекцыя адной вяршыні на плоскасць супрацьлеглай грані супадае з пунктам перасячэння вышынь гэтай грані. Дакажыце, што гэта самае будзе і для любой іншай вяршыні гэтай піраміды.
187. Прамая l утварае роўныя вуглы з трыма папарна перасякальнымі прамымі плоскасці α . Дакажыце, што прмая l перпендыкулярная да плоскасці α .
188. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты роўныя. Знайдзіце вугал паміж медыянай адной грані:
- і скрыжавальным з ёй кантам (рыс. 76);
 - і скрыжавальнай з ёй медыянай іншай грані (рыс. 77).
189. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўны a , а бакавыя канты — b . Знайдзіце вугал паміж:
- бакавым кантам і плоскасцю асновы;
 - кантам асновы і плоскасцю бакавой грані.
190. У аснове трохвугольнай піраміды ляжыць прамавугольны трохвугольнік з гіпатэнузай c (рыс. 78). Знайдзіце вышыню піраміды, улічывшы, што ўсе бакавыя канты ўтвараюць з плоскасцю асновы вугал ϕ .
191. Прамыя a і b плоскасці α перпендыкулярныя. Прамая l утварае з імі вуглы 45° і 60° . Знайдзіце вугал паміж прамой l і плоскасцю α .

192. Праекцыяй раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка на плоскасць α з'яўляецца роўнастаронні трохвугольнік (рыс. 79). Знайдзіце вугал паміж гіпатэнузай і плоскасцю α .

193. У тэтраэдры $ABCD$ двухгранныя вуглы з кантамі AB і AC роўны па 135° , а плоскі вугал BAC — 90° . Знайдзіце двухгранны вугал з кантам AD .

194. У тэтраэдры $ABCD$ сума плоскіх вуглоў пры вершыні A роўна 180° . Знайдзіце суму косінусаў двухгранных вуглоў з кантамі AB , AC і AD .

195. У тэтраэдры $ABCD$ двухгранныя вуглы з кантамі AB , AC і AD роўны 60° , 60° і 90° . Знайдзіце вугал паміж кожным бакавым кантам і супрацьлеглай бакавой гранню.



Рыс. 79

10. Перпендыкулярнасць плоскасцей

196. Дакажыце, што праз дадзеную прамую, не перпендыкулярную дадзенай плоскасці α , можна правесці плоскасць, перпендыкулярную плоскасці α , і прытым толькі адну.

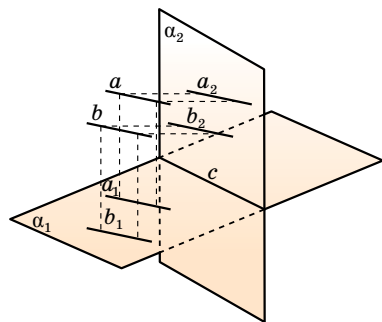
197. Дакажыце, што ўнутраныя накрыжлеглыя вуглы, утвораныя пры перасячэнні дзвюх паралельных плоскасцей трэцяй плоскасцю, роўныя.

198. Дакажыце, што праекцыі на дадзеную плоскасць дзвюх паралельных прамых паралельныя або супадаюць.

199. Прамыя a_1 і b_1 , a_2 і b_2 — праекцыі прамых a і b адпаведна на плоскасці α_1 і α_2 , якія перасякаюцца па прамой c , прычым ні адна з прамых a_1 і b_1 , a_2 і b_2 не перпендыкулярная прамой c (рыс. 80). Дакажыце, што $a \parallel b$ тады і толькі тады, калі $a_1 \parallel b_1$ і $a_2 \parallel b_2$.

200. Дакажыце, што калі плоскасць β і не прыналежная ёй прамая l перпендыкулярныя плоскасці α , то плоскасць β і прамая l паралельныя.

201. Дакажыце, што з усіх прамых, якія праходзяць у адной грані двухграннага



Рыс. 80

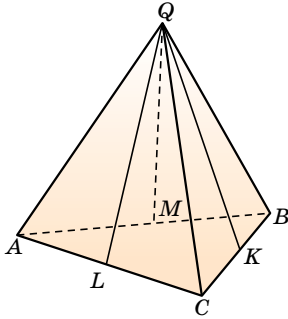


Рис. 81

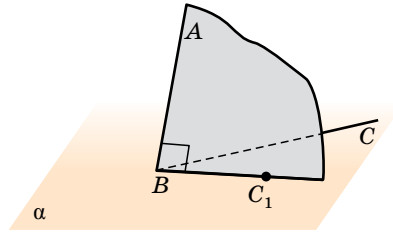


Рис. 82

вугла праз дадзены пункт, найбольшы вугал з другой гранню гэтага двухграннага вугла ўтварае прамая, перпендыкулярная канту двухграннага вугла.

202. Бакавыя грані трохвугольнай піраміды маюць плошчы S_1 , S_2 і S_3 і папарна перпендыкулярныя. Знайдзіце плошчу асновы гэтай піраміды.
203. У трохвугольнай пірамідзе $QABC$ адрэзкі QK , QL і QM ёсць бісектрысы вуглоў BQC , AQC і AQB адпаведна (рыс. 81). Дакажыце, што плоскасці AQK , BQL і CQM маюць агульную прамую.
204. Бакавыя грані трохвугольнай піраміды папарна перпендыкулярныя. Дакажыце, што плоскасці, якія праходзяць праз бакавыя канты перпендыкулярна супрацьлеглым бакавым граням, маюць агульную прамую.
205. У трохвугольнай пірамідзе $QABC$ адрэзкі QK , QL і QM ёсць бісектрысы вуглоў BQC , AQC і AQB адпаведна. Дакажыце, што плоскасці, праведзеныя праз прамыя QK , QL , QM перпендыкулярна плоскасцям BQC , AQC і AQB адпаведна, маюць агульную прамую.
206. Старана BC вугла ABC ляжыць у плоскасці α , прамая BC_1 гэтай плоскасці перпендыкулярна старане AB . Параўнайце велічыні вугла ABC_1C з велічынёй вугла ABC , улічыўшы, што вугал ABC з'яўляецца:
- а) прамым; б) вострым; в) тупым (рыс. 82).
207. Дакажыце, што ў трохвугольнай пірамідзе $QABC$ плоскія вуглы AQB і AQC роўныя тады і толькі тады, калі роўныя двухгранныя вуглы $AQCB$ і $AQBC$.
208. Дакажыце, што ў трохвугольнай пірамідзе $SABC$ плоскі вугал ASB большы за вугал ASC тады і толькі тады, калі двухгранны вугал $ASCB$ большы за двухгранны вугал $ASBC$.

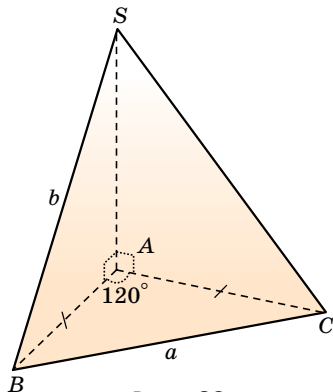


Рис. 83

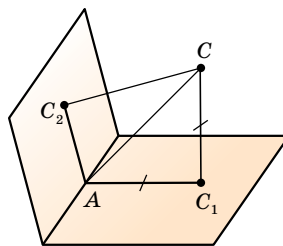
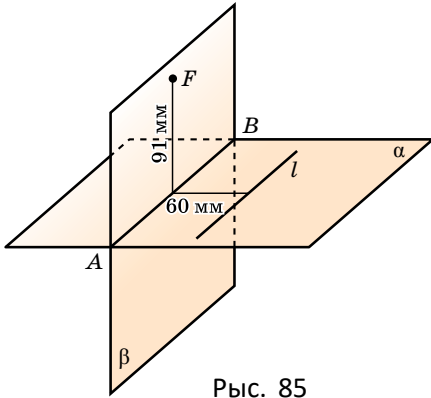
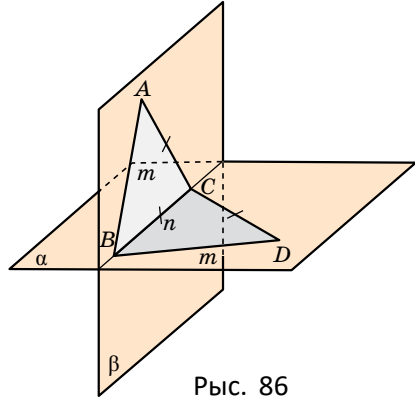


Рис. 84

- 209.** У основі трохвугольної піраміди $SABC$ ляжыць раўнабедраны трохвугольнік ABC з вуглом BAC , роўным 120° . Грані SAB і SAC утвараюць прамыя двухгранныя вуглы з плоскасцю асновы (рыс. 83). Знайдзіце адлегласць ад пункта S да плоскасці ABC , улічыўшы, што $BC = a$ і $SB = b$.
- 210.** Праз старану AD паралелаграма $ABCD$ праходзіць плоскасць α пад вуглом 45° да стараны AB . Праекцыя стараны AB на плоскасць α роўна a , а праекцыі дыяганалей — b і c . Знайдзіце даўжыню BC .
- 211.** З пункта C , узятага ўнутры двухграннага вугла, праведзены перпендыкуляр CA да яго канта. Адлегласць ад пункта C да адной з граняў вугла роўна праекцыі адрэзка CA на гэтую грань, а праекцыя адрэзка CA на другую грань вугла ўдвая меншая за адрэзак CA (рыс. 84). Знайдзіце велічыню двухграннага вугла.
- 212.** У плоскасці α двухграннага вугла $\alpha AB \beta$ велічынёй 45° праведзены прамая CD , паралельная AB , і пад вуглом 45° да яе прамая EF , $E \in CD$, $F \in AB$. Адлегласць ад прамой CD да плоскасці β роўна l . Знайдзіце даўжыню адрэзка EF .
- 213.** У адной грані двухграннага вугла праведзена прамая пад вуглом 30° да другой грані і пад вуглом 45° да канта двухграннага вугла. Знайдзіце велічыню гэтага двухграннага вугла.
- 214.** Узаемна перпендыкулярныя плоскасці α і β перасякаюцца па прамой AB . У плоскасці α на адлегласці 60 мм ад прамой AB праведзена паралельная ёй прамая l . У плоскасці β на адлегласці 91 мм ад прамой AB адзначаны пункт F (рыс. 85). Знайдзіце адлегласць ад F да прамой l .



Рыс. 85



Рыс. 86

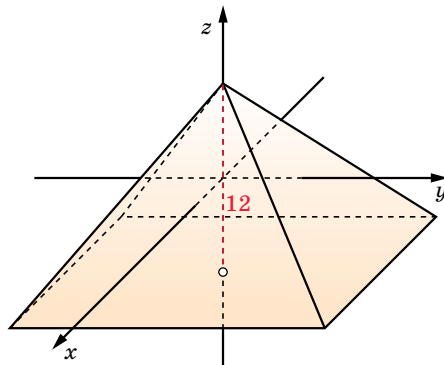
- 215.** Квадрат $ABCD$ са стараной a і трапецыя $BEFC$ размешчаны так, што бакавая старана BE трапецыі перпендыкулярная плоскасці ABC , а вугал паміж плоскасцямі ABC і CDF роўны 45° . Знайдзіце плошчу трапецыі, улічыўшы, што плошча трохвугольніка CDF роўна Q .
- 216.** Раўнабедраныя трохвугольнікі ABC і BCD маюць агульную бакавую старану, роўную n , і размешчаны ва ўзаемна перпендыкулярных плоскасцях (рыс. 86). Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі A і D , улічыўшы, што асновы AB і BD трохвугольнікаў роўны m .
- 217.** Знайдзіце двухгранны вугал пры бакавым канце SA трохвугольнай піраміды $SABC$, улічыўшы, што $\angle ASB = \angle ASC = 45^\circ$ і $\angle BSC = 60^\circ$.
- 218.** У трохвугольнай пірамідзе $OPQR$ бакавыя канты роўныя, $\angle POQ = \angle POR = 60^\circ$, $\angle QOR = 90^\circ$. Знайдзіце велічыню двухграннага вугла $PQRO$.
- 219.** Пры вяршыні трохвугольнай піраміды $HKLM$ усе плоскія вуглы роўны 60° . Знайдзіце адлегласць ад вяршыні M да плоскасці HKL , улічыўшы, што $HM = m$.
- 220.** У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ плоскія вуглы BSC , CSA , ASB адпаведна роўны α , β , γ , двухгранныя вуглы $BSAC$, $ASBC$, $ASCB$ адпаведна роўны $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$. Дакажыце, што праўдзіцца роўнасць:
- $\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos \alpha$;
 - $\frac{\sin \alpha}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin \beta}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \hat{C}}$.
- 221.** Знайдзіце плоскія вуглы пры вяршыні S трохвугольнай піраміды $SABC$, улічыўшы, што двухгранныя вуглы $BSAC$, $ASBC$ і $ASCB$ адпаведна роўны 60° , 90° , 120° .

11. Каардынаты ў прасторы

- 222.** Куб з кантамі 2 размешчаны ў прасторы так, што яго цэнтр супадае з пачаткам сістэмы каардынат, а канты паралельныя каардынатым восям. Зрабіце ў сшытку адпаведны рысунак, уяўдзіце абазначэнні і запішыце каардынаты вяршынь куба.



- 223.** Правільная чатырохвугольная піраміда мае вышыню 12 і плошчу асновы 100. Дзве каардынатныя плоскасці з'яўляюцца плоскасцямі сіметрыі піраміды, а трэцяя — дзеліць папалам яе вышыню (рыс. 87). Запішыце каардынаты вяршынь піраміды і тых пунктаў на кантах, якія знаходзяцца адначасова ў дзвюх каардынатных плоскасцях.



Рыс. 87

- 224.** Куб стаіць на плоскасці $ХОУ$. Улічыўшы, што тры вяршыні куба маюць каардынаты $(5; 4; 0)$, $(1; 1; 0)$, $(-2; 5; 0)$, знайдзіце:



- даўжыню канта куба;
- каардынаты вяршынь куба;
- каардынаты цэнтраў граняў куба.

- 225.** У правільнай шасцівугольнай прызме асновы сіметрычныя адносна плоскасці YOZ , адзін з бакавых кантаў супадае з воссю OX , цэнтр адной асновы мае каардынаты $(3; 0; 2)$. Запішыце каардынаты вяршынь прызмы.



- 226.** Знайдзіце каардынаты сярэдзін старон трохвугольніка ABC , улічыўшы, што $A(2; 1; 3)$, $B(-4; 5; -1)$, $C(6; 3; 7)$.



- 227.** Знайдзіце каардынаты вяршынь трохвугольніка ABC , улічыўшы, што сярэдзіны K , L , M яго старон AB , BC , CA маюць каардынаты $K(2; 1; 3)$, $L(-4; 5; -1)$, $M(6; 3; 7)$.



- 228.** У паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вядомы каардынаты яго цэнтра Q і трох вяршынь: $Q(1; 3; 5)$, $A(-2; 1; -3)$, $B(-1; 2; -1)$, $D(1; 1; -2)$. Знайдзіце каардынаты астатніх вяршынь паралелепіпеда.



- 229.** Знайдзіце праекцыі трохвугольніка ABC на каардынатныя плоскасці, улічыўшы, што $A(-2; 3; 5)$, $B(4; 5; -1)$, $C(6; -3; 7)$.



230*. Пункты M і N раздзяляюць ад-
рэзак AB на тры долі (рыс. 88).
Знайдзіце іх каардынаты, улічыў-
шы, што $A(-4; 3; 5)$, $B(2; -3; -1)$.

231*. Знайдзіце каардынаты пунк-
та перасячэння медыян трохву-
гольніка ABC , улічыўшы, што
 $A(2; 1; 5)$, $B(-4; 4; -1)$.

232. Знайдзіце даўжыні старон і дыя-
ганалей паралелаграма $ABCD$,
улічыўшы, што $A(2; 1; 5)$,
 $B(-2; 4; 5)$, $D(1; 3; 7)$.

233*. Знайдзіце даўжыні медыян трохвугольніка ABC , улічыўшы, што
 $A(2; 1; 5)$, $B(-4; 2; 0)$, $C(5; -3; 7)$.

234*. Вызначце, ці з'яўляецца паралелаграмам чатырохвугольнік $ABCD$,
улічыўшы, што $A(2; 1; -5)$, $B(-4; 2; 0)$, $C(-5; -3; -7)$, $D(1; 3; 2)$.

235*. Вызначце, ці з'яўляецца ромбам чатырохвугольнік $MNPQ$, улі-
чыўшы, што $M(-2; -1; 5)$, $N(4; -7; 0)$, $P(9; -1; -6)$, $Q(3; 5; -1)$.

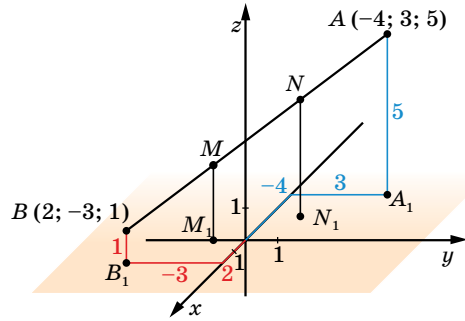
236*. Вызначце, ці з'яўляецца прамавугольнікам чатырохвуголь-
нік $ABCD$, улічыўшы, што $A(2; 1; -5)$, $B(-4; -1; -6)$, $C(-5; 3; -7)$,
 $D(1; 5; 0)$.

237*. Вызначце, ці з'яўляецца квадратам чатырохвугольнік $MNPQ$,
улічыўшы, што $M(-1; 3; 2)$, $N(6; 2; 2)$, $P(5; -5; 2)$, $Q(-2; -4; 2)$.

238. Вяршыні трохвугольнай піраміды $ABCD$ маюць каардынаты
 $A(5; 0; 7)$, $B(5; 5; 4)$, $C(-7; 5; 4)$ і $D(-7; 0; 4)$. Знайдзіце:

- даўжыні кантаў піраміды;
- плошчу поўнай паверхні піраміды.

239. Знайдзіце каардынаты цэнтра і радыус сферы, апісанай каля
трохвугольнай піраміды $MNPQ$, вяршыні якой маюць каардына-
ты $M(7; -3; 6)$, $N(7; 2; 3)$, $P(-5; 2; 3)$, $Q(-5; -3; 3)$.



Рыс. 88

12. Вектар. Дзеянні над вектарамі

240. Адзначце ў сшытку пункты A, B, C, D, E, F так, каб праўдзіліся
роўнасці $\overline{AB} = \overline{CD}$ і $\overline{AB} = -\overline{EF}$.

241. Адзначце ў сшытку пункты M, N, P, Q, R, S так, каб праўдзілася
роўнасць:

- $\overline{PQ} + \overline{RS} = \overline{MN}$;
- $\overline{PQ} - \overline{RS} = \overline{MN}$.

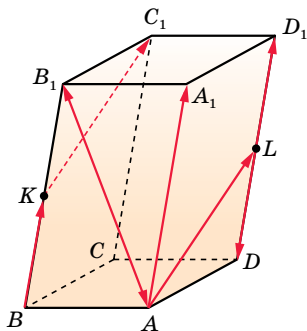


Рис. 89

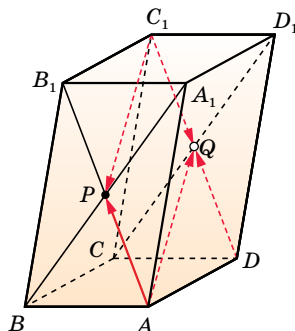


Рис. 90

242. Адзначце ў сшытку пункты A, B, C, D, E, F так, каб праўдзіліся роўнасці $\overline{AB} = \overline{CD}$ і $\overline{AB} = -\overline{EF}$.



243. Адзначце ў сшытку пункты $M, N, P, Q, R, S, A, B, C, D, E, F$ так, каб праўдзіліся роўнасць:



а) $\overline{PQ} = 2,5 \cdot \overline{MN}$; б) $\overline{AB} = -1,5 \cdot \overline{RS}$; в) $\overline{EF} = -0,4 \cdot \overline{CD}$.

244. Адзначце ў сшытку пункты P, Q, R так, каб праўдзіліся роўнасць:



а) $\overline{PQ} = 1,5 \cdot \overline{PR}$; б) $\overline{PQ} = -2,5 \cdot \overline{PR}$; в) $\overline{PQ} = -0,2 \cdot \overline{PR}$.

Выразіце вектар $\overline{QR}$ праз вектар $\overline{RP}$.

245. Выкарыстаўшы рысунак 89, на якім паказаны паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, сярэдзіны K і L кантаў BB_1 і DD_1 і шэраг вектараў, укажыце пары:



- а) роўных вектараў;
- б) няроўных калінеарных вектараў.

246. Выкарыстаўшы рысунак 90, на якім паказаны паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, цэнтры P і Q граняў ABB_1 і CDD_1 і шэраг вектараў, абгрунтуйце роўнасць:



а) $\overline{AP} = \overline{DQ}$; в) $\overline{AQ} = \overline{C_1 P}$.

б) $\overline{AP} = -\overline{C_1 Q}$;

247. Выкарыстаўшы рысунак 91, на якім паказаны паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, цэнтры P і Q граняў ABB_1 і CDD_1 і шэраг вектараў, знайдзіце суму вектараў:

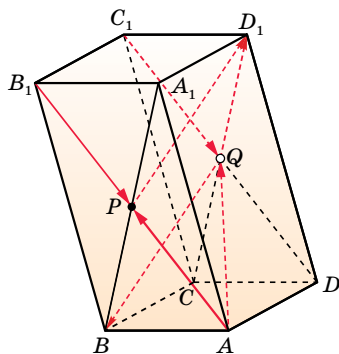
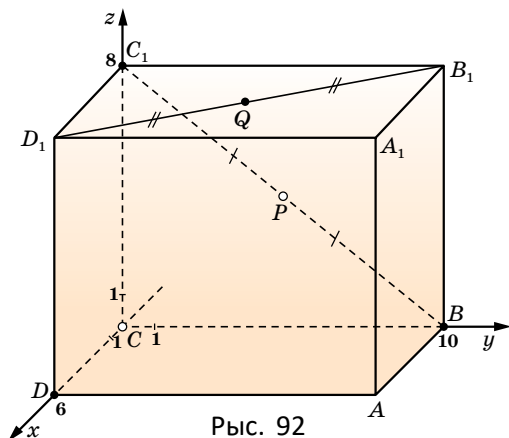
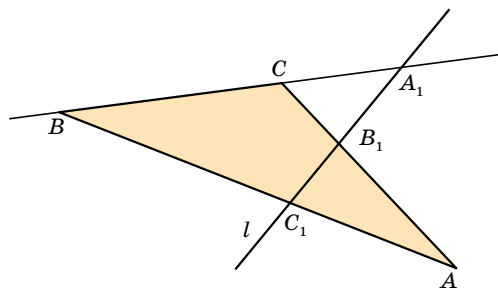


Рис. 91



Рыс. 92



Рыс. 93

- а) $\overrightarrow{C_1Q}$ і $\overrightarrow{AP}$; в) $\overrightarrow{AQ}$ і $\overrightarrow{B_1P}$; д) $\overrightarrow{AQ}$ і $\overrightarrow{PD_1}$;
 б) $\overrightarrow{AP}$ і $\overrightarrow{QD_1}$; г) $\overrightarrow{AP}$ і $\overrightarrow{AQ}$; е) $\overrightarrow{QB}$ і $\overrightarrow{QD_1}$.

248. У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCA_1B_1C_1D_1$ вяршыні C , D , B і C_1 маюць каардынаты $(0; 0; 0)$, $(6; 0; 0)$, $(0; 10; 0)$ і $(0; 0; 8)$ адпаведна. Улічыўшы звесткі, прыведзеныя на рысунку 92, знайдзіце каардынаты:



- а) вектараў $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CD_1}$;
 б) вектараў $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{B_1P}$, $\overrightarrow{C_1Q}$, $\overrightarrow{QD_1}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{PD_1}$, $\overrightarrow{QB}$;
 в) сумы вектараў $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QB}$; $\overrightarrow{B_1P} + \overrightarrow{AQ}$; $\overrightarrow{C_1Q} + \overrightarrow{PD_1}$; $\overrightarrow{QD_1} + \overrightarrow{B_1P}$.

249. Улічыўшы, што вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ маюць каардынаты $(2; 3; -1)$, $(4; 5; -3)$ і $(0; 1; 1)$ адпаведна:



- а) знайдзіце каардынаты вектараў $2\vec{a}$, $-\vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{b}$, $-\vec{b} + \vec{c}$, $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;
 б) вызначце, ці ёсць сярод вектараў калінеарныя;
 в) вызначце, якія са знойдзеных вектараў кампланарныя з вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

250. Вызначце, пры якіх значэннях зменных m і n вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ з каардынатамі $(1; -2; m)$ і $(2; n; -3)$ адпаведна будуць калінеарнымі.



251. Прамая l перасякае прамыя BC , AC , AB трохвугольніка ABC у пунктах A_1 , B_1 , C_1 адпаведна (рыс. 93). Дакажыце, што вектары $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C_1A_1}$ калінеарныя.



252. Вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ папарна некалінеарныя. Знайдзіце іх суму, улічыўшы, што вектар $\vec{a} + \vec{b}$ калінеарны вектару $\vec{c}$, а вектар $\vec{b} + \vec{c}$ — вектару $\vec{a}$.



253. Улічыўшы, што пункт M — сярэдзіна медыяны AD трохвугольніка ABC , выразіце вектар:



а) $\overrightarrow{MB}$ праз вектары $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CB}$ праз вектары $\overrightarrow{MB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

254. Улічыўшы, што пункты M і N — сярэдзіны старон AB і AC трохвугольніка ABC , выразіце вектар:



а) $\overrightarrow{MN}$ праз вектары $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ праз вектары $\overrightarrow{MC}$ і $\overrightarrow{CN}$.

255. Улічыўшы, што $ABCDEF$ — правільны шасцівугольнік, выразіце вектар:



а) $\overrightarrow{AB}$ праз вектары $\overrightarrow{AF}$ і $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC}$ праз вектары $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{FC}$.

256. Улічыўшы, што пункт Q ёсць цэнтр правільнага пяцівугольніка $ABCDE$, дакажыце, што вектары $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}$ і $\overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QE}$ калінеарныя.



257. Дакажыце, што вектары $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$, $2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ кампланарныя.



258. Вызначце, у якой адносіне плоскасць $x - 3y + 2z - 2 = 0$ раздзяляе адрэзак AB , улічыўшы, што:



а) $A(-5; 3; -3)$, $B(-2; -4; 2)$; б) $A(-3; -4; -8)$, $B(1; 2; -2)$.

259. Дакажыце, што вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ кампланарныя тады і толькі тады, калі вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ кампланарныя пры любых значэннях каэфіцыентаў α і β .



260. Вызначце, пры якіх значэннях зменных p і q вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ з каардынатамі $(1; -2; 3)$, $(0; 1; -3)$ і $(2; -2p; q + 1)$ адпаведна з'яўляюцца кампланарнымі.



13. Скалярны здабытак вектараў

261. Вугал паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўны φ , а іх даўжыні — a і b адпаведна. Знайдзіце скалярны здабытак $\vec{a} \cdot \vec{b}$, улічыўшы, што:



а) $a = 2$, $b = 3$, $\varphi = 60^\circ$;
б) $a = 4$, $b = 5$, $\varphi = 120^\circ$;
в) $a = 6$, $b = 7$, $\varphi = 135^\circ$.

262. Вызначце, які знак мае скалярны здабытак ненулявых вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$, улічыўшы, што вугал φ паміж імі знаходзіцца ў прамежку:



а) $0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$; б) $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$.

263. Вызначце прамежак, у якім знаходзіцца вугал паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$, улічыўшы, што:



а) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$; б) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

264. Знайдзіце скалярны здабытак вектараў:

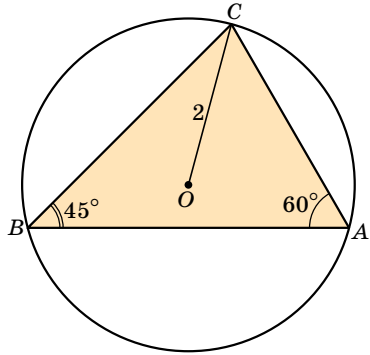


а) $\vec{a}$ і $-\vec{a}$; б) $\vec{b}$ і $k\vec{b}$.

265. Трохвугольнік ABC умежаны ў акружнасць з цэнтрам O і радыусам 2 (рыс. 94). Улічыўшы, што $\angle ABC = 45^\circ$ і $\angle BAC = 60^\circ$, знайдзіце скалярны здабытак вектараў:



а) $\vec{OB} \cdot \vec{OC}$; б) $\vec{OC} \cdot \vec{OA}$; в) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$.



Рыс. 94

266. Дадзены паралелаграм $ABCD$. Няхай $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$. Устаноўце геаметрычны сэнс роўнасці:



а) $(\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{a} + \vec{b})^2 = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2)$; в) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$.

б) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$;

267. Спрасціце выраз:



а) $(\vec{a} - \vec{b})^2 - \vec{a}(\vec{a} - 2\vec{b})$; в) $3(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$;

б) $(\vec{a} + 3\vec{b})^2 - 3\vec{a}(\vec{a} + 2\vec{b})$; г) $\vec{a}(2\vec{a} - 6\vec{b}) + (2\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{a} + 3\vec{b})^2$.

268. Дакажыце, што для любых чатырох пунктаў A, B, C, D праўдзіцца роўнасць $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BD} = 0$.



269. Улічыўшы, што вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ узаемна перпендыкулярныя, спрасціце выраз:



а) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})^2 - 2\vec{b}^2$; б) $(\vec{a} + 3\vec{b})^2 - 3\vec{b}(3\vec{a} + 2\vec{b}) - \vec{a}(\vec{a} - 2\vec{b})$.

270. У прамавугольным трохвугольніку ABC гіпатэнуза AB мае даўжыню c . Знайдзіце суму $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{CB}$.



271. Стораны BC, AC, AB трохвугольніка ABC роўны адпаведна a, b, c . Знайдзіце скалярны здабытак вектараў:



а) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; б) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

272. Пра вектары $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ вядома, што $\vec{b} \perp (\vec{a} - \vec{c})$ і $\vec{c} \perp (\vec{b} - \vec{a})$. Дакажыце, што $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$.



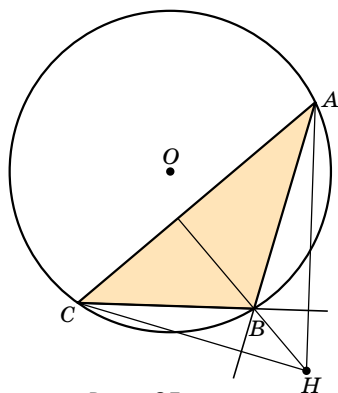


Рис. 95

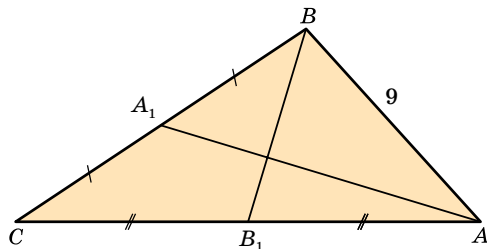


Рис. 96

273. Векторы $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати $(1; -2; 2)$ і $(-2; 1; 2)$ відповідно.



Знайдіть:

- скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
- довжину кожного вектора;
- кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

274. Нехай O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , H — точка пересечения его высот (рис. 95). Докажите, что $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.



275. Точка D на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана так, что $AD : DB = 1 : 3$. Учтя, что $BC = a$ и $AC = b$, найдите CD .



276. Стороны BC , AC , AB треугольника ABC равны соответственно a , b , c , выполняется равенство $a^2 + b^2 = 5c^2$ (рис. 96). Докажите, что медианы AA_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны.



277. Нехай O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , C_1 — середина отрезка AB . Докажите, что отрезки OC и OC_1 перпендикулярны тогда и только тогда, когда углы A и B различаются на 90° .



278. Каждая грань трехгранной пирамиды $ABCD$ равна a , точки M , N , K — середины ребер AB , AD , CD соответственно. Найдите скалярные произведения векторов:



- $\vec{AC} \cdot \vec{BC}$ и $\vec{AD} \cdot \vec{DB}$;
- $\vec{KN} \cdot \vec{AC}$ и $\vec{MN} \cdot \vec{BC}$;
- $\vec{KM} \cdot \vec{BA}$ и $\vec{KM} \cdot \vec{KB}$.

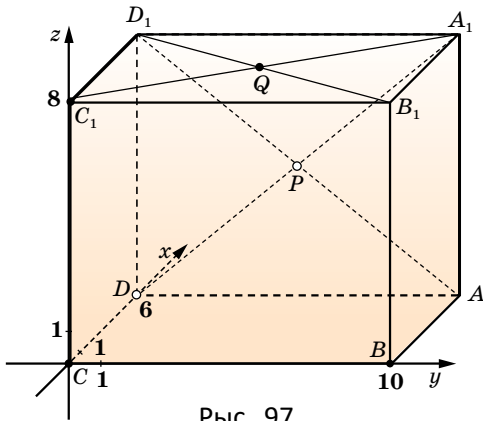


Рис. 97

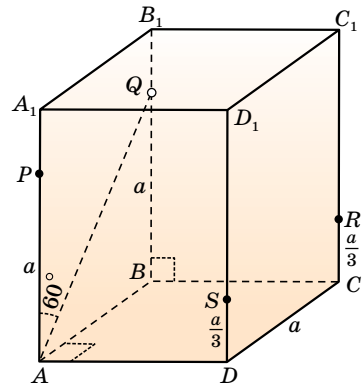


Рис. 98

279. Вяршыні C , D , B і C_1 прамавугольнага паралелепіпеда маюць каардынаты $(0; 0; 0)$, $(6; 0; 0)$, $(0; 10; 0)$ і $(0; 0; 8)$ адпаведна, пункты P і Q — цэнтры граняў ADD_1 і $A_1B_1C_1$ (рыс. 97). Знайдзіце:

- а) скалярны здабытак вектараў $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD_1}$; $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AQ}$; $\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{AP}$; $\overrightarrow{B_1P} \cdot \overrightarrow{C_1Q}$; $\overrightarrow{QD_1} \cdot \overrightarrow{AQ}$;
 б) даўжыні вектараў $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{B_1P}$, $\overrightarrow{C_1Q}$, $\overrightarrow{QD}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PD_1}$, $\overrightarrow{PB}$;
 в) косінус вугла паміж вектарамі $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{CD_1}$; $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{AQ}$; $\overrightarrow{QB}$ і $\overrightarrow{AP}$; $\overrightarrow{B_1P}$ і $\overrightarrow{C_1Q}$; $\overrightarrow{QD_1}$ і $\overrightarrow{AQ}$.

280. Пункты A , B , C , D не ляжаць у адной плоскасці, прамыя AB і CD , BC і AD перпендыкулярныя. Дакажыце, што прамыя AC і BD таксама перпендыкулярныя.

281. Аснова паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — квадрат са старонай a . На кантах AA_1 і BB_1 выбраны пункты P і Q так, што $AP = BQ = a$, на кантах CC_1 і DD_1 — пункты R і S так, што $CR = DS = \frac{a}{3}$ (рыс. 98). Улічыўшы, што $\angle QAP = 60^\circ$ і $\angle QBC = 90^\circ$, знайдзіце:

- а) AR ; б) DQ ; в) PQ ; г) QS .

14. Примыненні вектораў і каардынат

282. а) На старанах AB і CD паралелаграма $ABCD$ выбраны пункты A_1 і B_1 , C_1 і D_1 так, што $AA_1 = BB_1$, $CC_1 = DD_1$. Прамыя A_1C_1 і B_1D_1 перасякаюцца ў пункце P , а прамыя BC_1 і AD_1 — у пункце Q (рыс. 99, а). Дакажыце, што прамыя PQ і AD паралельныя.

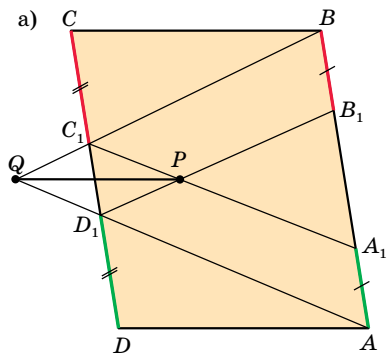
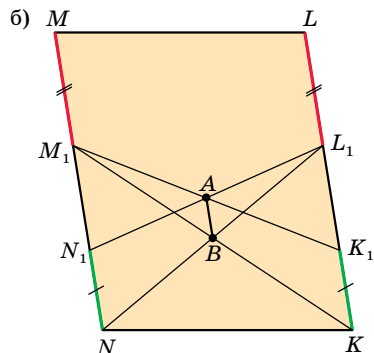


Рис. 99



б) На сторонах KL і MN паралелограма $KLMN$ выбраны точки K_1 і L_1 , M_1 і N_1 так, што $KK_1 = NN_1$ і $LL_1 = MM_1$. Прямая K_1M_1 і L_1N_1 пересикаюцца ў пункце A , а прамыя NL_1 і KM_1 — у пункце B (рис. 99, б). Дакажыце, што прамыя AB і KL паралельныя.

283. Паралелаграмы $ABCD$ і $AB_1C_1D_1$ маюць агульную вяршыню (рис. 100). Дакажыце, што прамыя BB_1 , CC_1 і DD_1 паралельныя адной плоскасці.

284. Пункты P і Q на кантах AB і CD трохвугольнай піраміды выбраны так, што $AP : PB = CQ : QD$ (рис. 101). Дакажыце, што прамыя AC , BD і PQ паралельныя адной плоскасці.

285. Дакажыце, што:

а) адрэзкі, якія злучаюць сярэдзіны супрацьлеглых кантаў трохвугольнай піраміды, перасикаюцца ў адным пункце і дзеляцца ім папалам (рис. 102);

б) адрэзкі, якія злучаюць вяршыні трохвугольнай піраміды з пунктамі перасячэння медыян супрацьлеглых граняў, перасикаюцца ў адным пункце і дзеляцца ім у адносіне $3 : 1$, калі лічыць ад вяршыні;

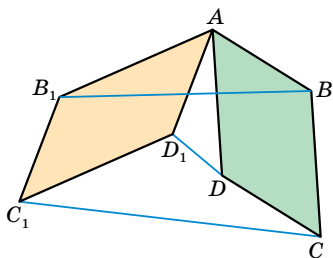


Рис. 100

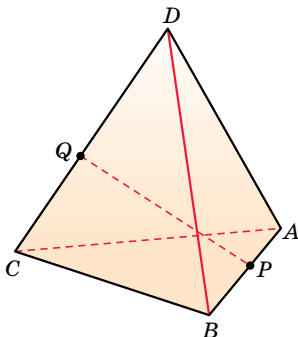


Рис. 101

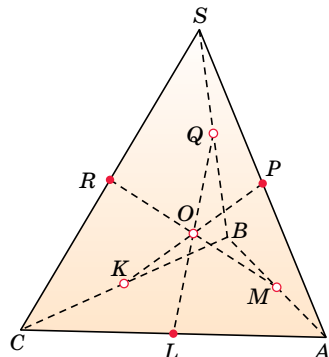
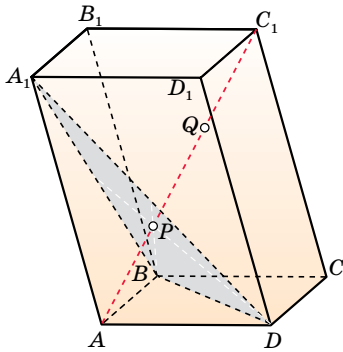
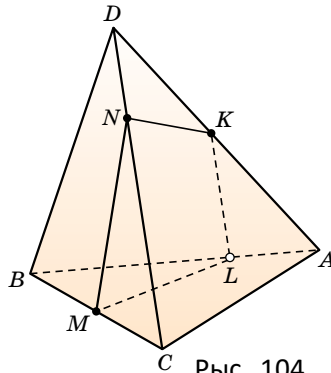


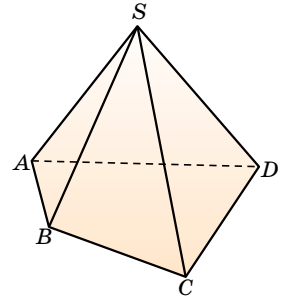
Рис. 102



Рыс. 103



Рыс. 104



Рыс. 105

в) сярэдзіна адрэзка, які злучае сярэдзіны супрацьлеглых кантаў трохвугольнай піраміды, знаходзіцца на адрэзках, што злучаюць вяршыні піраміды з пунктамі перасячэння медыян супрацьлеглых граняў.

286. Дакажыце, што дыяганаль AC_1 паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ праходзіць праз пункт перасячэння медыян трохвугольніка $A_1 BD$ і дзеліцца гэтым пунктам у адносіне $1 : 2$, калі лічыць ад вяршыні A (рыс. 103).

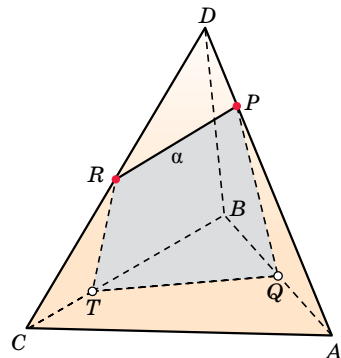
287. Дакажыце, што калі плоскасць перасякае канты AB, BC, CD, DA трохвугольнай піраміды $ABCD$ у пунктах L, M, N, K адпаведна (рыс. 104), то $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{ND} \cdot \frac{DK}{KA} = 1$.

288. Дакажыце, што геаметрычнае месца сярэдзін адрэзкаў з канцамі на дзвюх скрыжавальных прамых ёсць плоскасць, паралельная гэтым прамым, якая праходзіць праз сярэдзіну іх агульнага перпендыкуляра.

289. Ёсць чатырохвугольная піраміда $SABCD$ (рыс. 105). Пабудуйце лінію перасячэння плоскасцей SAB і SCD .

290. Ёсць скрыжавальныя прамыя k, l і пункт A . Патлумачце, як праз пункт A правесці прамую, якая б перасякала прамыя k і l .

291. Плоскасць α праходзіць праз сярэдзіны кантаў AB і CD трохвугольнай піраміды $ABCD$ і такі пункт P канта AD , што $AP : PD = 3 : 1$ (рыс. 106). Вызначце, у якой адносіне плоскасць α дзеліць кант BC .



Рыс. 106

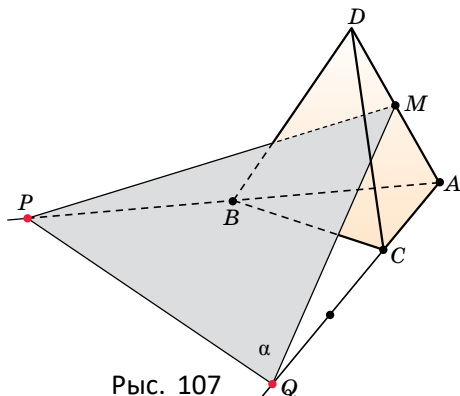


Рис. 107

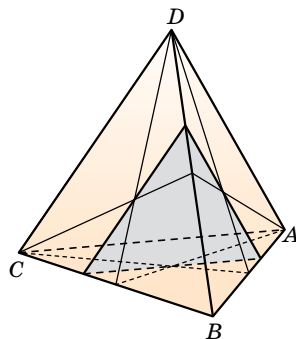


Рис. 108

- 292.** Плоскасць α праходзіць праз сярэдзіну M канта AD трохвугольнай піраміды $ABCD$ і такія пункты P і Q на праменях AB і AC , што $AP = 2AB$, $AQ = 3AC$ (рыс. 107). Пабудуйце сячэнне піраміды $ABCD$ плоскасцю α і вызначце, у якой адносіне плоскасць α раздзяляе канты BD і CD .
- 293.** Плоскасць α перасякае канты BC , CD , DA трохвугольнай піраміды $ABCD$ у пунктах U , V , W так, што $BU : UC = 1 : 1$, $CV : VD = 1 : 2$, $DW : WA = 3 : 1$. Зрабіце адпаведны рысунак у сшытку, пабудуйце на ім сячэнне піраміды $ABCD$ плоскасцю α і знайдзіце, у якой адносіне плоскасць α раздзяляе кант AB .
- 294.** Плоскасць α праходзіць праз сярэдзіны кантаў AB , CB , DD_1 паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Пабудуйце ў сшытку сячэнне паралелепіпеда плоскасцю α . У якой адносіне плоскасць α раздзяляе кант CC_1 і дыяганаль $B_1 D$?
- 295.** Плоскасць α праходзіць праз пункты перасячэння медыян граняў ABC , ABD , BCD трохвугольнай піраміды $ABCD$ (рыс. 108). Вызначце, у якой адносіне плоскасць α раздзяляе кант BD .
- 296.** У аснове піраміды $SABCD$ ляжыць трапецыя $ABCD$, у якой $AD \parallel BC$ і $AD = 2BC$. Плоскасць α праходзіць праз сярэдзіны кантаў SA , SB і вяршыню D (рыс. 109). Вызначце, у якой адносіне плоскасць α раздзяляе кант SC .
- 297.** У аснове піраміды $SABCD$ ляжыць паралелаграм $ABCD$. Плоскасць α перасякае канты SA , SB , SC у пунктах P , Q , R такіх, што $SP : PA = 1 : 1$, $SQ : QB = 3 : 1$,

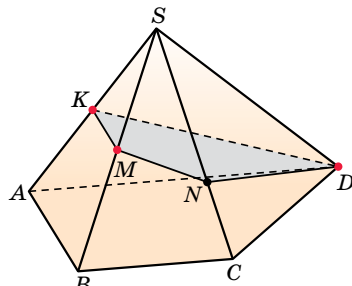


Рис. 109

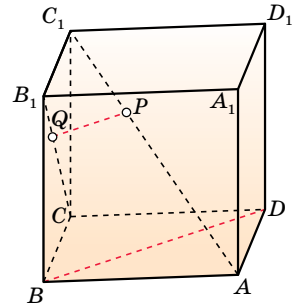
$SR : RC = 2 : 1$. Зрабіце адпаведны рысунак у сшытку, пабудуйце на ім сячэнне піраміды плоскасцю α і знайдзіце, у якой адносіне плоскасць α раздзяляе кант SD .

298.  Плоскасць α , паралельная прамой BD_1 , праходзіць праз сярэдзіны кантаў AB і CC_1 паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Зрабіце адпаведны рысунак у сшытку, пабудуйце на ім сячэнне піраміды плоскасцю α і знайдзіце, у якой адносіне плоскасць α раздзяляе кант DD_1 .

299.  У аснове піраміды $SABCD$ ляжыць трапецыя $ABCD$, у якой $AD \parallel BC$ і $AD = 2BC$. Плоскасць α праходзіць праз сярэдзіну канта AB піраміды $SABCD$ паралельна прамым AC і SD . Зрабіце адпаведны рысунак у сшытку, пабудуйце на ім сячэнне піраміды плоскасцю α і знайдзіце, у якой адносіне плоскасць α раздзяляе кант SB .

300.  У прызме $ABCA_1 B_1 C_1$ медыяны асноў перасякаюцца ў пунктах M і M_1 . Прамая l праходзіць праз сярэдзіну адрэзка MM_1 паралельна прамой $A_1 C$. Зрабіце адпаведны рысунак у сшытку, пабудуйце на ім пункты перасячэння прамой l з паверхняй прызмы і знайдзіце даўжыню адрэзка з канцамі ў гэтых пунктах, улічыўшы, што $A_1 C = d$.

301.  У паралелепіпедзе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на адрэзку AC_1 і прамой $B_1 C$ выбраны адпаведна пункты P і Q так, што $PQ \parallel BD$ (рыс. 110). Знайдзіце адносіну $PQ : BD$.



Рыс. 110



11 клас

1. Призма

302. Побудуйте розгортку прямої трикутної призми з бакавим кантам 5 см і кантами основи 3 см, 4 см і 5 см. Знайдіть бакаву і повну поверхню такої призми. Визначте її об'єм.
303. Побудуйте розгортку нахиленої трикутної призми з бакавим кантам 5 см і кантами основи 3 см, 4 см і 5 см. Знайдіть площу кожної грані такої призми. Порівняйте їх з відповідними площами прямої трикутної призми з такими самими кантами. Які висновки можна зробити? Обґрунтуйте свої висновки.
304. Визначте, скільки прямокутних граней може мати нахилена:
а) трикутна призма;
б) чотирикутна призма;
в) шестигонна призма (рис. 111).
305. Визначте, скільки віртів кантів може мати:
а) трикутна призма;
б) чотирикутна призма;
в) шестигонна призма;
г) правильна трикутна призма;
д) правильна чотирикутна призма;
е) правильна шестигонна призма (рис. 112).
306. Визначте, скільки віртів граней може мати:
а) п'ятикутна призма;
б) семикутна призма;
в) десятикутна призма;
г) пряма п'ятикутна призма;
д) пряма семикутна призма;
е) пряма десятикутна призма;
ж) правильна п'ятикутна призма;
з) правильна семикутна призма (рис. 113);
и) правильна десятикутна призма.
307. Визначте, скільки віртів дуганалей може мати:
а) п'ятикутна призма;
б) семикутна призма;

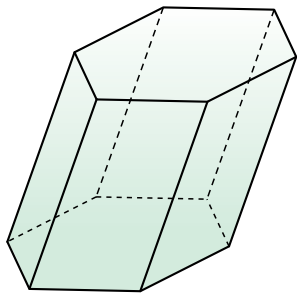


Рис. 111

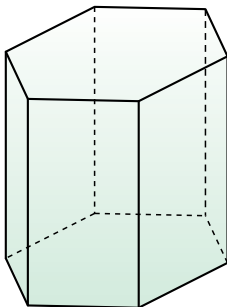


Рис. 112

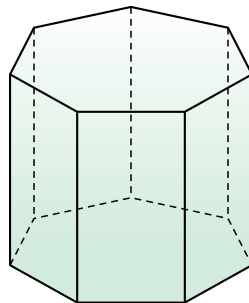


Рис. 113

- в) десятицугульная прызма;
 г) прамае сяміугульная прызма;
 д) прамае васьміугульная прызма (рыс. 114);
 е) прамае дзесяцугульная прызма;
 ж) правільная сяміугульная прызма;
 з) правільная васьміугульная прызма (рыс. 115);
 і) правільная дзесяцугульная прызма.

308. Знайдзіце бакавую і поўную паверхні прамавугольнага паралелепіпеда з кантамі асновы 4 м і 6 м і вышынёй 5 м.

309. Тры грані паралелепіпеда маюць плошчы 12 дм^2 , 15 дм^2 і 18 дм^2 . Вызначце плошчу поўнай паверхні паралелепіпеда.

310. У прамавугольным паралелепіпедзе дыяганаль роўна d , дыяганалі бакавой грані і асновы — d_1 і d_0 адпаведна. Знайдзіце плошчу асновы паралелепіпеда.

311. Знайдзіце бакавую і поўную паверхні прызмы, улічыўшы, што яе бакавы кант роўны 15 см, плошча асновы — 48 см^2 , а перыметр перпендыкулярнага сячэння — 64 см. Вызначце аб'ём гэтай прызмы.

312. Знайдзіце бакавую, поўную паверхні і аб'ём правільнай прызмы, улічыўшы, што яе бакавы кант роўны 15 см, плошча асновы — $16 + 12\sqrt{2} \text{ см}^2$, а перыметр перпендыкулярнага сячэння — $8\sqrt{2} \text{ см}$.

313. Поўная паверхня аднаго куба роўна Q , другога — S . Знайдзіце адносіну аб'ёмаў гэтых кубаў.

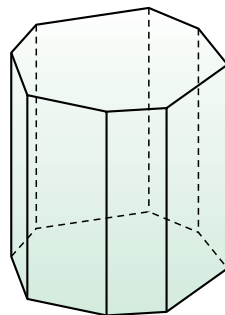


Рис. 114

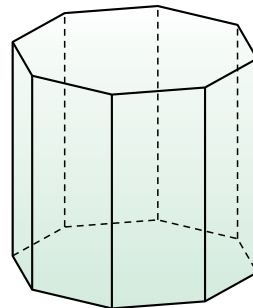


Рис. 115

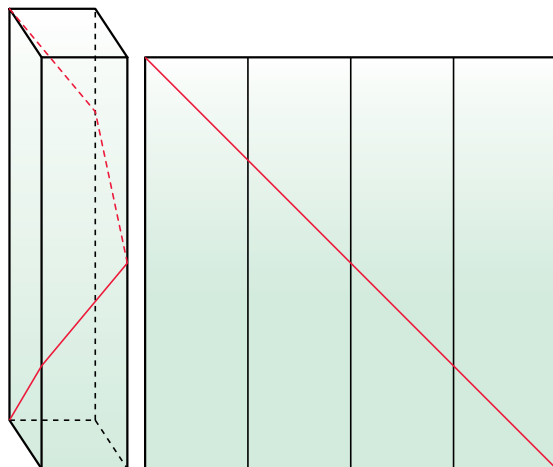


Рис. 116

- 314.** Кант аднаго куба ў суме з кантам другога куба складае 12 см. Знайдзіце гэтыя канты, улічыўшы, што сума аб'ёмаў кубаў роўна 468 см^3 .
- 315.** Разгорткай бакавой паверхні правільнай чатырохвугольнай прызмы з'яўляецца квадрат. Пры гэтым ломаная на бакавой паверхні выяўляецца дыяганаллю квадрата (рыс. 116). Вызначце вуглы паміж суседнімі звёнамі ломанай.
- 316.** Канты асновы прамой трохвугольнай прызмы роўны 10 см, 17 см і 21 см, а бакавы кант — 34 см. Знайдзіце плошчы сячэнняў, якія праходзяць праз бакавыя канты перпендыкулярна супрацьлеглым кантам асновы.
- 317.** У трохвугольнай прызме двухгранны вугал пры адным бакавым канце роўны 34° , пры другім — 83° . Знайдзіце двухгранны вугал пры трэцім бакавым канце.
- 318.** Бакавы кант прызмы даўжынёй 18 см утварае з плоскасцю асновы вугал α . Знайдзіце вышыню прызмы, улічыўшы, што:
- а) $\alpha = 90^\circ$; б) $\alpha = 30^\circ$; в) $\alpha = 60^\circ$; г) $\alpha = 45^\circ$.
- 319.** Бакавая паверхня паралелепіпеда з бакавым кантам 20 см роўна 600 см^2 , плошча меншай бакавой грані — 120 см^2 . Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, улічыўшы, што адзін з двухгранных вуглоў пры бакавых кантах роўны 60° .
- 320.** Вышыня прамой трохвугольнай прызмы роўна 25 см, а канты асновы — 17 см, 25 см і 26 см (рыс. 117). Знайдзіце плошчу сячэння прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз бакавы кант перпендыкулярна меншай старане асновы.

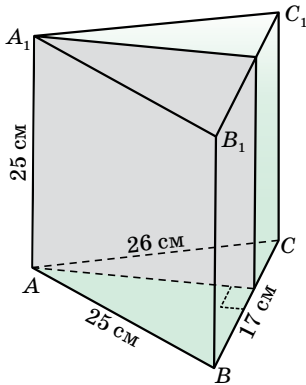


Рис. 117

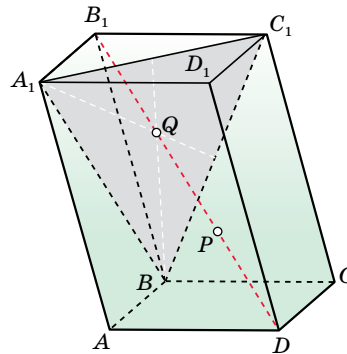


Рис. 118

321. Асновай прызмы з'яўляецца выпуклы многавугольнік. Дакажыце, што гэтая прызма прамая, улічыўшы, што тры яе бакавыя грані з'яўляюцца прамавугольнікамі.
322. Ці можна сцвярджаць, што прызма з'яўляецца прамой, калі ў яе аснове ляжыць выпуклы многавугольнік і чатыры грані з'яўляюцца прамавугольнікамі?
323. Дакажыце, што сячэнне, праведзенае праз канцы трох кантаў паралелепіпеда, якія выходзяць з адной вяршыні (рыс. 118), адсякае трэцюю долю дыяганалі паралелепіпеда і гэтая дыяганаль праходзіць праз пункт перасячэння медыян трохвугольнага сячэння.
324. Адлегласці паміж бакавымі кантамі нахіленай трохвугольнай прызмы роўны 25 см, 29 см і 36 см (рыс. 119). Знайдзіце адлегласці паміж кожнай бакавой гранню і супрацьлеглым кантам.
325. Бакавыя канты нахіленай трохвугольнай прызмы роўны 20 см, а папарныя адлегласці паміж імі — 13 см, 14 см і 15 см. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы і яе аб'ём.
326. Знайдзіце бакавую, поўную паверхню і аб'ём прамога паралелепіпеда, дыяганалі якога роўны 51 см і 53 см, а стораны асновы — 14 см і 22 см.
327. Сячэнне правільнай трохвугольнай прызмы праходзіць праз кант асновы даўжынёй 12 см і мае плошчу 72 см^2 . Знайдзіце вугал паміж плоскасцю сячэння і плоскасцю асновы прызмы.

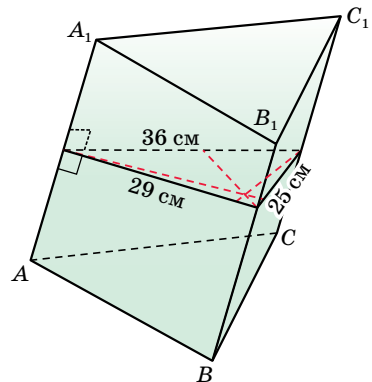
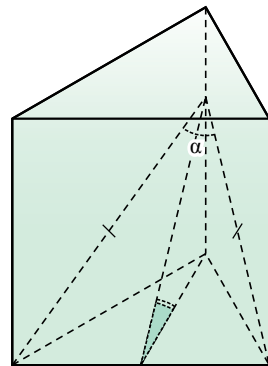


Рис. 119

328. Сячэнне правільнай трохвугольнай прызмы праходзіць праз кант асновы і з'яўляецца раўнабедраным трохвугольнікам з вуглом α пры вершыні на бакавым канце (рыс. 120). Вызначце вугал паміж плоскасцю сячэння і плоскасцю асновы прызмы.



Рыс. 120

329. Плоскасць, праведзеная праз сярэдзіны дзвюх старон асновы прамавугольнага паралелепіпеда пад вуглом α да плоскасці асновы, перасякае тры яго бакавыя канты. Выразіце плошчу сячэння праз вугал α і вымярэнні a і b асновы.

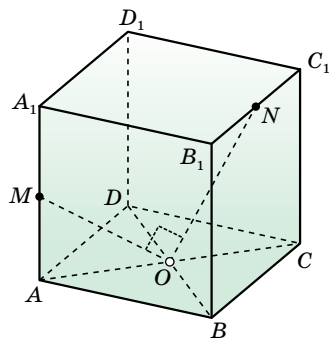
330. Вышыня правільнай шасцівугольнай прызмы ўтрая большая за старану асновы. Знайдзіце адносіну плошчы асновы да плошчы сячэння, якое праходзіць праз старану асновы і дыяганаль прызмы.

331. Плошча дыяганальнага сячэння правільнай чатырхвугольнай прызмы роўна S . Знайдзіце плошчу бакавой грані.

332. Сячэннем правільнай трохвугольнай прызмы з'яўляецца трохвугольнік. Знайдзіце плошчу асновы прызмы і вугал паміж плоскасцю сячэння і плоскасцю асновы, улічваючы, што стораны трохвугольнага сячэння роўны:

а) 24 см, 37 см і 37 см; б) 40 см, 40 см і 41 см.

333. У правільнай чатырхвугольнай прызме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з плошчай асновы 50 см^2 прамыя OM і ON , што праходзяць праз цэнтр O грані $ABCD$ і сярэдзіны M і N кантаў AA_1 і $B_1 C_1$, узаемна перпендыкулярныя (рыс. 121). Знайдзіце поўную паверхню прызмы.



Рыс. 121

334. У правільнай чатырхвугольнай прызме старана асновы і вышыня адпаведна роўны $12\sqrt{2}$ см і 7 см. Знайдзіце адлегласць паміж дыяганаллю прызмы і стараной асновы, якая не мае з гэтай дыяганаллю агульных пунктаў.

335. У прамой трохвугольнай прызме бакавыя канты ўтрая даўжэйшыя за канты асновы (рыс. 122). Знайдзіце вышыню прызмы, улічваючы, што плошча поўнай паверхні прызмы роўна $39 + 20\sqrt{3}$.

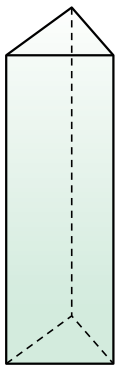


Рис. 122

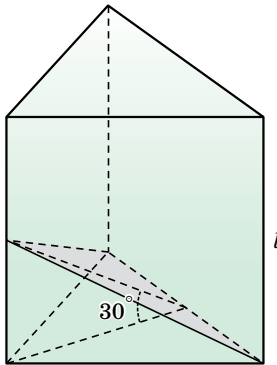


Рис. 123

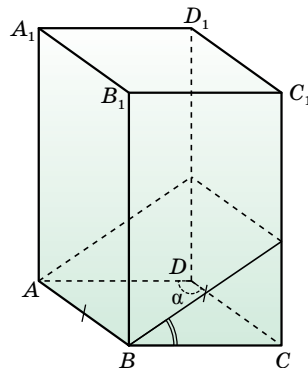


Рис. 124

336. Площа бакавої паверхні правильної чотирихвугольної призми роўна 36 см^2 і адносіцца да плошчы поўнай паверхні як $3 : 5$. Знайдзіце вышыню призмы.
337. У правільнай троххвугольнай прызме з бакавым кантам l праведзе-на сячэнне праз кант асновы і сярэдзіну бакавага канта. Знайдзіце поўную паверхню прызмы, улічыўшы, што вугал паміж плоскасцю сячэння і плоскасцю асновы роўны:
- а) 45° ; б) 30° (рис. 123); в) 60° ; г) α .
338. Канты асновы прамога паралелепіпеда маюць даўжыні a і b і ўтвараюць вугал α . Вышыня паралелепіпеда роўна l . Знайдзіце поўную паверхню паралелепіпеда, улічыўшы, што:
- а) $a = 12 \text{ см}$, $b = 13 \text{ см}$, $l = 15 \text{ см}$, $\alpha = 30^\circ$;
 б) $a = 15 \text{ дм}$, $b = 18 \text{ дм}$, $l = 250 \text{ см}$, $\alpha = 45^\circ$.
339. У прамым паралелепіпедзе тры канты роўны 16 см , 15 см , 20 см , а тры вуглы ў гранях — 30° , 90° , 90° . Знайдзіце магчымыя значэнні плошчы поўнай паверхні паралелепіпеда.
340. У прамым паралелепіпедзе канты асновы роўны 21 см і 29 см , а адна з дыяганалей асновы — 20 см . Знайдзіце большую дыяганаль паралелепіпеда, улічыўшы, што яго меншая дыяганаль нахілена да плоскасці асновы пад вуглом 60° .
341. Знайдзіце дыяганалі паралелепіпеда, улічыўшы, што кожная яго грань ёсць ромб з вуглом 60° і стараной a .
342. У аснове прамога паралелепіпеда ляжыць ромб з тупым вуглом α . Сячэннем паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз вяршыню тупога вугла, з'яўляецца квадрат (рис. 124). Знайдзіце вугал паміж плоскасцю сячэння і плоскасцю асновы.

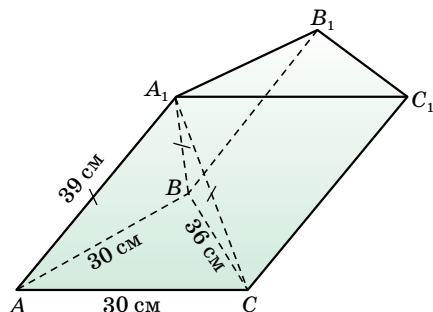


Рис. 125

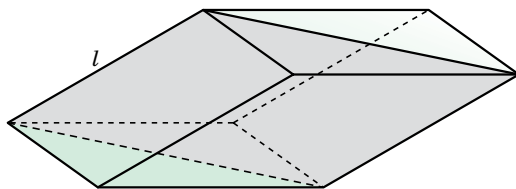


Рис. 126

- 343.** Знайдіть площу по́най паверхні прямої трохвугольної призми, канты асновы якой роўны 58 см, 50 см, 12 см, а бакавы кант — большай вышыні асновы.
- 344.** У трохвугольнай прызме адлегласці паміж бакавымі кантамі прапарцыянальныя лікам 26, 25, 3, плошчы перпендыкулярнага сячэння і меншай бакавой грані роўны 144 см^2 кожная. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы.
- 345.** У трохвугольнай прызме $ABCA_1B_1C_1$ канты асновы AB і AC роўны 30 см, BC — 36 см, вяршыня A_1 роўнаадлеглая ад вяршынь A , B , C і $AA_1 = 39$ см (рис. 125). Знайдзіце плошчу по́най паверхні прызмы.
- 346.** У прамым паралелепіпэдзе вышыня роўна 60 см, канты асновы — 17 см і 28 см. Знайдзіце дыяганалі паралелепіпеда, улічыўшы, што адна з дыяганалей асновы роўна 39 см.
- 347.** У аснове прызмы ляжыць ромб з дыяганалямі a і b , бакавы кант прызмы роўны l і нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 30° , адно з дыяганальных сячэнняў перпендыкулярнае плоскасці асновы (рис. 126). Знайдзіце магчымыя значэнні плошчы дыяганальных сячэнняў.
- 348.** У прамавугольным трохвугольніку з вуглом 45° гіпатэнуза мае даўжыню a і размешчана ў плоскасці α , якая ўтварае з плоскасцю трохвугольніка вугал 30° . Знайдзіце адлегласць ад вяршыні прамога вугла да плоскасці α .
- 349.** Плоскасць праходзіць праз вяршыню A правільнай трохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ і перасякае канты B_1C_1 і A_1C_1 у такіх пунктах M і K , што $B_1M : MC_1 = C_1K : KA_1 = 1 : 2$ (рис. 127). Знайдзіце

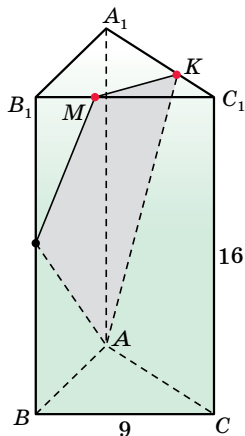


Рис. 127

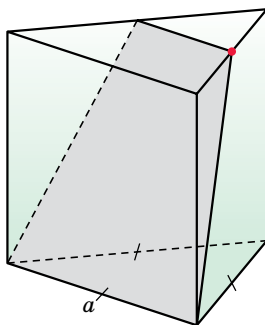


Рис. 128

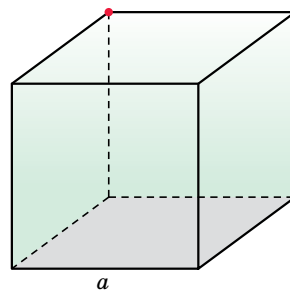


Рис. 129

площу сячэння, улічыўшы, што старана асновы прызмы роўна 9, а вышыня прызмы — 16.

- 350.** У аснове прамой прызмы ляжыць роўнастаронні трохвугольнік са стараной a . Плоскасць, што праходзіць праз кант ніжняй асновы і сярэдзіну канта верхняй, нахілена да плоскасці ніжняй асновы пад вуглом φ (рыс. 128). Знайдзіце плошчу гэтага сячэння і аб'ём прызмы.
- 351.** Дыяганальныя сячэнні чатырохвугольнай прызмы — прамавугольнікі, плошча аднаго з іх роўна Q , дыяганаль другога мае даўжыню d і ўтварае з асновай вугал α . Знайдзіце аб'ём прызмы, улічыўшы, што вугал паміж дыяганальнымі сячэннямі роўны β .
- 352.** Знайдзіце плошчу асновы прамавугольнага паралелепіпеда, улічыўшы, што плошча яго бакавой паверхні роўна S , плошча дыяганальнага сячэння — Q , а вышыня — h .
- 353.** У прамым паралелепіпедзе канты асновы роўны 25 см і 39 см, а дыяганалі асновы адносяцца як 28 : 17. Знайдзіце плошчы дыяганальных сячэнняў, улічыўшы, што вышыня паралелепіпеда роўна 42 см.
- 354.** Кант куба роўны a . Знайдзіце адлегласці ад вяршыні куба да дыяганалей граняў, якім гэтая вяршыня не належыць (рыс. 129).
- 355.** У правільнай трохвугольнай прызме бакавы кант роўны 5 см, а кант асновы — 6 см. Знайдзіце плошчу сячэння, праведзенага праз:
- бакавы кант і сярэдзіну супрацьлеглага канта асновы;
 - кант асновы і сярэдзіну супрацьлеглага бакавога канта.

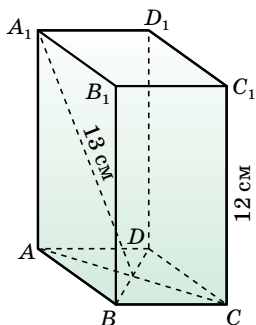


Рис. 130

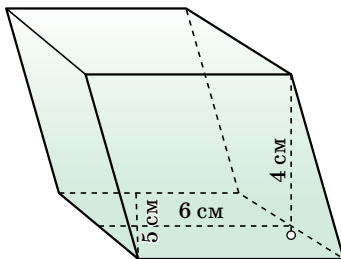


Рис. 131

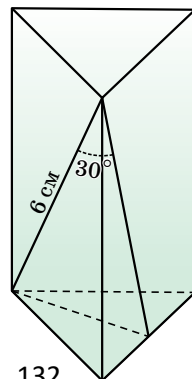


Рис. 132

- 356.** У правильній чатырохвугольнай прызме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ бакавы кант роўны 5 см, а кант асновы — 6 см. Знайдзіце плошчу сячэння, праведзенага праз:
- кант AA_1 і сярэдзіну канта CD ;
 - кант AB асновы і сярэдзіну канта CC_1 .
- 357.** Вышыня правільнай чатырохвугольнай прызмы роўна 12 см (рис. 130). Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы, улічыўшы, што адлегласць ад вяршыні адной асновы да сярэдзіны дыяганалі другой роўна 13 см.
- 358.** У аснове прамой прызмы ляжыць ромб са стараной 4 см і вострым вуглом 30° . Знайдзіце аб'ём прызмы, улічыўшы, што яе бакавы кант роўны 5 см.
- 359.** У аснове нахіленай прызмы ляжыць трапецыя, сярэдняя лінія якой роўна 6 см, а вышыня — 5 см (рис. 131). Знайдзіце аб'ём прызмы, улічыўшы, што яе вышыня роўна 4 см.
- 360.** Стораны асновы паралелепіпеда роўны 3 см і 6 см, а вугал паміж імі — 45° . Бакавы кант даўжынёй $4\sqrt{3}$ см складае з плоскасцю асновы вугал 60° . Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.
- 361.** Дыяганаль бакавой грані правільнай трохвугольнай прызмы, роўная 6 см, утварае вугал 30° з плоскасцю другой бакавой грані (рис. 132). Знайдзіце аб'ём прызмы.
- 362.** У аснове прамой прызмы ляжыць роўнастаронні трохвугольнік. Плоскасць, што праходзіць праз адну са старон ніжняй асновы і супрацьлеглую вяршыню верхняй, перасякае плоскасць ніжняй асновы пад вуглом φ . Плошча атрыманага сячэння роўна Q . Знайдзіце аб'ём прызмы.

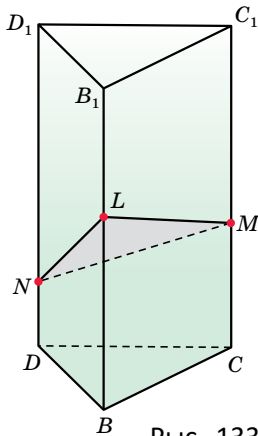


Рис. 133

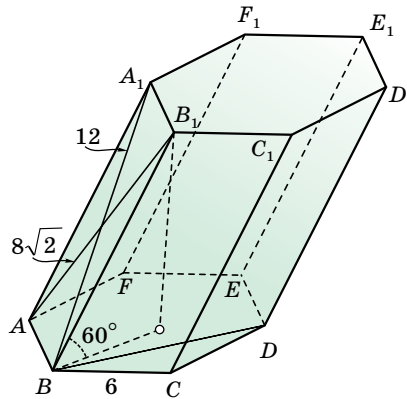
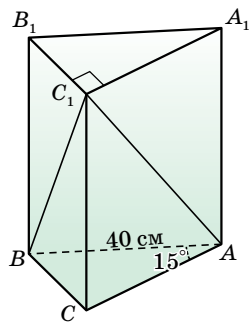


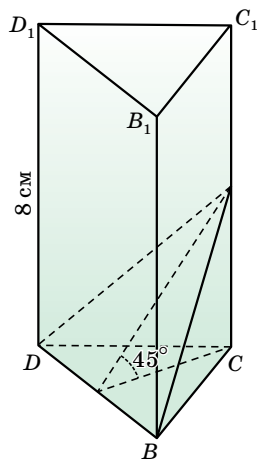
Рис. 134

- 363.** Кожны кант трохвугольнай прызмы роўны 2. Адзін з бакавых кантаў утварае з сумежнымі старанамі асновы вуглы ў 60° . Знайдзіце аб'ём і плошчу поўнай паверхні прызмы.
- 364.** Вышыня правільнай трохвугольнай прызмы роўна 2 см, а адлегласць ад вяршыні адной асновы да артацэнтра другой — 4 см. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні прызмы.
- 365.** У правільнай трохвугольнай прызме $BCDB_1C_1D_1$ кант асновы складае 0,6 бакавога канта. На бакавых кантах BB_1 , CC_1 і DD_1 узяты пункты L , M і N адпаведна, прычым $BL : LB_1 = 3 : 2$, $CM : MC_1 = 2 : 3$, $DN : ND_1 = 1 : 4$ (рыс. 133). Знайдзіце велічыню двухграннага вугла паміж плоскасцямі LMN і BCD .
- 366.** У правільнай трохвугольнай прызме $LMNL_1M_1N_1$ бакавы кант складае 4,5 канта асновы. На бакавых кантах LL_1 , MM_1 і NN_1 узяты пункты B , C і D адпаведна, прычым $LB : BL_1 = 2 : 7$, $MC : CM_1 = 6 : 3$, $ND : DN_1 = 4 : 5$. Знайдзіце велічыню двухграннага вугла паміж плоскасцямі BCD і LMN .
- 367.** У аснове паралелепіпеда ляжыць ромб з вуглом 60° , бакавы кант нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° , дыяганальнае сячэнне, што змяшчае большую дыяганаль, перпендыкулярнае да плоскасці асновы. Знайдзіце адносіну плошчаў дыяганальных сячэнняў паралелепіпеда.
- 368.** У аснове прызмы ляжыць правільны шасцівугольнік са стараной 6. Дыяганалі бакавой грані роўны 12 і $8\sqrt{2}$ (рыс. 134). Знайдзіце аб'ём прызмы, улічыўшы, што бакавы кант утварае з плоскасцю асновы вугал 60° .

- 369.** Бакавая паверхня трохвугольнай прызмы роўна 100 см^2 , а папарныя адлегласці паміж бакавымі кантамі — 4 см , 5 см і 7 см . Знайдзіце аб'ём прызмы.
- 370.** Бакавая паверхня трохвугольнай прызмы роўна S , а папарныя адлегласці паміж бакавымі кантамі — a , b , c . Знайдзіце аб'ём прызмы.
- 371.** Адна з вяршынь паралелепіпеда з'яўляецца агульнай вяршыняй вострых вуглоў роўных ромбаў-граняў. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, улічыўшы, што дыяганалі граняў роўны 6 см і 8 см .
- 372.** У аснове прамой трохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ ляжыць прамавугольны трохвугольнік з гіпатэнузай AB , роўнай 40 см , і вострым вуглом у 15° (рыс. 135). Знайдзіце аб'ём прызмы, улічыўшы, што вуглы CC_1A і CC_1B разам складаюць прамы вугал.
- 373.** Бакавы кант паралелепіпеда даўжынёй 10 см нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 45° . Стораны асновы маюць даўжыні 13 см і 21 см , а яе дыяганаль роўна 20 см . Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.
- 374.** У аснове прамой прызмы ляжыць раўнабедраная трапецыя з вострым вуглом α . Бакавая старана трапецыі і яе меншая аснова роўныя. Знайдзіце аб'ём прызмы, улічыўшы, што дыяганаль прызмы роўна a і ўтварае з плоскасцю асновы вугал β .
- 375.** Знайдзіце аб'ём прамой прызмы, асновай якой з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік з вострым вуглом α , улічыўшы, што бакавы кант прызмы роўны l і ўтварае з дыяганаллю большай бакавой грані вугал β .
- 376.** Сячэнне, праведзенае ў правільнай чатырхвугольнай пірамідзе праз дыяганаль асновы перпендыкулярна бакавому канту, ёсць трохвугольнік са старанамі a і b . Знайдзіце бакавы кант піраміды.
- 377.** У правільнай трохвугольнай прызме праз сярэдзіну бакавога канта даўжынёй 8 см і супрацьлеглы кант асновы праведзена плоскасць пад вуглом 45° да плоскасці асновы (рыс. 136). Знайдзіце плошчу сячэння і плошчу асновы.



Рыс. 135



Рыс. 136

378. Дыяганалі трох граняў прамавугольнага паралелепіпеда, што збягаюцца ў адной вяршыні, роўны a , b , c . Знайдзіце поўную паверхню і аб'ём паралелепіпеда.

379. У правільнай трохвугольнай прызме бакавы кант роўны $2\sqrt{3}$, а кант асновы — 8. Сячэнне прызмы праведзена праз вяршыню пад вуглом 45° да плоскасці асновы паралельна старане. Знайдзіце плошчы паверхняў утвораных цел-частак.

380. У аснове прызмы ляжыць ромб з дыяганалямі a і b , бакавы кант прызмы, роўны l , нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° , адно з дыяганальных сячэнняў перпендыкулярнае да плоскасці асновы. Знайдзіце магчымыя значэнні плошчы бакавой паверхні.

381. У правільнай чатырохвугольнай прызме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пункты M і N — сярэдзіны кантаў BC і CD адпаведна (рыс. 137). Знайдзіце вугал паміж прамымі AC_1 і MN .

382. У правільнай чатырохвугольнай прызме праз сярэдзіну бакавога канта даўжынёй 8 см і супрацьлеглую дыяганаль асновы праведзена плоскасць пад вуглом 30° да плоскасці асновы. Знайдзіце плошчу сячэння і плошчу поўнай паверхні прызмы.

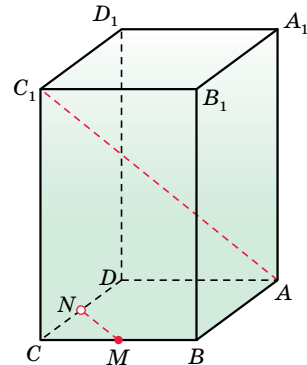
383. У правільнай чатырохвугольнай прызме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пункты M і N адзначаны на адрэзках AA_1 і CC_1 так, што $AM : MA_1 = C_1 N : NC$. Знайдзіце вугал паміж прамымі $B_1 D$ і MN .

384. У правільнай трохвугольнай прызме $ABCA_1 B_1 C_1$ бакавы кант роўны 4, а кант асновы — $\sqrt{3}$. Знайдзіце:

- велічыню двухграннага вугла паміж плоскасцямі ABB_1 і $BB_1 C_1$;
- велічыню двухграннага вугла паміж плоскасцямі $A_1 BC$ і ABC ;
- велічыню вугла паміж прамымі AA_1 і $B_1 C$;
- велічыню вугла паміж прамой AC_1 і плоскасцю $A_1 BC$;
- плошчу трохвугольніка $A_1 BC$;
- плошчу поўнай паверхні прызмы;
- аб'ём прызмы.

385. У аснове прамой трохвугольнай прызмы $ABCA_1 B_1 C_1$ ляжыць прамавугольны трохвугольнік з гіпатэнузай AB , роўнай 4 см, і вуглом A ў 30° , яе бакавы кант AA_1 роўны 1 см. Знайдзіце:

- велічыню двухграннага вугла паміж плоскасцямі ABB_1 і $CB B_1$;
- велічыню двухграннага вугла паміж плоскасцямі ACC_1 і ABC ;



Рыс. 137

- в) велічыню двухграннага вугла паміж плоскасцямі A_1BC і ABC ;
- г) велічыню вугла паміж прамымі AA_1 і B_1C ;
- д) велічыню вугла паміж прамымі BB_1 і A_1C ;
- е) велічыню вугла паміж прамымі CC_1 і AB_1 ;
- ж) велічыню вугла паміж прамой AC_1 і плоскасцю A_1BB_1 ;
- з) велічыню вугла паміж прамой AB_1 і плоскасцю A_1CC_1 ;
- і) велічыню вугла паміж прамой BC_1 і плоскасцю A_1BB_1 ;
- к) велічыню вугла паміж прамой AC_1 і плоскасцю A_1BC ;
- л) велічыню вугла паміж прамой AC_1 і плоскасцю BB_1C ;
- м) плошчу трохвугольніка A_1BC ;
- н) плошчу поўнай паверхні прызмы;
- о) аб'ём прызмы.

386. Вымярэнні прамавугольнага паралелепіпеда роўны 2 см, 4 см і 4 см. Знайдзіце:



- а) даўжыню дыяганалі паралелепіпеда;
- б) вуглы паміж дыяганаллю паралелепіпеда і яго гранямі;
- в) плошчы дыяганальных сячэнняў;
- г) велічыні двухгранных вуглоў паміж плоскасцю грані і плоскасцямі, што праходзяць праз дыяганаль і кант гэтай грані;
- д) велічыні вуглоў паміж дыяганаллямі граняў паралелепіпеда;
- е) велічыні вуглоў паміж дыяганаллю паралелепіпеда і дыяганаллямі яго граняў;
- ж) плошчу поўнай паверхні паралелепіпеда;
- з) аб'ём паралелепіпеда.

387. У правільнай шасцівугольнай прызме большая дыяганаль роўна $6\sqrt{3}$ і ўтварае з бакавым кантам вугал 30° . Знайдзіце:



- а) плошчу бакавой паверхні прызмы;
- б) плошчу поўнай паверхні прызмы;
- в) плошчу дыяганальных сячэнняў прызмы;
- г) велічыні вуглоў паміж дыяганаллямі граняў прызмы;
- д) велічыні вуглоў паміж дыяганаллямі прызмы і дыяганаллямі граняў прызмы;
- е) велічыню двухграннага вугла паміж плоскасцю асновы і плоскасцю сячэння, што праходзіць праз паралельныя канты асноў;
- ж) аб'ём прызмы.

388. У аснове паралелепіпеда ляжыць ромб са стараной a і вострым вуглом 60° . Бакавы кант даўжынёй b праходзіць праз вяршыню гэтага вугла і ўтварае з яго старанамі вуглы ў 45° . Знайдзіце плошчы дыяганальных сячэнняў паралелепіпеда.



389. У аснове паралелепіпеда ляжыць ромб са стараной a і вострым вуглом 30° . Плошасць асновы складае з бакавым кантам вугал 60° , а з дыяганаллю бакавой грані — 90° . Знайдзіце плошчу поўнай паверхні і аб'ём паралелепіпеда.

390.  У аснове прамога паралелепіпеда ляжыць ромб з вострым вуглом 60° і меншай дыяганаллю $6\sqrt{3}$. Улічыўшы, што дыяганаль паралелепіпеда перасякае гэтую меншую дыяганаль асновы пад вуглом 30° , знайдзіце:

- а) даўжыню дыяганалей паралелепіпеда;
- б) вуглы паміж дыяганалямі паралелепіпеда і яго гранямі;
- в) плошчы дыяганальных сячэнняў;
- г) велічыні двухгранных вуглоў паміж плошасцю грані і плоскасцямі, што праходзяць праз дыяганаль і канты гэтай грані;
- д) велічыні вуглоў паміж дыяганалямі граняў паралелепіпеда;
- е) велічыні вуглоў паміж дыяганалямі паралелепіпеда і дыяганалямі яго граняў;
- ж) плошчу поўнай паверхні паралелепіпеда;
- з) аб'ём паралелепіпеда.

391.  Дакажыце, што для любога паралелепіпеда $ABCD_1B_1C_1D_1$ праўдзіцца роўнасць $AC_1^2 = AC^2 + AB_1^2 + AD_1^2 - AB^2 - AD^2 - AA_1^2$.

392. Дакажыце, што сума квадратаў плошчаў дыяганальных сячэнняў любога паралелепіпеда роўна суме квадратаў плошчаў усіх яго бакавых граняў.

393.  Дакажыце, што сума квадратаў усіх дыяганалей любога паралелепіпеда роўна суме квадратаў усіх яго кантаў.

394.  Знайдзіце суму квадратаў адлегласцей паміж вяршынямі паралелепіпеда з вымярэннямі a, b, c .

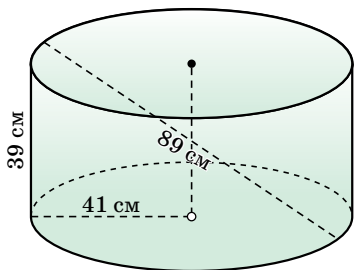
395.  На вектарах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ як на кантах пабудаваны паралелепіпед, аб'ём якога ёсць $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Дакажыце, што $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{N} \cdot \vec{c}|$, дзе вектар $\vec{N}$ перпендыкулярны вектарам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а яго даўжыня роўна плошчы паралелаграма, пабудаванага на вектарах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

396.  На вектарах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ як на кантах пабудаваны паралелепіпед, аб'ём якога ёсць $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Дакажыце, што:

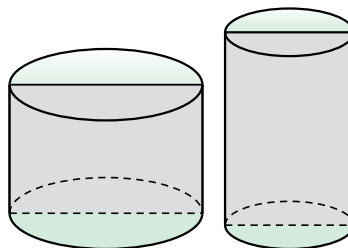
- а) $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1 + \vec{c}_2) = V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1) + V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_2)$;
- б) $V(\vec{a}, \vec{b}, k\vec{c}) = |k| \cdot V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
- в) $V(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}) = 2V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Цыліндр

397. Ці можна сцвярджаць, што прамая з'яўляецца ўтваральнікам цыліндра, калі яна мае з яго паверхняй:
- а) адзін агульны пункт;
 - б) два агульныя пункты;
 - в) тры агульныя пункты?
398. Вызначце ўмовы, пры якіх праз дадзены пункт прасторы можна правесці плоскасць, датычную да цыліндра.
399. Вызначце ўмовы, пры якіх праз дадзеную прамую можна правесці плоскасць, датычную да цыліндра.
400. На плоскасці α выбрана прамая l . Вызначце, дзе размяшчаюцца восі цыліндраў, да якіх плоскасць α датыкаецца па прамой l .
401. Вызначце геаметрычнае месца пунктаў прасторы, якія размешчаны на адлегласці d ад дадзенай прамой l .
402. Цыліндрычныя паверхні датыкаюцца да граняў дадзенага двухграннага вугла. Вызначце, дзе размяшчаюцца восі такіх цыліндраў.
403. Укажыце, як павінны быць размешчаны ў прасторы дзве прамыя, каб праз іх можна было правесці цыліндрычную паверхню. Устаноўце, дзе размяшчаюцца восі такіх цыліндраў.
404. Восі дзвюх цыліндрычных паверхняў паралельныя. Вызначце, колькі агульных датычных плоскасцей можна правесці да дадзеных цыліндраў. Вызначце, ці можна правесці датычную плоскасць да цыліндрычных паверхняў, восі якіх не паралельныя.
405.  Радыус асновы цыліндра роўны 13 см, утваральнік — 10 см. Знайдзіце:
- а) плошчу поўнай паверхні цыліндра;
 - б) аб'ём цыліндра;
 - в) плошчу сячэння, што праходзіць паралельна восі цыліндра на адлегласці 5 см ад восі;
 - г) плошчу бакавой паверхні ўмежанай у цыліндр правільнай шасцівугольнай прызмы і яе аб'ём;
 - д) плошчу бакавой паверхні ўмежанай у цыліндр правільнай чатырохвугольнай прызмы і яе аб'ём.
406. Радыус асновы цыліндра роўны 13 см, утваральнік — 24 см. У сячэнні цыліндра плоскасцю, паралельнай восі цыліндра, атрымаўся квадрат. Знайдзіце адлегласць паміж плоскасцю сячэння і воссю цыліндра.



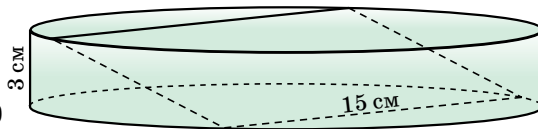
Рыс. 138



Рыс. 139

- 407.**  Радыус асновы цыліндра роўны 41 см, утваральнік — 39 см. Канцы адрэзка даўжынёй 89 см ляжаць на акружнасцях абедзвюх асноў цыліндра (рыс. 138). Знайдзіце адлегласць паміж гэтым адрэзкам і воссю цыліндра.
- 408.** Знайдзіце адносіну плошчы бакавой паверхні цыліндра да плошчы яго восевага сячэння.
- 409.** Вышыні двух цыліндраў адносяцца як 2 : 3, а іх восевыя сячэнні — роўныя прамавугольнікі (рыс. 139). Знайдзіце адносіну аб'ёмаў гэтых цыліндраў.
- 410.** Разгорткай бакавой паверхні цыліндра з'яўляецца прамавугольнік з дыяганаллю d . Вугал паміж дыяганаллю і старонай гэтага прамавугольніка роўны α . Знайдзіце плошчу поўнай паверхні і аб'ём цыліндра. Колькі рашэнняў мае задача?
- 411.** Вышыня цыліндра адносіцца да радыуса асновы як $m : n$. Знайдзіце адносіну перыметра восевага сячэння цыліндра да дыяганалі разгорткі яго бакавой паверхні.
- 412.** Цела ўтворана вярчэннем прамавугольніка са старанамі a і b вакол адной са старон. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні і аб'ём цыліндра. Колькі рашэнняў мае задача?
- 413.** Разгорткай бакавой паверхні цыліндра з'яўляецца квадрат са стараной a . Знайдзіце аб'ём цыліндра.
- 414.** Дакажыце, што адносіна бакавых паверхняў цыліндраў з роўнымі аб'ёмамі роўна адносіне іх радыусаў.
- 415.** Знайдзіце адносіну бакавых паверхняў і адносіну аб'ёмаў цыліндраў, атрыманых пры вярчэнні прамавугольніка са старанамі a і b вакол адной і вакол другой стараны.
- 416.** Пры вярчэнні прамавугольніка вакол адной і вакол другой стараны атрымліваюцца цыліндры з аб'ёмамі V_1 і V_2 . Знайдзіце дыяганаль гэтага прамавугольніка.

Рис. 140



417. У цыліндры плошча асновы роўна S , а плошча восевага сячэння — Q . Знайдзіце плошчу поўнай паверхні і аб'ём цыліндра.
418. Плошча бакавой паверхні цыліндра роўна S , а дыяганаль яго восевага сячэння — l . Знайдзіце аб'ём гэтага цыліндра.
419. Знайдзіце залежнасць паміж утваральнікам цыліндра і яго радыусам, улічыўшы, што бакавая паверхня цыліндра роўнавялікая з кругам, апісаным каля восевага сячэння.
420. У цыліндраў з радыусамі асноў R і r аднолькавыя плошчы бакавых паверхняў. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў гэтых цыліндраў.
421. Вышыня цыліндра роўна 7 дм, дыяметр асновы — 17 дм. Знайдзіце старану квадрата, вяршыні якога размешчаны на абедзвюх акружнасцях асноў.
422. Вяршыні квадрата размешчаны на абедзвюх акружнасцях асноў цыліндра з вышынёй 3 см (рыс. 140). Знайдзіце дыяметр асновы цыліндра, улічыўшы, што старана квадрата роўна 15 см.
423. Разгорткай бакавай паверхні цыліндра з'яўляецца прамавугольнік з плошчай 20 см^2 , у якога вымярэнні адрозніваюцца на 1 см. Знайдзіце магчымыя значэнні плошчы поўнай паверхні такога цыліндра.
424. Плоскасць, паралельная восі цыліндра, аддзяляе ад акружнасці асновы дугу ў 120° (рыс. 141). Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што ўтваральнік цыліндра роўны 15 см, а радыус асновы — 6 см.
425. Плоскасць, паралельная восі цыліндра, раздзяляе бакавую паверхню ў адносіне 3 : 1. Знайдзіце плошчу сячэння і плошчу поўнай паверхні кожнай з утвораных частак, улічыўшы, што ўтваральнік цыліндра роўны 10 см, а радыус асновы — 5 см.
426. У цыліндры з радыусам асновы R і ўтваральнікам l плоскасць, паралельная аснове цыліндра, раздзяляе бакавую паверхню на

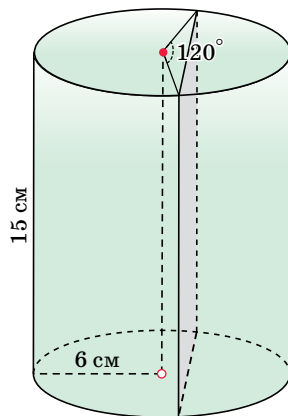
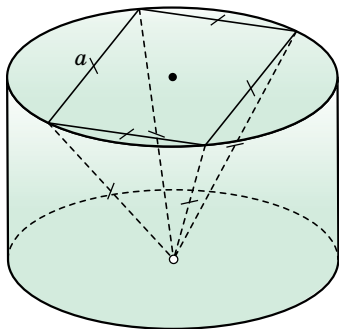
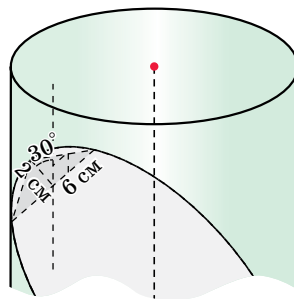


Рис. 141



Рыс. 142

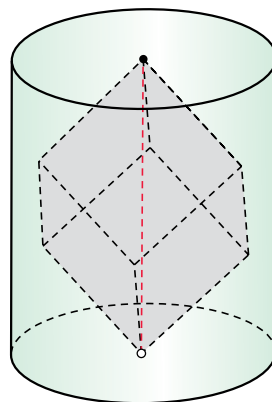


Рыс. 143

часткі так, што сярэдняе геаметрычнае іх плошчаў ёсць плошча сячэння. Знайдзіце, у якой адносіне гэтая плоскасць раздзяляе вось цыліндра.

427. У адну аснову цыліндра ўмежаны квадрат са стараной a , вяршыні якога адлеглыя ад цэнтра другой асновы таксама на a (рыс. 142). Знайдзіце бакавую паверхню цыліндра.
428. Цыліндрычная труба даўжынёй l і знешнім дыяметрам D мае аб'ём V . Знайдзіце ўнутраны дыяметр трубы.
429. Пры павелічэнні ўтваральніка цыліндра на l м яго аб'ём павялічваецца на V м³. Знайдзіце плошчу асновы цыліндра.
430. Усе вяршыні раўнабедранага трохвугольніка з асновай 6 см і вышынёй 2 см размешчаны на цыліндрычнай паверхні, вось якой перпендыкулярная аснове трохвугольніка і складае вугал 30° з яго плоскасцю (рыс. 143). Знайдзіце радыус цыліндрычнай паверхні.
431. Усе вяршыні квадрата са стараной a размешчаны на цыліндрычнай паверхні, вось якой перпендыкулярная старане квадрата і складае вугал α з яго плоскасцю. Знайдзіце радыус цыліндрычнай паверхні.
432. Шэсць вяршынь куба з кантам a размешчаны на цыліндры, вось якога — дыяганаль куба (рыс. 144). Знайдзіце:

- радыус цыліндра;
- поўную паверхню цыліндра;
- аб'ём цыліндра.



Рыс. 144

433. Цыліндр перасечаны плоскасцю, якая раздзяляе яго вось на адрэзкі даўжынямі 12 см і 18 см (рыс. 145). Знайдзіце:

- а) у якой адносіне гэтая плоскасць раздзяляе плошчу бакавой паверхні;
- б) аб'ём кожнай часткі, улічыўшы, што радыус асновы цыліндра роўны 10 см.

434. Плошча поўнай паверхні цыліндра роўна 440π см². Знайдзіце яго вышыню, улічыўшы, што радыус асновы роўны 11 см.

435. Плошча поўнай паверхні цыліндра роўна 280π см². Знайдзіце радыус яго асновы, улічыўшы, што вышыня роўна 13 см.

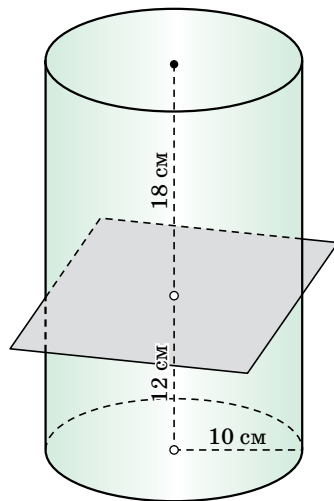
436. Плошча асновы цыліндра роўна 144π см². Знайдзіце плошчу яго поўнай паверхні і аб'ём, улічыўшы, што вышыня роўна 15 см.

437. Дыяганаль восевага сячэння цыліндра даўжынёй 12 см нахілена да плоскасці асновы пад вуглом 30° (рыс. 146). Знайдзіце:

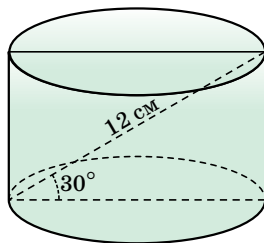


- а) плошчу бакавой паверхні цыліндра;
- б) аб'ём цыліндра;
- в) плошчу бакавой паверхні ўмежанай у цыліндр правільнай шасцівугольнай прызмы і яе аб'ём;
- г) плошчу бакавой паверхні ўмежанай у цыліндр правільнай чатырохвугольнай прызмы і яе аб'ём.

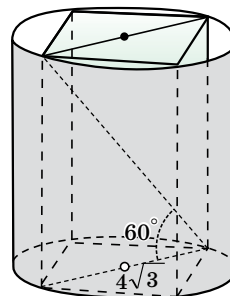
438. У цыліндр умежана правільная чатырохвугольная прызма з кантамі асновы $4\sqrt{3}$. Дыяганаль восевага сячэння цыліндра нахілена да плоскасці асновы пад вуглом 60° (рыс. 147). Знайдзіце:



Рыс. 145



Рыс. 146



Рыс. 147

- а) плошчу бакавой паверхні цыліндра;
б) аб'ём цыліндра.

439. Утваральнік цыліндра ў тры разы большы за радыус асновы. У цыліндр умежана правільная трохвугольная прызма. Знайдзіце вугал паміж дыяганаллю яе грані і воссю цыліндра.



440. У цыліндр з утваральнікам l умежана правільная шасцівугольная прызма аб'ёмам V . Знайдзіце бакавую паверхню цыліндра.



441. У правільную шасцівугольную прызму з бакавой паверхняй 32 дм^2 умежаны цыліндр (рыс. 148). Знайдзіце яго аб'ём, улічыўшы, што дыяганаль восевага сячэння цыліндра ўтварае вугал 60° з плоскасцю асновы.



442. Знайдзіце адносіну бакавых паверхняў і адносіну аб'ёмаў цыліндраў, з якіх адзін апісаны, а другі ўмежаны ў правільную трохвугольную прызму.



443. У правільную шасцівугольную прызму, усе канты якой роўны a , умежаны цыліндр. Знайдзіце яго аб'ём.



444. Восевым сячэннем цыліндра з'яўляецца прамавугольнік з плошчай 108 см^2 , у якога аснова складае $0,75$ вышыні. Знайдзіце аб'ём правільнай шасцівугольнай прызмы, умежанай у гэты цыліндр.



445. У цыліндры з аб'ёмам V акружнасць асновы мае даўжыню C . Каля цыліндра апісана прызма, плошча поўнай паверхні якой роўна S . Знайдзіце аб'ём гэтай прызмы.



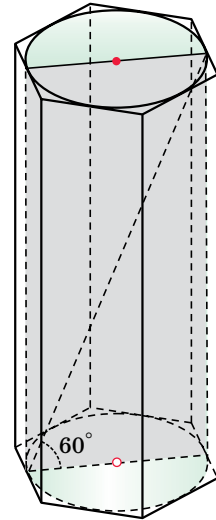
446. У цыліндр з радыусам асновы R умежана правільная шасцівугольная прызма (рыс. 149). Знайдзіце адносіны бакавых паверхняў і аб'ёмаў гэтых цел.



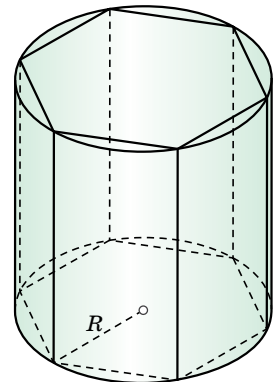
447. Дакажыце, што дзве датычныя плоскасці цыліндра або паралельныя, або перасякаюцца па прамой, паралельнай восі цыліндра.



448. Старана квадрата даўжынёй a належыць датычнай прамой цыліндра. Плоскасць квадрата ўтварае з воссю цыліндра вугал α ,



Рыс. 148



Рыс. 149

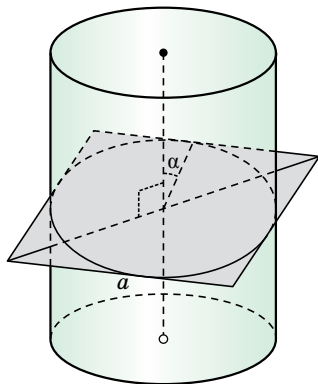


Рис. 150

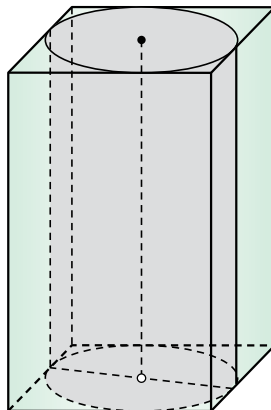


Рис. 151

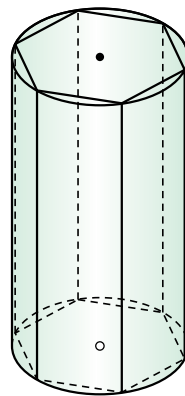


Рис. 152

а одна з дияганалей перпендикулярная да гэтай восі (рис. 150). Знайдзіце радыус цыліндрычнай паверхні.

449. Раўнабедраны трохвугольнік з асновай 12 см і вышынёй 16 см датыкаецца да бакавой паверхні цыліндра. Плоскасць трохвугольніка складае з воссю цыліндра вугал 30° , а аснова трохвугольніка перпендикулярная ўтваральніку. Знайдзіце радыус цыліндрычнай паверхні.



450. Кант куба роўны a . Знайдзіце радыус цыліндрычнай паверхні, воссю якой з'яўляецца дыяганаль куба і якая датыкаецца да:



а) канта куба; б) дыяганалі грані куба.

451. У правільную чатырохвугольную призму ўмежаны цыліндр (рис. 151). Знайдзіце яго аб'ём, улічыўшы, што аб'ём прызмы роўны 2880 см^3 .



452. Каля правільнай шасцівугольнай прызмы апісаны цыліндр (рис. 152). Знайдзіце яго аб'ём, улічыўшы, што аб'ём прызмы роўны $1440\sqrt{3} \text{ см}^3$.



453. Адзін цыліндр апісаны каля правільнай трохвугольнай прызмы, а другі ўмежаны ў яе (рис. 153). Знайдзіце адносіны аб'ёмаў і поўных паверхняў цыліндраў, улічыўшы, што дыяганаль бакавой грані прызмы ўтварае з бакавым кантам вугал 30° .

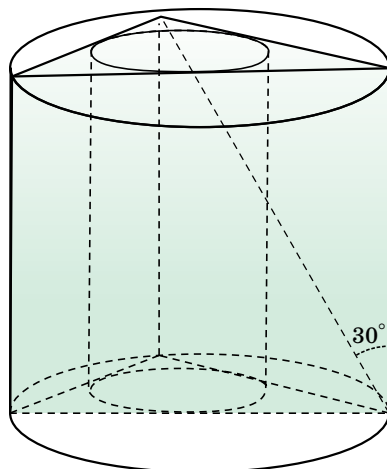


Рис. 153

3. Піраміда

454. Знайдіть суму всіх плоских кутів:
а) чотирикутної піраміди; б) n -кутної піраміди.
455. Докажіть, що площина, паралельна двом супротивним ребрам трикутної піраміди, перетинає її по паралелограму.
456. Докажіть, що в правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині рівний 60° тоді і тільки тоді, коли супротивні ребра багатогранника перпендикулярні.
457. Основу піраміди з'являється квадрат. Діагональні кути при ребрах основи пропорційні лікам 1, 2, 4, 2. Знайдіть величини цих кутів.
458. Докажіть, що всі площини, проведені через ребра багатогранника піраміди перпендикулярні до площини основи, перетинаються по одній прямій — висоті піраміди.
459. Докажіть, що всі площини, проведені через вершину піраміди перпендикулярні ребрам її основи, перетинаються по одній прямій — висоті піраміди.
460. Докажіть, що три площини, які проходять у трикутній піраміді через середні лінії і супротивні їм ребра, перетинаються по одній прямій (рис. 154).
461. Докажіть, що пряма, кожна з яких проходить через вершину трикутної піраміди і точку перетину середніх ліній супротивних їй граней, перетинається в одному пункті і розділяється їм у відношенні $3 : 1$, коли ліній від вершини (рис. 155).
462. Докажіть, що відрізки, які з'єднують середні лінії супротивних ребер трикутної піраміди, перетинаються в одному пункті і розділяються їм пополам (рис. 156).

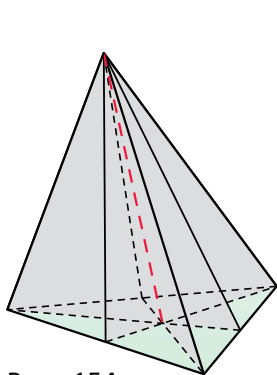


Рис. 154

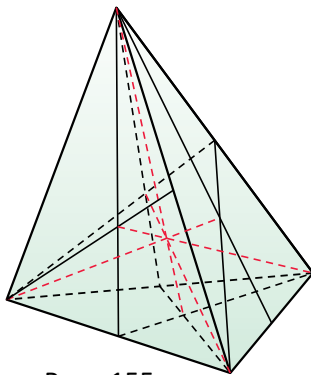


Рис. 155

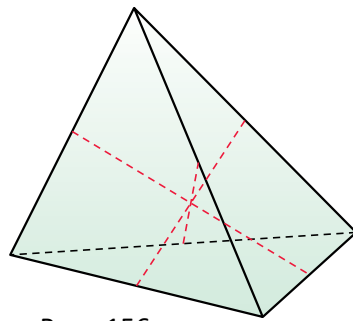
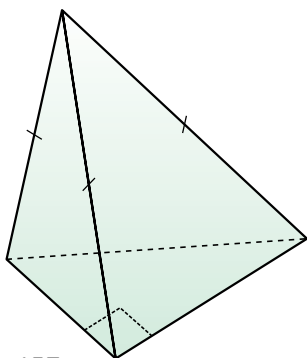
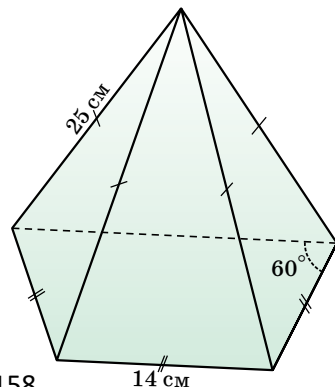


Рис. 156

463. Дакажыце, што бакавая паверхня піраміды большая за плошчу яе асновы.
464. Дакажыце, што калі ў трохвугольнай пірамідзе ёсць дзве пары роўных супрацьлеглых кантаў, то ў ёй ёсць і дзве пары роўных граняў.
465. Дакажыце, што калі ў трохвугольнай пірамідзе вяршыня праектуецца ў артацэнтр асновы, то сумы квадратаў супрацьлеглых кантаў роўныя.
466. Дакажыце, што плошча сярэдняга сячэння ўсечанай піраміды (плоскасцю, якая паралельная асновам і раздзяляе папалам бакавы кант) роўна сярэдняму арыфметычнаму паміж сярэднім геаметрычным і сярэднім арыфметычным плошчаў асноў.
467. Дакажыце, што калі вышыні бакавых граняў піраміды роўныя, то вяршыня піраміды праектуецца ў цэнтр акружнасці, умежанай у аснову піраміды.
468. Дакажыце, што калі бакавыя грані піраміды ўтвараюць з плоскасцю асновы роўныя вуглы, то вяршыня піраміды праектуецца ў цэнтр акружнасці, якая датыкаецца да ўсіх прамых, што змяшчаюць стораны асновы піраміды.
469. Тры паслядоўныя вуглы ў аснове чатырохвугольнай піраміды адносяцца як $2 : 3 : 4$. Знайдзіце плоскія вуглы асновы, улічыўшы, што бакавыя канты піраміды ўтвараюць з плоскасцю асновы роўныя вуглы.
470. У аснове трохвугольнай піраміды ляжыць прамавугольны трохвугольнік, а бакавыя канты піраміды роўныя (рыс. 157). Знайдзіце двухгранны вугал пры большай старане асновы.
471. У аснове піраміды ляжыць трапецыя з трыма старанамі па 14 см і вуглом 60° (рыс. 158). Знайдзіце бакавую паверхню піраміды, улічыўшы, што кожны яе бакавы кант роўны 25 см.

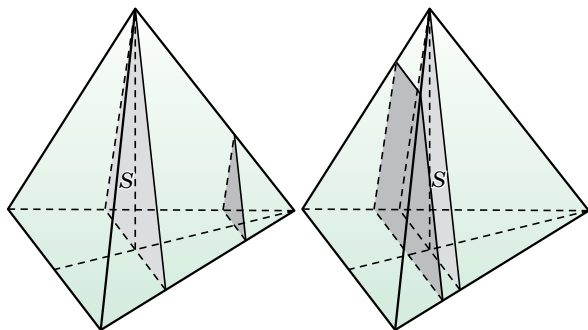


Рыс. 157

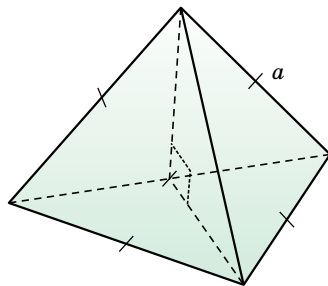


Рыс. 158

472. У трохвугольній пірамідзе $ABCD$ усе плоскія вуглы пры вяршыні A прамыя, канты AB і BC роўны 1 і $\sqrt{37}$ адпаведна. Знайдзіце даўжыню канта AD , улічыўшы, што вуглы кантаў BD і CD з плоскасцю ABC адрозніваюцца на 45° .
473. Нахіленая AB утварае з плоскасцю α вугал $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$, плоскасць π праходзіць праз AB , перасякае плоскасць α па прамой AC . Знайдзіце велічыню вугла паміж прамымі AB і AC , улічыўшы, што вугал паміж плоскасцямі α і π роўны 30° .
474. Знайдзіце плошчу сячэння правільнай трохвугольнай піраміды плоскасцю, якая перпендыкулярная медыяне асновы і раздзяляе яе ў адносіне $1 : 3$, улічыўшы, што паралельнае яму сячэнне, якое праходзіць праз вяршыню піраміды, мае плошчу S (рыс. 159).
475. У правільнай трохвугольнай пірамідзе бакавы кант утварае з плоскасцю асновы вугал 60° . Плоскасць праходзіць праз старану асновы пад вуглом 30° да яе. Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што старана асновы роўна 12 см.
476. У трохвугольнай пірамідзе дзве перпендыкулярныя грані — правільныя трохвугольнікі са стараной a (рыс. 160). Знайдзіце поўную паверхню піраміды.
477. Знайдзіце старану асновы і апафему правільнай трохвугольнай піраміды, улічыўшы, што яе бакавы кант роўны 30 см, а бакавая паверхня — 810 см².
478. Дыяганаль асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды роўна 6 см, яе вышыня — 15 см. Знайдзіце аб'ём гэтай піраміды.
479. Старана асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды роўна 36 см, а яе бакавы кант — 83 см. Знайдзіце аб'ём гэтай піраміды.



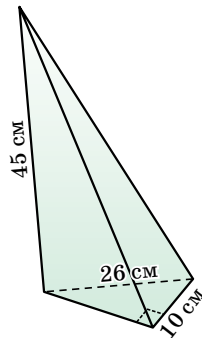
Рыс. 159



Рыс. 160

480. Знайдзіце аб'ём трохвугольнай піраміды, бакавыя канты якой папарна перпендыкулярныя і роўны 10 см, 12 см і 15 см.

481. Асновай піраміды з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік з гіпатэнузай 26 см і катэтам 10 см, бакавы кант супраць меншай стараны асновы перпендыкулярны да плоскасці асновы і роўны 45 см (рыс. 161). Знайдзіце поўную паверхню і аб'ём піраміды.



Рыс. 161

482. У аснове піраміды ляжыць ромб са стараной 15 см і дыяганаллю 24 см. Знайдзіце аб'ём піраміды, улічыўшы, што бакавыя грані нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 45° .

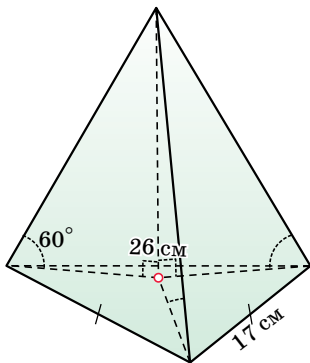
483. У аснове піраміды ляжыць прамавугольнік са старанамі 14 см і 48 см. Знайдзіце аб'ём піраміды, улічыўшы, што кожны яе бакавы кант роўны 65 см.

484. У аснове піраміды ляжыць раўнабедраны трохвугольнік з бакавой стараной 17 см і асновай 26 см. Знайдзіце аб'ём піраміды, улічыўшы, што:

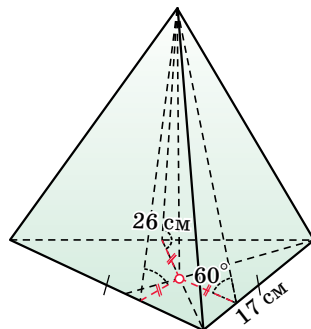
а) усе бакавыя канты нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° (рыс. 162);

б) усе бакавыя грані нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° (рыс. 163).

485. У аснове піраміды ляжыць трохвугольнік са старанамі 13 см, 14 см і 15 см. Бакавы кант супраць сярэдняй па велічыні стараны асновы перпендыкулярны да плоскасці асновы і роўны 16 см. Знайдзіце поўную паверхню і аб'ём піраміды.



Рыс. 162



Рыс. 163

486. У аснове піраміды ляжыць прамавугольнік з дыяганаллю d , дзве бакавыя грані перпендыкулярныя да плоскасці асновы, а дзве іншыя нахілены да яе пад вугламі 30° і 45° . Знайдзіце поўную паверхню гэтай піраміды.

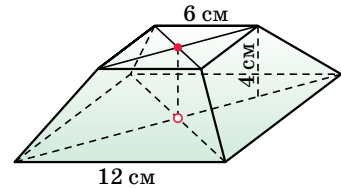


Рис. 164

487. Знайдзіце аб'ём і поўную паверхню правільнай чатырохвугольнай усечанай піраміды, вышыня якой роўна 4 см, а канты асновы — 6 см і 12 см (рыс. 164).

488. У аснове піраміды ляжыць правільны трохвугольнік са старонай $2a$. Адна з бакавых граняў перпендыкулярная плоскасці асновы, а дзве іншыя ўтвараюць з гэтай плоскасцю вуглы α . Знайдзіце поўную паверхню піраміды.

489. У аснове піраміды ляжыць прамавугольны трохвугольнік з катэтамі 12 см і 35 см. Знайдзіце аб'ём піраміды, улічыўшы, што ўсе двухгранныя вуглы пры аснове піраміды роўны 45° .

490. У трохвугольнай усечанай пірамідзе праз кант меншай асновы праведзена сячэнне, паралельнае супрацьлегламу бакавому канту. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў утвораных частак, улічыўшы, што канты асноў адносяцца як:

а) $1 : 2$ (рыс. 165);

б) $2 : 3$.

491. У аснове чатырохвугольнай піраміды ляжыць ромб з дыяганалямі 6 см і 8 см, вышыня піраміды праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей і роўна 1 см. Знайдзіце бакавую і поўную паверхню піраміды.

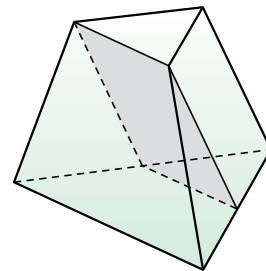


Рис. 165

492. Бакавая паверхня правільнай трохвугольнай піраміды, у якой адзін з двухгранных вуглоў прамы, роўна S . Плоскасць, паралельная аснове, раздзяляе апафему папалам. Знайдзіце бакавую паверхню ўтворанай усечанай піраміды.

493. Апафема правільнай чатырохвугольнай усечанай піраміды, поўная паверхня якой роўна 186 см^2 , мае даўжыню 4 см (рыс. 166). Знайдзіце аб'ём гэтай

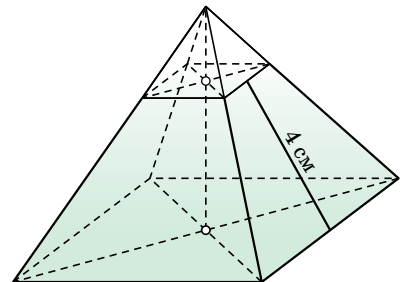


Рис. 166

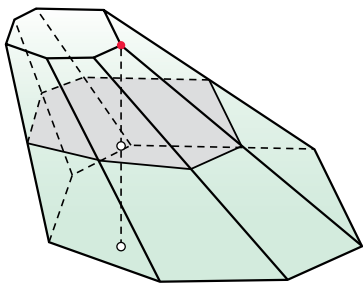


Рис. 167

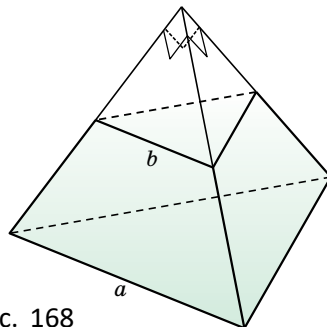


Рис. 168

піраміди, улічуйшы, што яе вышыня складае $\frac{2}{3}$ вышыні адпаведнай поўнай піраміды.

- 494.** У асновах усечанай піраміды ляжаць прамавугольнікі. Перыметр аднаго з іх роўны 100 см, а стораны другога — 160 см і 90 см. Прамая, што праходзіць праз пункты перасячэння дыяганалей прамавугольнікаў, перпендыкулярная да іх плоскасцей, адлегласць паміж якімі — 36 см. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды.



- 495.** Стораны асноў усечанай піраміды адносяцца як 7 : 19 (рис. 167). Вызначце, у якой адносіне раздзяляе бакавую паверхню піраміды плоскасць, што праходзіць праз сярэдзіну вышыні і паралельная асновам.



- 496.** Вышыня асновы правільнай трохвугольнай піраміды складае 90 % бакавога канта, а плошча сячэння, праведзенага праз гэты бакавы кант і вышыню асновы, роўна Q . Знайдзіце аб'ём піраміды.

- 497.** Лікі S_1 , S_2 і Q выяўляюць адпаведна плошчы асноў і бакавой паверхні правільнай чатырохвугольнай усечанай піраміды. Знайдзіце плошчу дыяганальнага сячэння.

- 498.** У правільнай трохвугольнай усечанай пірамідзе бакавыя канты папарна перпендыкулярныя, стораны асноў роўны a і b (рис. 168). Знайдзіце плошчу поўнай паверхні гэтай піраміды.



- 499.** У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе з бакавым кантам a перпендыкулярна яму праведзена сячэнне праз вяршыню асновы. Знайдзіце плошчу сячэння, улічуйшы, што бакавы кант нахілены да плоскасці асновы пад вуглом α .

- 500.** У правільнай шасцівугольнай пірамідзе з двухгранным вуглом пры аснове, роўным α , і бакавым кантам a перпендыкулярна да яго праведзена сячэнне праз старану асновы. Знайдзіце плошчу сячэння.

501. У правильній чатырохвугольнай пірамідзе праведзена сячэнне праз сярэдзіны двух сумежных кантаў асновы і сярэдзіну вышыні. Улічыўшы, што вышыня піраміды роўна h і ўдвая меншая за дыяганаль асновы, знайдзіце:



- плошчу сячэння;
- вугал паміж плоскасцю сячэння і плоскасцю асновы.

502. Праз пункт перасячэння дыяганалей правільнай чатырохвугольнай усечанай піраміды праведзена сячэнне, паралельнае асновам піраміды (рыс. 169). Знайдзіце аб'ёмы ўтвораных частак, улічыўшы, што вышыня піраміды роўна 18 см, а канты асноў — 6 см і 12 см.



503. Чыгунны пастамент у форме правільнай усечанай чатырохвугольнай піраміды мае вышыню 15 дм, а стораны асновы — 30 дм і 20 дм. Знайдзіце масу пастамента, улічыўшы, што шчыльнасць чыгуна роўна $7,2 \text{ г/см}^3$.



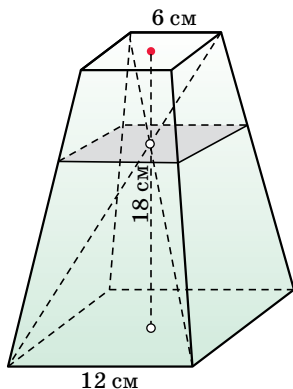
504. У правільнай усечанай пірамідзе перыметр бакавой грані роўны 176 см, апофема — 24 см (рыс. 170). Знайдзіце стораны асноў, улічыўшы, што вышыня ўсечанай піраміды складае $\frac{1}{5}$ вышыні адпаведнай поўнай піраміды.



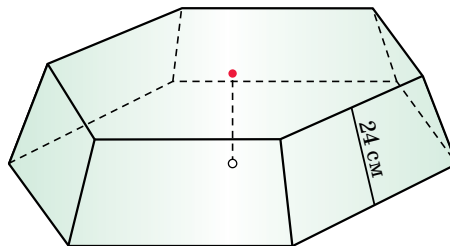
505. Ва ўсечанай пірамідзе праз сярэдзіну бакавога канта праведзена плоскасць, паралельная асновам. Дакажыце, што плошча сячэння роўна $\left(\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2}\right)^2$, дзе S_1 і S_2 — плошчы асноў.



506. Бакавы кант правільнай трохвугольнай усечанай піраміды роўны 4 см і ўтварае з плоскасцю асновы вугал 60° . Знайдзіце аб'ём



Рыс. 169



Рыс. 170

піраміды, улічыўшы, што радыус акружнасці, апісанай каля меншай асновы, роўны 1 см.

507. Бакавы кант правільнай шасцівугольнай піраміды роўны 14 см, а старана асновы — 2 см. Знайдзіце аб'ём гэтай піраміды.

508. У трохвугольнай пірамідзе супрацьлеглыя пары кантаў маюць даўжыні a і a_1 , b і b_1 , c і c_1 . Знайдзіце даўжыні трох адрэзкаў, што злучаюць іх сярэдзіны.

509*. У аснове чатырохвугольнай піраміды ляжыць ромб са стараной a і большай дыяганаллю d . Вяршыня піраміды праектуецца ў сярэдзіну стараны ромба і знаходзіцца на адлегласці $0,5a$ ад большай дыяганалі (рыс. 171). Знайдзіце вышыню піраміды.

510. У аснове чатырохвугольнай піраміды ляжыць паралелаграм з плошчай 360 см^2 і старанамі 20 см і 36 см. Вышыня піраміды праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей і роўна 12 см. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

511. У аснове піраміды ляжыць правільны шасцівугольнік са стараной a . Вяршыня піраміды праектуецца ў сярэдзіну стараны шасцівугольніка і знаходзіцца на адлегласці $0,25a$ ад плоскасці асновы. Знайдзіце бакавую і поўную паверхню піраміды.

512. Знайдзіце аб'ём усечанай піраміды, у якой плошчы асноў роўны 48 см^2 і 147 см^2 , а вышыня адпаведнай поўнай піраміды роўна 35 см (рыс. 172).

513. У трохвугольнай усечанай пірамідзе канты большай асновы роўны 18 см, 30 см і 42 см, усе двухгранныя вуглы пры іх роўны 45° . Знайдзіце аб'ём гэтай піраміды, улічыўшы, што яе вышыня складае $\frac{3}{4}$ вышыні адпаведнай поўнай піраміды.

514. Плошчы асноў усечанай піраміды роўны 12 см^2 і 48 см^2 .

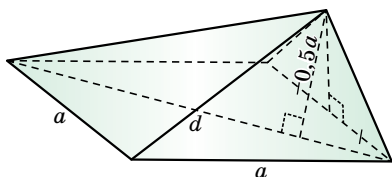


Рис. 171

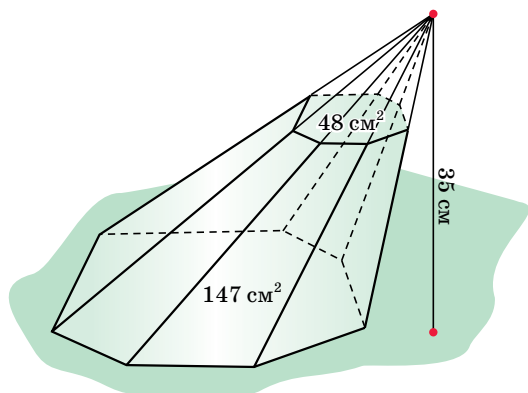


Рис. 172

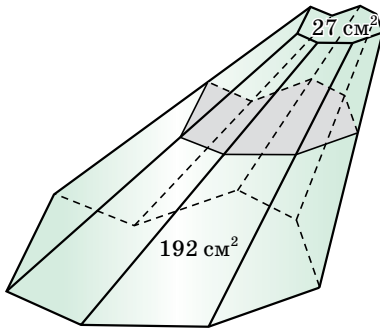


Рис. 173

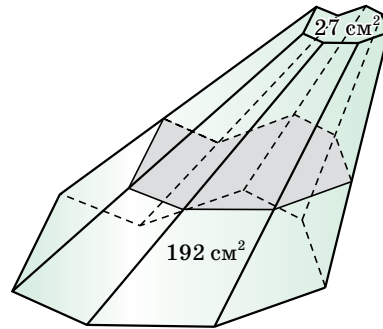


Рис. 174

Знайдіть площу сячення, яке проходить праз середіну бакавого канта паралельна основам піраміди.

515. Площі основої усеченої піраміди роїни 27 cm^2 і 192 cm^2 . Знайдіть площу сячення, яке проходить паралельно основам і розділяє бакавий кант у відношенні $2 : 3$, калі лічиль:



- ад меншай основи (рис. 173);
- ад большай основи (рис. 174).

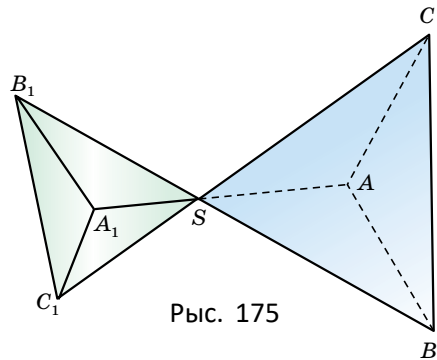


Рис. 175

516. Піраміди $SABC$ і $SA_1B_1C_1$ розміщені так, що прамія AA_1 , BB_1 і CC_1 проходять праз агульну вяршину S (рис. 175). Дакажце, што іх аб'ёмы адносяцца як здабыткі бакавых кантаў:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1}.$$

517. Дакажце, што калі асновай піраміды $SABCD$ з'яўляецца прамавугольнік $ABCD$, то праўдзіцца роўнасць $SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2$.



518. У трохвугольнай пірамідзе ёсць дзве пары перпендыкулярных супрацьлеглых кантаў. Дакажце, што кожная вяршыня піраміды праектуецца ў пункт перасячэння вышынй супрацьлеглай грані.



519. Асновай піраміды $SABCD$ з'яўляецца квадрат са стараной a . Кант SD перпендыкулярны плоскасці асновы і мае даўжыню b . Цыліндр розміщені так, што адна яго аснова ўмежана ў



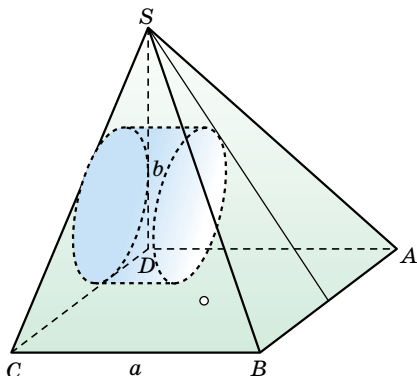


Рис. 176

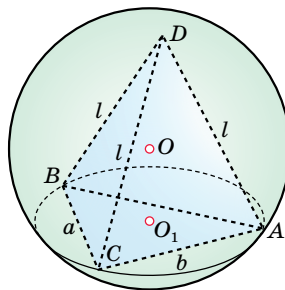


Рис. 177

трохвугольнік SCD , а другая датыкаецца да грані SAB (рис. 176). Знайдзіце вышыню цыліндра.

- 520.**  Асновай піраміды $SABC$ з'яўляецца правільны трохвугольнік са стараной a , дзве бакавыя грані перпендыкулярныя да плоскасці асновы, а трэцяя нахілена да яе пад вуглом α . Цыліндр, вышыня якога роўна радыусу асновы, умежаны ў піраміду так, што аснова цыліндра ляжыць у плоскасці асновы піраміды. Знайдзіце аб'ём цыліндра.

- 521.** У правільнай трохвугольнай пірамідзе $SABC$ вяршыня асновы A знаходзіцца на адлегласці a ад грані SBC . Апафема бакавой грані ўтварае вугал α з плоскасцю асновы. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні піраміды і яе аб'ём.

- 522.** Асновай піраміды $ABCD$ з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік з катэтамі a і b , усе бакавыя канты роўны l (рис. 177). Знайдзіце даўжыню адрэзка AO , улічыўшы, што $AO = BO = CO = DO$.

- 523*.** Супрацьлеглыя канты трохвугольнай піраміды папарна роўныя: $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $CA = BD = c$. Знайдзіце аб'ём піраміды.

4. Конус

- 524.** Выразіце аб'ём конуса як функцыю яго вышыні H і даўжыні S акружнасці асновы.
- 525.** Дакажыце, што вугал пры вяршыні восевага сячэння конуса з'яўляецца вострым, прамым або тупым, калі вышыня конуса адпаведна большая, роўная або меншая за радыус яго асновы.

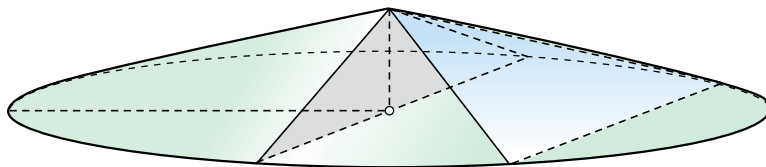


Рис. 178

526. Радыус асновы конуса роўны 12 см, вышыня — 10 см. Знайдзіце найбольшую плошчу сячэння, што праходзіць праз вяршыню конуса.
527. Найбольшая плошча сячэння конуса, што праходзіць праз яго вяршыню, удвая большая за плошчу восевага сячэння (рыс. 178). Знайдзіце вугал паміж утваральнікам і плоскасцю асновы.
528. Плоскасць праходзіць праз вяршыню конуса на адлегласці 12 см ад цэнтра яго асновы. Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што радыус асновы конуса роўны 17 см, а яго вышыня — 20 см.
529. Прамая праходзіць праз сярэдзіну вышыні конуса паралельна ўтваральніку. Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, абмежаванага паверхняй конуса, улічыўшы, што ўтваральнік мае даўжыню l .
530. Прамая ўтварае вугал 30° з плоскасцю асновы конуса з утваральнікам l , перасякае вышыню конуса і плоскасць асновы за $\frac{5}{8}l$ ад яе цэнтра (рыс. 179). Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, абмежаванага паверхняй конуса, улічыўшы, што дыяметр асновы роўны ўтваральніку.
531. Радыус асновы конуса роўны 48 см, а яго вышыня — 189 см. Знайдзіце аб'ём конуса, яго бакавую і поўную паверхні.
532. Утваральнік конуса мае даўжыню 30 см і нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° . Знайдзіце аб'ём конуса, яго бакавую і поўную паверхні.
533. Знайдзіце аб'ём конуса, яго бакавую і поўную паверхні, улічыўшы, што яго вышыня роўна 10 см і складае з утваральнікам вугал 60° .

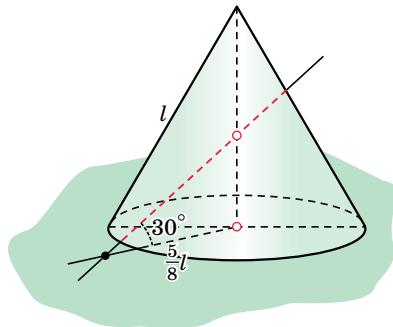


Рис. 179

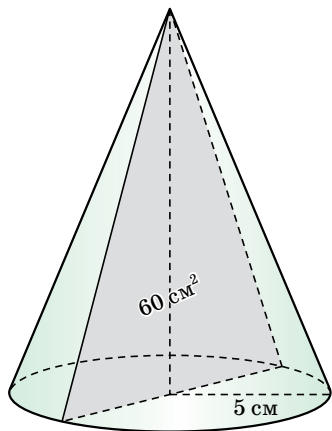


Рис. 180

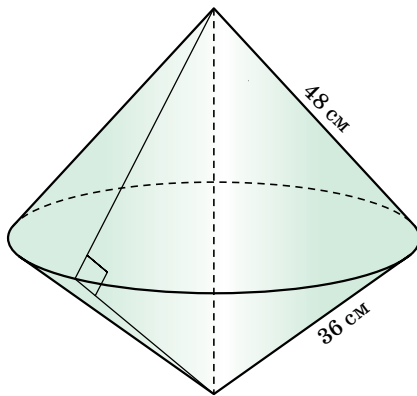
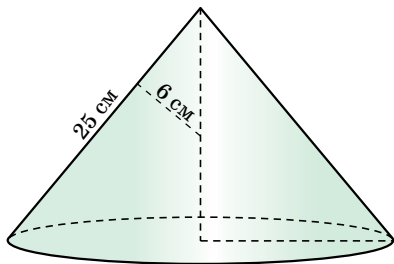


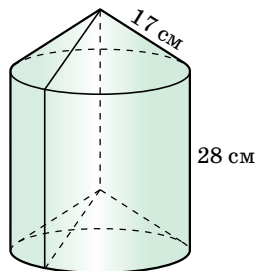
Рис. 181

- 534.** Знайдіть об'єм конуса, його бакаву і поїуну паверхні, улічуїшы, што радыус яго асновы роїны 5 см і восевае сячєнне мае площчу 60 см^2 (рис. 180).
- 535.** Знайдіть вугал паміж утваральнікам і плоскасцю асновы конуса, улічуїшы, што площча яго асновы і бакавая паверхня адпаведна роїны $100\sqrt{3} \text{ см}^2$ і 200 см^2 .
- 536.** Знайдіть об'єм конуса, улічуїшы, што площча яго асновы і бакавая паверхня адпаведна роїны $24\pi \text{ см}^2$ і $26\pi \text{ см}^2$.
- 537.** Знайдіть об'єм конуса, його бакаву і поїуну паверхні, улічуїшы, што яго вышыня роїна 40 см, а площча восевага сячєння — 360 см^2 .
- 538.** Знайдіть об'єм конуса, разгорткай бакавой паверхні якога з'яўляецца сектар з вуглом 240° і радыусам 15 см.
- 539.** Знайдіть об'єм конуса, улічуїшы, што яго восевае сячєнне мае площчу S і бакавы кант нахілены да плоскасці асновы пад вуглом α .
- 540*.** Цєла атрымана вярчєннем вакол гіпатэнузы прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі 36 см і 48 см (рис. 181). Знайдіть аб'єм цєла і площчу яго паверхні.
- 541*.** Цєла атрымана вярчєннем вакол асновы раўнабедранага трохвугольніка з бакавой стараной 10 см і вуглом 120° . Знайдіть аб'єм гэтага цєла і площчу яго паверхні.
- 542.** Вышыня ўсечанага конуса роїна 12 см, радыусы асноў — 12 см і 7 см. Знайдіть бакаву паверхню гэтага конуса.

543. Утваральнік усечанага конуса адносіцца да яго вышыні як $37 : 35$, радыусы асноў роўны 5 см і 17 см. Знайдзіце поўную паверхню гэтага конуса.
544. Утваральнік конуса роўны 25 см. Сярэдзіна вышыні конуса знаходзіцца на адлегласці 6 см ад яго (рыс. 182). Знайдзіце аб'ём гэтага конуса і плошчу яго паверхні.
545. На паверхні конуса ёсць тры папарна перпендыкулярныя ўтваральнікі. Знайдзіце поўную паверхню конуса, улічывшы, што яго вышыня роўна h .
546. Праз вяршыню конуса з утваральнікам l праведзена сячэнне з найбольшай магчымай плошчай, якое адсякае ад акружнасці асновы дугу α . Знайдзіце бакавую паверхню конуса.
547. Знайдзіце плошчу паверхні і аб'ём цела, што атрымліваецца пры вярчэнні трохвугольніка са старанамі 12 см, 17 см і 25 см вакол:
- а) меншай стараны; б) большай стараны.
548. Знайдзіце плошчу паверхні і аб'ём цела, што атрымліваецца пры вярчэнні паралелаграма з сумай дыяганалей 64 см і старанамі 17 см і 28 см вакол большай стараны (рыс. 183).
549. Ці можна апісаць каля конуса чатырохвугольную піраміду, стараны асновы якой адносяцца як:
-  а) $2 : 3 : 4 : 5$; б) $4 : 5 : 7 : 6$?
550. Ці можна ўмежыць у конус чатырохвугольную піраміду, вуглы асновы якой адносяцца як:
-  а) $1 : 3 : 5 : 7$; б) $3 : 5 : 8 : 6$?
551. Канты асновы трохвугольнай піраміды роўны 75 см, 78 см і 9 см, вышыня — 3 см, усе двухгранныя вуглы пры аснове роўныя. Знайдзіце плошчу паверхні і аб'ём умежанага ў піраміду конуса.



Рыс. 182



Рыс. 183

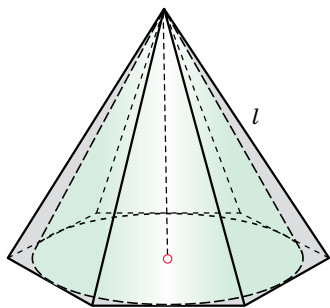


Рис. 184

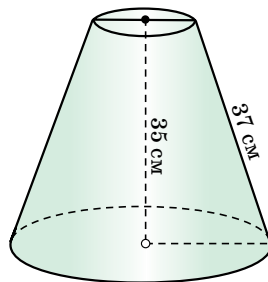


Рис. 185

552. У правильній шасцівугольній пірамідзе з бакавым кантам l усе дыяганальныя сячэнні роўнавялікія (рыс. 184). Знайдзіце плошчу паверхні і аб'ём умежанага ў піраміду конуса.

553. Канты асновы трохвугольнай піраміды роўны 13 см, 20 см і 21 см, а ўсе бакавыя канты — 36 см. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні апісанага каля піраміды конуса.



554. Выразіце аб'ём усечанага конуса як функцыю яго вышыні H і даўжынь C і c акружнасцей асноў.

555. Радыусы асноў усечанага конуса роўны 9 см і 29 см, а вышыня — аднаму з радыусаў асновы. Знайдзіце бакавую паверхню і аб'ём конуса.

556. Радыусы асноў усечанага конуса адносяцца як 2 : 5, вышыня роўна 35 см, а ўтваральнік — 37 см (рыс. 185). Знайдзіце бакавую паверхню і аб'ём конуса.

557. Радыусы асноў усечанага конуса роўны 12 см і 32 см, вышыня адносіцца да ўтваральніка як 12 : 13. Знайдзіце бакавую паверхню і аб'ём гэтага конуса.

558. Дыяганаль восевага сячэння ўсечанага конуса раздзяляецца воссю на адрэзкі даўжынямі 55 см і 20 см. Знайдзіце плошчу восевага сячэння гэтага конуса, улічыўшы, што ўтваральнік роўны 53 см.



559. Утваральнік і радыус адной з асноў усечанага конуса роўны a . Знайдзіце поўную паверхню конуса, улічыўшы, што ўтваральнік нахілены да плоскасці асновы пад вуглом α (рыс. 186).

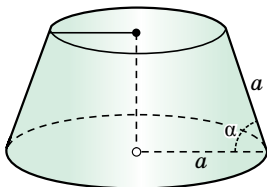
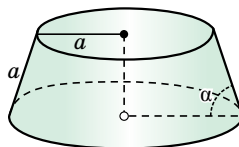


Рис. 186



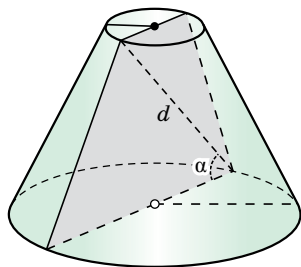


Рис. 187

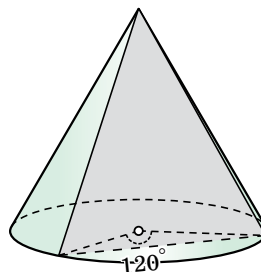


Рис. 188

- 560.** Радыусы асноў усечанага конуса адносяцца як $4 : 5$, утваральнік даўжынёй l нахілены да плоскасці асновы пад вуглом α . Знайдзіце плошчу восевага сячэння гэтага конуса.
- 561.** Дыяганаль восевага сячэння ўсечанага конуса даўжынёй d нахілена да плоскасці асновы пад вуглом α (рыс. 187). Знайдзіце бакавую паверхню гэтага конуса, улічыўшы, што радыусы яго асноў адносяцца як $1 : 3$.
- 562.** Плошчы асноў усечанага конуса роўны a^2 і b^2 . Плоскасці, паралельныя асновам, раздзяляюць бакавы кант на n долей. Знайдзіце плошчы сячэнняў.
- 563.** Праз вяршыню конуса праведзена плоскасць, якая адсякае ад акружнасці асновы дугу ў 120° (рыс. 188). Вызначце, у якой адносіне гэтая плоскасць раздзяляе аб'ём конуса.

5. Сфера

- 564.** Знайдзіце геаметрычнае месца пунктаў:
- адлеглых ад дадзенага пункта на m ;
 - адлеглых ад дадзенага пункта не больш, чым на m ;
 - адлегласці якіх ад двух дадзеных пунктаў адносяцца як $m : n$;
 - што з'яўляюцца цэнтрамі сфер з радыусам R , прычым сферы праходзяць праз дадзены пункт;
 - з якіх дадзены адрэзак бачны пад прамым вуглом;
 - якія з'яўляюцца асновамі перпендыкуляраў, апущаных з пункта A на плоскасці, што праходзяць праз пункт B ;
 - якія з'яўляюцца цэнтрамі сфер дадзенага радыуса R , улічыўшы, што сферы датыкаюцца да дадзенай плоскасці;
 - якія з'яўляюцца цэнтрамі сфер, што датыкаюцца да дадзенай плоскасці ў дадзеным пункце A ;

- і) якія з'яўляюцца цэнтрамі сфер дадзенага радыуса R , улічыўшы, што сферы датыкаюцца да дадзенай прамой;
- к) якія з'яўляюцца цэнтрамі сфер, што праходзяць праз вяршыні дадзенага трохвугольніка;
- л) якія з'яўляюцца цэнтрамі сфер, што праходзяць праз вяршыні дадзенага прамавугольніка;
- м) якія з'яўляюцца цэнтрамі сфер, што праходзяць праз вяршыні дадзенай раўнабедранай трапецыі.

565. Знайдзіце геаметрычнае месца цэнтраў сфер, якія датыкаюцца да:

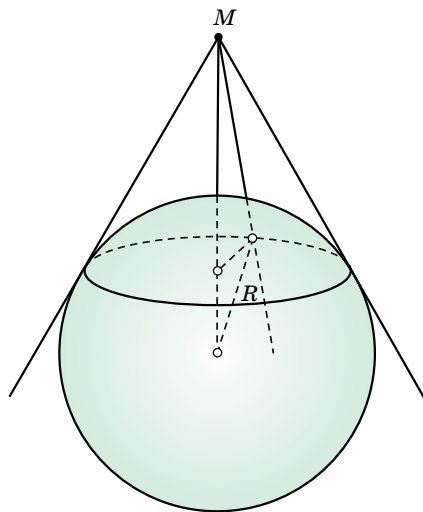
- а) дзвюх дадзеных паралельных прамых;
- б) дзвюх дадзеных перасякальных прамых;
- в) трох дадзеных паралельных прамых;
- г) старон дадзенага трохвугольніка;
- д) старон дадзенага ромба;
- е) старон дадзенай трапецыі.

566. Знайдзіце геаметрычнае месца пунктаў:

- а) адлегласць якіх ад дадзенага пункта M роўна m , а ад дадзенай плоскасці роўна n ;
- б) для якіх сума квадратаў адлегласцей ад двух дадзеных пунктаў ёсць велічыня пастаянная;
- в) якія з'яўляюцца цэнтрамі сфер з дадзеным радыусам, улічыўшы, што сферы праходзяць праз дадзены пункт A і датыкаюцца да дадзенай плоскасці.

567. З пункта M да сферы можна правесці тры ўзаемна перпендыкулярныя датычныя (рыс. 189). Знайдзіце адлегласць ад пункта M да цэнтра сферы, улічыўшы, што радыус сферы роўны R .

568. Пункт M на сферы з'яўляецца агульным канцом трох узаемна перпендыкулярных хорд, даўжыні якіх роўны 12 см, 15 см і 16 см. Знайдзіце радыус сферы.



Рыс. 189

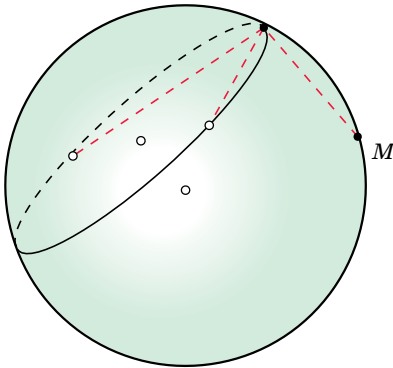


Рис. 190

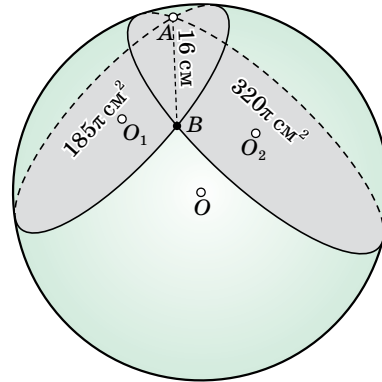


Рис. 191

569. З одного пункта сфери проведзені три взаємно перпендикулярні хорди (рис. 190). Докажіть, що сума квадратів їх довжин єсть величина постійна і рівна п'ятикратному квадрату радіуса сфери.
570. Пункт M на сфері з радіусом 46 см з'являється кінцем трьох взаємно перпендикулярних хорд, довжини яких відносяться як $12 : 15 : 16$. Знайдіть довжину кожної хорди.
571. Два круги, обмежані сеченнями сфери, взаємно перпендикулярні і мають площі 185π см² і 320π см² (рис. 191). Знайдіть радіус сфери, улічуйте, що загальна хорда цих кругів має довжину 16 см.
572. Два круги, обмежані сеченнями сфери, взаємно перпендикулярні. Їх загальна хорда рівна 4 см. Знайдіть радіуси сечення, улічуйте, що вони відносяться як $2 : 3$, а радіус сфери рівний 36 см.
573. Діаметр MN сфери рівний 50 см. Знайдіть довжину лінії на поверхні сфери, улічуйте, що відстані від кожного пункту цієї лінії до пункту M і N відносяться як $3 : 4$ (рис. 192).
574. Відстань між центрами двох сфер рівна 21 см. Знайдіть довжину лінії пересічення цих сфер, улічуйте, що їх радіуси рівні 41 см і 50 см.

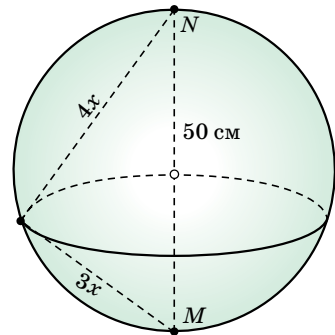


Рис. 192

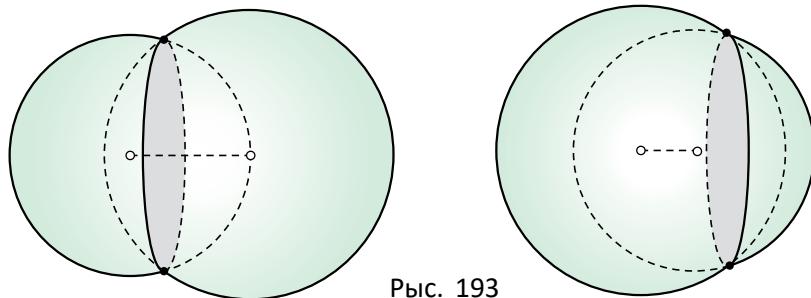


Рис. 193

- 575.** Лінія пересячання двох сфер з радіусами 25 см і 30 см має довжину 48 см (рис. 193). Знайдіть відстань між центрами сфер.
- 576.** Сфера з радіусом 85 см проходить через вершини прямокутного трикутника з катетами 10 см і 24 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника.
- 577.** Сторони трикутника рівні 13 см, 14 см і 15 см (рис. 194). Знайдіть радіус сфери, яка проходить через вершини трикутника, улічуйте, що це центр сфери до площини трикутника на 9 см.
- 578.** Сфера з радіусом 65 см проходить через вершини трапеції, у якій висота рівна 8 см, а основи — 40 см і 48 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трапеції.
- 579.** Сфера дотикається до всіх сторін ромба, діагоналі якого рівні 15 см і 20 см. Знайдіть радіус сфери, улічуйте, що це центр сфери до площини ромба на 8 см.
- 580.** Сфера з радіусом 15 см дотикається до всіх сторін раціональної трапеції з основами 16 см і 36 см (рис. 195). Знайдіть відстань від центра сфери до площини трапеції.

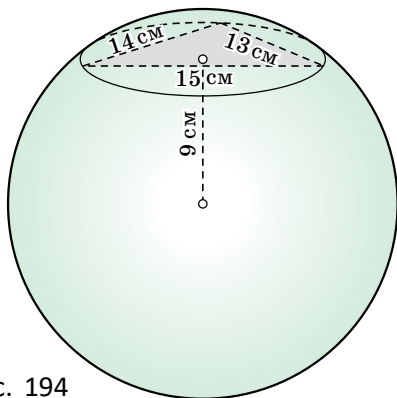


Рис. 194

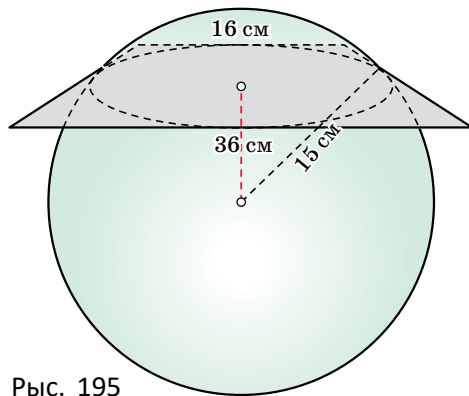


Рис. 195

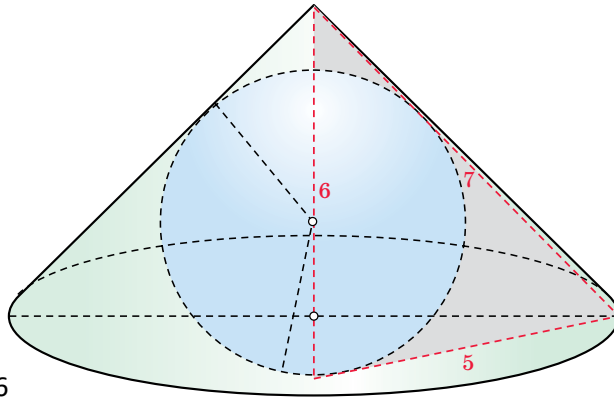


Рис. 196

581. Трохвугольник са старанамі 5, 6 і 7 верціцца вакол сярэдняй стараны (рыс. 196). Знайдзіце паверхню сферы, умежанай у атрыманае цела.

582. Плоскасць перасякае сферу з радыусам 25 см. Знайдзіце, у якой адносіне гэтая плоскасць раздзяляе плошчу сферы, улічыўшы, што плошча круга, абмежаванага сячэннем, роўна 49π см².

583. Плоскасць раздзяліла сферу на часткі, плошчы якіх роўны 100 см² і 300 см². Знайдзіце плошчу сячэння.

584*. Старана асновы правільнай шасцівугольнай піраміды роўна 4 см, вышыня — 3 см. Знайдзіце паверхню сферы, якая датыкаецца да:



- а) усіх кантаў піраміды;
- б) кантаў асновы і працягаў бакавых кантаў піраміды;
- в) плоскасці асновы і бакавых кантаў піраміды;
- г) плоскасці асновы і працягаў бакавых кантаў піраміды.

585. У правільную трохвугольную прызму ўмежана сфера з радыусам R . Знайдзіце радыус сферы, якая датыкаецца да асновы прызмы, дзвюх яе бакавых граняў і ўмежанай сферы.

586*. Вакол сферы апісаны прамы паралелепіпед, у якога дыяганалі асновы роўны a і b (рыс. 197). Знайдзіце поўную паверхню гэтага паралелепіпеда і радыус сферы.



587. Вакол сферы з радыусам R апісана правільная шасцівугольная прызма. Знайдзіце яе поўную паверхню.

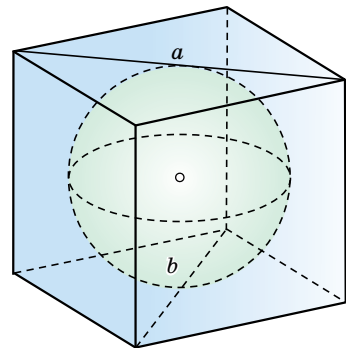


Рис. 197

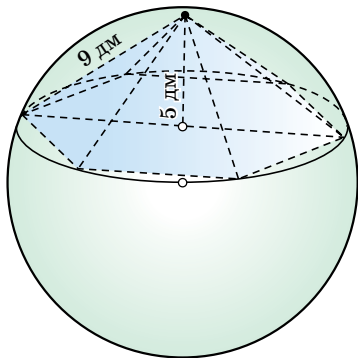


Рис. 198

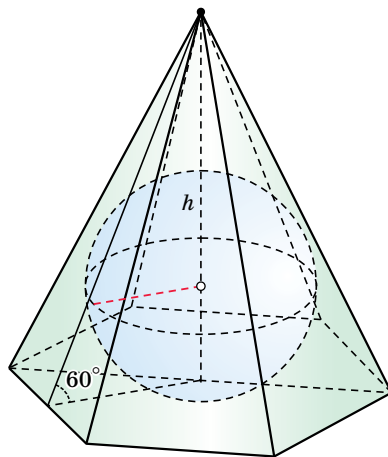


Рис. 199

588. У пірамідзе ўсе бакавыя канты роўны па 9 дм, а яе вышыня роўна 5 дм (рыс. 198). Знайдзіце радыус апісанай сферы.



589. Знайдзіце радыус сферы, умежанай у правільную піраміду, у якой вышыня роўна h , а двухгранны вугал пры аснове роўна 60° (рыс. 199).



590. У сферу з радыусам R умежана правільная шасцівугольная ўсечаная піраміда, у якой плоскасць ніжняй асновы праходзіць праз цэнтр сферы, а бакавы кант складае з плоскасцю асновы вугал 60° . Знайдзіце аб'ём піраміды.



591. Знайдзіце плошчу сферы, апісанай вакол конуса, у якога радыус асновы роўны r , а вышыня роўна h (рыс. 200).



592. Вакол сферы радыуса r апісаны конус з прамым вуглом пры вяршыні. Знайдзіце поўную паверхню гэтага конуса.



593*. Сфера датыкаецца да асновы $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ з кантамі 2. Знайдзіце яе радыус, улічыўшы, што сфера датыкаецца да праменяў AB_1 , BC_1 , CD_1 , DA_1 за пунктамі B_1 , C_1 , D_1 , A_1 .

594. У конус з утваральнікам a і радыусам асновы R умежана сфера (рыс. 201). Знайдзіце радыус акружнасці, па якой сфера датыкаецца да паверхні конуса.

595. Знайдзіце аб'ём конуса, улічыўшы, што радыус яго асновы роўны 6 дм, а радыус умежанай сферы — 3 дм.

596. У сферу ўмежана правільная чатырохвугольная ўсечаная піраміда, асновы якой знаходзяцца па адзін бок ад цэнтра. Радыус сферы

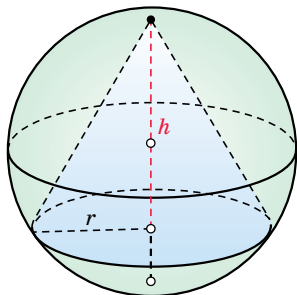


Рис. 200

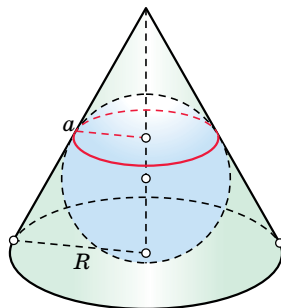


Рис. 201

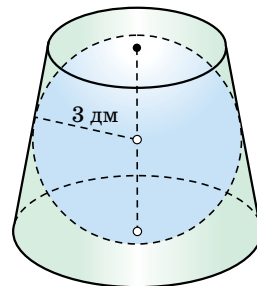


Рис. 202

роўны 25 см, вышыня ўсечанай піраміды роўна 9 см, а плошча яе меншай асновы — 98 см^2 . Знайдзіце аб'ём усечанай піраміды.

- 597.** Усечаны конус, плошчы асноў якога адносяцца як $4 : 9$, апісаны каля сферы з радыусам 3 дм (рыс. 202). Знайдзіце аб'ём усечанага конуса.
- 598.** Паверхня ўсечанага конуса, у які ўмежана сфера, роўна $18\pi \text{ см}^2$. Радыус верхняй асновы роўны 2 см. Знайдзіце плошчу сферы.
- 599.** Вакол сферы апісана правільная ўсечаная чатырохвугольная піраміда. Старана большай асновы роўна a см, а старана меншай асновы — b см. Знайдзіце паверхню і аб'ём усечанай піраміды.
- 600.** Плошча сферы, умежанай у правільную шасцівугольную ўсечаную піраміду, роўна $12\pi \text{ м}^2$, старана меншай асновы ўсечанай піраміды роўна 1 м. Знайдзіце аб'ём адпаведнай поўнай піраміды.
- 601.** Ёсць сфера з радыусам $5\frac{1}{4}$ дм. Знайдзіце аб'ём найменшага конуса, які можа змясціць гэтую сферу, улічваючы, што радыус асновы конуса роўны 7 дм.
- 602.** Старана асновы апісанай каля сферы правільнай прызмы роўна a . Знайдзіце яе аб'ём, улічваючы, што прызма:
- а) трохвугольная; б) шасцівугольная.
- 603.** Вышыня правільнай піраміды роўна h , адносіна апафемы піраміды да апафемы яе асновы роўна n . Знайдзіце радыус умежанай у піраміду сферы.
- 604.** Знайдзіце радыус сферы, умежанай у піраміду, асновай якой служыць ромб з дыяганалямі 6 і 8; вышыня піраміды праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей асновы і роўна адзінцы.

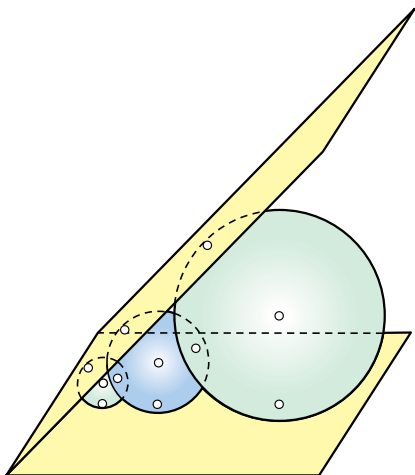


Рис. 203

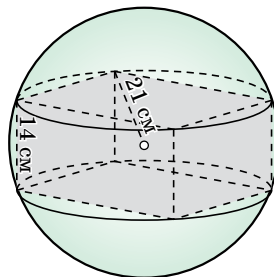


Рис. 204

- 605.** У пірамідзе два канты асновы роўны пяці, трэці кант — шасці, вышыня піраміды праходзіць праз сярэдзіну большага канта асновы і роўна адзінцы. Знайдзіце радыус сферы, умежанай у піраміду.
- 606.** Сфера радыуса r датыкаецца да граняў двухграннага вугла ў 60° (рыс. 203). Знайдзіце радыусы найбольшай і найменшай сфер, якія датыкаюцца да граняў вугла і да дадзенай сферы.
- 607.** Дзве сферы з радыусам r датыкаюцца адна да адной і да граняў двухграннага вугла ў 60° . Знайдзіце радыус сферы, якая датыкаецца да граняў вугла і да абедзвюх сфер.
- 608.** Дыяганалі граняў прамавугольнага паралелепіпеда роўны a , b і c . Знайдзіце радыус апісанай каля паралелепіпеда сферы.
- 609.** Адно вымярэнне прамавугольнага паралелепіпеда большае на 11 см і 15 см за два іншыя. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, улічывшы, што радыус апісанай сферы роўны 10,5 см.
- 610.** У сферу з радыусам 21 см умежана правільная чатырохвугольная прызма вышынёй 14 см (рыс. 204). Знайдзіце плошчу поўнай паверхні прызмы.
- 611.** Кант асновы правільнай трохвугольнай прызмы роўны 12 см. Знайдзіце радыус апісанай каля яе сферы, улічывшы, што вышыня прызмы роўна 2 см.
- 612.** У сферу з радыусам 14 см умежана правільная трохвугольная прызма, вышыня якой на 17 см большая за кант асновы. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы.

613. Одна з граней прямої призми — раціональна трикутник з основою 6 см і висотою 1 см. Знайдіть радіус описаної сфери, врахувавши, що висота призми раціональна 24 см.



614. Висота правильної шестигранної призми раціональна 30 см, а сторона основи — 8 см. Знайдіть радіус описаної сфери.



615. У сферу з радіусом R вписана правильна шестигранна призма. Радіуси, проведенні у вершину основи, утворюють з базовою гранню кут 45° . Знайдіть об'єм призми.



616. Усі ребра чотиригранної піраміди рівні a . Знайдіть площу описаної для піраміди сфери.



617. Усі ребра канта піраміди рівні a , а висота — H (рис. 205). Знайдіть радіус описаної для піраміди сфери.



618. Усі ребра канта піраміди рівні a , а висота — H . Визначте, при якій умові центр описаної для піраміди сфери знаходиться:
а) всередині піраміди;
б) на поверхні піраміди;
в) поза пірамідою.



619. Усі плоскі кути при вершині піраміди прямі, ребра канта рівні 4 см, 28 см і 46 см. Знайдіть радіус описаної для піраміди сфери.



620. Ребра канта правильної чотиригранної піраміди рівні 18 см, а сторона основи — 16 см. Знайдіть радіус описаної для піраміди сфери.



621. Висота правильної трикутної піраміди раціональна 15 см, ребра канта відносяться до ребра основи як 2 : 3. Знайдіть радіус описаної для піраміди сфери.



622. Висота правильної чотиригранної піраміди до центрів описаної сфери розділяється у відношенні 2 : 1, сторона основи раціональна a (рис. 206). Знайдіть:



- радіус описаної для піраміди сфери;
- площу сечення піраміди, яке проходить через ребро основи і центр сфери.

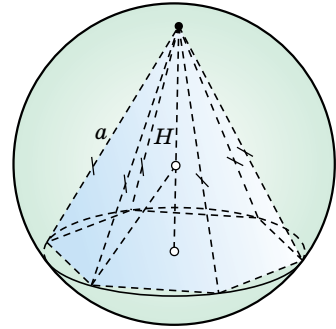


Рис. 205

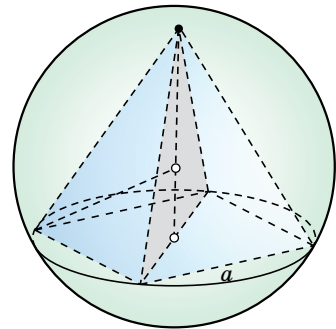


Рис. 206

623. Вышыня правільнай чатырохвугольнай піраміды роўна канту асновы. Знайдзіце, у якой адносіне цэнтр апісанай сферы раздзяляе вышыню піраміды.



624. Бакавы кант правільнай трохвугольнай усечанай піраміды роўны 50, а канты асноў — $33\sqrt{3}$ і $63\sqrt{3}$. Знайдзіце радыус сферы, апісанай каля гэтай піраміды.



625. У правільнай чатырохвугольнай усечанай пірамідзе канты асноў роўны a і b , а двухгранны вугал пры аснове — α (рыс. 207). Знайдзіце радыус сферы, апісанай каля гэтай піраміды, улічыўшы, што:



а) $a = 6$, $b = 14$, $\alpha = 60^\circ$;

б) $a = 2$, $b = 14$, $\alpha = 45^\circ$;

в) $a = 2$, $b = 14$, $\alpha = 30^\circ$.

626. У правільнай шасцівугольнай усечанай пірамідзе канты асноў роўны 16 і 25, бакавы кант — 15. Знайдзіце радыус сферы, апісанай каля гэтай піраміды.



627. У аснове ўсечанай піраміды ляжыць прамавугольны трохвугольнік з катэтамі 3 і 4, гіпатэнуза другой асновы роўна 4. Знайдзіце радыус сферы, апісанай каля гэтай піраміды, улічыўшы, што вышыня піраміды роўна 3.



628. Плошча восевага сячэння цыліндра роўна 240 см^2 , а яго поўная паверхня — $290\pi \text{ см}^2$. Знайдзіце радыус апісанай каля яго сферы.



629. Плошча асновы цыліндра роўна яго бакавой паверхні. Знайдзіце поўную паверхню цыліндра, улічыўшы, што апісаная каля яго сфера мае радыус R .



630. Сфера з радыусам 29 см апісана каля цыліндра з бакавой паверхняй $1680\pi \text{ см}^2$. Знайдзіце аб'ём цыліндра.



631. Радыусы асноў усечанага конуса роўны 7 см і 25 см, а ўтваральнік — 30 см (рыс. 208). Знайдзіце радыус апісанай каля яго сферы.

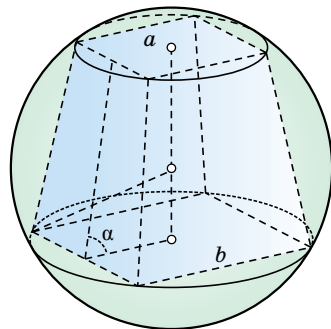


Рис. 207

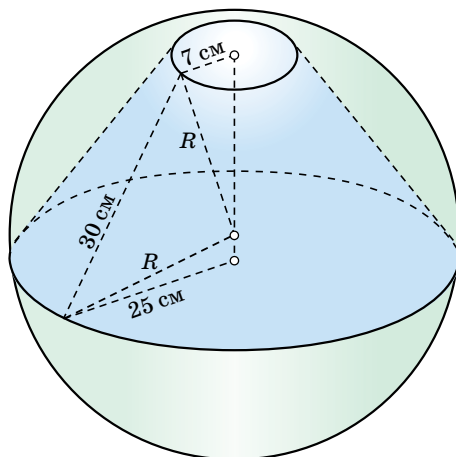
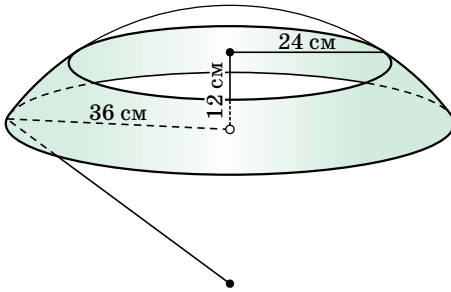
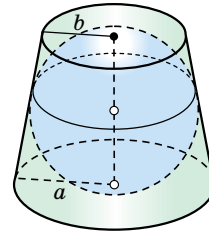


Рис. 208



Рыс. 209



Рыс. 210

- 632.** Радыусы асноў сферычнага пояса роўны 36 см і 24 см, а яго вышыня — 12 см (рыс. 209). Знайдзіце паверхню пояса.
- 633.** У правільны тэтраэдр умежана сфера. Плоскасць, што праходзіць праз кант, раздзяляе аб'ём тэтраэдра ў адносіне $m : n$. Знайдзіце, у якой адносіне гэтая плоскасць раздзяляе плошчу сферы, улічыўшы, што:
- $(m; n) = (1; 3)$;
 - $(m; n) = (1; 5)$.
- 634.** Пасудзіна складаецца з цыліндра і двух сферычных купалаў. Агульная даўжыня пасудзіны 4 м, даўжыня цыліндрычнай часткі — 3,5 м, яе дыяметр — 1,2 м. З дакладнасцю да квадратнага дэцыметра знайдзіце плошчу паверхні пасудзіны.
- 635.** У конус, восевым сячэннем якога з'яўляецца роўнастаронні трохвугольнік, умежана сфера. Знайдзіце, у якой адносіне сфера раздзяляецца лініяй дотыку.
- 636.** Вышыня конуса, восевым сячэннем якога з'яўляецца роўнастаронні трохвугольнік, з'яўляецца дыяметрам сферы. Знайдзіце адносіну, у якой лінія перасячэння раздзяляе сферу.
- 637.** Ва ўсечаны конус, радыусы асноў якога адносяцца як $a : b$, умежана сфера (рыс. 210). Знайдзіце, у якой адносіне сфера раздзяляецца лініяй дотыку.
- 638.** У правільны тэтраэдр умежана сфера. Плоскасць, паралельная аснове, раздзяляе аб'ём тэтраэдра ў адносіне 64 : 61. Знайдзіце, у якой адносіне гэтая плоскасць раздзяляе сферу.
- 639.** У чатырохвугольную піраміду, усе канты якой аднолькавыя, умежана сфера. Плоскасць, паралельная аснове, раздзяляе аб'ём піраміды ў адносіне 64 : 61. Знайдзіце, у якой адносіне гэтая плоскасць раздзяляе сферу.

640. Сферычны пояс зададзены радыусамі сваіх асноў і вышынёй, якія адпаведна роўны 63 см, 39 см і 36 см. Знайдзіце яго паверхню.

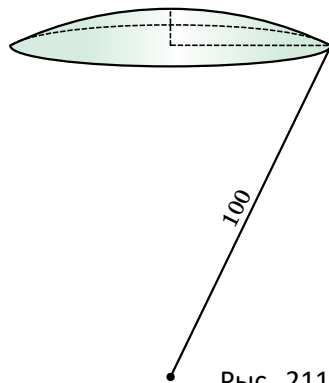
641. Паверхня сферычнага купала складае $\frac{1}{20}$ паверхні сферы (рыс. 211). Знайдзіце вышыню купала, улічыўшы, што радыус сферы роўны 100.

642. Аснова конуса, восевае сячэнне якога ёсць роўнастаронні трохвугольнік, з'яўляецца вялікай акружнасцю сферы. Знайдзіце адносіну, у якой лінія перасячэння раздзяляе сферу.

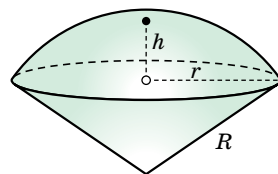
643. Сфера высыкае з плоскасці круг, плошча якога адносіцца да плошчы паверхні атрыманага сферычнага купала як $n : m$. Знайдзіце велічыню дугі восевага сячэння купала.

644. Сферычны сектар ёсць паверхня, якая ўтвараецца пры вярчэнні дугі акружнасці вакол прамой, што праходзіць праз цэнтр акружнасці, ляжыць у яе плоскасці і не мае з дугой агульных унутраных пунктаў. Адрозніваюць два віды сферычных сектараў, у залежнасці ад таго, належаць ці не належаць восі вярчэння адзін з крайніх радыусаў дугі. Адзін з гэтых сектараў абмежаваны купалам і канічнай паверхняй (рыс. 212), другі — сферычным поясам і дзвюма канічнымі паверхнямі (рыс. 213). Вышыня купала для першага сектара або перпендыкуляр, апущаны з плоскасці асновы адной канічнай паверхні на плоскасць асновы другой паверхні, для другога купала называецца вышынёй сферычнага сектара. Знайдзіце цэнтральны вугал у восевым сячэнні сферычнага сектара, улічыўшы, што яго купал роўнавялікі яго канічнай паверхні (гл. рыс. 212).

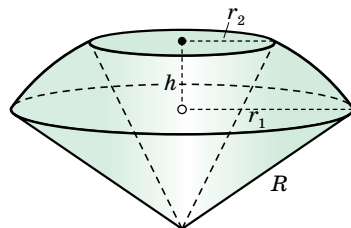
645. Плошча паверхні сферычнага купала роўнавялікая бакавой паверхні конуса, аснова якога супадае з асновай купала, а вяршыня ляжыць



Рыс. 211



Рыс. 212



Рыс. 213

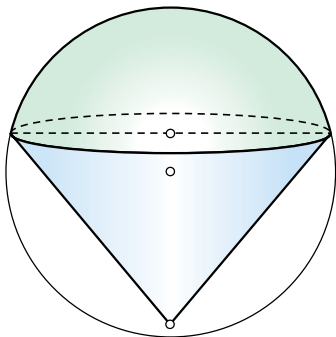


Рис. 214

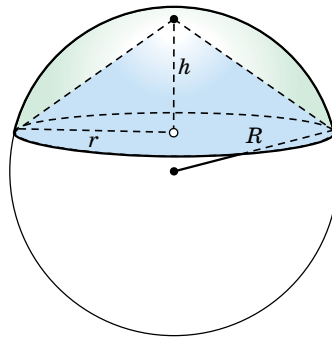


Рис. 215

на сфери (рис. 214). Знайдзіце вугал паміж утваральнікам конуса і яго воссю.

- 646.** Паверхня сферычнага купала адносіцца да плошчы круга, абмежаванага яго асновай, як 4 : 3. Знайдзіце, якую частку радыуса складае вышыня купала.
- 647.** Паверхня сферычнага купала разам з плошчай круга, абмежаванага яго асновай, роўна S . Знайдзіце вышыню купала, улічыўшы, што радыус сферы роўны R .
- 648.** Кругавы сегмент з дугой 120° і плошчай Q верціцца вакол сваёй вышыні. Знайдзіце поўную паверхню атрыманага цела.
- 649.** Сфера з радыусам R перасякае сферу з радыусам r і праходзіць праз яе цэнтр. Знайдзіце частку паверхні першай сферы, што знаходзіцца ўнутры другой.
- 650.** Дакажыце, што бакавая паверхня конуса, умежанага ў сферычны купал, ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж плошчай круга, абмежаванага яго асновай, і паверхняй купала (рис. 215).
- 651.** Праз пункт, узяты на сферы, праведзены дзве плоскасці: датычная і тая, што раздзяляе сферу на часткі, плошча адной з якіх ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж плошчай усёй сферы і плошчай астатняй часткі. Знайдзіце вугал паміж імі.
- 652.** Вышыня цыліндра і дыяметр яго асновы роўныя паміж сабой і роўны 16 см. Цэнтр восевага сячэння цыліндра з'яўляецца цэнтрам сферы з радыусам 10 см. Знайдзіце плошчу той часткі сферы, што знаходзіцца па-за цыліндрам.
- 653.** Знайдзіце плошчу сферычнага пояса, улічыўшы, што радыусы сферы і асноў пояса адпаведна роўны 25 см, 20 см і 7 см.
- 654.** Сфера з радыусам R датыкаецца да ўсіх бакавых кантаў правільнай n -вугольнай прызмы і да плоскасцей асноў. Знайдзіце плошчу той

часткі сфери, што знаходзіцца ўнутры прызмы.

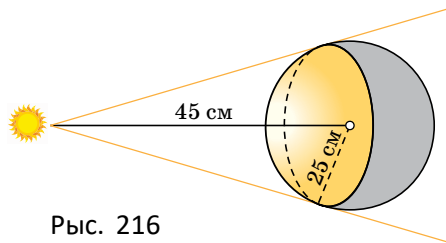
- 655.** Цэнтр сферы з'яўляецца цэнтрам прамавугольнага паралелепіпеда з вымярэннямі 30 см, 48 см і 50 см. Знайдзіце плошчу той часткі паралелепіпеда, што знаходзіцца ўнутры сферы, улічыўшы, што сфера датыкаецца да дзвюх граняў паралелепіпеда і перасякае астатнія грані.

- 656.** У сферу радыуса r умежаны конус такой вышыні, што яго бакавая паверхня роўнавялікая прылеглай да яе паверхні купала. Знайдзіце вышыню конуса.

- 657.** Радыус сферы роўны 25 см. На адлегласці 45 см ад яе цэнтра размешчана кропкавая крыніца святла (рыс. 216). Вызначце, якая частка сферы асветленая.

- 658.** Цёмная сфера з цэнтрам M_2 і радыусам r асвятляецца сферай з радыусам R і адкідае конус ценю, вяршыня якога знаходзіцца ў пункце H . Адлегласць M_1M_2 паміж цэнтрамі сфер роўна d . Знайдзіце:

- адлегласць M_1H ;
- радыус EF сячэння, праведзенага перпендыкулярна да восі конуса ценю на адлегласці M_2F , роўнай b , ад цэнтра M_2 цёмнай сферы;
- радыус FQ той акружнасці, якая служыць мяжой паўценю для ўзятага сячэння.



Рыс. 216

6. Шар

- 659.** Аб'ём шара роўны V . Знайдзіце яго паверхню.
- 660.** Аб'ём сценак лага шара роўны 876π дм³, таўшчыня сценак 8 дм. Знайдзіце радыусы яго паверхняў — знешняй і ўнутранай.
- 661.** Раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік верціцца вакол восі, паралельнай катэту і адлеглай ад яго на роўны яму адрэзак. Дакажыце, што атрыманае цела роўнавялікае шару, радыус якога роўны катэту.
- 662.** Дакажыце, што можна апісаць шар каля:
- прамавугольнага паралелепіпеда;
 - правільнай прызмы;
 - прамой трохвугольнай прызмы.

663. Металічны шар пераплаўлены ў n роўных паміж сабой меншых шароў. Як змянілася пры гэтым агульная плошча паверхні?

664. Каля шара апісаны конус, вышыня якога ўдвая большая за дыяметр шара. Знайдзіце адносіну паверхняў і адносіну аб'ёмаў гэтых цел.

665. Поўная паверхня прамавугольнага паралелепіпеда роўна 1152 см^2 , а яго вымярэнні адносяцца як $2 : 3 : 6$. Знайдзіце аб'ём апісанага каля яго шара.

666. З шара, складзенага з жалезнага і меднага паўшар'яў, маса якога роўна M кг, выточваецца куб, дыяганаль якога роўна дыяметру шара. Знайдзіце масу пілавіння.

667. У полі конус з радыусам асновы R і вышынёй h , які замацаваны вертыкальна вяршыняй уніз, да вышыні a наліта вада. Вывядзіце, на колькі падыецца ўзровень вады, калі ў конус апусціць металічны шар з радыусам r , які цалкам пакрываецца вадой.

668. У правільнай чатырохвугольнай прызме бакавы кант і кант асновы роўны 17 см і 6 см адпаведна (рыс. 217). Знайдзіце аб'ём шара, апісанага каля гэтай прызмы.

669. Поўная паверхня правільнай чатырохвугольнай прызмы роўна 1120 см^2 . Знайдзіце аб'ём шара, апісанага каля гэтай прызмы, улічыўшы, што яе бакавы кант роўны 23 см .

670. У правільнай чатырохвугольнай прызме дыяганаль бакавой грані і дыяганаль асновы роўны 7 см і 8 см адпаведна. Знайдзіце аб'ём шара, апісанага каля гэтай прызмы.

671. Каля шара апісана правільная n -вугольная піраміда, вышыня якой роўна канту асновы. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў піраміды і гэтага шара.

672. Шар апісаны каля правільнай n -вугольнай піраміды, вышыня якой роўна канту асновы. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў піраміды і гэтага шара.

673. Шар умежаны ў правільную трохвугольную піраміду, якая сама ўмежана ў цыліндр (рыс. 218 на с. 98). Знайдзіце плоскі вугал пры вяршыні піраміды, улічыўшы, што аб'ём шара адносіцца да аб'ёму цыліндра як $1 : 24$.

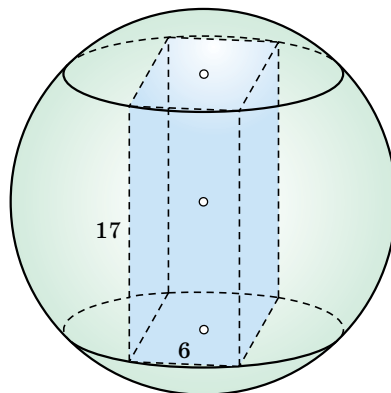
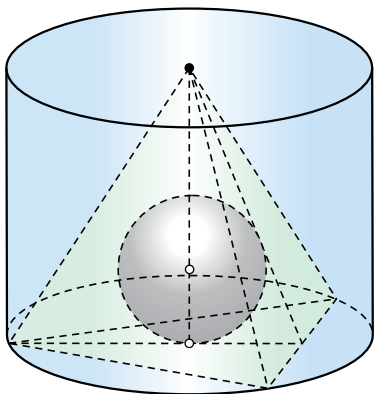
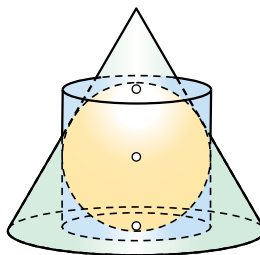


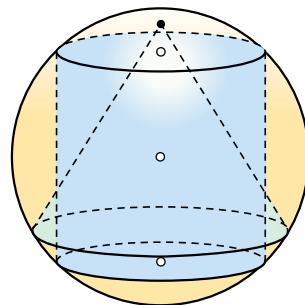
Рис. 217



Рыс. 218



Рыс. 219



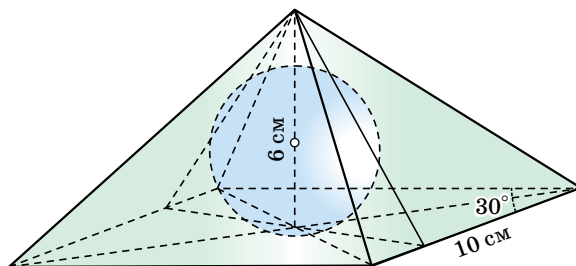
Рыс. 220

674. Дакажыце, што калі вакол шара апісаны або ў яго ўмежаны роўнастаронні цыліндр і роўнастаронні конус, то ў абодвух выпадках поўная паверхня цыліндра ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж поўнай паверхняй конуса і паверхняй шара, а аб'ём цыліндра ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж аб'ёмам конуса і аб'ёмам шара (рыс. 219, 220).

675. Вакол шара з радыусам R апісаны конус, вышыня якога ўдвая большая за дыяметр шара. Дакажыце, што поўная паверхня гэтага конуса ўдвая большая за паверхню шара, а аб'ём конуса ўдвая большы за аб'ём шара.

676. У шар умежаны конус з вяршыняй M . Пры гэтым вышыня MC конуса раздзяляецца цэнтрам O шара так, што $MC : MO = MO : OC$. Знайдзіце адносіну аб'ёму шара да аб'ёму конуса.

677. Асновай піраміды служыць ромб з вуглом 30° і стараной 10 см. Вяршыня піраміды праектуецца ў пункт перасячэння дыяганалей асновы. Вышыня піраміды роўна 6 см (рыс. 221). Знайдзіце аб'ём шара, умежанага ў гэтую піраміду.



Рыс. 221

678. Разгорткай бакавой паверхні конуса з'яўляецца сектар з вуглом 216° . Вышыня конуса роўна $10\frac{2}{3}$ м. Плоскасць, паралельная аснове, праведзена так, што ў атрыманы ўсечаны конус можна ўмежыць шар. Знайдзіце вышыню ўсечанага конуса.

679. Правільная n -вугольная прызма апісана каля шара. Знайдзіце вугал паміж дыяганаллю бакавой грані і плоскасцю асновы прызмы.

680. Шар умежаны ў чатырохвугольную прызму. Ці можна сцвярджаць, што сумы плошчаў супрацьлеглых бакавых граняў прызмы аднолькавыя?

681. Дыяганаль чатырохвугольніка даўжынёй 24 см з'яўляецца яго восьсю сіметрыі. Дзве стараны чатырохвугольніка маюць даўжыні 13 см і 15 см. У прамую прызму, асновай якой з'яўляецца гэты чатырохвугольнік, можна ўмежыць шар. Знайдзіце поўную паверхню прызмы.

682. Аснова конуса з'яўляецца вялікім кругам шара (рыс. 222). Улічыўшы, што радыус шара роўны R і тое, што па-за шарам знаходзіцца чацвёртая доля бакавой паверхні конуса, знайдзіце поўную паверхню конуса.

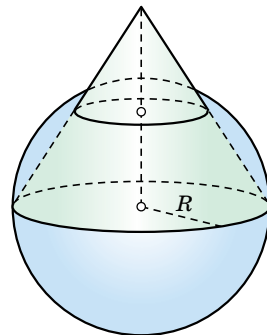
683. Радыус асновы конуса роўны 3 см, вышыня конуса — 4 см. Знайдзіце радыус шара, паверхні якога належаць акружнасць асновы конуса і сярэдзіны ўтваральнікаў.

684. Аснова конуса з'яўляецца вялікім кругам шара. Улічыўшы, што радыус шара роўны R , а паверхня шара раздзяляе кожны ўтваральнік конуса ў адносіне 1 : 2, калі лічыць ад вяршыні, знайдзіце поўную паверхню конуса.

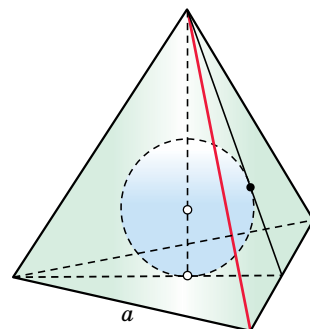
685. Двухгранныя вуглы пры аснове піраміды роўныя паміж сабой. Дакажыце, што ў такую піраміду можна ўмежыць шар і цэнтр гэтага шара знаходзіцца на вышыні піраміды.

686. Цэнтр шара, умежанага ў піраміду, раздзяляе яе вышыню ў адносіне 1 : 2. Знайдзіце двухгранныя вуглы пры аснове піраміды.

687. У правільнай трохвугольнай пірамідзе кант асновы роўны a , цэнтр умежанага шара раздзяляе яе вышыню ў адносіне 3 : 1 (рыс. 223). Знайдзіце бакавы кант піраміды.

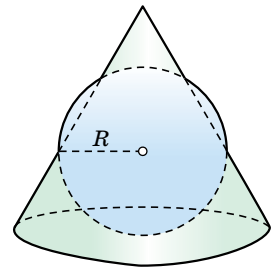


Рыс. 222

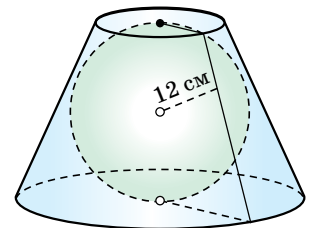


Рыс. 223

- 688.** У трохвугольнай пірамідзе супрацьлеглыя канты папарна роўныя. Дакажыце, што ўмежаны і апісаны шары маюць агульны цэнтр.
- 689.** Дакажыце, што шар, умежаны ў правільную чатырохвугольную піраміду, датыкаецца да бакавой грані ў пункце перасячэння вышынь гэтай грані.
- 690.** У чатырохвугольнай пірамідзе ўсе канты роўны a , вяршыня з'яўляецца цэнтрам шара, які датыкаецца да асновы. Знайдзіце даўжыню лініі, па якой перасякаюцца піраміда і шар.
- 691.** Цэнтр шара супадае з цэнтрам асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды з плоскім вуглом пры вяршыні ў 30° . Знайдзіце даўжыню лініі, па якой перасякаюцца піраміда і шар, улічыўшы, што яго радыус роўны R .
- 692.** Каля шара з радыусам R апісаны конус, у якога тры ўтваральнікі папарна перпендыкулярныя. Знайдзіце поўную паверхню конуса.
- 693.** Восевым сячэннем конуса з'яўляецца роўнастаронні трохвугольнік з вышынёй H . Знайдзіце даўжыню лініі, па якой перасякаюцца гэты конус і шар, для якога вось конуса з'яўляецца дыяметрам.
- 694.** Вышыня конуса з'яўляецца дыяметрам шара, паверхня якога раздзяляе бакавую паверхню конуса папалам. Знайдзіце адносіну аб'ёму конуса да аб'ёму шара.
- 695.** Шар з радыусам R датыкаецца да плоскасці асновы конуса і раздзяляе кожны яго ўтваральнік на тры долі (рыс. 224). Знайдзіце аб'ём конуса.
- 696.** У конус з радыусам асновы 15 см умежаны шар. Знайдзіце яго радыус, улічыўшы, што лінія дотыку мае даўжыню 6л см.
- 697.** Разгорткай бакавой паверхні конуса з'яўляецца сектар з радыусам 15 см і вуглом 216° . Знайдзіце, на якой адлегласці ад вяршыні праведзена плоскасць, улічыўшы, што ў атрыманы ўсечаны конус можна ўмежыць шар.
- 698.** Утваральнік усечанага конуса, у які можна ўмежыць шар, роўны 13 см. Знайдзіце поўную паверхню і аб'ём конуса, улічыўшы, што радыус адной з яго асноў роўны 9 см.
- 699.** Шар з радыусам 12 см умежаны ва ўсечаны конус, радыусы асноў якога адносяцца як $4 : 9$ (рыс. 225). Знайдзіце аб'ём конуса.



Рыс. 224



Рыс. 225

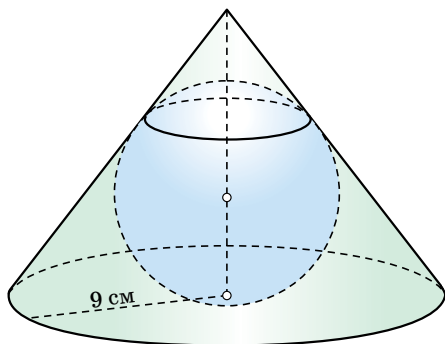


Рис. 226

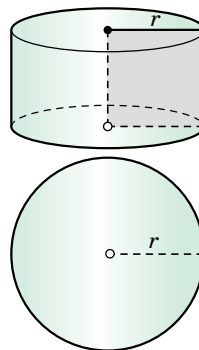
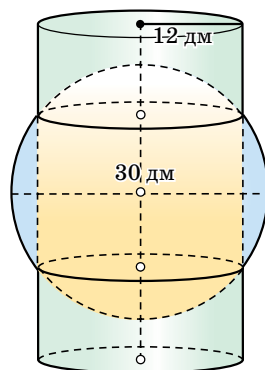


Рис. 227

- 700.** Шар з радыусам 6 см умежаны ва ўсечаны конус з утваральнікам 15 см. Знайдзіце даўжыню лініі, па якой шар датыкаецца да конуса.
- 701.** Шар умежаны ў правільную ўсечаную n -вугольную піраміду, канты асноў якой роўны a і b . Знайдзіце бакавую паверхню гэтай піраміды.
- 702.** Шар умежаны ў конус з радыусам асновы 9 см. Знайдзіце радыус шара, улічыўшы, што плоскасць, якая змяшчае пункты дотыку, раздзяляе конус на часткі, аб'ёмы якіх адносяцца як 8 : 117, калі лічыць ад вяршыні конуса (рыс. 226).
- 703*.** У цыліндры з радыусам асновы R размешчана n роўных шароў так, што кожны з іх датыкаецца да бакавой паверхні цыліндра, яго асновы і двух суседніх шароў. Яшчэ адзін такі шар датыкаецца да кожнага з гэтых n шароў і да плоскасці другой асновы. Знайдзіце аб'ём цыліндра.
- 704*.** У аснове піраміды ляжыць паралелаграм са старанамі 12 і 30, бакавыя канты піраміды роўныя паміж сабой, вышыня піраміды роўна 8. Чатыры роўныя шары размешчаны так, што кожны з іх датыкаецца да плоскасці асновы, плоскасці бакавой грані і двух іншых шароў. Знайдзіце радыус гэтых шароў, улічыўшы, што пункты дотыку знаходзяцца на сярэдніх лініях паралелаграма.
- 705.** Дыяметр шара з'яўляецца восью цыліндра з радыусам асновы 5 см і вышынёй 6 см. Знайдзіце плошчу часткі паверхні цыліндра, якая знаходзіцца ўнутры шара.
- 706.** Дакажыце, што паверхня цела, што ўтвараецца пры вярчэнні квадрата вакол стараны, роўнавялікая паверхні шара, які мае радыусам старану квадрата (рыс. 227).

- 707.** Плоскасць раздзяляе аб'ём шара на часткі, роўныя 252π і 720π . Знайдзіце, як адносяцца вышыні адпаведных шаравых сегментаў.
- 708.** Знайдзіце аб'ём шаравога сегмента, улічыўшы, што плошча яго асновы роўна M , а плошча бакавой паверхні — S .
- 709.** Плоскасць раздзяляе шар на часткі з аб'ёмамі 720π см³ і 252π см³. Знайдзіце плошчу кожнай часткі адпаведнай сферы.
- 710.** У конус з утваральнікам 17 см і радыусам асновы 15 см умежаны шар. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў частак шара, размешчаных па розныя бакі ад плоскасці, у якой знаходзіцца лінія дотыку.
- 711.** Шар з радыусам 65 дм перасечаны дзвюма паралельнымі плоскасцямі, якія знаходзяцца па адзін бок ад цэнтра на адлегласцях 19 дм і 25 дм ад яго. Знайдзіце аб'ём часткі шара паміж імі.
- 712.** Радыус шара роўны 25 дм. Радыус адной з асноў шаравога пласта роўны 15 дм. Бакавая паверхня гэтага пласта роўна 1350π дм². Знайдзіце яго аб'ём.
- 713.** Плоскасць раздзяліла шар на часткі, сферычныя паверхні якіх адносяцца як $m : n$. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў гэтых частак.
- 714.** Пасудзіна ў форме паўсферы запоўнена вадой. Знайдзіце, якая частка вады выльецца, калі ёмістасць нахіліць на:
- а) 30° ; б) 45° ; в) 60° .
- 715.** Дыяметр шара з'яўляецца восью цыліндра з вышынёй 50 см і радыусам асновы 7 см. Знайдзіце аб'ём той часткі шара, што знаходзіцца ўнутры цыліндра.
- 716.** Дыяметр шара, роўны 30 дм, служыць восью цыліндра, у якога радыус асновы роўны 12 дм (рыс. 228). Знайдзіце аб'ём часткі шара, заключанай унутры цыліндра.
- 717.** Шар з радыусам R рассечаны плоскасцю на дзве часткі так, што бакавая паверхня адной з іх у n разоў большая за бакавую паверхню другой. Знайдзіце вышыні атрыманых шаравых сегментаў і адносіну іх аб'ёмаў.
- 718.** У шар з радыусам R умежаны конус такой вышыні, што яго аб'ём роўны аб'ёму прылеглага да яго шаравога сегмента. Знайдзіце вышыню конуса.
- 719.** Па радыусе шара R знайдзіце адлегласць ад яго цэнтра да асновы ўмежанага цыліндра, аб'ём



Рыс. 228

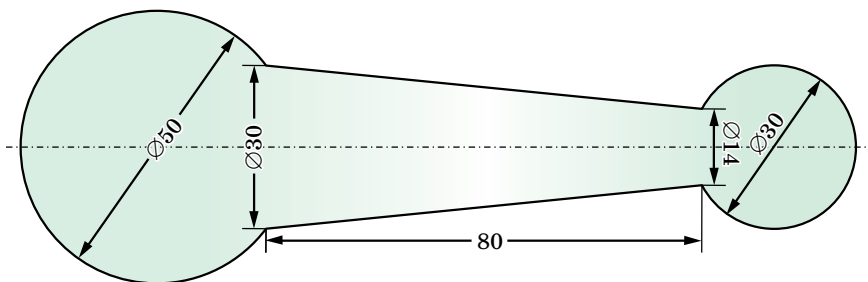


Рис. 229

якога роўны палавіне аб'ёму шаравога пласта, заключанага паміж асновамі цыліндра.

- 720.** На рисунку 229 паказана круглая сталёная дэталі. Знайдзіце яе масу, улічывшы, што памеры ўказаны ў міліметрах, а шчыльнасць сталі роўна $7,8 \text{ г/см}^3$.
- 721.** Шар з радыусам 5 см і куб з кантамі 8 см маюць агульны цэнтр. Знайдзіце аб'ём і плошчу паверхні той часткі куба, што знаходзіцца ўнутры шара.
- 722.** У сектары $OACB$ з цэнтрам O і дугой ACB у 90° праведзена хорда AB (рис. 230). Дакажыце, што калі фігуру вярцець вакол аднаго з бакавых радыусаў, то трохвугольнік AOB і сегмент ACB апішуць роўныя аб'ёмы.
- 723.** Дакажыце, што калі ў шаравога сектара плошча восевага сячэння роўна трэцяй долі плошчы вялікага круга, то аб'ём гэтага сектара роўны чацвёртай долі аб'ёму шара.
- 724.** $ACMDB$ — чвэрць акружнасці радыуса R . Дугі AC і BD роўныя адна адной, а дуга CMD змяшчае 60° . Знайдзіце паверхню і аб'ём цела, утворанага пры вярчэнні сегмента CMD вакол радыуса OB (або OA).
- 725.** Кругавы сегмент верціцца вакол паралельнага хордзе дыяметра. Дакажыце, што атрыманы аб'ём роўны аб'ёму шара з дыяметрам, роўным хордзе сегмента.

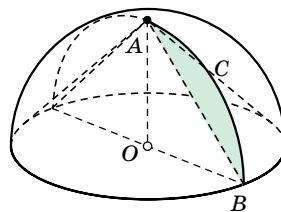
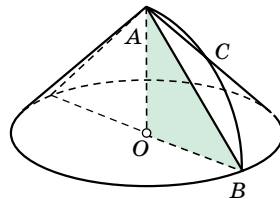
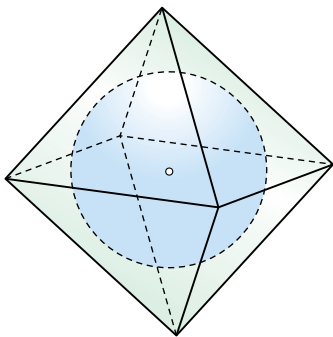


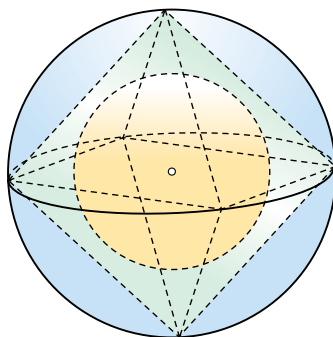
Рис. 230

7. Правільныя мнагаграннікі

- 726.** Кант правільнага тэтраэдра роўны a дм. Знайдзіце паверхню шара, умежанага ў гэты тэтраэдр.
- 727.** Знайдзіце паверхню шара, умежанага ў:
- куб, плошча паверхні якога роўна S ;
 - правільны тэтраэдр, плошча паверхні якога роўна S ;
 - правільны актаэдр, у якога сячэнне з большай плошчай мае плошчу S (рыс. 231);
 - цыліндр, квадратнае восевае сячэнне якога мае плошчу S ;
 - конус, восевым сячэннем якога з'яўляецца роўнастаронні трохвугольнік з плошчай S .



Рыс. 231



Рыс. 232

- 728.** Знайдзіце адносіну паверхняў двух шароў, з якіх адзін апісаны, а другі ўмежаны ў:
- куб;
 - правільны тэтраэдр;
 - правільны актаэдр (рыс. 232);
 - цыліндр з квадратным восевым сячэннем;
 - конус, восевым сячэннем якога з'яўляецца роўнастаронні трохвугольнік;
 - правільную n -вугольную піраміду з кантам асновы a і вышынёй H .
- 729.** Знайдзіце паверхню шара, які раздзяляе кожны кант куба, роўны a , на тры долі.
- 730.** Адзін шар умежаны ў куб, другі датыкаецца да трох граняў куба і да першага шара (рыс. 233). Знайдзіце адносіну паверхняў гэтых шароў.

731. Адзін шар умежаны ў правільны тэтраэдр, другі датыкаецца да трох граняў тэтраэдра і да першага шара. Знайдзіце адносіну паверхняў гэтых шараў.

732. Цэнтр сферы з'яўляецца цэнтрам правільнага тэтраэдра з кантамі 12 см. Знайдзіце плошчу той часткі сферы, што знаходзіцца ўнутры тэтраэдра, улічыўшы, што яе радыус роўны 3 см.

733. Знайдзіце адносіну аб'ёму шара да аб'ёму ўмежанага ў яго:

- а) куба;
- б) правільнага актаэдра;
- в) правільнага тэтраэдра.

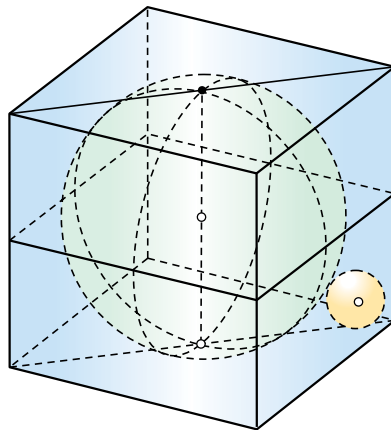
734. Знайдзіце адносіну аб'ёму шара да аб'ёму апісанага каля яго:

- а) куба;
- б) правільнага актаэдра;
- в) правільнага тэтраэдра.

735. Знайдзіце плошчу паверхні правільнага тэтраэдра, улічыўшы, што радыусы апісанай каля яго і ўмежанай у яго сфер роўны R і r адпаведна.

736. У правільны актаэдр умежаны шар з радыусам R . На адной з граняў узяты пункт M . Знайдзіце суму адлегласцей ад гэтага пункта да ўсіх граняў актаэдра.

737. У правільны дадэкаэдр умежаны шар з радыусам R . На адной з граняў узяты пункт M . Знайдзіце суму адлегласцей ад гэтага пункта да плоскасцей усіх граняў дадэкаэдра.



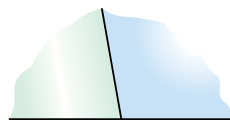
Рыс. 233

ПАЎТАРЭННЕ КУРСА ГЕАМЕТРЫІ

1. Геаметрычныя фігуры і іх уласцівасці

738. Знайдзіце сумежныя вуглы, улічыўшы, што:

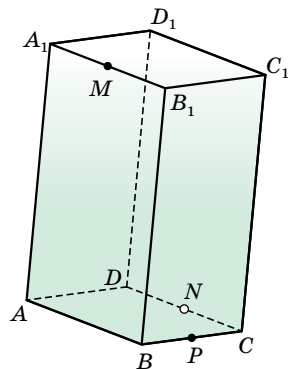
- а) адзін з іх на 46° большы за другі;
- б) адзін з іх у тры разы меншы за другі;
- в) адзін з іх адносіцца да другога як $5 : 13$;
- г) адзін з іх складае $2\frac{1}{3}$ другога;
- д) адзін з іх на 20% меншы за другі;
- е) адзін з іх складае 80% другога (рыс. 234);
- ж) $\frac{5}{12}$ аднаго з іх роўны 30° ;
- з) $\frac{3}{8}$ аднаго з іх роўны 25% другога.



Рыс. 234

739. Знайдзіце вуглы трохвугольніка, улічыўшы, што адзін з іх роўны 54° , а другі:

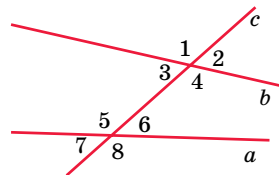
- а) на 22° большы за трэці;
- б) у шэсць разоў большы за трэці;
- в) адносіцца да трэцяга як $5 : 6$;
- г) складае $\frac{3}{4}$ трэцяга;
- д) складае 75% трэцяга;
- е) складае 350% трэцяга.



Рыс. 235

740. Цела на рысунку 235 — паралелепіпед. Пункты M , N і P — сярэдзіны кантаў. Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых:

- а) BN і C_1M ;
- б) B_1D_1 і NP ;
- в) A_1N і CM ;
- г) PM і A_1N .

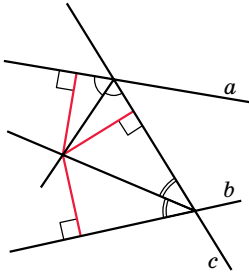


Рыс. 236

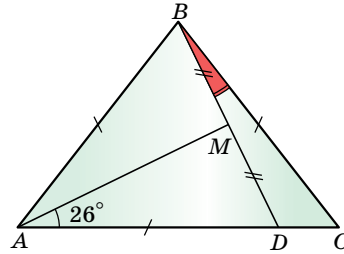
741. Устаноўце, ці будуць прамыя a і b паралельныя, улічыўшы, што ў абазначэннях рысунка 236:

- а) $\angle 4 = 52^\circ$ і $\angle 5 = 128^\circ$;
- б) $\angle 2 = 132^\circ$ і $\angle 6 = 132^\circ$;
- в) $\angle 3 = 57^\circ$ і $\angle 5 = 53^\circ$;
- г) $\angle 3 = 57^\circ$ і $\angle 8 = 113^\circ$;
- д) $\angle 2 = 142^\circ$ і $\angle 5 = 38^\circ$;
- е) $\angle 1 = 75^\circ$ і $\angle 7 = 75^\circ$;
- ж) $\angle 4 = 163^\circ$ і $\angle 6 = 154^\circ$;
- з) $\angle 4 = 115^\circ$ і $\angle 8 = 65^\circ$.

742. Адзін з унутраных аднабаковых вуглоў, утвораных пры перасячэнні прамых AC і BD плоскасці трэцяй, роўны 54° , а другі — у $2\frac{1}{3}$ раза большы за яго. Дакажыце, што прамыя AC і BD паралельныя.

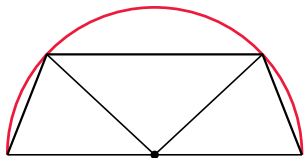


Рыс. 237

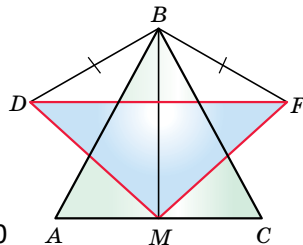


Рыс. 238

743. Прямые a и b пересечены прямой c (рис. 237). Докажите, что биссектрисы углов, образованных c с a и b , пересекаются в точке, которая равноудалена от прямых a , b и c .
744. Угол A треугольника ABC равен 54° , внешний угол при вершине C — 144° . Найдите угол B и выделите его в треугольнике.
745. Внешний угол при вершине A треугольника ABC вдвое больше, чем его угол B . Найдите сторону AB , учитывая, что сторона AC равна 5 см.
746. Биссектриса AD треугольника ABC разделила сторону BC . Найдите угол BAD , учитывая, что угол C равен 36° .
747. Точка D на основании равнобедренного треугольника ABC выбрана так, что $AD = AB$. Точка M — середина отрезка BD (рис. 238). Найдите угол CBD , учитывая, что угол MAC равен 26° .
748. Найдите углы треугольника с меньшим внешним углом, равным 80° , учитывая, что:
- а) один из его углов на 30° больше, чем другой;
 - б) один из его углов в три раза больше, чем другой;
 - в) два его угла относятся как 2 : 3.
749. Докажите, что угол, являющийся внешним углом треугольника, к которому вершина угла принадлежит, равен сумме углов, смежных с ним, и одна сторона угла является стороной треугольника, другая находится вне треугольника, а:
- а) величина угла равна сумме величин углов, смежных с ним, и двух других его вершин;
 - б) биссектриса угла делит биссектрису угла треугольника пополам.
750. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, стороны которого образуют арифметическую прогрессию.



Рыс. 239



Рыс. 240

- 751.** Паўакружнасць раздзелена на тры дугі так, што адпаведныя ім хорды адносяцца як $1 : 2 : 1$ (рыс. 239). Знайдзіце велічыні гэтых дуг.
- 752.** Медыяна AD трохвугольніка ABC утварае прамы вугал са стараной BC . Пункт F на прамой AC выбраны так, што вугал AFB удвая большы за вугал ACB . Улічыўшы, што $FB = 6$ см, знайдзіце даўжыню адрэзка AC .
- 753.** Вышыня AD трохвугольніка ABC раздзяліла папалам старану BC . Дакажыце, што бісектрыса знешняга вугла пры вершыні A паралельная старане BC .
- 754.** Пасярэдні перпендыкуляр MB да стараны AC трохвугольніка ABC перасякае прамой DF так, што адрэзкі BD і BF аказаліся роўнымі (рыс. 240). Дакажыце, што трохвугольнік MDF раўнабедраны.
- 755.** Стораны AB і A_1B_1 , а таксама стораны AC і A_1C_1 трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя. Разам з гэтым у іх роўныя і вуглы BAC і $B_1A_1C_1$. Бісектрысы BM і CF перасякаюцца ў пункце D , а бісектрысы B_1M_1 і C_1F_1 — у пункце D_1 (рыс. 241). Дакажыце, што трохвугольнікі DBC і $D_1B_1C_1$ роўныя.
- 756.** Стораны AB і A_1B_1 , а таксама стораны AC і A_1C_1 трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя. Разам з гэтым у іх роўныя і вуглы BAC і $B_1A_1C_1$. Бісектрыса CF і вышыня BK перасякаюцца ў пункце D , а бісектрыса C_1F_1 і вышыня B_1K_1 — у пункце D_1 (рыс. 242). Дакажыце, што трохвугольнікі DBF і $D_1B_1F_1$ роўныя.
- 757.** Прамая l датыкаецца да акружнасці з дыяметрам AB у пункце C . Адлегласці ад пунктаў A і B да прамой l роўны a і b адпаведна (рыс. 243). Знайдзіце адлегласці ад пункта C да пунктаў A і B .
- 758.** радыус акружнасці, умежанай у прамавугольны трохвугольнік, роўны паўрознасці яго катэтаў. Знайдзіце вострыя вуглы трохвугольніка.
- 759.** Дакажыце, што вышыня, праведзеная да гіпатэнузы прамавугольнага трохвугольніка, роўна суме радыусаў акружнасцей, што

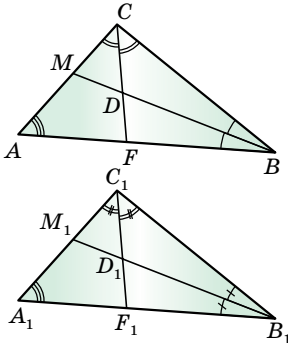


Рис. 241

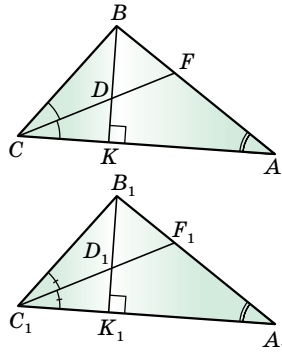


Рис. 242

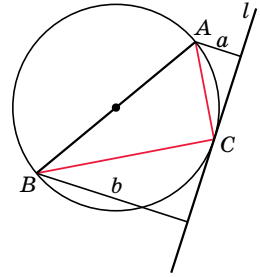


Рис. 243

ўмежаны ў зыходны трохвугольнік і ў дзве ўтвораныя трохвугольныя часткі.

- 760.** Знайдзіце стораны прамавугольнага трохвугольніка, у якім бісектрыса вострага вугла раздзяляе супрацьлеглы катэт на адрэзкі даўжынямі m і n ($m > n$).
- 761.** Знайдзіце стораны прамавугольнага трохвугольніка, улічыўшы, што перпендыкуляр, праведзены да гіпатэнузы з сярэдзіны катэта, роўны 6 см, а сярэдзіна гіпатэнузы адлеглая ад гэтага катэта на 7,5 см.
- 762.** У чатырохвугольніку $ABCD$ вуглы A , B і C роўны 90° , 60° і 150° адпаведна, а стораны BC і AD — $6\sqrt{3}$ і 6 адпаведна. Знайдзіце даўжыні дзвюх іншых старон.
- 763.** Знайдзіце перыметр раўнабедранага трохвугольніка, аснова якога роўна 8, а медыяна да бакавой стараны — $5\sqrt{2}$.
- 764.** Пункты A , B , C , D выбраны на старанах вугла Q так, што $QA = QB = a$, $QC = QD = c$, прамыя AC і BD перасякаюцца ў пункце K (рис. 244). Дакажыце, што $AC = BD$ і $KC = KD$.
- 765.** Прамыя l_1 і l_2 адсякаюць на старанах a і b прамога вугла адрэзкі, роўныя адпаведна a_1 і b_1 , a_2 і b_2 . Дакажыце, што калі $\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} = m = \frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2}$, то прамыя l_1 і l_2 перасякаюцца ў пункце на бісектрысе прамога вугла. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні вугла да пункта перасячэння прамых l_1 і l_2 .
- 766.** Знайдзіце катэты прамавугольнага трохвугольніка з гіпатэнузай c і вострым вуглом 15° .

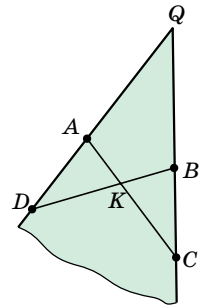
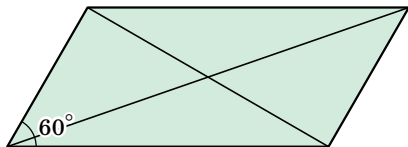
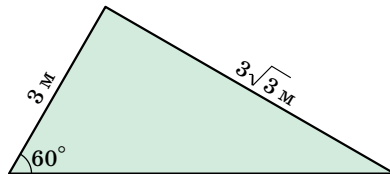


Рис. 244

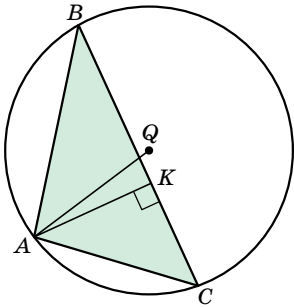


Рыс. 245

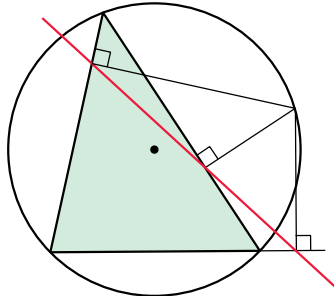


Рыс. 246

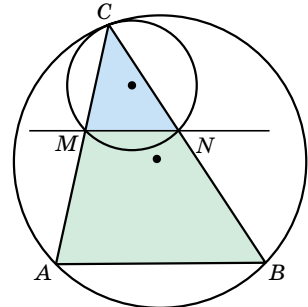
- 767.** Знайдзіце стараны прамавугольнага трохвугольніка з перыметрам 30 і плошчай 30.
- 768.** Знайдзіце гіпатэнузу прамавугольнага трохвугольніка, улічыўшы, што яна большая на 1 см за адзін катэт і на 8 см за другі.
- 769.** Знайдзіце вугал паміж дыяганалю прамавугольнага трохвугольніка з перыметрам 16 і плошчай 12.
- 770.** Пункт M — сярэдзіна стараны AB квадрата $ABCD$. Знайдзіце вугал паміж прамымі MC і BD .
- 771.** У паралелаграме з вуглом 60° квадраты дыяганалей адносяцца як $3 : 7$ (рыс. 245). Знайдзіце адносіну старон паралелаграма.
- 772.** Знайдзіце стараны прамавугольнага трохвугольніка, у якога дыяганаль роўна 25, а вяршыня знаходзіцца ад яе на адлегласці 6,72.
- 773.** Дзве стараны трохвугольніка роўны 5 см і 16 см, а вугал паміж імі — 120° . Знайдзіце трэцюю старану і два іншыя вуглы.
- 774.** Дзве стараны трохвугольніка роўны $3\sqrt{3}$ см і 7 см, а вугал супраць большай з іх — 150° . Знайдзіце трэцюю старану і два іншыя вуглы.
- 775.** Два вуглы трохвугольніка роўны 60° і 45° , а старана супраць меншага з іх — 7 см. Знайдзіце трэці вугал і дзве іншыя стараны.
- 776.** Дзве стараны трохвугольніка роўны 3 м і $3\sqrt{3}$ м, а вугал супраць большай з іх — 60° (рыс. 246). Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, трэцюю старану і два іншыя вуглы.
- 777.** У раўнабадным трохвугольніку ABC вугал B роўны 30° . Пункт K на бакавой старане AB выбраны так, што $AC : BK = \sqrt{2} : 1$. Знайдзіце вугал ACK .
- 778.** Знайдзіце вугал A чатырохвугольніка $ABCD$, улічыўшы, што $\angle C = \angle D = 60^\circ$, $AB = 3$, $BC = \sqrt{3}$, $AD = 2\sqrt{3}$.
- 779.** У вяршыню A трохвугольніка ABC з цэнтра апісанай акружнасці праведзены радыус QA , з вяршыні A праведзена вышыня AK (рыс. 247). Дакажыце, што вуглы QAB і KAC роўныя.



Рыс. 247

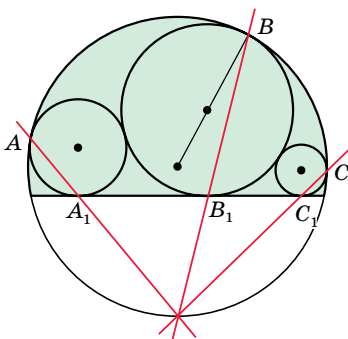


Рыс. 248

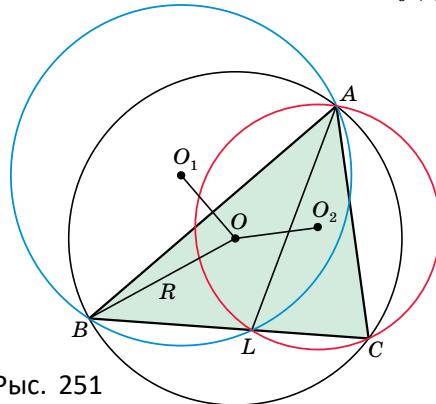


Рыс. 249

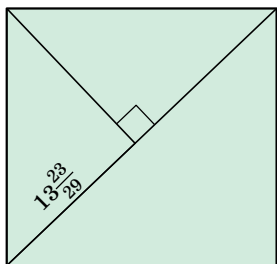
- 780.** Дакажыце, што асновы перпендыкуляраў, апущаных з адвольнага пункта апісанай каля трохвугольніка акружнасці на прамыя, што змяшчаюць яго стораны, ляжаць на адной прамой — прамой Сімсана (рыс. 248).
- 781.** Прамая, паралельная старане AB трохвугольніка ABC , адсякае ад яго трохвугольнік MNC (рыс. 249). Дакажыце, што акружнасці, апісаныя каля трохвугольнікаў ABC і MNC , датыкаюцца.
- 782.** Акружнасці, умежаныя ў сегмент, датыкаюцца да яго дугі і асновы ў пунктах A і A_1 , B і B_1 , C і C_1 адпаведна (рыс. 250). Дакажыце, што прамыя AA_1 , BB_1 , CC_1 праходзяць праз адзін пункт.
- 783.** У трохвугольніку ABC праведзена медыяна AM , акружнасці, умежаныя ў трохвугольнікі AMB і AMC , датыкаюцца да яе ў пунктах K і L . Знайдзіце даўжыню адрэзка KL , улічыўшы, што $AB = 10$ і $AC = 6$.
- 784.** У трохвугольніку ABC праведзена бісектрыса AL , пункты O , O_1 і O_2 — цэнтры акружнасцей, апісаных каля трохвугольнікаў ABC , ABL і ACL адпаведна (рыс. 251). Дакажыце, што $OO_1 = OO_2 = \frac{a}{b+c} \cdot R$,



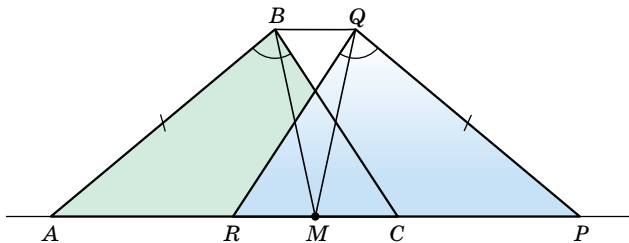
Рыс. 250



Рыс. 251



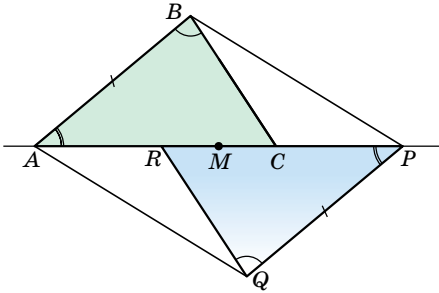
Рыс. 252



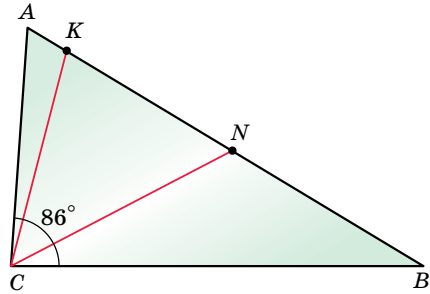
Рыс. 253

дзе a , b , c — даўжыні старон трохвугольніка ABC , R — радыус апісанай каля яго акружнасці.

- 785.** У раўнабедранай трапецыі дыяганаль з'яўляецца бісектрысай тупога вугла, сярэдняя лінія роўна m . Знайдзіце:
- меншую аснову трапецыі, улічыўшы, што большая аснова на n адрозніваецца ад перыметра;
 - большую аснову трапецыі, улічыўшы, што меншая аснова на n адрозніваецца ад перыметра.
- 786.** Знайдзіце стораны прамавугольнага, улічыўшы, што яны адрозніваюцца на адзінку, а аснова перпендыкулярна, апущанага з вяршыні на дыяганаль, знаходзіцца на адлегласці $13\frac{23}{29}$ ад яе бліжэйшага канца (рыс. 252).
- 787.** У трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя стораны AB і A_1B_1 , вышыні CF і C_1F_1 , а таксама медыяны CM і C_1M_1 . Дакажыце, што трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя.
- 788.** У трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя вуглы A і A_1 , а таксама вышыні BH і B_1H_1 , CF і C_1F_1 . Дакажыце, што трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя.
- 789.** У трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя перыметры, а таксама вуглы A і A_1 , B і B_1 . Дакажыце, што трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя.
- 790.** Дакажыце, што прамавугольныя трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя, калі роўныя іх гіпатэнузы і аднолькавыя рознасці іх катэтаў.
- 791.** Дакажыце, што прамавугольныя трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя, калі роўныя іх гіпатэнузы і аднолькавыя сумы іх катэтаў.
- 792.** Асновы AC і PR трохвугольнікаў ABC і PQR размешчаны на адной прамой, $AB = PQ$, $BC = QR$, $\angle ABC = \angle PQR$, M — агульная сярэдзіна адрэзкаў CR і AP (рыс. 253). Улічыўшы, што трохвугольнікі ABC і PQR размешчаны па адзін бок ад прамой AC , дакажыце, што:



Рыс. 254



Рыс. 255

- а) трохвугольнік BQM раўнабедраны;
 б) прамыя BQ і AP паралельныя.

793. Асновы AC і PR трохвугольнікаў ABC і PQR размешчаны на адной прамой, $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle PQR$, $\angle BAC = \angle QPR$, M — агульная сярэдзіна адрэзкаў CR і AP (рыс. 254). Улічыўшы, што трохвугольнікі ABC і PQR размешчаны па розныя бакі ад прамой AC , дакажыце, што:

- а) трохвугольнікі BCP і QRA роўныя;
 б) прамыя BP і AQ паралельныя.

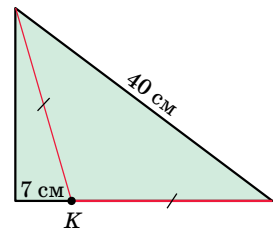
794. Пункты K , L , M на старанах трохвугольніка ABC адзначаны так, што AK — бісектрыса трохвугольніка ABC , $KL \parallel AB$, LM — бісектрыса трохвугольніка KLC . Дакажыце, што $LM \parallel AK$.

795. З пункта K на старане вугла ABC праведзены прамені KL , KM і KN так, што KL — бісектрыса вугла BKM і KN — бісектрыса вугла CKM . Знайдзіце вугал KMN , улічыўшы, што $\angle BLK = 145^\circ$.

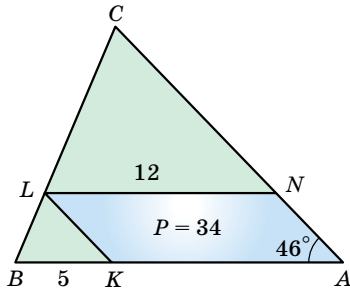
796. Пункты K і N на старане AB трохвугольніка ABC адзначаны так, што $AN = AC$ і $BK = BC$ (рыс. 255). Знайдзіце вугал KCN , улічыўшы, што вугал ACB роўны 86° .

797. Пункт K катэта прававугольнага трохвугольніка роўнаадлеглы ад вяршынь вострых вуглоў і знаходзіцца на адлегласці 7 см ад вяршыні прамога вугла (рыс. 256). Знайдзіце большы катэт трохвугольніка, улічыўшы, што гіпатэнуза роўна 40 см.

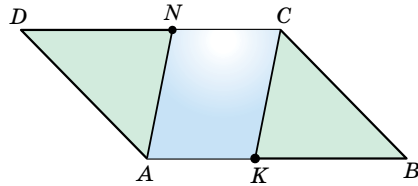
798. У трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя медыяны AM і A_1M_1 , вышыні AH і A_1H_1 , а таксама вышыні CF і C_1F_1 . Дакажыце, што трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя.



Рыс. 256



Рыс. 257



Рыс. 258

- 799.** Прамыя, праведзеныя праз пункты K і N на старанах AB і AC трохвугольніка ABC паралельна AC і AB адпаведна, перасякаюцца ў пункце L на старане BC (рыс. 257). Перыметр чатырохвугольніка $AKLN$ роўны 34, $KB = 5$, $LN = 12$, $\angle BAC = 46^\circ$. Знайдзіце велічыню вугла B .
- 800.** Бісектрысы вуглоў A і B паралелаграма $ABCD$ перасякаюцца ў пункце Q , M — сярэдзіна адрэзка AB . Знайдзіце даўжыню адрэзка QM , улічыўшы, што $CD = 20$.
- 801.** Дыяганалі паралелаграма $ABCD$, роўныя 56 см і 34 см, перасякаюцца ў пункце Q . Перыметры трохвугольнікаў AQB і BQC роўны 70 см і 84 см адпаведна. Знайдзіце перыметр паралелаграма.
- 802.** Пункт K на старане BC паралелаграма $ABCD$ выбраны так, што $AK = BC$. Знайдзіце велічыню вугла B , улічыўшы, што $\angle CDK = 48^\circ$.
- 803.** Бісектрыса вугла A паралелаграма $ABCD$ перасякае старану CD у пункце K . Знайдзіце перыметр паралелаграма, улічыўшы, што $\angle AKC = 120^\circ$, $AK = 12$ см, $KC = 5$ см.
- 804.** Бісектрысы вуглоў A і C паралелаграма $ABCD$ перасякаюць яго стараны ў пунктах K і N . Дакажыце, што чатырохвугольнік $AKCN$ — паралелаграм.
- 805.** Пункты K і N на старанах AB і CD паралелаграма $ABCD$ выбраны так, што $AK : KB = CN : ND$ (рыс. 258). Дакажыце, што чатырохвугольнік $AKCN$ — паралелаграм.
- 806.** Бісектрыса вугла ABD ромба $ABCD$ праходзіць праз сярэдзіну стараны AD . Знайдзіце перыметр ромба, улічыўшы, што $BD = 12$ см.
- 807.** Знайдзіце вугал паміж дыяганалямі прамавугольніка, улічыўшы, што перпендыкуляр, апушчаны на дыяганаль з вяршыні прамавугольніка, утварае са стараной вугал 64° .

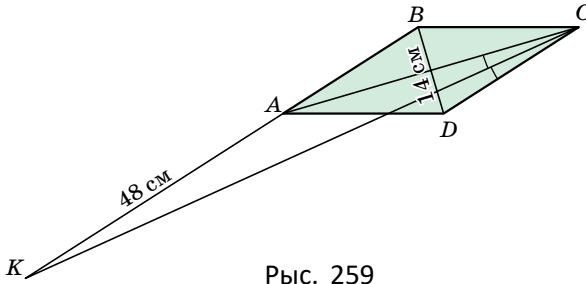


Рис. 259

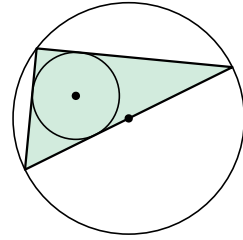


Рис. 260

808. Бісектрыса вугла ACD ромба $ABCD$ перасякае прамую AB у пункце K (рыс. 259). Улічыўшы, што $AK = 48$ см, $BD = 14$ см, знайдзіце перыметр ромба.
809. Бісектрыса вугла A паралелаграма $ABCD$ перасякае яго старану $\dot{y}$ такім пункце K , што $KB \perp KA$. Знайдзіце перыметр паралелаграма, улічыўшы, што $KD = 13$ см.
810. У трохвугольніку ABC медыяна AD утварае вугал 30° са стараной AC і роўна 13 см. Знайдзіце старану BC , улічыўшы, што $\angle ACB = 45^\circ$.
811. Вугал A трохвугольніка ABC роўны 120° , а яго стараны AB і CB роўны адпаведна $5\sqrt{2}$ і $5\sqrt{3}$. Знайдзіце велічыню вугла C .
812. У трохвугольніку ABC вугал A на 90° большы за вугал B . Знайдзіце косінус вугла C , улічыўшы, што $AC = 5$ і $BC = 10$.
813. На старане CD квадрата $ABCD$ адзначаны пункт M . Бісектрыса вугла MAB перасякае старану BC у пункце N . Дакажыце, што $AM = BN + DM$.
814. Гіпатэнуза прамавугольнага трохвугольніка роўна 50 см. Знайдзіце катэты, улічыўшы, што калі адзін з іх паменшыць на 50% , а другі — на 25% , то сума іх даўжынь стане роўнай 43 см.
815. Дакажыце, што ў прамавугольным трохвугольніку сума даўжынь катэтаў роўна суме дыяметраў умежанай і апісанай акружнасцей (рыс. 260).
816. У двух выпуклых чатырохвугольнікаў супадаюць сярэдзіны старон (рыс. 261). Дакажыце, што гэтыя чатырохвугольнікі роўнавялікія.
817. Пункты A_1, B_1, C_1, D_1 — сярэдзіны старон CD, DA, AB, BC квадрата $ABCD$ адпаведна. Дакажыце, што чатырохвугольнік $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, і знайдзіце плошчу чатырохвугольнікаў $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, улічыўшы, што $AA_1 = a$.

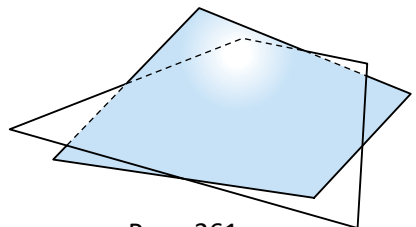
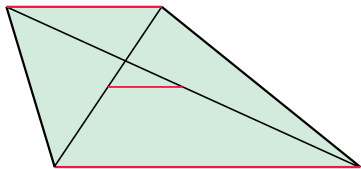
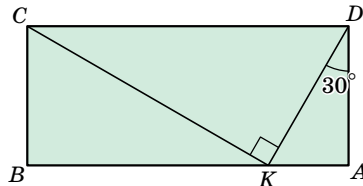


Рис. 261

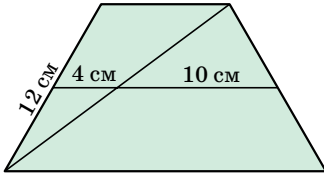


Рыс. 262

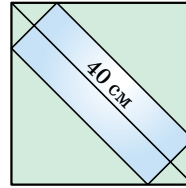


Рыс. 263

- 818.** Дакажыце, што калі ў трапецыі сума супрацьлеглых вуглоў роўна 180° , то гэтая трапецыя раўнабедраная.
- 819.** Дакажыце, што адрэзак, які злучае сярэдзіны дыяганалей трапецыі, роўны паўрознасці яе асноў (рыс. 262).
- 820.** Дакажыце, што адрэзак, які злучае пункт адной асновы трапецыі з пунктам другой яе асновы, раздзяляецца сярэдняй лініяй папалам.
- 821.** Стораны паралелаграма роўны 15 см і 20 см. Бісектрысы суседніх вуглоў паралелаграма раздзяляюць супрацьлеглую старану на тры адрэзкі. Знайдзіце іх даўжыні.
- 822.** Пункт K на старане AB прамавугольніка $ABCD$ выбраны так, што $\angle ADK = 30^\circ$, $\angle CKD = 90^\circ$ (рыс. 263). Знайдзіце адносіну старон прамавугольніка і адносіну адрэзкаў, на якія пункт K раздзяляе старану AB .
- 823.** Перпендыкуляр, апущаны з вяршыні прамавугольніка на яго дыяганаль, раздзяляе адпаведны вугал у адносіне 1 : 4. Знайдзіце вугал паміж гэтым перпендыкулярам і другой дыяганаллю прамавугольніка.
- 824.** Перпендыкуляр, апущаны з вяршыні прамавугольніка на яго дыяганаль, раздзяляе яе ў адносіне 1 : 3. Знайдзіце дыяганалі прамавугольніка, улічыўшы, што пункт іх перасячэння адлеглы ад большай стараны на 6 см.
- 825.** У раўнабедраны трохвугольнік з асновай 24 см і бакавой стараной 15 см умежаны прамавугольнік, дыяганалі якога паралельныя бакавым старанам трохвугольніка. Знайдзіце стораны прамавугольніка.
- 826.** Пункт перасячэння дыяганалей прамавугольніка знаходзіцца на 8 см далей ад меншай стараны, чым ад большай. Знайдзіце стораны прамавугольніка, улічыўшы, што яго перыметр роўны 112 см.
- 827.** Бакавая старана раўнабедранай трапецыі роўна 24 см, а сума асноў — 90 см. Знайдзіце большую аснову трапецыі, улічыўшы, што яе востры вугал роўны 60° .



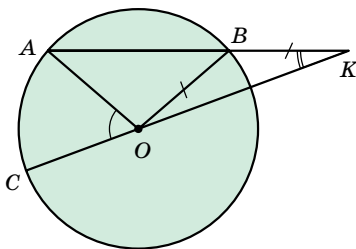
Рыс. 264



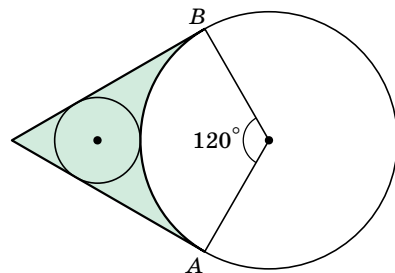
Рыс. 265

- 828.** Праз вяршыню раўнабедранай трапецыі з вострым вуглом 60° паралельна бакавой старане праведзена прамая, адрэзак якой, заключаны ўнутры трапецыі, роўны 36 см. Знайдзіце меншую аснову трапецыі, улічыўшы, што яе сярэдняя лінія роўна 50 см.
- 829.** Сярэдняя лінія раўнабедранай трапецыі раздзяляецца дыяганаллю на адрэзкі даўжынямі 4 см і 10 см (рыс. 264). Знайдзіце меншы вугал трапецыі, улічыўшы, што яе бакавая старана роўна 12 см.
- 830.** Вугал пры аснове раўнабедранай трапецыі раздзяляецца дыяганаллю папалам. Знайдзіце перыметр трапецыі, улічыўшы, што яе асновы адрозніваюцца на 18 см, а сярэдняя лінія роўна 22 см.
- 831.** Дыяганаль раўнабедранай трапецыі роўна 23 см. Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца сярэдзіны старон трапецыі. Вызначце від гэтага чатырохвугольніка.
- 832.** Дыяганаль раўнабедранай трапецыі перпендыкулярная бакавой старане і раздзяляе вугал папалам. Дакажыце, што адна з асноў трапецыі ўдвая большая за другую.
- 833.** Пункт K на старане AD трапецыі $ABCD$ выбраны так, што $BK \parallel CD$. Знайдзіце даўжыню адрэзка BC , улічыўшы, што перыметр трохвугольніка ABK роўны 15 см, а перыметр трапецыі $ABCD$ — 25 см.
- 834.** Дыяганаль раўнабедранай трапецыі меншая за перыметр на a см і раздзяляе тупы вугал папалам. Знайдзіце меншую аснову трапецыі, улічыўшы, што яе сярэдняя лінія роўна b см.
- 835.** На кожнай старане квадрата адзначана па адным такім пункце, што яны з'яўляюцца вяршынямі прамавугольніка, стораны якога адносяцца як 1 : 3 (рыс. 265). Знайдзіце гэтыя стораны, улічыўшы, што дыяганаль квадрата роўна 40 см.
- 836.** Дакажыце, што найменшая адлегласць паміж пунктамі дзвюх акружнасцей, з якіх адна ляжыць па-за другой, роўна даўжыні адрэзка, які ляжыць на лініі цэнтраў паміж гэтымі акружнасцямі.
- 837.** Дакажыце, што найменшай з хорд, што праходзяць праз пункт A ўнутры круга, будзе тая, якая перпендыкулярная дыяметру, праведзенаму праз пункт A .

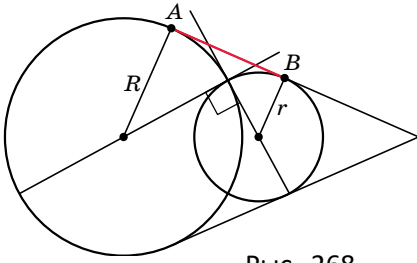
- 838.** Хорда AB круга з цэнтрам O прадоўжана за пункт B на адлегласць BK , роўную радыусу. Пункт C — бліжэйшы да A пункт перасячэння акружнасці з прамой KO (рыс. 266). Дакажыце, што $\angle AOC = 3\angle OKB$.
- 839.** Дакажыце, што з усіх адрэзкаў, што злучаюць дадзены пункт A ўнутры круга з пунктамі акружнасці, найбольшым і найменшым з'яўляюцца адрэзкі дыяметра, праведзенага праз пункт A .
- 840.** Праз пункт A акружнасці праведзена датычная l . Прамая, што праходзіць праз A , перасякае акружнасць у пункце B . Перпендыкуляр да OB , праведзены праз O , перасякае прамыя AB і l у пунктах K і N адпаведна. Дакажыце, што $KN = NA$.
- 841.** У акружнасці з радыусам r праведзена хорда даўжынёй $\frac{2}{3}r$. Праз адзін канец хорды праведзена датычная да акружнасці, а праз другі — паралельная ёй прамая. Знайдзіце адлегласць паміж гэтымі прамымі.
- 842.** Знайдзіце перыметр прамавугольнага трохвугольніка, у якога радыусы апісанай і ўмежанай акружнасці адпаведна роўны 13 см і 4 см.
- 843.** Акружнасць праходзіць праз канцы асновы раўнабедранага трохвугольніка і датыкаецца да яго бакавых старон даўжынямі па 13 см. Знайдзіце радыус гэтай акружнасці, улічыўшы, што вышыня трохвугольніка, праведзеная да яго асновы, роўна 5 см.
- 844.** Праз пункты A і B акружнасці праведзены датычныя да яе. У фігуру, абмежаваную гэтымі датычнымі і дугой, велічыня якой складае 120° , ўмежана акружнасць (рыс. 267). Дакажыце, што даўжыня гэтай акружнасці роўна даўжынні дугі.
- 845.** У паралелаграме $ABCD$ адзначаны пункт Q . Дакажыце, што сума плошчаў трохвугольнікаў AQB і CQD не залежыць ад выбару пункта Q і роўна суме плошчаў трохвугольнікаў AQC і BQD .



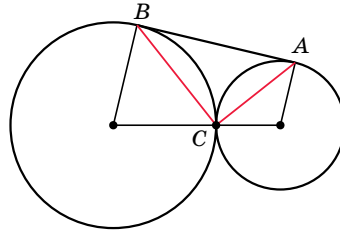
Рыс. 266



Рыс. 267

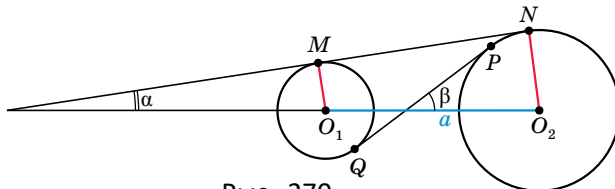


Рыс. 268

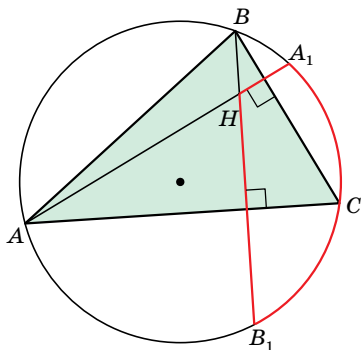


Рыс. 269

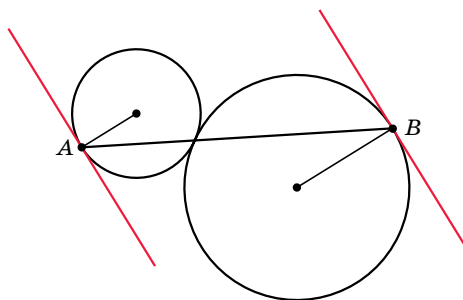
- 846.** Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 18 см, а бакавая старана — 41 см. Знайдзіце радыусы ўмежанага і апісанага кругоў.
- 847.** Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей, умежанай у прамавугольны трохвугольнік і апісанай каля яго, улічыўшы, што катэты трохвугольніка роўны a і b .
- 848.** Вугал паміж датычнымі, праведзенымі праз пункт перасячэння дзвюх акружнасцей з радыусамі R і r , роўны 90° (рыс. 268). Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі A і B гэтых акружнасцей, улічыўшы, што AB — іх агульная датычная.
- 849.** Дзве акружнасці датыкаюцца ў пункце C , AB — іх агульная знешняя датычная, A і B — пункты дотыку (рыс. 269). Знайдзіце вугал ACB .
- 850.** Акружнасці з радыусамі 2 см і 6 см датыкаюцца ўнутраным чынам. Трэцяя акружнасць датыкаецца да гэтых акружнасцей і прамой, што злучае іх цэнтры. Знайдзіце радыус трэцяй акружнасці.
- 851.** Адлегласць паміж цэнтрамі O_1 і O_2 дзвюх акружнасцей роўна a , вугал, які ўтварае лінія цэнтраў O_1O_2 з агульнай знешняй датычнай MN , роўны α , а з агульнай унутранай датычнай PQ , — β (рыс. 270). Знайдзіце радыусы акружнасцей.
- 852.** У кругаваы сектар з цэнтральным вуглом у 120° умежана акружнасць з радыусам r . Знайдзіце радыус сектара.
- 853.** Дзве акружнасці перасякаюцца ў пунктах A і B . Праз пункт A праведзена сякучая, якая перасякае акружнасці ў пунктах C і D . Дакажыце, што велічыня вугла CBD не залежыць ад выбару сякучай.



Рыс. 270

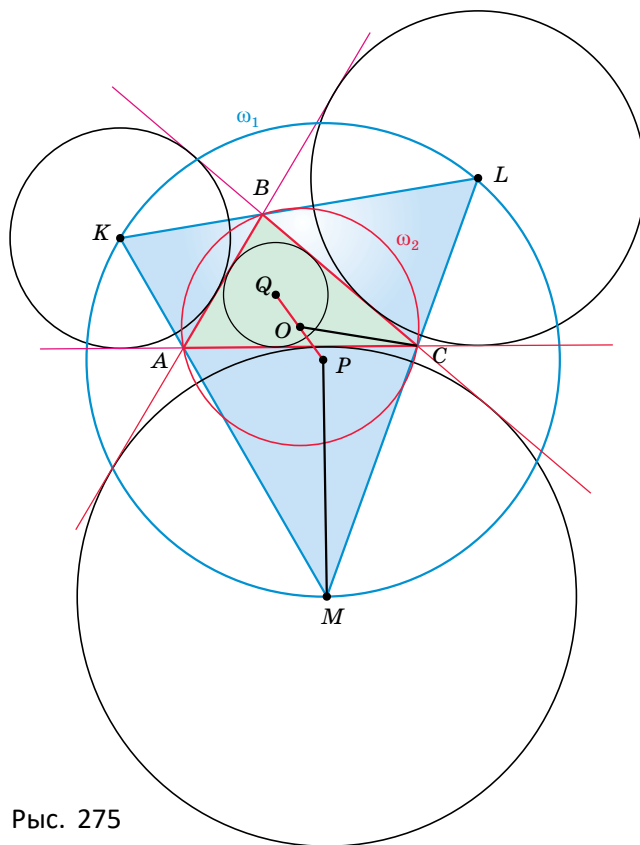


Рыс. 271



Рыс. 272

- 854.** Прамая, што праходзяць праз вяршыні A і B трохвугольніка ABC перпендыкулярна супрацьлеглым старанам, перасякаюцца ў пункце H і перасякаюць апісаную каля трохвугольніка акружнасць у пунктах A_1 і B_1 адпаведна (рыс. 271). Дакажыце, што:
- адрэзкі HA_1 і HB_1 раздзяляюцца старанамі трохвугольніка папалам;
 - дуга A_1B_1 раздзяляецца пунктам C папалам.
- 855.** Дакажыце, што вугал паміж вышынёй AA_1 трохвугольніка ABC і дыяметрам AD апісанай акружнасці роўны рознасці вуглоў BCA і ABC .
- 856.** Прамая, што праходзяць праз вяршыні A і B роўных вуглоў трохвугольніка ABC , раздзяляюць іх папалам, перасякаюцца ў пункце N і перасякаюць апісаную каля трохвугольніка акружнасць у пунктах K і M . Дакажыце, што чатырохвугольнік $CKNM$ — ромб.
- 857.** Чатырохвугольнік $ABCD$ умежаны ў акружнасць. Пункты K, L, M, N — сярэдзіны дуг AB, BC, CD і DA адпаведна. Дакажыце, што прамыя KM і LN перпендыкулярныя.
- 858.** Прамая, што праходзяць праз пункт K , датыкаюцца да акружнасці з цэнтрам O ў пунктах A і B , BC — дыяметр. Дакажыце, што прамыя KO і AC паралельныя.
- 859.** Праз пункт дотыку дзвюх акружнасцей праходзіць прамая, якая перасякае іх яшчэ ў пунктах A і B (рыс. 272). Дакажыце, што датычныя да акружнасцей у пунктах A і B паралельныя.
- 860.** Дакажыце, што пункты перасячэння пар суседніх бісектрыс выпуклага чатырохвугольніка ляжаць на адной акружнасці.



Рыс. 275

- 866.** Знайдзіце вугал паміж двума хордамі, роўнымі радыусу, якія выходзяць з аднаго пункта.
- 867.** Знайдзіце радыус круга, у якім дзве ўзаемна перпендыкулярныя хорды раздзяляюць адна адну на адрэзкі даўжынямі 7 см і 17 см.
- 868.** Хорда перасякае дыяметр пад вуглом 30° і раздзяляе яго на адрэзкі даўжынямі 3 см і 23 см. Знайдзіце даўжыню хорды.
- 869.** Дзве хорды, што выходзяць з аднаго пункта і ўтвараюць вугал 120° , праходзяць на адлегласцях 11 см і 13 см ад цэнтра. Знайдзіце радыус круга і даўжыню кожнай хорды.
- 870.** Дзве ўзаемна перпендыкулярныя прамыя датыкаюцца да акружнасці з радыусам a . Трэцяя прамая перасякае іх і таксама датыкаецца да акружнасці (рыс. 276). Знайдзіце перыметр утворанага трохвугольніка.
- 871.** Радыусы двух акружнасцей адносяцца як 3 : 5. Калі б гэтыя акружнасці датыкаліся ўнутраным чынам, то адлегласць паміж

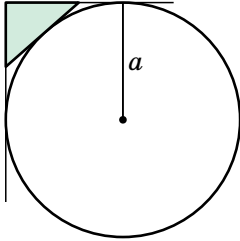


Рис. 276

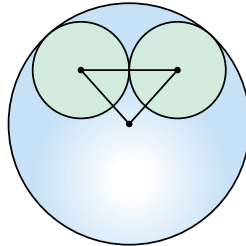


Рис. 277

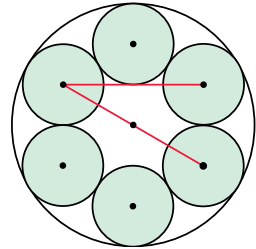


Рис. 278

іх цэнтрамі была б роўна 12 см. Устаноўце, як бы размяшчаліся такія акружнасці, калі б адлегласць паміж іх цэнтрамі была роўна:
а) 48 см; б) 10 см; в) 40 см; г) 50 см.

- 872.** Два роўныя кругі, што датыкаюцца адзін да аднаго, датыкаюцца ўнутраным чынам да трэцяга круга. Трохвугольнік, вяршынямі якога з'яўляюцца іх цэнтры, мае перыметр 24 см (рыс. 277). Знайдзіце радыус большага круга.
- 873.** У круг з радыусам 24 см умежана 6 роўных кругоў, кожны з якіх датыкаецца да двух суседніх (рыс. 278). Знайдзіце:
а) радыус меншага круга;
б) адлегласці паміж цэнтрамі двух несуседніх меншых кругоў.
- 874.** Дзве хорды AB і CD круга перасякаюцца пад вуглом $40^\circ 30'$. Знайдзіце дугі AC і BD , улічыўшы, што яны адносяцца як 2 : 7.
- 875.** Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка з вуглом пры вяршыні ў 40° з'яўляецца дыяметрам акружнасці, якая пунктамі трохвугольніка раздзяляецца на чатыры дугі. Знайдзіце іх градусныя меры.
- 876.** Хорды, што з'яўляюцца старанамі ўмежанага ў акружнасць вугла, раздзяляюць акружнасць на дугі ў адносіне 2 : 7 і 5 : 13. Знайдзіце градусную меру гэтага вугла.
- 877.** Адлегласць паміж найбліжэйшымі пунктамі двух кругоў роўна 11 см, а іх радыусы — 3 см і 8 см (рыс. 279). Знайдзіце градусную меру вугла паміж унутранымі датычнымі да гэтых кругоў.

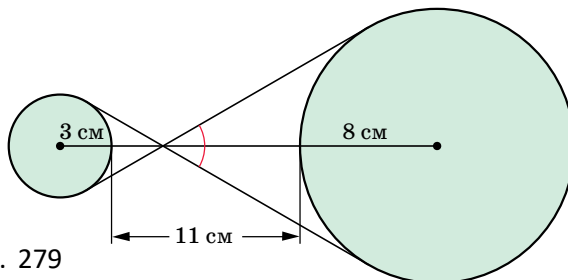
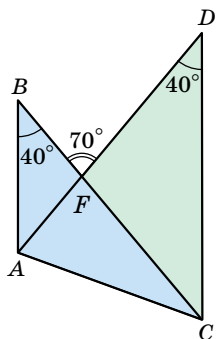
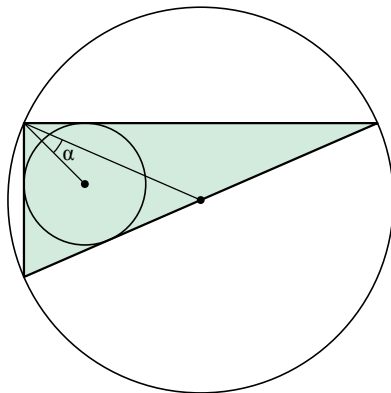


Рис. 279



Рыс. 280

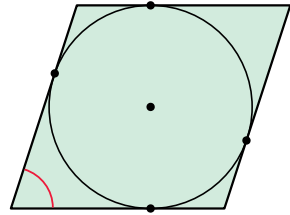


Рыс. 281

- 878.** Дзве акружнасці датыкаюцца знешнім чынам, іх агульныя знешнія датычныя праходзяць праз пункты B і C адной акружнасці і пункты A і D другой. Знайдзіце адрэзкі AB і CD , улічыўшы, што хорды BC і AD роўны 10 см і 15 см.
- 879.** Дзве акружнасці датыкаюцца знешнім чынам, вугал паміж іх агульнай знешняй датычнай і агульнай унутранай датычнай роўны 60° . Знайдзіце адносіну радыусаў акружнасцей.
- 880.** Чатырохвугольнік $ABCD$ умежаны ў акружнасць, старана AB — дыяметр, старана CD удвая карацейшая за AB . Знайдзіце вугал паміж прамымі BC і AD .
- 881.** Вуглы B і D трохвугольнікаў ABC і ACD роўны па 40° , стораны BC і AD перасякаюцца ў пункце F пад вуглом 70° (рыс. 280). Знайдзіце вуглы BAC і DAC , улічыўшы, што трохвугольнік ACD — раўнабедраны, а трохвугольнік ABC — нераўнабедраны.
- 882.** Адзін з вуглоў прамавугольнага трохвугольніка роўны 25° . Знайдзіце вуглы, пад якімі з цэнтра апісанай акружнасці бачныя катэты.
- 883.** У прамавугольны трохвугольнік з гіпатэнузай 26 см умежана акружнасць з радыусам 4 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка.
- 884.** Знайдзіце меншы з вуглоў прамавугольнага трохвугольніка, улічыўшы, што вугал паміж прамымі, праведзенымі праз вяршыню прамога вугла і цэнтры апісанай і ўмежанай акружнасцей, роўны α (рыс. 281).
- 885.** Тры акружнасці датыкаюцца папарна. Адлегласці паміж іх цэнтрамі роўны 8 см, 16 см і 20 см. Знайдзіце радыусы акружнасцей, улічыўшы, што:
- а) усе яны датыкаюцца знешнім чынам;

б) толькі дзве з іх датыкаюцца знешнім чынам.

886. У ромб умежана акружнасць. Пункты дотыку раздзяляюць акружнасць на чатыры дугі, з якіх дзве адносяцца як $2 : 3$ (рыс. 282). Знайдзіце меншы вугал ромба.

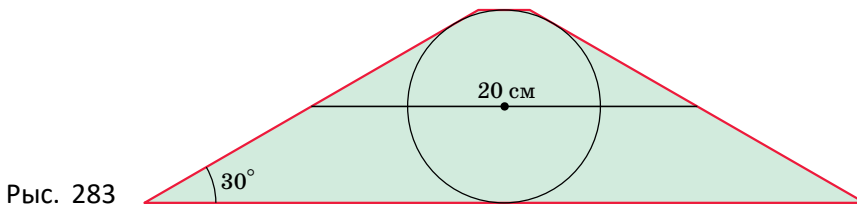


Рыс. 282

887. Вугал пры аснове раўнабедранай трапецыі роўны α , а вугал, пад якім з пункта перасячэння дыяганалей бачная бакавая старана, — β . Устаноўце ўмову, пры якой цэнтр апісанай каля трапецыі акружнасці знаходзіцца:

- а) унутры трапецыі; в) на мяжы трапецыі.
б) па-за трапецыяй;

888. У раўнабедраную трапецыю з вуглом 30° умежана акружнасць (рыс. 283). Знайдзіце яе радыус, улічыўшы, што сярэдняя лінія трапецыі роўна 20 см.



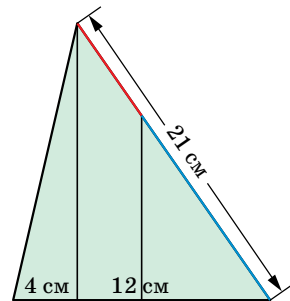
Рыс. 283

889. У акружнасць умежаны чатырохвугольнік, тры паслядоўныя вуглы якога адносяцца як $9 : 7 : 3$. Знайдзіце гэтыя вуглы.

890. Тры паслядоўныя стараны чатырохвугольніка, апісанага каля акружнасці, адносяцца як $1 : 4 : 5$. Знайдзіце гэтыя стараны, улічыўшы, што перыметр чатырохвугольніка роўны 72 см.

891. Праекцыі бакавых старон трохвугольніка на яго аснову роўны 4 см і 12 см, большая з бакавых старон роўна 21 см (рыс. 284). Знайдзіце, на якія часткі раздзяляе гэтую старану пасярэдні перпендыкуляр да асновы.

892. Пункты F і G на старанах AB і BC трохвугольніка ABC выбраны так, што $AF : FB = 2 : 3$ і $FG \parallel AC$. Прамая, праведзеная праз пункт F паралельна прамой AG , перасякае старану BC у пункце K . Знайдзіце, на якія часткі пункты G і K раздзяляюць старану BC даўжынёй 50 см.



Рыс. 284

893. Стораны AC і BC трохвугольніка ABC роўны b і a адпаведна, пункт K на старане BC выбраны так, што $AK : KB = m : n$. Устаноўце ўмову, пры якой:

- а) $\angle AKC > \angle KCB$;
- б) $\angle AKC < \angle KCB$;
- в) $\angle AKC = \angle KCB$.

894. Аснова AC і бакавая старана BC раўнабедранага трохвугольніка ABC роўны b і a адпаведна, AM і BN — бісектрысы. Знайдзіце даўжыню адрэзка MN .

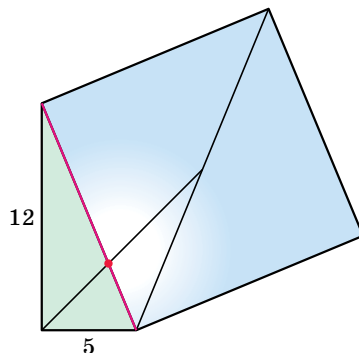
895. На гіпатэнузе прававугольнага трохвугольніка ў знешні бок пабудаваны квадрат, цэнтр якога злучаны адрэзкам з вяршыняй прамого вугла. Знайдзіце, у якой адносіне гэты адрэзак раздзяляе гіпатэнузу, улічыўшы, што катэты трохвугольніка роўны:

- а) 3 і 4;
- б) 5 і 12 (рыс. 285);
- в) m і n .

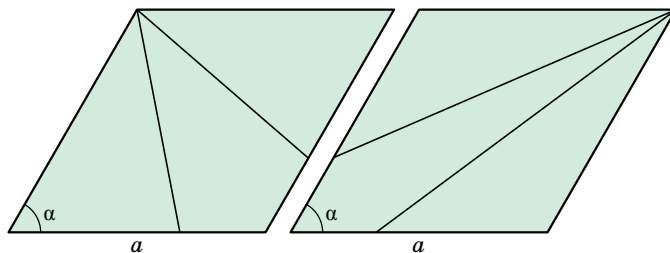
896. Ромб са стараной a і вострым вуглом α раздзелены на тры роўнавялікія часткі прамымі, што выходзяць з яго вяршыні (рыс. 286). Знайдзіце даўжыні адрэзкаў гэтых прамых, што размешчаны ўнутры ромба.

897. На старане правільнага трохвугольніка выбраны пункт на адлегласцях a і b ад іншых старон. Знайдзіце яго адлегласці ад вяршынь трохвугольніка.

898. Аснова AC і бакавая старана BC раўнабедранага трохвугольніка ABC роўны b і a адпаведна. Прамая, паралельная AC , перасякае бакавыя староны ў пунктах M і N так, што аснова MN утворанай трапецыі роўна суме яе бакавых старон. Знайдзіце даўжыню адрэзка MN .

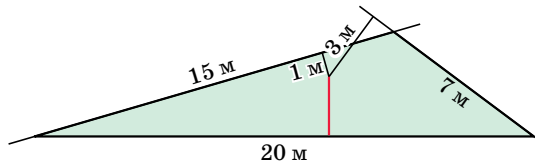


Рыс. 285

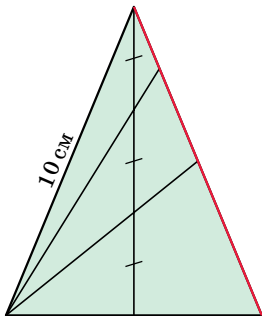


Рыс. 286

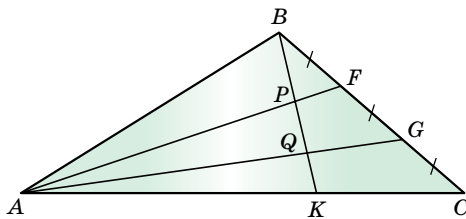
- 899.** Адна з асноў трапецыі ўтварае большую за другую. Праз сярэдзіну адной дыяганалі праведзена прамая l , паралельная другой дыяганалі, роўнай 18 см. Знайдзіце даўжыню адрэзка прамой l , заключанага ўнутры трапецыі.
- 900.** Пункт K перасячэння дыяганалей выпуклага чатырохвугольніка $ABCD$ раздзяляе дыяганаль AC на часткі KA і KC , адпаведна роўныя 3 см і 8 см, а дыяганаль BD — на адрэзкі KB і KD , адпаведна роўныя 4 см і 6 см. Знайдзіце перыметр і плошчу чатырохвугольніка $ABCD$, улічваючы, што вугал ACD роўны $\arcsin 0,6$.
- 901.** Сярэдняя лінія трапецыі роўна 14 см, а бакавыя стораны — 13 см і 15 см. Знайдзіце перыметр і плошчу трапецыі, улічваючы, што яе большая дыяганаль утварае з асновай вугал, роўны $\arctg 0,75$.
- 902.** Унутраны пункт трохвугольніка са старанамі 7 м, 15 м і 20 м адлеглы ад прамых, што змяшчаюць дзве першыя стараны, на 3 м і на 1 м адпаведна (рыс. 287). Знайдзіце адлегласць гэтага пункта ад прамой, што праходзіць праз трэцюю старану.
- 903.** Паралелаграм $AFKG$ мае з трохвугольнікам ABC агульны вугал, вяршыня K знаходзіцца на старане BC . Улічваючы, што $AB = 20$ см, $AC = 25$ см і $AF : AG = 6 : 5$, знайдзіце стораны паралелаграма.
- 904.** Дзве вяршыні прамавугольніка размешчаны на аснове трохвугольніка, роўнай 48 см, а дзве астатнія — на яго бакавых старанах. Вышыня трохвугольніка роўна 16 см. Знайдзіце перыметр прамавугольніка, улічваючы, што:
- яго вымярэнні адносяцца як 5 : 9;
 - яго дыяганалі паралельныя бакавым старанам трохвугольніка.
- 905.** Дзве вяршыні квадрата размешчаны на прамой AC , а дзве астатнія — на прамых AB і BC . Вышыня трохвугольніка ABC роўна 1 см, а яго аснова — 2 см. Знайдзіце плошчу квадрата.
- 906.** Асновы AD і BC трапецыі роўны a і b адпаведна. Прамая, ім паралельная, перасякае бакавыя стораны ў пунктах P і Q так, што $AP : PB = m : n$. Знайдзіце даўжыню адрэзка PQ .



Рыс. 287

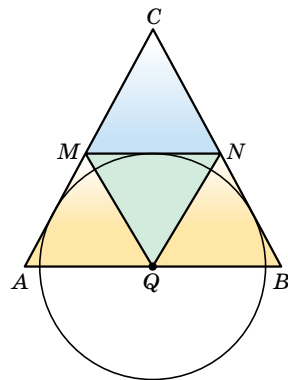


Рыс. 288

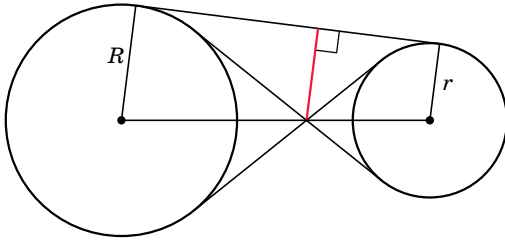


Рыс. 289

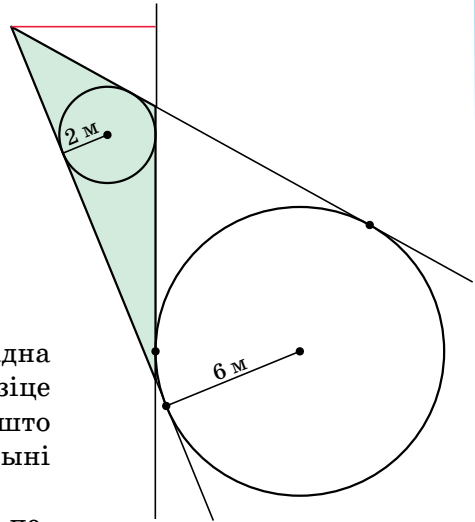
- 907.** Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка роўна 10 см (рыс. 288). Вызначце, на якія адрэзкі раздзяляюць яе прамыя, што праходзяць праз адну з вяршынь і раздзяляюць на тры доли вышыню, праведзеную да асновы.
- 908.** Медыяна AM трохвугольніка ABC роўна 10 см. Старана BC раздзелена на 5 долей, праз пункты дзялення паралельна AM праведзены прамыя. Знайдзіце адрэзкі гэтых прамых, размешчаныя ўнутры трохвугольніка.
- 909.** Пункты K, F і G выбраны на старонах AC і BC трохвугольніка ABC так, што $AK : KC = 2 : 1$, $BF = FG = GC$ (рыс. 289). Знайдзіце, у якой адносіне прамыя AF і AG раздзяляюць адрэзак BK.
- 910.** З асновы H вышыні AH трохвугольніка ABC да яго старон AB і AC праведзены перпендыкуляры HM і HN. Дакажыце, што трохвугольнікі ABC і AMN падобныя.
- 911.** У трохвугольніку ABC праведзена вышыня CC_1 , H — пункт перасячэння вышынь. Дакажыце, што $AC_1 \cdot BC_1 = CC_1 \cdot HC_1$.
- 912.** Прамая, паралельная адной са старон трохвугольніка, раздзяляе яго на часткі, плошчы якіх адносяцца як 1 : 8. Знайдзіце адрэзак гэтай прамой, заключаны ўнутры трохвугольніка, улічыўшы, што старана, якой ён паралельны, мае даўжыню 36 см.
- 913.** Акружнасць, цэнтр Q якой ляжыць на аснове AB раўнабедранага трохвугольніка ABC, датыкаецца да яго бакавых старон. Пункты M і N на прамянях CA і CB выбраны так, што MN — датычная да акружнасці (рыс. 290). Дакажыце, што трохвугольнікі AMQ, BNQ і MNQ падобныя.



Рыс. 290

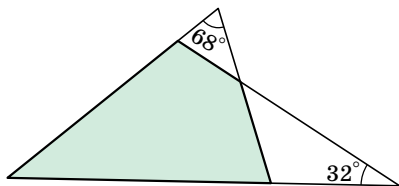


Рыс. 291

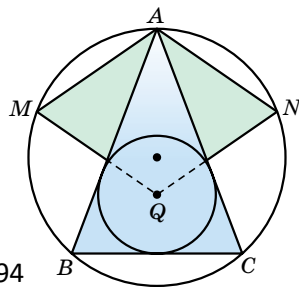


Рыс. 292

- 914.** Дзве акружнасці датыкаюцца адна да адной і да старон вугла. Знайдзіце радыусы акружнасцей, улічыўшы, што адлегласці ад іх цэнтраў да вершыні вугла роўны a і b .
- 915.** У трохвугольнік са стараной 2 см і перыметрам 8 см умежана акружнасць. Прамая, паралельная гэтай старане, датыкаецца да гэтай акружнасці і перасякае бакавыя стараны. Знайдзіце адрэзак гэтай прамой, размешчаны ўнутры трохвугольніка.
- 916.** У акружнасць з радыусам 6 см умежаны трохвугольнік, дзве стараны якога роўны 4 см і 9 см. Знайдзіце вышыню, праведзеную да трэцяй стараны.
- 917.** Адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей з радыусамі 1 см і 2 см роўна 6 см. Знайдзіце адлегласць паміж пунктам перасячэння іх агульных знешніх датычных і пунктам перасячэння агульных унутраных датычных.
- 918.** Знайдзіце адлегласць ад пункта перасячэння агульных унутраных датычных дзвюх акружнасцей з радыусамі R і r да іх агульнай знешняй датычнай (рыс. 291).
- 919.** Трохвугольнік ABC умежаны ў акружнасць з радыусам 12 см. Знайдзіце радыус акружнасці, якая праходзіць праз сярэдзіны старон трохвугольніка ABC .
- 920.** Радыус умежанай у трохвугольнік акружнасці роўны 2 м, а радыус акружнасці, якая датыкаецца да стараны і працягаў дзвюх іншых старон, — 6 м (рыс. 292). Знайдзіце вышыню трохвугольніка, праведзеную да стараны, да якой датыкаюцца абедзве акружнасці.
- 921.** Знайдзіце радыусы акружнасцей: апісанай каля раўнабаднага трохвугольніка з асновай 30 і бакавой стараной 17 і ўмежанай у яго.



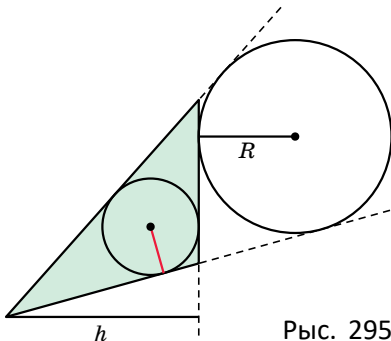
Рыс. 293



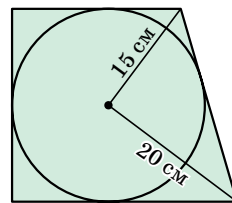
Рыс. 294

- 922.** Знайдзіце радыус акружасці, улічыўшы, што пункт, адлеглы ад цэнтра на 5 см, раздзяляе праведзеную праз яго хорду на часткі даўжынямі 4 см і 6 см.
- 923.** Акружасць, дыяметрам якой з'яўляецца меншы катэт прамавугольнага трохвугольніка, раздзяляе бісектрысу прылеглага да гэтага катэта вострага вугла ў адносіне 1 : 3. Знайдзіце вуглы трохвугольніка.
- 924.** Знайдзіце вуглы чатырохвугольніка, умежанага ў акружасць, улічыўшы, што вуглы паміж яго супрацьлеглымі старонамі роўны 68° і 32° (рыс. 293).
- 925.** Дзве акружасці датыкаюцца, іх агульныя знешнія датычныя ўтвараюць вугал 2ϕ , адлегласць паміж цэнтрамі роўна d . Знайдзіце:
- радыусы гэтых акружасцей;
 - плошчу чатырохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца пункты дотыку да акружасцей іх знешніх датычных.
- 926.** Праз пункты M і N перасячэння дзвюх акружасцей праведзены сякучыя AMB і CND , прычым пункты A і D ляжаць на адной акружасці, а пункты B і C — на другой.
- Дакажыце, што прамыя AD і BC паралельныя.
 - Які вывад можна зрабіць, калі пункты A і D супадаюць?
 - Які вывад можна зрабіць, калі акружасці датыкаюцца, г. зн. пункты M і N супадаюць?
- 927.** У раўнабедранны трохвугольнік ABC умежана акружасць з цэнтрам Q , пункты M і N — сярэдзіны роўных дуг AB і AC апісанай каля трохвугольніка ABC акружасці (рыс. 294). Дакажыце, што чатырохвугольнік $AMQN$ — ромб.
- 928.** Пункты K , M і N сіметрычныя вяршыням трохвугольніка ABC адносна пункта перасячэння яго вышынь. Дакажыце, што ўсе акружасці, апісаныя каля трохвугольнікаў з вяршынямі ў пунктах A , B , C , K , M і N , супадаюць.

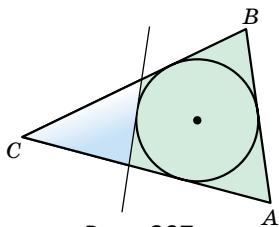
- 929.** Акружнасць перасякае адну з канцэнтрычных акружнасцей у пунктах A і B , а другую — у пунктах M і N . Дакажыце, што прамыя AB і MN паралельныя.
- 930.** У сектар з вострым вуглом α і радыусам r умежаны круг. Знайдзіце яго плошчу.
- 931.** Акружнасць з радыусам R датыкаецца да стараны трохвугольніка і да працягаў дзвюх іншых яго старон, вышыня, праведзеная да той самай стараны, роўна h (рыс. 295). Знайдзіце радыус умежанай у трохвугольнік акружнасці.
- 932.** Перыметр прамавугольнага трохвугольніка роўны 56 см, а радыус апісанай каля яго акружнасці — 12,5 см. Знайдзіце плошчу гэтага трохвугольніка.
- 933.** Знайдзіце радыус акружнасці, умежанай у раўнабедраны трохвугольнік з бакавой стараной, роўнай 24 см, улічыўшы, што радыус акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка, роўны 33,8 см.
- 934.** У прамавугольным трохвугольніку адзін катэт роўны 35 см, а праекцыя другога на гіпатэнузу — 24 см. Знайдзіце радыусы апісанай і ўмежанай у гэты трохвугольнік акружнасцей.
- 935.** Знайдзіце катэты прамавугольнага трохвугольніка, улічыўшы, што радыусы ўмежанай і апісанай каля гэтага трохвугольніка акружнасцей роўны R і r адпаведна.
- 936.** Цэнтр акружнасці, умежанай у прамавугольную трапецыю, адлеглы ад канцоў адной бакавой стараны на 15 см і 20 см (рыс. 296). Знайдзіце радыус акружнасці.
- 937.** Знайдзіце радыусы акружнасцей: умежанай у трохвугольнік, стараны якога роўны 25 см, 51 см і 52 см, і апісанай каля яго.
- 938.** Пункт M знаходзіцца на адлегласцях a і b ад старон вугла A велічыней 60° . Знайдзіце даўжыню адрэзка, што адсякае на



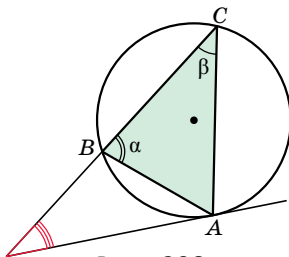
Рыс. 295



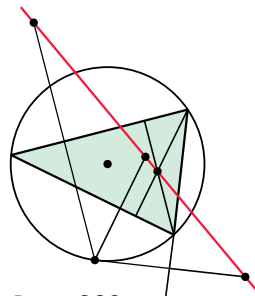
Рыс. 296



Рыс. 297



Рыс. 298



Рыс. 299

бісектрысе вугла A перпендыкуляр да яе, праведзены з пункта M , улічыўшы, што пункт M знаходзіцца:

а) унутры вугла A ; б) па-за вуглом A .

- 939.** У трохвугольнік са старанамі a , b і c умежана акружнасць, датычная да якой перасякае першыя дзве стараны (рыс. 297). Знайдзіце перыметр адсечанага ёй трохвугольніка.
- 940.** Трыхвугольнік ABC умежаны ў акружнасць (рыс. 298). Знайдзіце вугал паміж прамой BC і датычнай да акружнасці, якая праходзіць праз пункт A , улічыўшы, што $\angle B = \alpha$ і $\angle C = \beta$.
- 941.** На апісанай каля трохвугольніка акружнасці адзначаны адвольны пункт. Дакажыце, што тры пункты, сіметрычныя яму адносна прамых, што змяшчаюць стараны трохвугольніка, ляжаць на адной прамой, якая праходзіць праз пункт перасячэння вышын (рыс. 299).
- 942.** Дакажыце, што прамая, якая праходзіць праз пункт перасячэння бісектрыс трохвугольніка, раздзяляе яго перыметр і плошчу ў аднолькавых адносінах.
- 943.** Прамая праходзіць праз цэнтр акружнасці, умежанай у пяцівугольнік. Дакажыце, што яна раздзяляе яго перыметр і плошчу ў аднолькавых адносінах.
- 944.** Дзве акружнасці, радыусы якіх роўны R і r , датыкаюцца знешнім чынам у пункце A . Агульная знешняя датычная мае з акружнасцямі агульныя пункты B і C . Знайдзіце перыметр і плошчу трохвугольніка ABC .
- 945.** На старане AC трохвугольніка ABC адзначаны пункт K такі, што $KC = 3$ і $KB = 2\sqrt{7}$. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB , улічыўшы, што $\angle A = 60^\circ$ і $BC = \sqrt{31}$.
- 946.** На катэтах прававугольнага трохвугольніка як на дыяметрах пабудаваны акружнасці (рыс. 300). Знайдзіце адлегласць

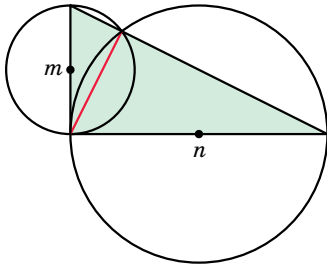


Рис. 300

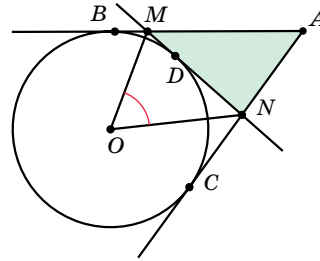


Рис. 301

паміж пунктамі іх перасячэння, улічыўшы, што катэты роўны m і n .

- 947.** Праз пункт перасячэння дзвюх акружнасцей праведзена прамая, якая перасякае гэтыя акружнасці яшчэ раз у пунктах M і N . Дакажыце, што даўжыня адрэзка MN найбольшая, калі прамая MN паралельная лініі цэнтраў.
- 948.** З пункта A да акружнасці з цэнтрам O праведзены датычныя AB і AC . На дузе BC , бліжэйшай да A , адзначаюць пункт D і праз яго праводзяць яшчэ адну датычную, якая перасякае праведзеныя раней у пунктах M і N (рис. 301). Дакажыце, што:
- а) перыметр трохвугольніка AMN не залежыць ад выбару пункта D ;
 - б) велічыня вугла MON не залежыць ад выбару пункта D .
- 949.** Адлегласці ад трох вяршынь паралелаграма да плоскасці роўны 6 см, 8 см і 16 см. Укажыце магчымыя значэнні адлегласці ад чацвёртай вяршыні паралелаграма да гэтай плоскасці.
- 950.** Дакажыце, што вугал паміж плоскасцямі роўны вуглу паміж прамымі, перпендыкулярнымі гэтым плоскасцям.
- 951.** Вышыня AK , праведзеная да асновы $ABCD$ прамога паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, мае даўжыню 24 см і раздзяляе старану BC у адносіне 2 : 3, калі лічыць ад вяршыні A . Улічыўшы, што $AB = 26$ см, $BB_1 = 45$ см, знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $AB_1 C_1 D$.
- 952.** У прамым паралелепіпедзе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ бакавы кант роўны 12 см, а канты асновы — 8 см і 10 см. Плошча чатырохвугольніка $AB_1 C_1 D$ роўна 136 см^2 . Знайдзіце плошчы дыяганальных сячэнняў паралелепіпеда.
- 953.** У паралелепіпедзе бакавы кант, роўны 20 см, нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 45° , дыяганальнае сячэнне, што змяшчае большую дыяганаль, перпендыкулярнае да плоскасці асновы

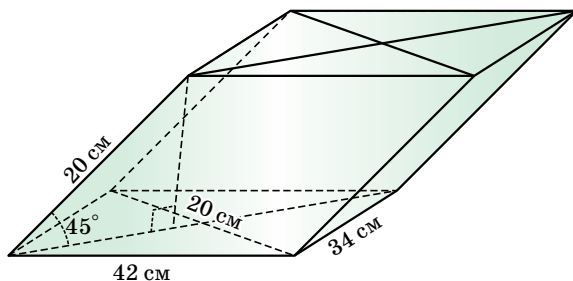


Рис. 302

(рис. 302). Знайдзіце плошчы дыяганальных сячэнняў паралелепіпеда, улічыўшы, што стораны асновы роўны 34 см і 42 см, а адна з яе дыяганалей — 20 см.

- 954.** У паралелепіпедзе бакавы кант, роўны 8 см, нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° , дыяганальнае сячэнне, што змяшчае большую дыяганаль, перпендыкулярнае плоскасці асновы і мае плошчу 72 см^2 . Знайдзіце плошчу другога дыяганальнага сячэння, улічыўшы, што асновай паралелепіпеда з'яўляецца ромб са старонай 6 см.
- 955.** Сячэнне куба праходзіць праз яго дыяганаль і сярэдзіну канта. Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што кант куба роўны a .
- 956.** У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$, прычым $a < b < c$. Якая дыяганаль з якой гранню ўтварае найбольшы вугал; найменшы вугал?
- 957.** Сячэнне правільнай чатырохвугольнай прызмы праходзіць праз яе цэнтр і сярэдзіны двух сумежных кантаў асновы (рис. 303). Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што кант асновы роўны a , а бакавы кант — b .
- 958.** У прамым паралелепіпедзе канты асновы роўны 17 см і 28 см, адна з дыяганалей асновы — 25 см. Знайдзіце плошчы дыяганальных сячэнняў паралелепіпеда, улічыўшы, што яны ў суме складаюць $\frac{16}{15}$ плошчы асновы.
- 959.** У прамым паралелепіпедзе канты асновы роўны 29 см і 36 см, бакавы кант — 36 см, адна з дыяганалей асновы — 25 см. Знайдзіце плошчу сячэння паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз большы кант асновы і дыяганаль бакавой грані.

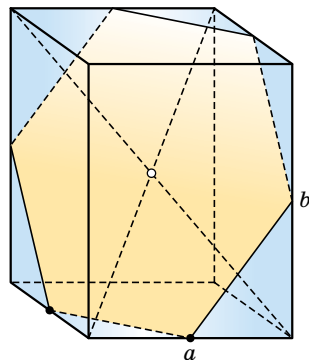


Рис. 303

960. Кант куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ роўны a . На дыяганалях $D_1 A$ і $A_1 B$ узяты адпаведна пункты M і N , прычым $D_1 M : D_1 A = NB : A_1 B = 1 : 3$. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні C да прамой MN .

961. У аснове прызмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ляжыць прамавугольнік $ABCD$. Вострыя вуглы $D_1 DA$ і $D_1 DC$ роўныя, вугал паміж кантам DD_1 і плоскасцю асновы прызмы роўны $\arccos \frac{1}{\sqrt{13}}$,

а $CD = 5\sqrt{6}$. Усе грані прызмы датыкаюцца да пэўнай сферы (рыс. 304). Знайдзіце BC і вугал паміж плоскасцямі $D_1 DC$ і ABC , радыус сферы, а таксама адлегласць ад яе цэнтра да пункта D .

962. Усе грані прызмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ датыкаюцца да пэўнай сферы. У аснове прызмы ляжыць ромб $ABCD$, вугал $B_1 BC$ востры, $\angle B_1 BA = \arctg \frac{5}{\sqrt{3}}$, $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = \frac{5\sqrt{2}}{3}$. Знайдзіце радыус сферы, вугал $B_1 BC$, вугал паміж бакавым кантам і плоскасцю асновы прызмы, а таксама адлегласць ад пункта B да пункта дотыку сферы з плоскасцю $D_1 DC$.

963. У трохвугольнай прызме адлегласці паміж бакавымі кантамі роўны 13 см, 37 см і 40 см. Знайдзіце адлегласці паміж бакавымі гранямі.

964. Разгорткай бакавой паверхні цыліндра з'яўляецца квадрат са стараной 10 см. Знайдзіце аб'ём цыліндра.

965. Знайдзіце вышыню цыліндра, улічыўшы, што яго поўная паверхня роўна $12\pi \text{ см}^2$, а радыус асновы — 1 см.

966. Пункт M знаходзіцца па-за плоскасцю трохвугольніка на аднолькавых адлегласцях ад яго вяршынь. Устаноўце ўзаемнае размяшчэнне трохвугольніка і праекцыі пункта M на яго плоскасць (рыс. 305), улічыўшы, што гэты трохвугольнік:

- прамавугольны;
- востравугольны;
- тупавугольны.

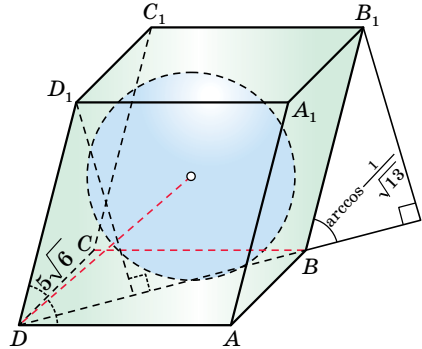


Рис. 304

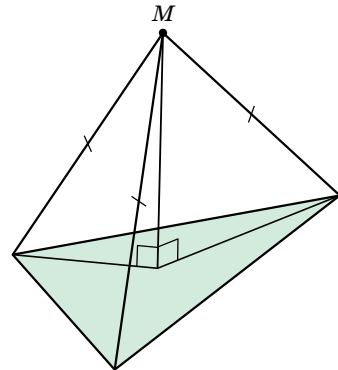
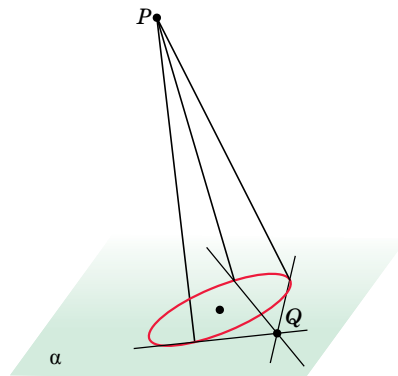
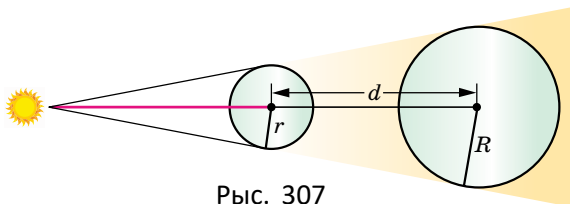


Рис. 305

- 967.** У трохвугольнай пірамідзе $ABCD$ грані ABC і ABD роўнавялікія. Дакажыце, што агульны перпендыкуляр прамых AB і CD праходзіць праз сярэдзіну адрэзка CD .
- 968.** У тэтраэдры $ABCD$ усе плоскія вуглы пры вяршыні D прамыя. Дакажыце, што трохвугольнік ABC востравугольны.
- 969.** У тэтраэдры $ABCD$ усе плоскія вуглы пры вяршыні D прамыя, $AD = a$, $BD = b$, $CD = a + b$. Дакажыце, што сума плоскіх вуглоў пры вяршыні C роўна 90° .
- 970.** У тэтраэдры $ABCD$ сумы плоскіх вуглоў пры ўсіх вяршынях аднолькавыя. Дакажыце, што ўсе грані тэтраэдра роўныя.
- 971.** Ці можна сцвярджаць, што ў тэтраэдры $ABCD$ кожны з двухгранных вуглоў з кантамі AB , AC і AD меншы за суму двух іншых?
- 972.** Дакажыце, што калі ў трохвугольнай піраміды $SABC$ двухгранныя вуглы $BSAC$ і $ASBC$ роўныя, то роўныя і плоскія вуглы BSC і ASC .
- 973.** Пункт P не ляжыць у плоскасці α . Вызначце, якую фігуру ўтвараюць пункты, якія з'яўляюцца асновамі перпендыкуляраў, праведзеных з пункта P да ўсіх прамых, што праходзяць у плоскасці α праз дадзены пункт Q (рыс. 306).
- 974.** У конус з вышыняй h і ўтваральнікам b умежаны шар. Знайдзіце радыус шара.
- 975.** Вакол шара з радыусам R апісаны ўсечаны конус, адна з асноў якога ўдвая большая за другую. Знайдзіце аб'ём гэтага конуса.
- 976.** На лініі цэнтраў двух шароў знаходзіцца кропкавая крыніца святла. Пры гэтым большы шар датыкаецца да конуса ценю, што адкідаецца меншым шарам (рыс. 307). Улічыўшы, што радыус меншага шара роўны r , радыус большага шара — R і адлегласць паміж цэнтрамі шароў — d , знайдзіце:



Рыс. 306

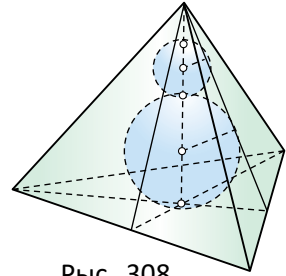


Рыс. 307

а) адлегласць ад крыніцы святла да цэнтра меншага шара;

б) велічыню асветленай часткі паверхні меншага шара.

977. Утваральнік усечанага конуса роўны 4 дм, радыусы асноў роўны 1 дм і 3 дм. Знайдзіце радыус шара, апісанага вакол усечанага конуса.



Рыс. 308

978. Вакол шара апісана правільная чатырохвугольная ўсечаная піраміда, стораны асноў якой адносяцца як $m : n$ ($m > n$). Знайдзіце вугал нахілу да плоскасці асновы:

а) бакавой грані; б) бакавога канта.

979. Знайдзіце радыус шара, умежанага ў піраміду, асновай якой служыць трохвугольнік са старанамі 13, 14 і 15, а вяршыня піраміды адлеглая ад кожнага з гэтых кантаў на 5.

980. Кожны плоскі вугал пры вяршыні трохграннага вугла роўны 60° . У трохгранны вугал умежаны два шара, якія датыкаюцца адзін да аднаго (рыс. 308). Знайдзіце адносіну іх радыусаў.

981. Два шара з радыусам r датыкаюцца адзін да аднаго; n шароў з радыусам x , цэнтры якіх з'яўляюцца вяршынямі правільнага n -вугольніка са стараной $2x$, датыкаюцца да абодвух шароў з радыусам r . Знайдзіце x .

982. Вакол конуса вышынёй 1 апісана піраміда, асновай якой з'яўляецца ромб з дыяганалямі 6 і 8. Знайдзіце радыусы шароў, якія ўмежаны ў трохгранныя вуглы пры аснове і датыкаюцца да бакавой паверхні конуса.

983. На плоскасці P стаіць роўнастаронні конус з вышынёй h . Кожны з трох роўных шароў датыкаецца да двух іншых, плоскасці P і бакавой паверхні конуса. Знайдзіце радыусы шароў.

984. На плоскасці P стаіць конус, радыус асновы якога роўны 3, а вышыня 4. Шэсць роўных шароў размешчаны так, што кожны датыкаецца да двух суседніх, плоскасці P і бакавой паверхні конуса. Знайдзіце радыусы шароў.

985. Знайдзіце радыус шара, умежанага ў чатырохвугольную піраміду, у аснове якой ляжыць ромб з дыяганалямі 6 см і 8 см, улічыўшы, што вышыня:

а) мае даўжыню 1 см і праходзіць праз цэнтр ромба;

б) мае даўжыню 1,8 см і праходзіць праз вяршыню вострага вугла ромба;

в) мае даўжыню 4,5 см і праходзіць праз вяршыню тупога вугла ромба.

986. Знайдзіце радыус шара, умежанага ў трохвугольную піраміду, у якой стораны асновы роўны 25 см, 29 см і 36 см, а вяршыня знаходзіцца на адлегласці 10 см ад кожнага канта асновы.
987. Знайдзіце радыус шара, умежанага ў трохвугольную піраміду, бакавыя канты якой папарна перпендыкулярныя і роўны 2 см, 10 см і 12 см.
988. Шар, умежаны ў правільную чатырохвугольную піраміду, і шар, апісаны каля яе, маюць агульны цэнтр. Знайдзіце плоскі вугал пры вяршыні піраміды.
989. Шар, умежаны ў n -вугольную піраміду, і шар, апісаны каля яе, маюць агульны цэнтр. Дакажыце, што гэтая піраміда правільная і што сума плоскіх вуглоў пры яе вяршыні роўна 180° .
990. Дакажыце, што калі плоскі вугал пры вяршыні правільнай n -вугольнай піраміды роўны $\frac{180^\circ}{n}$, то шар, апісаны каля яе, і шар, умежаны ў яе, маюць агульны цэнтр.
991. Дакажыце, што калі шар датыкаецца да ўсіх кантаў трохвугольнай піраміды, то сумы даўжынь супрацьлеглых кантаў аднолькавыя (рыс. 309).
992. Пункты A і B ляжаць у розных гранях двухграннага вугла на аднолькавых адлегласцях ад канта. Знайдзіце на гэтым канце такі пункт M , каб вугал AMB быў найбольшым.
993. Няхай двухгранныя вуглы $BSAC$, $ASBC$, $ASCB$ роўны адпаведна $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ (рыс. 310). Дакажыце, што праўдзіцца няроўнасць:
а) $180^\circ < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540^\circ$; б) $\hat{A} > \hat{B} + \hat{C} - 180^\circ$.
994. Двухгранныя вуглы $BSAC$ і $ASBC$ роўны адпаведна 90° і 50° . У якіх межах знаходзіцца велічыня двухграннага вугла $ASCB$?

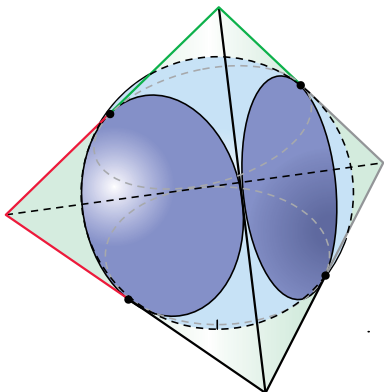


Рис. 309

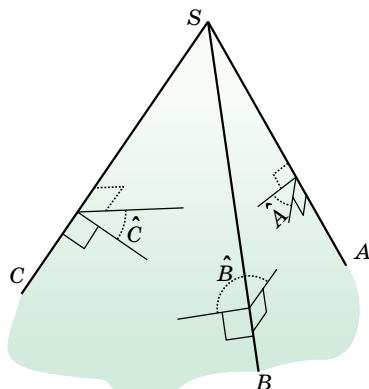
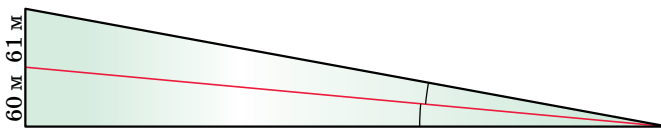


Рис. 310

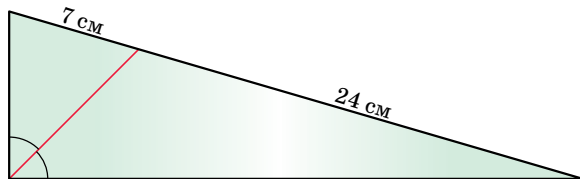
995. Сума двухгранных вуглоў $BSAC$, $ASBC$, $ASCB$ роўна 360° . Дакажыце, што сума косінусаў плоскіх вуглоў ASB , ASC і BSC роўна -1 .
996. Няхай сума двухгранных вуглоў $BSAC$, $ASBC$ роўна 180° . Дакажыце, што тады і сума плоскіх вуглоў ASC і BSC таксама роўна 180° . Вызначце, ці праўдзіцца адваротнае сцверджанне.
997. Выбраны лік d , ненулявы вектар $\vec{n}$ і пункт O прасторы. Дакажыце, што мноства ўсіх пунктаў X прасторы, для якіх праўдзіцца роўнасць $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} + d = 0$, ёсць плоскасць. Знайдзіце адлегласць ад пункта O да гэтай плоскасці.
998. Выбраны лік M , пункт O прасторы і ненулявы вектар $\vec{a}$, $\vec{a} \cdot \vec{a} > M$. Дакажыце, што мноства ўсіх пунктаў X прасторы, для якіх праўдзіцца роўнасць $\overrightarrow{OX}^2 - 2\vec{a} \cdot \overrightarrow{OX} + M = 0$, ёсць сфера. Знайдзіце цэнтр і радыус гэтай сферы.
999. Вызначце, пры якой умове плоскасць $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} + d = 0$ датыкаецца да сферы $\overrightarrow{OX}^2 - 2\vec{a} \cdot \overrightarrow{OX} + M = 0$.
1000. Дакажыце, што калі ў трохвугольнай пірамідзе супрацьлеглыя канты папарна роўныя, то прамыя, што праходзяць праз сярэдзіны супрацьлеглых кантаў, папарна перпендыкулярныя.

2. Геаметрычныя велічыні

1001. Катэты прамавугольнага трохвугольніка адносяцца як $5 : 4$, а гіпатэнуза роўна 82 см. Знайдзіце адрэзкі, на якія раздзяляе гіпатэнузу праведзеная да яе вышыня.
1002. Катэты прамавугольнага трохвугольніка адносяцца як $7 : 24$, а медыяна, праведзеная да гіпатэнузы, роўна 50 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка.
1003. Бісектрыса прамавугольнага трохвугольніка раздзяляе катэт на часткі даўжынямі 60 м і 61 м (рыс. 311). Знайдзіце перыметр трохвугольніка.

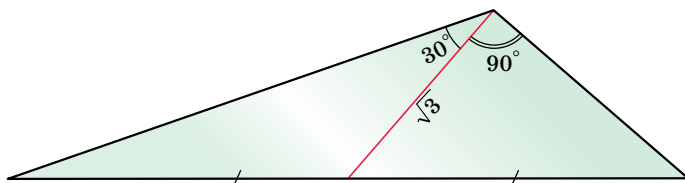


Рыс. 311



Рыс. 312

- 1004.** Бісектрыса прамавугольнага трохвугольніка раздзяляе гіпатэнузу на часткі даўжынямі 7 см і 24 см (рыс. 312). Знайдзіце радыус акружнасці, умежанай у трохвугольнік.
- 1005.** Вышыня, праведзеная да гіпатэнузы прамавугольнага трохвугольніка, раздзяляе яго на дзве часткі, у якіх сумы бісектрысы і медыяны, праведзеных да меншай стараны, роўны 12 см і 35 см. Знайдзіце суму бісектрысы і медыяны, праведзеных да меншага катэта зыходнага трохвугольніка.
- 1006.** Вышыня, праведзеная да бакавой стараны раўнабедранага трохвугольніка, раздзяляе яе на часткі даўжынямі 7 см і 2 см. Знайдзіце аснову трохвугольніка.
- 1007.** Знайдзіце стараны раўнабедранага трохвугольніка, улічыўшы, што яго вышыні роўны a і b .
- 1008.** У плоскасці правільнага трохвугольніка ABC выбраны пункт K . Дакажыце, што кожны з трох адрэзкаў KA , KB , KC не большы за суму двух іншых.
- 1009.** Медыяна трохвугольніка мае даўжыню $\sqrt{3}$ і ўтварае вуглы 30° і 90° з прылеглымі старанамі (рыс. 313). Знайдзіце плошчу гэтага трохвугольніка.
- 1010.** Дыяганалі трапецыі роўны 14 см і 48 см, а сярэдняя лінія — 25 см. Знайдзіце вышыню трапецыі.
- 1011.** Асновы прамавугольнай трапецыі роўны 27 см і 53 см, а большая бакавая старана — 34 см. Знайдзіце адрэзак пасярэдняга перпендыкуляра да гэтай стараны, абмежаваны прамымі, на якіх ляжаць бакавыя стараны трапецыі.
- 1012.** Асновы раўнабедранай трапецыі роўны 126 см і 66 см, а бакавая старана — 50 см (рыс. 314). Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трапецыі.



Рыс. 313

1013. Вяршыні A , B і C трапецыі $ABCD$ ляжаць на акружнасці, прамая CD — датычная. Знайдзіце старану AC , улічыўшы, што асновы AB і CD трапецыі роўны a і b .

1014. Асновы AB і CD трапецыі $ABCD$ роўны 3 і 1 адпаведна, $\angle A = 2\angle B$. Знайдзіце старану BC і вугал B , улічыўшы, што $CD = 1$.

1015. Меншая аснова раўнабедранай трапецыі роўна 3 см, а перыметр — 42 см. Знайдзіце плошчу трапецыі, улічыўшы, што дыяганаль з'яўляецца бісектрысай тупога вугла.

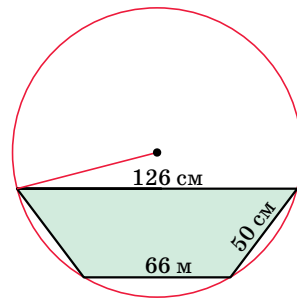
1016. Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 18 см, а бакавая старана — 27 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка, вяршыні якога супадаюць з асновамі вышынь зыходнага.

1017. Дзве акружнасці маюць радыусы 3 см і 13 см, адлегласць паміж іх цэнтрамі роўна 9 см (рыс. 315). З хорд большай акружнасці, якія датыкаюцца да меншай, знайдзіце хорду:

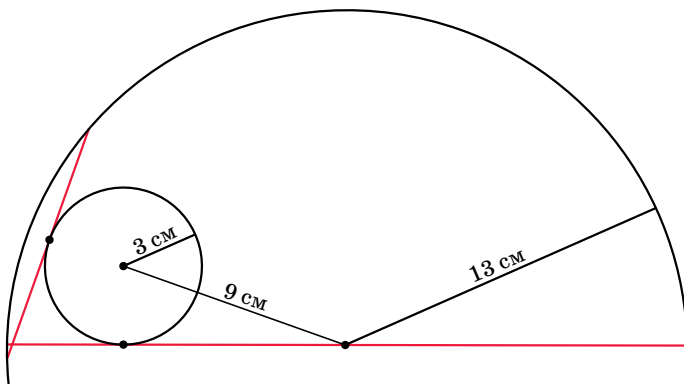
а) з найменшай даўжынёй; б) з найбольшай даўжынёй.

1018. Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 30 см, а радыус умежанага круга — 10 см. Знайдзіце плошчу і перыметр трохвугольніка.

1019. Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 10 см, а бакавая старана — 13 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка і радыус круга, які датыкаецца да яго бакавой стараны і працягаў дзвюх іншых старон.



Рыс. 314



Рыс. 315

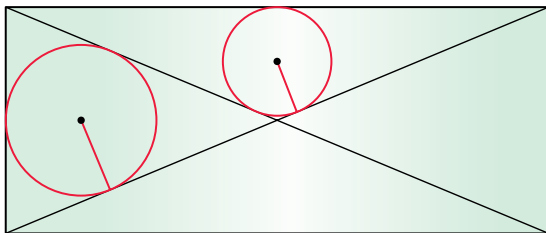


Рис. 316

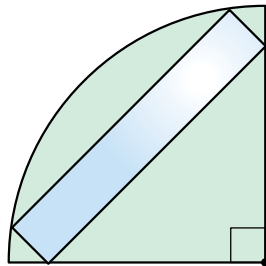
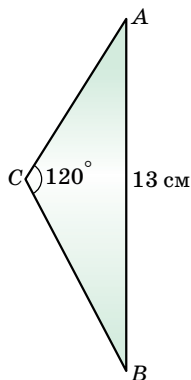
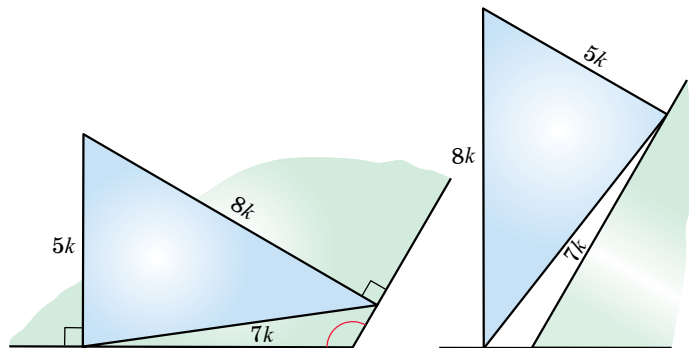


Рис. 317

- 1020.** Знайдзіце большы вугал трохвугольніка, у якім адна старана ўдвая большая за радыус апісанай акружнасці.
- 1021.** Вугал пры аснове раўнабедранага трохвугольніка роўны α . Знайдзіце аснову трохвугольніка, улічыўшы, што вышыня, праведзеная да яе, на m большая за радыус апісанага круга.
- 1022.** Дыяганалі прамавугольніка з перыметрам 68 см раздзяляюць яго на чатыры трохвугольныя часткі (рыс. 316). Знайдзіце радыусы акружнасцей, умежаных у трохвугольныя часткі, перыметры якіх адрозніваюцца на 14 см.
- 1023.** Дыяганалі раздзяляюць паралелаграм на чатыры трохвугольнікі. Знайдзіце стораны паралелаграма, улічыўшы, што яго перыметр роўны 30 м, а рознасць паміж перыметрамі двух сумежных трохвугольнікаў — 9 м.
- 1024.** У сектар з цэнтральным вуглом у 90° і радыусам R умежаны прамавугольнік, стораны якога адносяцца як 1 : 6 (рыс. 317). Знайдзіце стораны прамавугольніка, улічыўшы, што адзін канец кожнай з меншых старон знаходзіцца на дузе, а другі — на гранічным радыусе.
- 1025.** У паўакружнасць з радыусам R умежаны тры акружнасці, дзве з якіх роўныя і датыкаюцца да трэцяй. Знайдзіце іх радыусы.
- 1026.** У трохвугольніку ABC старана BC роўна a , а дзве іншыя — 12 см і 35 см. Устаноўце, пры якіх значэннях a вугал A трохвугольніка з'яўляецца:
- а) вострым; б) прамым; в) тупым.
- 1027.** Знайдзіце невядомыя стораны трохвугольніка ABC , улічыўшы, што:
- а) $AB = 5$ см, $AC = 8$ см і $\angle A = 60^\circ$;
 б) $AB = 3$ см, $AC = 5$ см і $\angle A = 120^\circ$;
 в) $AB = 4\sqrt{2}$ см, $AC = 7$ см і $\angle A = 45^\circ$;
 г) $AB = 8$ см, $BC = 13$ см і $\angle A = 60^\circ$;



Рыс. 318



Рыс. 319

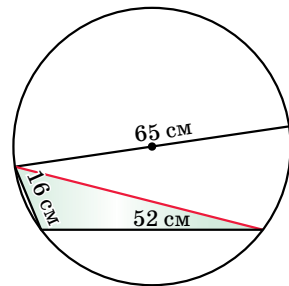
д) $AB = 13$ см, $\angle C = 120^\circ$ і $AC + BC = 15$ см (рыс. 318);

е) $AB = 13$ см, $BC = 7$ см, $\angle A = 30^\circ$;

ж) $AB = 7$ см, $BC = 5$ см, $\angle A = 45^\circ$.

- 1028.** Стораны трохвугольніка адносяцца як $13 : 14 : 15$. Улічыўшы, што сярэдняя па даўжыні вышыня роўна 24 см, знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка.
- 1029.** Даўжыні перпендыкуляраў, апущаных з пэўнага пункта на прамыя, што змяшчаюць стораны вугла, і адрэзка, што злучае асновы гэтых перпендыкуляраў, адносяцца як $5 : 8 : 7$ (рыс. 319). Знайдзіце велічыню вугла.
- 1030.** Стораны AB і BC трохвугольніка ABC роўны 20 см і 34 см адпаведна, а медыяна BM — 21 см. Знайдзіце вышыню CK .
- 1031.** Стораны AB , BC і AC трохвугольніка ABC роўны 15 см, 13 см і 14 см адпаведна. Праз пункты B і C праведзены дзве прамыя: першая змяшчае бісектрысу вугла B , другая перпендыкулярная да AC . Яны перасякаюцца ў пункце K . Знайдзіце адрэзак CK .
- 1032.** Знайдзіце бісектрысу, што выходзіць з вугла A трохвугольніка ABC , у якім $AB = 3$ см, $AC = 6$ см і $\angle BAC = 120^\circ$.
- 1033.** Асновы трапецыі роўны 6 см і 18 см, а бакавыя стораны — 7 см і 11 см. Знайдзіце адлегласць паміж сярэдзінамі асноў трапецыі.
- 1034.** Дакажыце, што ў любым чатырохвугольніку сума квадратаў дыяганалей удвая большая за суму квадратаў адрэзкаў, што злучаюць сярэдзіны супрацьлеглых старон.
- 1035.** З канцоў дыяметра акружнасці, роўнага 25 см, праведзены дзве хорды; адна даўжынёй 24 см, а другая — 20 см. Знайдзіце даўжыню адрэзка, што злучае іх свабодныя канцы.

1036. Дзве стараны трохвугольніка роўны 16 см і 52 см, а дыяметр апісанага каля трохвугольніка круга — 65 см (рыс. 320). Знайдзіце трэцюю старану, улічыўшы, што яна ў трохвугольніку найбольшая.



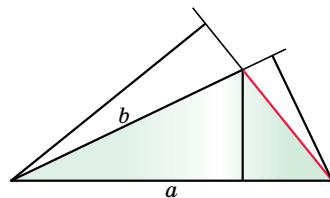
Рыс. 320

1037. Стораны прамавугольніка роўны 2 см і 24 см. Знайдзіце вымярэнні роўнавялікага яму прамавугольніка, улічыўшы, што яны адносяцца як 3 : 4.

1038. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, у якога дзве стараны роўны 6 см і 8 см, а вугал паміж імі — 30° .

1039. У трохвугольніку з плошчай $6\sqrt{3}$ см² меншая старана роўна 4 см, а вугал пры ёй — 150° . Знайдзіце большую старану трохвугольніка.

1040. У трохвугольніку вядомыя дзве стараны a і b (рыс. 321). Знайдзіце трэцюю старану, улічыўшы, што вышыня, праведзеная да яе, роўна суме вышынь, што праведзены да вядомых старон.



Рыс. 321

1041. Вызначце, ці існуе трохвугольнік, вышыні якога роўны:

- а) 2, 3 і 4; б) 4, 5 і 10.

1042. Вышыні паралелаграма з перыметрам 80 см і вуглом 30° адносяцца як 2 : 3. Знайдзіце плошчу паралелаграма.

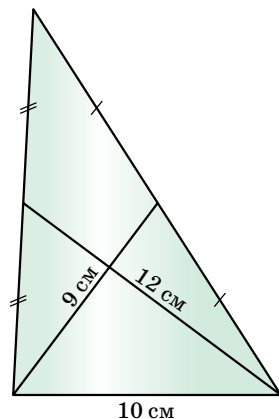
1043. Знайдзіце плошчу трохвугольніка са старанамі:

- а) 6 см, 25 см і 29 см;
 б) 5 см, $8\frac{2}{3}$ см і $12\frac{1}{3}$ см;
 в) $\sqrt{5}$ см, $\sqrt{10}$ см і $\sqrt{13}$ см.

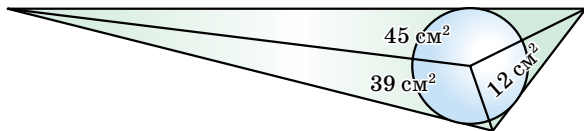
1044. Дзве стараны трохвугольніка роўны 10 см і 14 см, а яго плошча — 300 см². Знайдзіце трэцюю старану.

1045. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, улічыўшы, што:

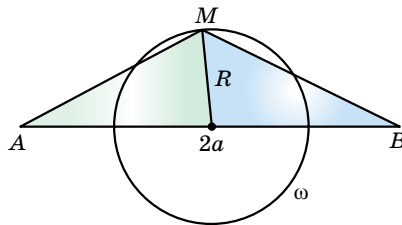
- а) дзве яго стараны роўны 27 см і 29 см, а медыяна, заключаная паміж імі, — 26 см;
 б) медыяны трохвугольніка роўны 6 см, 5 см і 5 см;



Рыс. 322



Рыс. 323



Рыс. 324

- в) медыяны трохвугольніка роўны 16 см, 30 см і 34 см;
 г) адна старана роўна 10 см, а медыяны да дзвюх іншых старон — 9 см і 12 см (рыс. 322).

1046. Знайдзіце стараны трохвугольніка, улічыўшы, што:

- а) адна з іх удвая меншая за другую і на 8 см меншая за трэцюю, а плошча трохвугольніка роўна $16\sqrt{5}$ см²;
 б) прамені, што выходзяць з цэнтра ўмежанага круга і праходзяць праз вяршыні трохвугольніка, раздзяляюць яго на часткі з плошчамі 12 см², 39 см² і 45 см² (рыс. 323);
 в) радыусы акружнасцей, кожная з якіх датыкаецца да адной стараны трохвугольніка і да працягаў дзвюх іншых старон, роўны 2 см, 3 см і 6 см.

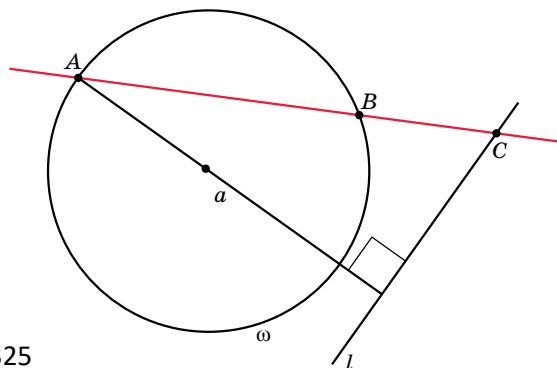
1047. Знайдзіце трэцюю старану трохвугольніка, улічыўшы, што:

- а) дзве яго стараны даўжынямі 11 см і 23 см заключаюць медыяну даўжынёй 11 см;
 б) дзве яго стараны маюць даўжыні 10 см і 17 см, а апісаная акружнасць мае радыус 10,625 см.

1048. Дзве стараны трохвугольніка даўжынямі 20 см і 45 см заключаюць бісектрысу даўжынёй 24 см. Знайдзіце адрэзкі, на якія бісектрыса раздзяляе трэцюю старану трохвугольніка.

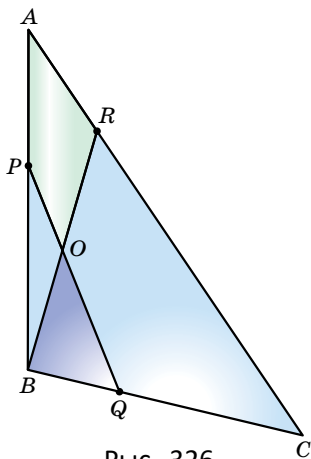
1049. Акружнасць ω з радыусам R сваім цэнтрам мае сярэдзіну адрэзка AB , пункт M узяты на акружнасці (рыс. 324). Знайдзіце суму квадратаў адлегласцей ад пункта M да канцоў адрэзка AB , улічыўшы, што даўжыня адрэзка AB роўна $2a$.

1050. Самы далёкі ад прамой l пункт A акружнасці ω знаходзіцца на адлегласці a . Прамая, праведзеная праз пункт A , перасякае акружнасць у пункце B і прамую l у пункце C (рыс. 325). Знайдзіце здабытак даўжынь адрэзкаў AB і AC , улічыўшы, што радыус акружнасці ω роўны R .

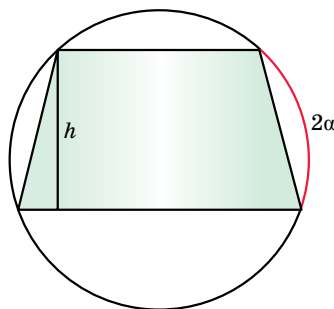


Рыс. 325

- 1051.** Прамая, праведзеная праз сярэдзіну вышыні BK раўнабедранага трохвугольніка ABC , перасякае яго бакавыя стараны AB і BC у пунктах P і Q . Знайдзіце вышыню BK , улічыўшы, што $\angle ABK = \beta$, $\angle BPQ = \alpha$ і $PQ = m$.
- 1052.** Медыяна BK даўжынёй m утварае са старанамі AB і BC трохвугольніка ABC вуглы α і β адпаведна. Знайдзіце стараны AB і BC .
- 1053.** Дакажыце, што ў любым трохвугольніку яго вуглы звязаны роўнасцю:
- $\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2 \sin A \sin B \cos C$;
 - $1 - 2 \sin A \sin B \cos C = \cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C$.
- 1054.** Дакажыце, што ў любым трохвугольніку здабытак дзвюх яго старон роўны здабытку дыяметра акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка, і вышыні, праведзенай да трэцяй стараны.
- 1055.** Дакажыце, што ў любым трохвугольніку здабытак дзвюх яго старон роўны квадрату бісектрысы, заключанай паміж гэтымі старанамі, паменшанаму на здабытак адрэзкаў, на якія трэцяя старана раздзелена гэтай бісектрысай.
- 1056.** Знайдзіце бісектрысы трохвугольніка, стараны якога роўны 7, 8 і 9.
- 1057.** Пункты M , N , K на старанах AB , BC , AC трохвугольніка ABC размешчаны так, што $AM : MB = 2 : 1$, $BN : NC = 3 : 2$, $CK : KA = 1 : 3$. Знайдзіце адносіну адрэзкаў, на якія:
- прамая MN раздзяляе адрэзак BK ;
 - прамая BK раздзяляе адрэзак MN .
- 1058.** Пункты P , Q , R на старанах AB , BC , AC трохвугольніка ABC размешчаны так, што $AP : PB = 2 : 3$, $BQ : QC = 1 : 2$, $CR : RA = 3 : 1$ (рыс. 326). Улічыўшы, што O — пункт перасячэння прамых PQ і RB , знайдзіце, якую частку плошчы трохвугольніка ABC складае:



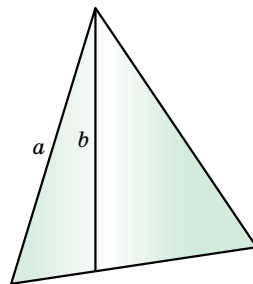
Рыс. 326



Рыс. 327

- а) плошча трохвугольніка BOQ ;
 б) плошча чатырохвугольніка $PORA$.

- 1059.** Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапецыі, у якой дыяганаль перпендыкулярная бакавой старане і даўжыні трох старон роўны $2a$ кожная.
- 1060.** Знайдзіце старану ромба, улічыўшы, што сума яго дыяганалей роўна m , а плошча — S .
- 1061.** Дыяганаль раўнабедранай трапецыі з плошчай 12 см^2 роўна 5 см . Знайдзіце сярэднюю лінію трапецыі.
- 1062.** Бакавая старана трапецыі, умежанай у акружнасць, сцягвае дугу велічынёй 2α (рыс. 327). Знайдзіце плошчу трапецыі, улічыўшы, што яе вышыня роўна h .
- 1063.** Знайдзіце плошчу трапецыі, асновы якой роўны 7 см і 8 см , а дыяганалі — 13 см і 14 см .
- 1064.** Плошча трапецыі роўна 250 м^2 , яе вышыня — 10 м , а адна з асноў не меншая за 24 м . Якой можа быць другая аснова трапецыі?
- 1065.** Плошча трапецыі роўна 144 см^2 , а яе асновы — 17 см і 7 см . Якой можа быць меншая бакавая старана трапецыі?
- 1066.** На аснове раўнабедранага трохвугольніка з бакавой стараной a выбраны пункт на адлегласці b ад вяршыні (рыс. 328). Улічыўшы, што прмая, праведзеная праз гэты пункт



Рыс. 328

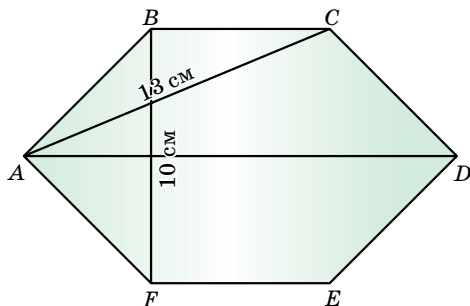


Рис. 329

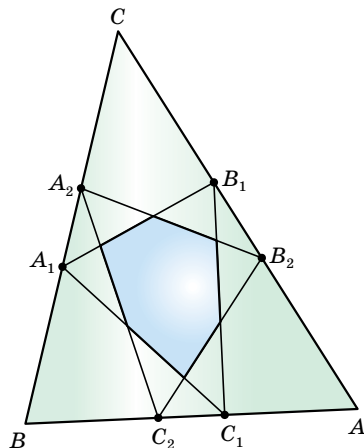
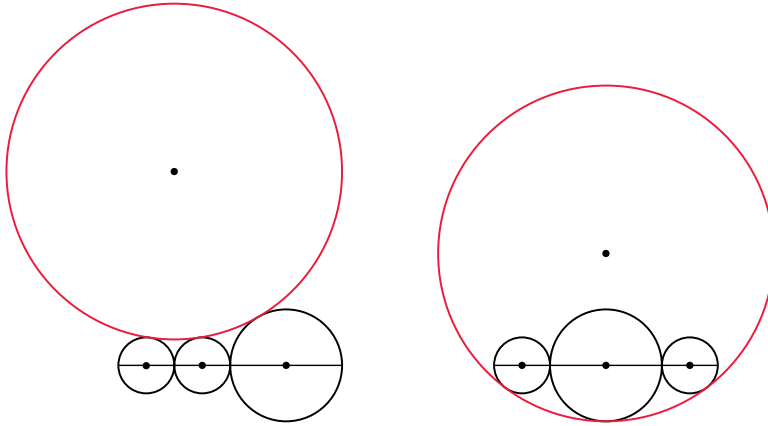


Рис. 330

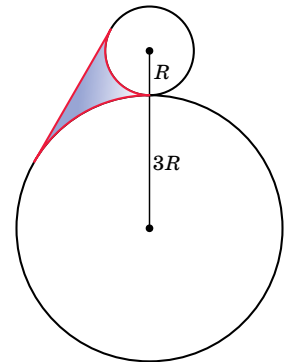
і вяршыню трохвугольніка, раздзяляе вугал пры вяршыні ў адносіне $2 : 1$, знайдзіце плошчу трохвугольніка.

- 1067.** Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $ABCD$ і яго дыяганаль BD , улічыўшы, што $AB = 17$ см, $BC = 25$ см, $CD = 26$ см, $AD = 30$ см, $AC = 28$ см.
- 1068.** Многавугольнік, апісаны каля акружнасці, мае плошчу S і перыметр P . Знайдзіце радыус акружнасці.
- 1069.** Шасцівугольнік $ABCDEF$ з роўнымі старанамі складаецца з дзвюх трапецый з агульнай асновай AD (рис. 329). Знайдзіце яго плошчу, улічыўшы, што $AC = 13$ см і $BF = 10$ см.
- 1070.** На старанах трохвугольніка ABC адзначаны пункты: C_1 і C_2 на AB , A_1 і A_2 на BC , B_1 і B_2 на CA , якія раздзяляюць кожную старану ў адносіне $2 : 1 : 2$ (рис. 330). Знайдзіце плошчу фігуры, абмежаванай прамымі A_1B_1 , B_1C_1 , C_1A_1 , A_2B_2 , B_2C_2 , C_2A_2 , улічыўшы, што плошча трохвугольніка ABC роўна S .
- 1071.** Стораны паралелаграма роўны 4 см і 7 см. Знайдзіце адносіну, у якой раздзяляе яго плошчу бісектрыса аднаго з вуглоў.
- 1072.** Адлегласці ад пункта перасячэння медыян трохвугольніка да яго старон адносяцца як $2 : 3 : 4$. Знайдзіце стараны трохвугольніка, улічыўшы, што яго перыметр роўны 78 см.
- 1073.** Адрэзкі, што злучаюць сярэдзіны супрацьлеглых старон чатырохвугольніка, роўны 7 см і 11 см, а адна з дыяганалей — 12 см. Знайдзіце другую дыяганаль.
- 1074.** Тры акружнасці з радыусамі 8 см, 5 см і 5 см папарна датыкаюцца. Знайдзіце радыус чацвёртай акружнасці, якая датыкаецца да ўсіх трох.

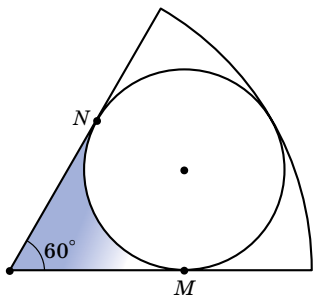


Рыс. 331

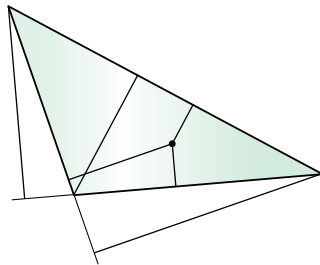
- 1075.** Цэнтры трох акружнасцей з радыусамі 3 см, 3 см і 6 см, адна з якіх датыкаецца да дзвюх іншых, ляжаць на адной прамой (рыс. 331). Знайдзіце радыус чацвёртай акружнасці, якая датыкаецца да ўсіх трох.
- 1076.** Сярэдзіны старон паралелаграма злучаны з вяршынямі супрацьлеглай стараны. Знайдзіце, якую частку плошчы паралелаграма складае плошча васьмівугольніка, абмежаванага праведзенымі адрэзкамі.
- 1077.** Знайдзіце перыметр і плошчу трохвугольніка, вяршыні якога з'яўляюцца асновамі вышынь трохвугольніка са старанамі, роўнымі 7 см, 8 см і 9 см.
- 1078.** Вугал A трохвугольніка ABC на 90° большы за вугал B . Знайдзіце старану AB , улічыўшы, што $AC = 15$ см і $BC = 20$ см.
- 1079.** Знайдзіце плошчу паралелаграма, у якога дыяганалі роўны $\sqrt{2}$ і $4\sqrt{3}$, а перыметр — 14.
- 1080.** Знайдзіце плошчу трапецыі, у якой дыяганалі роўны d_1 і d_2 , а вышыня — h .
- 1081.** Дзве акружнасці з радыусамі R і $3R$ датыкаюцца знешнім чынам (рыс. 332). Знайдзіце плошчу фігуры, абмежаванай імі і іх агульнай датычнай.
- 1082.** Акружнасць датыкаецца да дугі і радыусаў сектара ў пунктах M і N . Улічыўшы, што цэнтральны вугал сектара роўны 60° , а



Рыс. 332



Рыс. 333



Рыс. 334

яго радыус — R (рыс. 333), знайдзіце плошчу зафарбаванай фігуры.

- 1083.** Дыяметр акружнасці з'яўляецца асновай правільнага трохвугольніка. Знайдзіце, якая частка плошчы трохвугольніка знаходзіцца па-за кругам.
- 1084.** Праз вяршыні квадрата праведзены прамыя, якія ўтвараюць са старанамі вуглы велічынёй 60° . Знайдзіце, якая частка плошчы квадрата абмежавана праведзенымі прамымі.
- 1085.** Дакажыце, што калі плошчы двух прамавугольных трохвугольнікаў адносяцца як квадраты іх гіпатэнуз, то такія трохвугольнікі падобныя.
- 1086.** Унутры трохвугольніка адзначаны пункт. З яго праведзены перпендыкуляры да старон і знойдзены адносіны гэтых перпендыкуляраў да паралельных ім вышынь (рыс. 334). Дакажыце, што сума гэтых адносін роўна адзінцы.
- 1087.** Прамымі, паралельнымі дыяганалі паралелаграма, ён раздзелены на тры роўнавялікія фігуры. Знайдзіце, у якой адносіне гэтыя прамыя раздзяляюць стораны паралелаграма.
- 1088.** Круг з радыусам R раздзелены дзвюма акружнасцямі з тым самым цэнтрам на тры роўнавялікія фігуры. Знайдзіце радыусы гэтых акружнасцей.
- 1089.** На старане трохвугольніка з плошчай 162 м^2 выбраны два пункты, якія раздзяляюць яе ў адносіне $2 : 3 : 4$. Праз гэтыя пункты праведзены прамыя, паралельныя старане трохвугольніка. Знайдзіце плошчы частак, на якія гэтыя прамыя раздзялілі трохвугольнік.
- 1090.** Адрэзкі AB і CD ляжаць на скрыжавальных прамых, пункты M і N — сярэдзіны гэтых адрэзкаў (рыс. 335). Дакажыце, што $MN < \frac{AC + BD}{2}$.

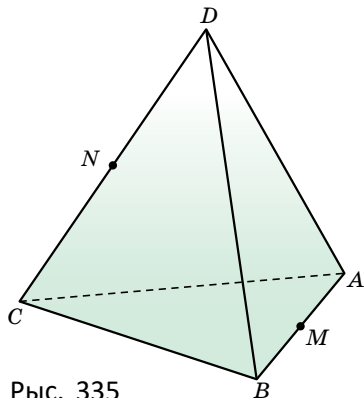


Рис. 335

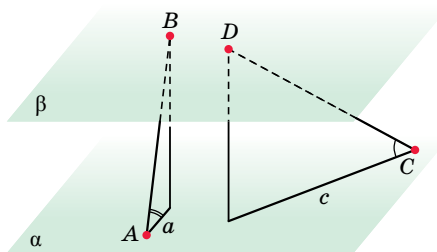


Рис. 336

- 1091.** У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ асновай з'яўляецца трохвугольнік ABC , у якім $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = AC = a$. Улічыўшы, што $SA = SB = SC = b$, знайдзіце адлегласць паміж прамымі AB і CS .
- 1092.** Пункт M прасторы знаходзіцца на адлегласці a ад вяршынь правільнага шасцівугольніка і на адлегласці b ад яго стараны. Знайдзіце адлегласці ад пункта M да плоскасці шасцівугольніка і да яго меншай дыяганалі.
- 1093.** Кант куба роўны a . Праз цэнтр куба праводзяць плоскасць, паралельную дыяганалям дзвюх сумежных граняў. Знайдзіце магчымыя значэнні плошчы сячэння.
- 1094.** Праз цэнтр куба з кантам 1 см праводзяць плоскасць, перпендыкулярную да яго дыяганалі. Знайдзіце плошчу сячэння.
- 1095.** Пункт M прасторы знаходзіцца на адлегласці a ад вяршынь прамавугольніка і на адлегласці d ад яго плоскасці. Знайдзіце стараны прамавугольніка, улічыўшы, што іх адносіна роўна k .
- 1096.** Канцы адрэзкаў AB і CD ляжаць у паралельных плоскасцях α і β . Вугал паміж плоскасцю α і адрэзкам AB удвая меншы за вугал паміж адрэзкам CD і гэтай самай плоскасцю (рыс. 336). Улічыўшы, што праекцыі адрэзкаў AB і CD на плоскасць α роўны a і c адпаведна, знайдзіце адлегласць паміж плоскасцямі.
- 1097.** Даўжыні старон трохвугольніка роўны a , a і b , яго праекцыя на плоскасць з'яўляецца роўнастароннім трохвугольнікам. Знайдзіце даўжыню яго стараны.
- 1098.** Ёсць ромб з дыяганалямі d_1 і d_2 . Плоскасць α праходзіць праз адну са старон ромба і ўтварае вугал φ з іншай яго старонай. Знайдзіце плошчу праекцыі ромба на плоскасць α .

1099. У прамавугольным паралелепіедзе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ канты асновы ўдвая меншыя за бакавыя канты. Выявіце ў шпытку гэты паралелепіед і агульны перпендыкуляр да прамых BA_1 і CB_1 . Знайдзіце даўжыню гэтага перпендыкуляра, улічыўшы, што кант асновы роўны a .

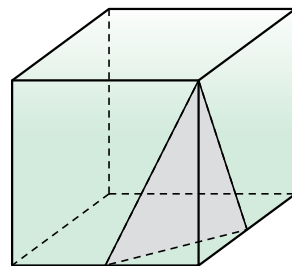
1100. Дыяганаль бакавой грані правільнай трохвугольнай прызмы, роўная 6, утварае вугал у 30° з плоскасцю другой бакавой грані. Знайдзіце аб'ём прызмы.

1101. Плоскасць праходзіць праз вяршыню куба і сярэдзіны двух кантаў (рыс. 337). Знайдзіце адносіну аб'ёмаў утвораных частак, улічыўшы, што адна з іх — трохвугольная піраміда.

1102. Знайдзіце аб'ём прамога паралелепіпеда, улічыўшы, што яго дыяганаль мае даўжыню 13 см, нахілена да плоскасці асновы пад вуглом $\arctg 2,4$ і ўтварае з большым кантам асновы вугал $\arctg 0,75\sqrt{17}$.

1103. У аснове прамога паралелепіпеда ляжыць ромб са стараной a . Дыяганалі паралелепіпеда ўтвараюць з плоскасцю асновы вуглы ў 30° і 45° . Знайдзіце:

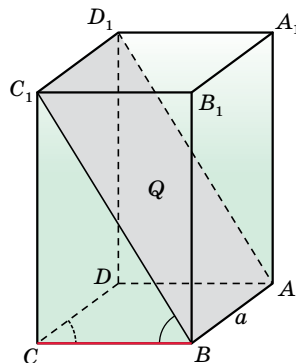
- вышыню паралелепіпеда;
- вуглы ромба;
- плошчу асновы паралелепіпеда;
- плошчы дыяганальных сячэнняў паралелепіпеда;
- аб'ём паралелепіпеда.



Рыс. 337

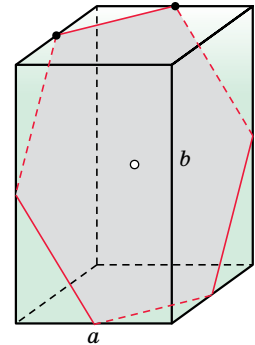
1104. У нахіленай трохвугольнай прызме дзве бакавыя грані ўзаемна перпендыкулярныя, іх агульны кант даўжынёй 45 см адлеглы ад іншых бакавых кантаў на 11 см і 60 см. Знайдзіце бакавую паверхню і аб'ём прызмы.

1105. Кант асновы прамога паралелепіпеда роўны a , сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз гэты кант і дыяганаль бакавой грані, мае плошчу Q і ўтварае з бакавой гранню двухгранны вугал, велічыня якога роўна велічыні вострага вугла асновы (рыс. 338). Знайдзіце другі кант асновы.



Рыс. 338

- 1106.** Кант куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ роўны a . На дыяганалях $D_1 A$ і $A_1 B$ узяты адпаведна пункты M і N , прычым $D_1 M : D_1 A = NB : A_1 B = 1 : 3$. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні C да прамой MN .
- 1107.** У аснове прамой прызмы $ABCA_1 B_1 C_1$ ляжыць роўнастаронні трохвугольнік ABC . Сфера, радыус якой роўны канту асновы прызмы, датыкаецца да плоскасці $A_1 B_1 C_1$ і працягаў адрэзкаў AB_1 , BC_1 і CA_1 за пункты B_1 , C_1 і A_1 адпаведна. Знайдзіце канты асновы прызмы, улічыўшы, што бакавыя канты роўны 2.
- 1108.** У паралелепіпедзе з бакавым кантам 13 см перпендыкулярным сячэннем з'яўляецца ромб з дыяганаллю 8 см і плошчай 24 см^2 . Улічыўшы, што катангенс вугла паміж бакавым кантам і плоскасцю асновы роўны $2,4$, знайдзіце плошчу поўнай паверхні паралелепіпеда.
- 1109.** У паралелепіпедзе бакавы кант, роўны 8 см, нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° , дыяганальнае сячэнне, што змяшчае большую дыяганаль, перпендыкулярнае да плоскасці асновы і мае плошчу 72 см^2 . Знайдзіце плошчу другога дыяганальнага сячэння, улічыўшы, што асновай паралелепіпеда з'яўляецца ромб са стараной 6 см.
- 1110.** Сячэнне правільнай чатырохвугольнай прызмы праходзіць праз яе цэнтр і сярэдзіны двух сумежных кантаў асновы (рыс. 339). Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што кант асновы роўны a , а бакавы кант — b .
- 1111.** У прамой трохвугольнай прызме з вышыняй h двухгранны вугал пры адным бакавым канце роўны 60° , а пры другім — 30° . Сячэнне прызмы плоскасцю, якая раздзяляе папалам двухгранны вугал пры трэцім бакавым канце, мае плошчу Q . Знайдзіце:

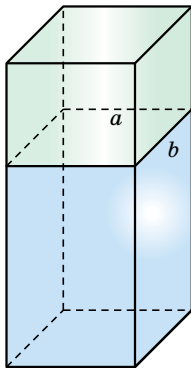


Рыс. 339

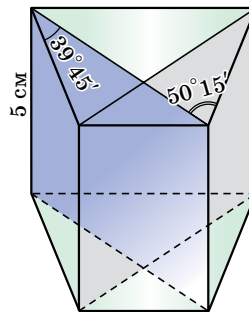
- плошчу бакавой паверхні прызмы;
- плошчу поўнай паверхні прызмы;
- аб'ём прызмы.

- 1112.** Правільная шасцівугольная прызма дыяганальнай плоскасцю раздзяляецца на дзве роўныя чатырохвугольныя прызмы, бакавая паверхня кожнай з якіх роўна 30 см^2 . Улічыўшы, што бакавы кант прызмы роўны 3 см, знайдзіце:

- плошчу бакавой паверхні шасцівугольнай прызмы;
- плошчу поўнай паверхні шасцівугольнай прызмы;



Рыс. 340



Рыс. 341

в) плошчы дыяганальных сячэнняў шасцівугольнай прызмы;
г) аб'ём шасцівугольнай прызмы.

- 1113.** Два падобныя і няроўныя прамавугольныя паралелепіпеды маюць агульную грань, стораны якой a і b (рыс. 340). Знайдзіце аб'ёмы паралелепіпедаў.
- 1114.** Сума аб'ёмаў дзвюх падобных прызм роўна V , а адносіна адпаведных кантаў — $m : n$. Знайдзіце аб'ём кожнай прызмы.
- 1115.** Бакавы кант прамога паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ роўны 12 см, а канты асновы — 8 см і 10 см. Плошча чатырохвугольніка $AB_1 C_1 D$ роўна 136 см^2 . Знайдзіце плошчы дыяганальных сячэнняў паралелепіпеда.
- 1116.** Бакавы кант паралелепіпеда роўны 20 см і нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 45° . Дыяганальнае сячэнне, што змяшчае большую дыяганаль, перпендыкулярнае плоскасці асновы. Знайдзіце плошчы дыяганальных сячэнняў паралелепіпеда, улічыўшы, што стораны асновы роўны 34 см і 42 см, а адна з яе дыяганалей — 20 см.
- 1117.** Асновай прызмы з бакавым кантам 5 см з'яўляецца раўнабедраная трапецыя. Дыяганальныя сячэнні перпендыкулярныя плоскасці асновы і ўтвараюць з непаралельнымі гранямі прызмы вуглы ў $50^\circ 15'$ і $39^\circ 45'$ (рыс. 341). Знайдзіце аб'ём прызмы, улічыўшы, што плошча дыяганальнага сячэння роўна 30 см^2 .
- 1118.** Грані ABB_1 і BCC_1 паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прамавугольнікі. Улічыўшы, што даўжыні адрэзкаў AB , BC , BB_1 , $B_1 D$ прапарцыянальныя лікам 5, 1, 2, 5, знайдзіце двухгранныя вуглы BB_1 і CC_1 .

- 1119.** Плошча поўнай паверхні правільнай чатырохвугольнай прызмы роўна 800 см^2 . Знайдзіце аб'ём гэтай прызмы, улічыўшы, што яе бакавы кант на 5 см даўжэйшы за кант асновы.

- 1120.** Плошча дыяганальнага сячэння куба роўна Q . Знайдзіце поўную паверхню куба і яго аб'ём.

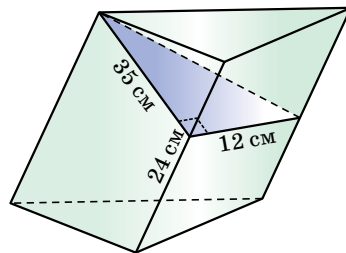
- 1121.** Знайдзіце адлегласць ад дыяганалі куба да яго канта, які з гэтай дыяганаллю не ляжыць у адной плоскасці, улічыўшы, што кант куба роўны a .

- 1122.** Дзве бакавыя грані нахіленай трохвугольнай прызмы ўзаемна перпендыкулярныя, іх агульны кант даўжынёй 24 см адлеглы ад іншых кантаў на 12 см і 35 см (рыс. 342). Знайдзіце бакавую паверхню прызмы.

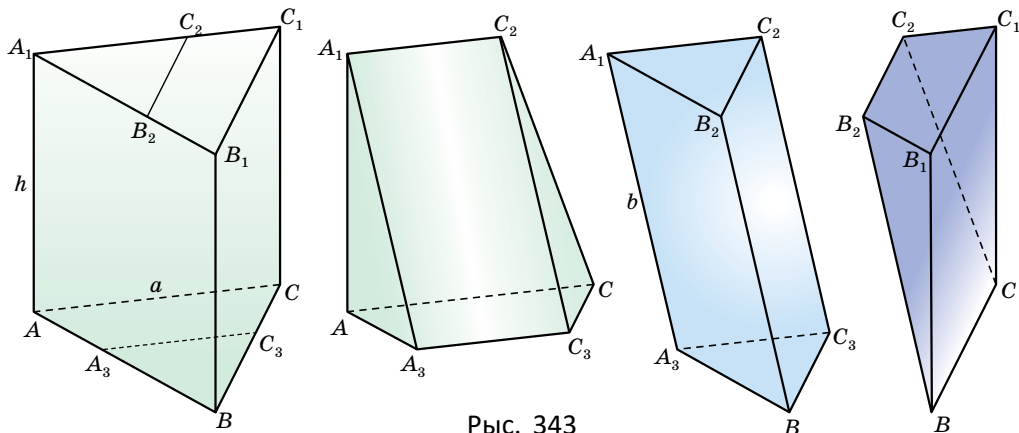
- 1123.** Канты асновы трохвугольнай прызмы роўны a , бакавы кант даўжынёй b утварае з прылеглымі кантамі асновы вуглы ў 45° . Знайдзіце бакавую паверхню прызмы.

- 1124.** У трохвугольнай прызме $ABCA_1B_1C_1$ з бакавым кантам 13 см вяршыня A_1 роўнаадлеглая ад вяршынь A , B і C . Знайдзіце поўную паверхню прызмы, улічыўшы, што $AB = AC = 10 \text{ см}$, $BC = 12 \text{ см}$.

- 1125.** Ад правільнай трохвугольнай прызмы з кантам асновы a і вышынёй h адрэзалі дзве часткі і атрымалі нахіленую трохвугольную прызму з бакавым кантам b (рыс. 343). Знайдзіце бакавую паверхню нахіленай прызмы.

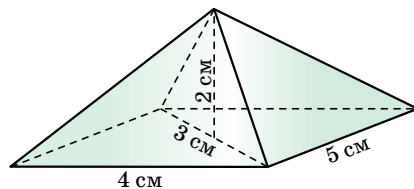


Рыс. 342



Рыс. 343

1126. Сячэнне правільнай трохвугольнай прызмы з кантам асновы a праходзіць праз бакавы кант перпендыкулярна да супрацьлеглай бакавой грані і мае плошчу Q . Знайдзіце поўную паверхню прызмы.
1127. Бакавая паверхня правільнай шасцівугольнай прызмы роўна 180 см^2 . Знайдзіце поўную паверхню прызмы, улічыўшы, што яе найбольшая дыяганаль роўна 13 см .
1128. Сячэнне ABD прамой трохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ з бакавым кантам 60 см утварае з плоскасцю асновы вугал 60° і мае плошчу 600 см^2 . Знайдзіце поўную паверхню прызмы, улічыўшы, што ў трохвугольніку ABD старана AB на 10 см карацейшая за праведзеную да яе вышыню.
1129. Адлегласці паміж бакавымі кантамі AA_1 і BB_1 , AA_1 і CC_1 трохвугольнай прызмы роўны 20 см і 26 см адпаведна. Улічыўшы, што вышыня прызмы роўна 48 см , праекцыя бакавога канта на плоскасць асновы — 14 см , $BC = 40 \text{ см}$, знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы.
1130. У аснове чатырохвугольнай піраміды ляжыць паралелаграм з дыяганаллю 3 см і старанамі 4 см і 5 см . Вышыня піраміды праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей і роўна 2 см (рыс. 344). Знайдзіце поўную паверхню піраміды.
1131. У аснове чатырохвугольнай піраміды ляжыць ромб. Дзве бакавыя грані, якія ўтвараюць двухгранны вугал у 120° , перпендыкулярныя плоскасці асновы, а дзве іншыя нахілены да яе пад вуглом 30° . Знайдзіце бакавую і поўную паверхні піраміды, улічыўшы, што яе вышыня роўна H .
1132. У асновах правільнай усечанай піраміды ляжаць квадраты са старанамі a і b . Знайдзіце бакавую паверхню піраміды, улічыўшы, што яе вышыня роўна H .
1133. У чатырохвугольнай пірамідзе з вышынёй 105 см двухгранныя вуглы пры аснове роўныя. Плоскасць, паралельная аснове, перасякае піраміду па ромбе з дыяганалямі 15 см і 20 см . Знайдзіце бакавую паверхню і аб'ём усечанай піраміды, улічыўшы, што плошча сячэння складае $\frac{1}{9}$ плошчы асновы.
1134. Двухгранныя вуглы пры аснове чатырохвугольнай піраміды з вышынёй $17,92 \text{ см}$ роўныя. Плоскасць, паралельная аснове, пера-



Рыс. 344

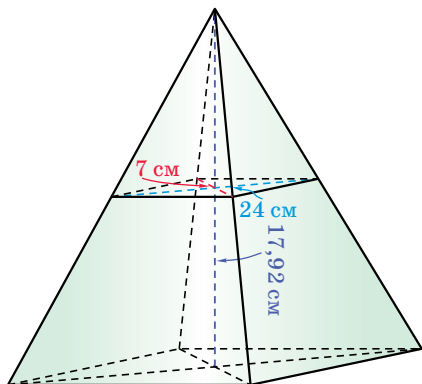


Рис. 345

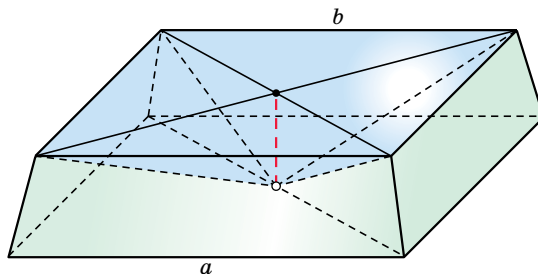
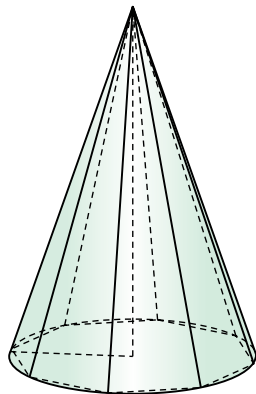


Рис. 346

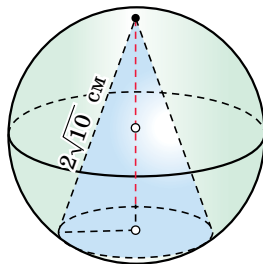
сякае піраміду па ромбе з дыяганалямі 7 см і 24 см (рис. 345). Знайдзіце поўную паверхню і аб'ём усечанай піраміды, улічыўшы, што плошча сячэння складае $\frac{1}{4}$ плошчы асновы.

- 1135.** У асновах усечанай піраміды ляжаць правільныя трохвугольнікі са старанамі a і b , адзін з бакавых кантаў перпендыкулярны плоскасці асновы і роўны c . Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды.
- 1136.** Стораны асноў правільнай чатырохвугольнай усечанай піраміды роўны a і b . Яе меншая аснова служыць асновай другой піраміды, вяршыня якой супадае з цэнтрам большай асновы ўсечанай піраміды (рис. 346). Улічыўшы, што бакавыя паверхні пірамід роўныя, знайдзіце іх агульную вышыню.
- 1137.** Вышыня піраміды роўна H . Плоскасці, паралельныя аснове піраміды, раздзяляюць яе бакавую паверхню на n частак з роўнымі плошчамі. Знайдзіце адлегласці ад вяршыні піраміды да гэтых плоскасцей.
- 1138.** Вышыня правільнай чатырохвугольнай піраміды роўна H , адлегласць ад яе сярэдзіны да бакавой грані роўна d . Знайдзіце аб'ём піраміды.
- 1139.** У правільнай шасцівугольнай пірамідзе з кантамі асновы a меншае дыяганальнае сячэнне мае плошчу S . Знайдзіце аб'ём піраміды.
- 1140.** У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе адлегласць ад вяршыні асновы да супрацьлеглага бакавога канта ў k разоў большая, чым да суседняга. Знайдзіце аб'ём піраміды, улічыўшы, што вышыня роўна H .

- 1141.** У правільнай васьмівугольнай пірамідзе з аб'ёмам V бакавы кант утвая большы за радыус апісанай каля яе асновы акружнасці (рыс. 347). Знайдзіце гэты радыус.
- 1142.** У аснове піраміды ляжыць ромб з перыметрам 100 см і дыяганаллю 14 см. Знайдзіце аб'ём піраміды, улічыўшы, што ўсе бакавыя грані нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 45° .
- 1143.** У аснове піраміды ляжыць квадрат, адзін з яе бакавых кантаў роўны 12 см і перпендыкулярны плоскасці асновы. Знайдзіце аб'ём піраміды, улічыўшы, што плошча яе большай бакавой грані роўна 160 см^2 .
- 1144.** У аснове піраміды ляжыць раўнабедраная трапецыя, дыяганаль якой з'яўляецца бісектрысай вугла пры большай аснове, роўнай 12 см. Знайдзіце аб'ём піраміды, улічыўшы, што вышыня трапецыі роўна вышыні піраміды.
- 1145.** У аснове піраміды ляжыць прамавугольнік з вымярэннямі 12 см і 30 см, яе бакавая паверхня роўна 504 см^2 . Знайдзіце аб'ём піраміды, улічыўшы, што яе вяршыня праектуецца ў пункт перасячэння дыяганалей асновы.
- 1146.** Металічны суцэльны конус, вышыня якога роўна 12,61 см, пераплаўлены ў шар з таўшчынёй сценак 1 см і ўнутраным радыусам, роўным радыусу асновы конуса. Знайдзіце ўнутраны аб'ём шара.
- 1147.** У канічную пасудзіну, вось якой вертыкальная, наліта вада, узровень якой знаходзіўся на адлегласці 8 см ад вяршыні конуса. Утваральнік воднага конуса роўны 10 см. Калі ў пасудзіну апусцілі шар, то ўзровень вады падняўся на 1 см. Знайдзіце радыус шара.
- 1148.** У шар умежана прамая трохвугольная прызма, стораны асновы якой 2 м, 2 м і 3,2 м. Паверхня прызмы роўна $18,24 \text{ м}^2$. Знайдзіце паверхню шара.
- 1149.** Паверхня шара роўна $400\pi \text{ см}^2$, а ўтваральнік конуса, умежанага ў гэты шар, роўны $2\sqrt{10} \text{ см}$ (рыс. 348). Знайдзіце аб'ём конуса.
- 1150.** Бакавыя канты піраміды, асновай якой служыць прамавугольнік, роўныя паміж



Рыс. 347



Рыс. 348

сабой. Вышыня піраміды роўна 14,4 м. Большая старана асновы роўна 21,6 м, радыус сферы, апісанай вакол гэтай піраміды, роўны 12,5 м. Знайдзіце паверхню піраміды.

1151. Бакавы кант правільнай трохвугольнай піраміды роўны радыусу апісанага каля яе шара. Знайдзіце аб'ём піраміды, улічыўшы, што кант асновы роўны α .

1152. Вакол правільнай трохвугольнай прызмы, у якой вышыня ўдвая большая за старану асновы, апісаны шар. Знайдзіце адносіну яго аб'ёму да аб'ёму прызмы.

1153. Каля шара апісана прамая прызма, у аснове якой ляжыць раўнабедраная трапецыя (рыс. 349). Паралельныя стораны трапецыі роўны 8 см і 50 см. Знайдзіце поўную паверхню і аб'ём прызмы.

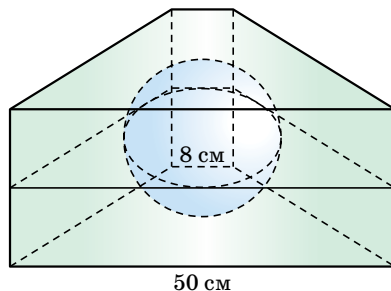


Рис. 349

1154. У трохвугольнай пірамідзе $ABCD$ кант AB роўны m , вышыні AA_1 і BB_1 граняў ACD і BCD адпаведна роўны a і b , адрэзак A_1B_1 роўны n . Знайдзіце велічыню двухграннага вугла CD .



1155. У трохвугольнай пірамідзе $ABCD$ роўныя ўсе плоскія вуглы пры вяршыні D . Улічыўшы, што двухгранны вугал з кантамі AD роўны φ , знайдзіце косінус плоскага вугла пры вяршыні D .



1156. У трохвугольнай пірамідзе $ABCD$ плоскія вуглы ADB , ADC і BDC роўны φ , φ і 90° адпаведна. Улічыўшы, што пункт D знаходзіцца на адлегласці h ад плоскасці ABC , знайдзіце AD .



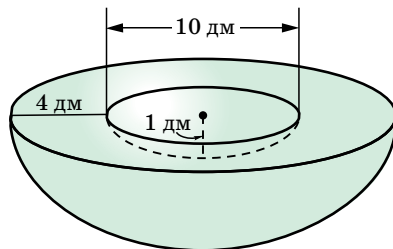
1157. Прызма апісана каля сферы. Знайдзіце плошчу яе бакавой паверхні, улічыўшы, што плошча асновы прызмы роўна S .

1158. У аснове піраміды ляжыць раўнабедраная трапецыя з вострым вуглом α , бакавыя грані нахілены да плоскасці асновы пад вуглом β . Знайдзіце плошчу поўнай паверхні піраміды, улічыўшы, што плошча ўмежанай у яе сферы роўна S .

1159. Большай асновай усечанай піраміды з'яўляецца раўнабедраны трохвугольнік ABC , у якім $\angle ABC = \alpha$, $AB = BC = a$, бакавыя грані, што змяшчаюць роўныя стораны асновы, ёй перпендыкулярныя, а трэцяя бакавая грань утварае з асновай двухгранны вугал β . Улічыўшы, што ва ўсечаную піраміду ўмежана сфера, знайдзіце яе радыус.



- 1160.** У трохвугольнай пірамідзе $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$. Дакажыце, што калі прамая l праходзіць праз сярэдзіны кантаў AC і BD , то яна праходзіць праз цэнтр O апісанай сферы, цэнтр I ўмежанай сферы і пункт M , у якім перасякаюцца адрэзкі, што злучаюць кожную вяршыню піраміды з пунктам перасячэння медыян супрацьлеглай грані.



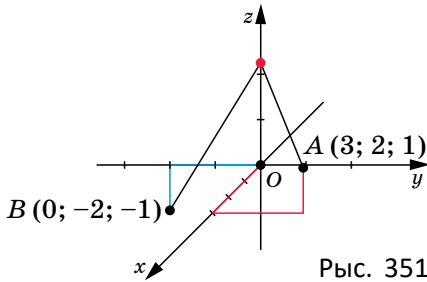
Рыс. 350

- 1161.** Плоскасць раздзяляе паверхню шара ў адносіне $1 : 2$. У якой адносіне яна раздзяляе аб'ём шара?
- 1162.** Цела мае форму шаравага сегмента, у якім зроблена канцэнтрычная выемка (рыс. 350). Шырыня кругавога кольца ў аснове сегмента роўна 4 дм; глыбіня выемкі роўна 1 дм, а яе знешні дыяметр роўны 10 дм. Знайдзіце аб'ём і поўную паверхню гэтага цела.
- 1163.** Два роўныя шары з радыусам R пры перасячэнні ўтвараюць цела, якое ў оптыцы называюць лінзай. Знайдзіце плошчу яе паверхні і аб'ём, улічыўшы, што адлегласць паміж цэнтрамі шароў роўна R .
- 1164.** З вяршыні конуса як з цэнтра апісана сферычная паверхня, якая датыкаецца да асновы конуса. Знайдзіце вугал пры вяршыні восевага сячэння конуса, улічыўшы, што ўказаная паверхня раздзяляе яго аб'ём папалам.
- 1165.** Шаравы пласт і цыліндр маюць агульныя асновы; аб'ём пласта ўдвая большы за аб'ём цыліндра. Знайдзіце велічыню дугі ў восевым сячэнні пласта.

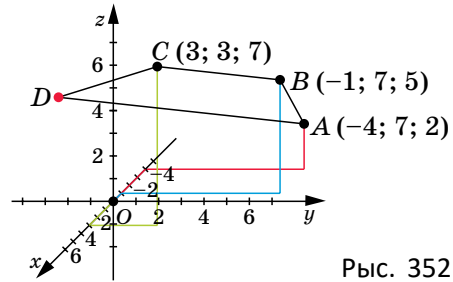
3. Каардынаты і вектары

- 1166.** Дакажыце, што пункты $A(-1; 2; 1)$, $B(-2; 1; -1)$, $C(0; -1; 2)$ ляжаць на адной прамой.
- 1167.** Пункты $A(-1; 3; 1)$, $S(0; 1; -2)$, $P(1; 0; -1)$ з'яўляюцца вяршынямі паралелаграма. Знайдзіце каардынаты яшчэ адной вяршыні гэтага паралелаграма.
- 1168.** На восі Oz знайдзіце пункт P , роўнаадлеглы ад пунктаў $A(3; 2; 1)$ і $B(0; -2; -1)$ (рыс. 351).
- 1169.** На восі Oy знайдзіце пункт P , роўнаадлеглы ад пунктаў $C(1; -1; 2)$ і $D(8; 1; 0)$.





Рыс. 351



Рыс. 352

1170. Знайдзіце адлегласці да каардынатных восей ад пункта:



- а) $F(-4; 3; -1)$; б) $G(5; 12; -35)$.

1171. Пункт M праменя AB знаходзіцца на адлегласці 7 ад яго пачатку. Знайдзіце каардынаты пункта M , улічыўшы, што:



- а) $A(-12; 6; -4)$, $B(0; 0; 0)$; б) $A(-1; 5; -4)$, $B(8; -13; -10)$.

1172. Пункты $A(-4; 7; 2)$, $B(-1; 7; 5)$, $C(3; 3; 7)$ — вяршыні раўнабедранай трапецыі $ABCD$ з асновай AD (рыс. 352). Знайдзіце каардынаты вяршыні D .



1173. Дадзены пункты $A(2; -3; 2)$, $B(-4; 4; 4)$, $C(0; 3; 2)$, $D(5; 7; 1)$. Дакажыце, што адрэзкі AC і BD перпендыкулярныя.



1174. Пункт D — праекцыя пункта $C(-1; 8; -3)$ на прамую AB . Знайдзіце каардынаты пункта D , улічыўшы, што $A(4; 5; -2)$, $B(-2; 3; 0)$.



1175. Знайдзіце адлегласці паміж прамой AB і каардынатнымі восямі, улічыўшы, што:



- а) $A(-11; 6; 2)$, $B(9; 14; -13)$; б) $A(-3; 9; 10)$, $B(9; -7; 1)$.

1176. Знайдзіце даўжыні старон і косінусы вуглоў трохвугольніка ABC , улічыўшы, што:



- а) $A(3; -1; 2)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(-1; 1; 6)$;
б) $A(3; 5; 4)$, $B(1; 2; -2)$, $C(-1; 0; 2)$.

1177. Дадзены пункты A і B . Знайдзіце ўмову, якую праўдзяць каардынаты ўсіх пунктаў M прасторы, для якіх $\angle AMB = 90^\circ$ і:



- а) $A(3; -1; 2)$, $B(-1; 1; -4)$; б) $A(3; 4; 5)$, $B(1; 2; -3)$.

1178. Пункты $A(3; -1; m)$, $B(-2; n; 1)$, $C(l; 5; 6)$ належаць плоскасці $3x - 2y + 4z + 1 = 0$. Знайдзіце значэнні m , n , l .

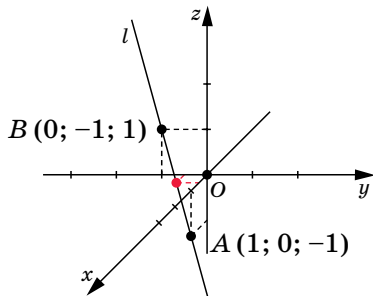


1179. Дадзены пункты A і B . Знайдзіце ўмову, якую праўдзяць каардынаты ўсіх пунктаў M прасторы, роўнаадлеглых ад A і B , улічыўшы, што:



- а) $A(3; -3; 2)$, $B(-1; 1; -4)$; б) $A(3; -2; 5)$, $B(1; 2; -3)$.

1180. Прямая l перасякае дзве каардынатыя плоскасці ў пунктах $A(1; 0; -1)$ і $B(0; -1; 1)$ (рыс. 353). Знайдзіце, у якім пункце прямая l перасякае трэцюю каардынатную плоскасць.



Рыс. 353

1181. Знайдзіце значэнні m і n , улічыўшы, што лініі перасячэння плоскасцей $3x - 2y + 4z + 1 = 0$ і $2x - y + 3z + 5 = 0$ належаць пункту:
- а) $A(1; m; n)$; б) $B(m; 2; n)$.

1182. Знайдзіце каардынаты вектара $\vec{a}$, паралельнага лініі перасячэння плоскасцей $3x - 2y + 4z + 1 = 0$ і $2x - y + 3z + 5 = 0$.

1183. Знайдзіце ўраўненне плоскасці, якая праходзіць праз лінію перасячэння плоскасцей $3x - 2y + 2z + 1 = 0$ і $2x - y + z + 5 = 0$ і пункт:

- а) $A(1; 0; -1)$; б) $B(-1; -1; 1)$.

1184. Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння каардынатных плоскасцей з прамой AB , улічыўшы, што:

- а) $A(-4; 1; -1)$, $B(1; 3; -2)$; б) $A(1; 1; 2)$, $B(2; -1; 3)$.

1185. Дакажыце, што ў адной плоскасці ляжаць пункты:

- а) $A(3; -2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(2; 1; -2)$, $D(-6; 3; 2)$;
б) $A(-1; -1; 1)$, $B(1; 2; -2)$, $C(1; -1; -5)$, $D(2; 3; -4)$.

1186. Знайдзіце ўраўненне плоскасці, якая праходзіць перпендыкулярна лініі перасячэння плоскасцей $x + 2y + z - 2 = 0$ і $3x - y + z + 1 = 0$ праз пункт:

- а) $A(3; -2; 3)$; б) $B(-1; 2; 0)$.

1187. Вызначце, на якой адлегласці ад лініі перасячэння плоскасцей $x + 2y + z - 2 = 0$ і $3x - y + z + 1 = 0$ знаходзіцца пункт:

- а) $A(-2; -7; 2)$; б) $B(-3; -1; 7)$.

1188. У плоскасці $2x - 3y + z - 3 = 0$ знаходзіцца квадрат $ABCD$. Знайдзіце каардынаты пунктаў B і D , улічыўшы, што:

- а) $A(1; 1; 4)$, $C(3; 1; 0)$; б) $A(2; 0; -1)$, $C(-2; -2; 1)$.

1189. Знайдзіце каардынаты цэнтра і радыус сферы, якая праходзіць праз пункт $C(9; 1; 10)$ і датыкаецца да каардынатных плоскасцей.

1190. Выявіце ў спытку восі Ox , Oy , Oz сістэмы каардынат. Пакажыце на рысунку лініі перасячэння каардынатных плоскасцей з плоскасцю:

а) $3x - 2y + 4z - 12 = 0$; б) $2x - 3y - z - 12 = 0$.

1191.  Выявіце ў сшытку восі Ox , Oy , Oz сістэмы каардынат. Пакажыце на рысунку лінію перасячэння плоскасцей $x - y + 3z - 6 = 0$ і $x - y - 2z - 4 = 0$.

1192.  Выявіце ў сшытку восі Ox , Oy , Oz сістэмы каардынат. Пакажыце на рысунку пункт перасячэння прамой AB з плоскасцю $x + y - 2z + 6 = 0$, улічыўшы, што:

а) $A(2; 0; -1)$, $B(-2; -2; 1)$; б) $A(2; 0; 1)$, $B(1; -3; 0)$.

1193.  Складзіце ўраўненне плоскасці, якая праходзіць праз пункт $A(2; 0; 1)$ і прамую $2x + 3y - 6 = 0$ плоскасці Oxy .

1194.  Складзіце ўраўненне плоскасці, якая праходзіць праз пункт $B(2; -2; 1)$ і прамую, па якой плоскасць $2x + y - 3z + 1 = 0$ перасякае плоскасць Oxy .

1195.  Складзіце ўраўненне плоскасці, якая ў каардынатных плоскасцях Oxy і Oxz праходзіць адпаведна праз прамыя:

а) $3x + 2y - 6 = 0$ і $x + 2z - 2 = 0$;

б) $2x - y - 2 = 0$ і $3x - z - 3 = 0$.

1196.  Складзіце ўраўненне плоскасці, якая праходзіць праз пункты $A(2; 0; 1)$ і $B(1; -3; 0)$ і паралельная:

а) восі Oz ; б) восі Oy ; в) восі Ox .

1197.  Складзіце ўраўненне плоскасці, якая праходзіць праз пункты $A(1; -1; 1)$, $B(-1; 0; 2)$ і паралельная:

а) вектару $\vec{a}(-1; 1; 3)$; б) вектару $\vec{b}(1; 2; 3)$.

1198. Дадзены пункты $A(0; -1; 2)$, $B(1; 1; 1)$, $C(1; 1; -2)$, $D(1; 0; -1)$.

-  Складзіце ўраўненне плоскасці, якая праходзіць праз прамую:

а) AB і паралельная прамой CD ;

б) CD і паралельная прамой AB .

1199. Знайдзіце каардынаты праекцыі пункта $A(1; -1; 3)$ на плоскасць:

 а) $x - z = 0$; б) $2x - y - z - 3 = 0$.

1200.  Вектар $\vec{a}(-1; 1; 3)$ паралельны прамой l , якая праходзіць праз пункт $A(1; -1; 3)$. Знайдзіце каардынаты пункта перасячэння прамой l з плоскасцю:

а) $x - 3y + z + 1 = 0$; б) $2x - 2y + z + 1 = 0$.

1201.  Вектар $\vec{a}(2; -2; 1)$ паралельны прамой l , якая праходзіць праз пункт $A(3; -1; 0)$. Знайдзіце вугал паміж прамой l і плоскасцю:

а) $2x + y - 2z + 1 = 0$; б) $2x + 6y + z - 7 = 0$.

1202. Праз вяршыню C_1 паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ праходзіць плоскасць, якая перасякае прамыя AB , AD і AA_1 адпаведна ў пунктах M , N і P (рыс. 354). Дакажыце, што праўдзіцца роўнасць $\frac{C_1 D_1}{MA} + \frac{C_1 B_1}{NA} + \frac{C_1 C}{PA} = 1$, у адносінах якой улічваюцца кірункі адрэзкаў.



1203. Праз пункт $K(x_0; y_0; z_0)$ да сферы $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2$ праведзена датычная KT , T — пункт дотыку. Знайдзіце даўжыню адрэзка KT .



1204. Запішыце ўмову датыкання сфер $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R_1^2$ і $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = R_2^2$.



1205. Складзіце ўраўненне сферы ω , якая праходзіць праз пункты $O(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$. Дакажыце, што прамая, праведзеная праз пункт O перпендыкулярна плоскасці ABC , перасякае яе і сферу ω адпаведна ў такіх пунктах M і N , што $OM : ON = 1 : 3$.



1206. Дыяганалі паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перасякаюцца ў пункце Q . Зрабіце адпаведны рысунак у спытку і запішыце вектары, якія пачынаюцца і заканчваюцца ў пазначаных пунктах і:



- а) аднолькава накіраваныя з вектарам $\overrightarrow{AC_1}$;
- б) супрацьлегла накіраваныя з вектарам $\overrightarrow{BC_1}$;
- в) роўныя вектару $\overrightarrow{AC}$;
- г) калінеарныя з вектарам $\overrightarrow{BD_1}$.

1207. На рысунку 355 паказаны правільны шасцівугольнік $ABCDEF$. Знайдзіце вуглы, якія ўтвараюць вектары $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$ з вектарам:



- а) $\overrightarrow{AD}$;
- б) $\overrightarrow{BD}$.

1208. Выкарыстаўшы рысунак 356, а), б), укажыце вектары, якія з'яўляюцца сумамі.



1209. Ці можа вектар $\vec{a} - \vec{b}$ мець даўжыню, большую за даўжыню кожнага з вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$? Пацвердзіце свой адказ прыкладамі.



1210. Вызначце, пры якіх умовах праўдзіцца роўнасць:



- а) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;
- б) $|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||$;
- в) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$;
- г) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$;
- д) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;
- е) $|\vec{a} + \vec{b}| = 0$;
- ж) $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{b}$;
- з) $\vec{a} + |\vec{a}| \cdot \vec{b} = \vec{0}$;
- і) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

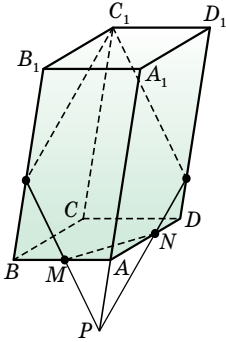


Рис. 354

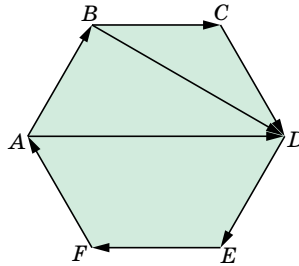


Рис. 355

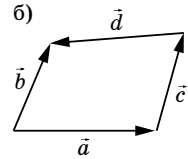
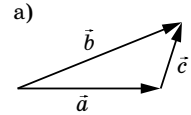


Рис. 356

1211. Визначте, при яких умовах:



- а) вектор $\vec{a} + \vec{b}$ розділяє пополам кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
 б) вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ утворюють прамий кут.

1212. Доведіть, що вектори $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $8\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ компланарні. Виразіть кожен з цих векторів через два інші.



1213. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні, $\vec{p} = \vec{a} + u\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{b} + v\vec{c}$, $\vec{r} = \vec{c} + w\vec{a}$. Доведіть, що кожен з векторів $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ неколінійний. Яку умову повинні задовольняти лінії u , v , w , щоб вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ були компланарні?



1214. Дано паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Визначте вектор $\overrightarrow{AB_1}$ через вектори $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{DA_1}$.



1215. Точки A , B , C , D не лежать у одній площині. Знайдіть такі точки M , щоб виконувалося рівність
 $\overrightarrow{MA} + 2 \cdot \overrightarrow{MB} + 3 \cdot \overrightarrow{MC} = 5 \cdot \overrightarrow{MD}$.



1216. Площина α перетинає ребра SA , SB , SC тетраедра $SABC$ у точках A_1 , B_1 , C_1 відповідно, причому $SA_1 : SA = a$, $SB_1 : SB = b$, $SC_1 : SC = c$. Медіана трикутника ABC перетинається в точці M , площина $A_1 B_1 C_1$ перетинає відрізок SM у точці M_1 (рис. 357). Знайдіть відношення $SM_1 : SM$.

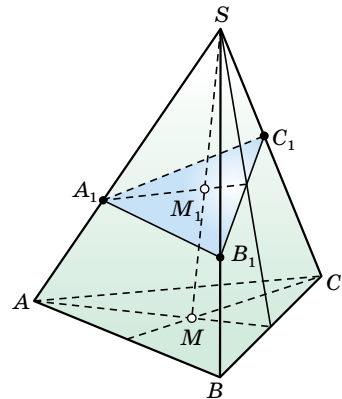
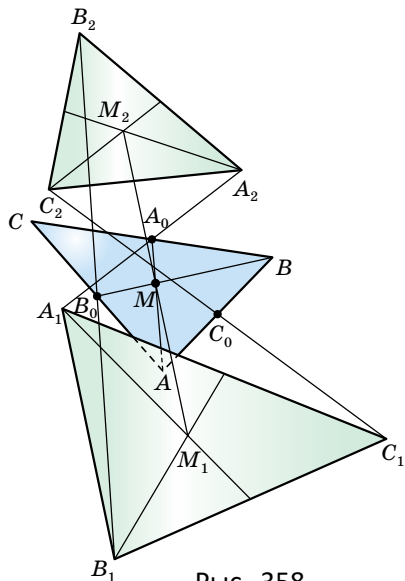


Рис. 357

- 1217.** Дадзены трохвугольнік ABC . Дакажыце, што пункт D належыць плоскасці ABC тады і толькі тады, калі для адвольнага пункта O прасторы $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ і $x + y + z = 1$.
- 1218.** Няхай пункты A_0, B_0, C_0 раздзяляюць адрэзкі BC, CA, AB у адной і той адносіне k . Дакажыце, што для дадзенай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ сума вектараў $\overrightarrow{A_1A_0} + \overrightarrow{B_1B_0} + \overrightarrow{C_1C_0}$ не залежыць ад k .
- 1219.** У правільнай пяцівугольнай прызме $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ на прамой, што праходзіць праз цэнтры O і O_1 асноў, адзначаны пункт Q так, што $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QE} = \overrightarrow{O_1Q}$. Вызначце, у якой адносіне пункт Q раздзяляе адрэзак OO_1 .
- 1220.** Пункты M і N — сярэдзіны старон AD і CD выпуклага чатырохвугольніка $ABCD$, Q — пункт перасячэння адрэзкаў AN і BM . Дакажыце, што $ABCD$ — паралелаграм, улічыўшы, што $AQ : QN = 2 : 3$ і $BQ : QM = 4 : 1$.
- 1221.** У прасторы зададзена n пунктаў $A_1, A_2, \dots, A_n$. Дакажыце, што існуе адзіны пункт M такі, што $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \dots + \overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$.
- 1222.** Вяршыні A_1, B_1, C_1 трохвугольніка $A_1B_1C_1$ сіметрычныя вяршыням A_2, B_2, C_2 трохвугольніка $A_2B_2C_2$ адносна сярэдзін A_0, B_0, C_0 старон BC, AC, AB трохвугольніка ABC (рыс. 358). Дакажыце, што пункты M_1 і M_2 перасячэння медыян трохвугольнікаў $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ сіметрычны адносна пункта M перасячэння медыян трохвугольніка ABC .
- 1223.** Няхай $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — паралелаграмы, пункты A_0, B_0, C_0, D_0 раздзяляюць адрэзкі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 у адной і той адносіне. Дакажыце, што сярэдзіны адрэзкаў A_0C_0 і B_0D_0 супадаюць.
- 1224.** Няхай пункты B_1, D_1 выбраны на прамых AB і AD , а пункты C і C_1 — так, што $ABCD$ і $AB_1C_1D_1$ — паралелаграмы. Дакажыце, што пункт перасячэння прамых BD_1 і B_1D належыць прамой CC_1 .
- 1225.** На старанах BC, AC, AB трохвугольніка ABC па-за ім пабудаваны квадраты з цэнтрамі A_1, B_1, C_1 . Дакажыце, што праўдзіцца роўнасць $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.



Рыс. 358

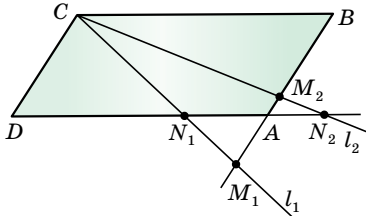


Рис. 359

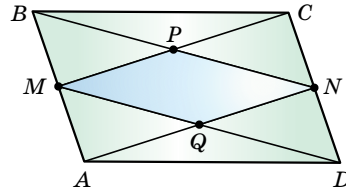


Рис. 360

1226. Проз вершину C параллелограма $ABCD$ проведзені прамыя l_1 і l_2 , якія перасякаюць адпаведна прамую AB у пунктах M_1 і M_2 , а прамую AD — у пунктах N_1 і N_2 (рыс. 359). Дакажыце, што калі $\overline{M_1B} = k \cdot \overline{BM_2}$, то $\overline{N_2D} = k \cdot \overline{DN_1}$.

1227. Пункты M і N на старанах AD і BC чатырохвугольніка $ABCD$ выбраны так, што $AM : MD = BN : NC = p : q$. Дакажыце, што $\overline{MN} = \frac{q \cdot \overline{AB} + p \cdot \overline{DC}}{q + p}$.

1228. Пункт K плоскасці трохвугольніка ABC выбраны так, што $x \cdot \overline{KA} + y \cdot \overline{KB} + z \cdot \overline{KC} = \vec{0}$. Вызначце, дзе знаходзіцца такі пункт L , што $yz \cdot \overline{LA} + xz \cdot \overline{LB} + xy \cdot \overline{LC} = \vec{0}$.

1229. Пункт K плоскасці трохвугольніка ABC выбраны так, што $x \cdot \overline{KA} + y \cdot \overline{KB} + z \cdot \overline{KC} = \vec{0}$. Вызначце, дзе ў плоскасці трохвугольніка ABC знаходзіцца такі пункт L , што $\frac{\overline{LA}}{BC^2} + \frac{\overline{LB}}{AC^2} + \frac{\overline{LC}}{AB^2} = \vec{0}$.

1230. Пункты M і N — сярэдзіны старон AB і DC чатырохвугольніка $ABCD$, адрэзкі BN і CM , AN і DM перасякаюцца ў пунктах P , Q адпаведна (рыс. 360). Дакажыце, што калі $MPNQ$ — паралелаграм, то $ABCD$ — таксама паралелаграм.

1231. Пункты P , Q , R , S — сярэдзіны старон AB , BC , CD , DA чатырохвугольніка $ABCD$, адрэзкі AR і DQ , DQ і CP , CP і BS , BS і AP перасякаюцца ў пунктах A_1 , D_1 , C_1 , B_1 адпаведна (рыс. 361). Дакажыце, што калі $A_1B_1C_1D_1$ — паралелаграм, то $ABCD$ — таксама паралелаграм.

1232. Прамая l праходзіць праз пункт перасячэння медыян M трохвугольніка ABC і перасякае прамыя BC , AC , AB у

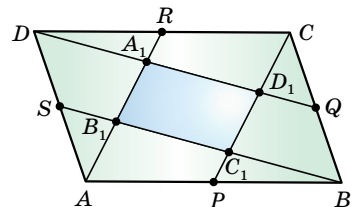


Рис. 361

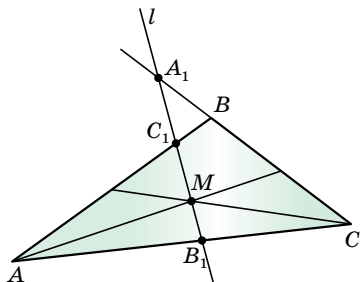


Рис. 362

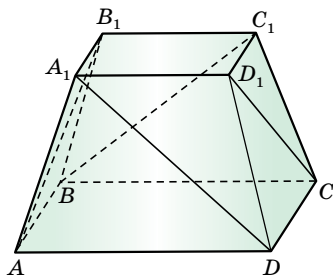


Рис. 363

пунктах A_1 , B_1 , C_1 адпаведна (рыс. 362). Дакажыце, што

$$\frac{1}{MA_1} = \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1}.$$

- 1233.** Прамая, што праходзіць праз пункт K і вяршыні A , B , C трохвугольніка ABC , перасякае прамыя BC , AC , AB у пунктах A_1 , B_1 , C_1 адпаведна. Дакажыце, што калі $\overline{AC_1} = \frac{y}{x} \cdot \overline{C_1B}$ і $\overline{BA_1} = \frac{z}{y} \cdot \overline{A_1C}$, то:

а) $\overline{CB_1} = \frac{x}{z} \cdot \overline{B_1A}$; б) $x \cdot \overline{KA} + y \cdot \overline{KB} + z \cdot \overline{KC} = \vec{0}$.

- 1234.** На прамых l_1 і l_2 адзначаны пункты A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3 адпаведна так, што $\overline{A_1A_2} = k \cdot \overline{A_2A_3}$, $\overline{B_1B_2} = k \cdot \overline{B_2B_3}$. Дакажыце, што:

а) прамыя A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 паралельныя адной плоскасці;

б) $\overline{A_2B_2} = \frac{\overline{A_1B_1} + k \cdot \overline{A_3B_3}}{1+k}$.

- 1235.** Трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ ляжаць у розных плоскасцях. Прамыя l_1 , l_2 , l_3 праходзяць адпаведна праз сярэдзіны пар адрэзкаў AB_1 і A_1B , BC_1 і B_1C , CA_1 і C_1A . Дакажыце, што прамыя l_1 , l_2 , l_3 паралельныя адной плоскасці.

- 1236.** На прамых AB , BC , CD , DA , якія не ляжаць у адной плоскасці, адзначана па два пункты K_1 і K_2 , L_1 і L_2 , M_1 і M_2 , N_1 і N_2 так, што $\overline{AK_1} = \overline{K_2B}$, $\overline{BL_1} = \overline{L_2C}$, $\overline{CM_1} = \overline{M_2D}$, $\overline{DN_1} = \overline{N_2A}$. Дакажыце, што калі пункты K_1 , L_1 , M_1 , N_1 ляжаць у адной плоскасці, то і пункты K_2 , L_2 , M_2 , N_2 таксама ляжаць у адной плоскасці.

- 1237.** Асновамі ўсечанай піраміды $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з'яўляюцца паралелаграмы (рыс. 363). Дакажыце, што любая прамая, якая перасякае тры з чатырох прамых AB_1 , BC_1 , CD_1 , DA_1 , перасякае і чацвёртую прамую або паралельна ёй.

1238. Дадзена трохвугольная піраміда $ABCD$ і пункт M , плоскасці ABM , BCM , CDM , DAM перасякаюць адпаведна прамыя CD , DA , AB , BC у пунктах P , Q , R , S , адрозных ад A , B , C , D . Дакажыце, што калі з улікам кірунку адрэзкаў $\frac{CP}{PD} = \frac{y}{x}$, $\frac{DQ}{QA} = \frac{z}{y}$, $\frac{AR}{RB} = \frac{t}{z}$, то:

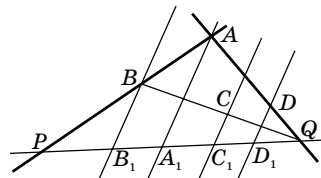


Рис. 364

а) $\frac{BS}{SC} = \frac{x}{t}$; б) $x\overrightarrow{MC} + y\overrightarrow{MD} + z\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

1239. Дадзена трохвугольная піраміда $ABCD$, пункты M і N адзначаны на прамых AB і CD . Дакажыце, што сярэдзіны адрэзкаў MC , MD , NA і NB ляжаць у адной плоскасці.

1240. Пункты B і D выбраны на прамых AP і AQ , C — пункт перасячэння прамых QB і PD . Паралельныя прамыя, праведзеныя праз пункты A , B , C , D , перасякаюць прамую PQ у пунктах A_1 , B_1 , C_1 , D_1 адпаведна (рыс. 364). Дакажыце, што праўдзіцца роўнасць $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{CC_1} = \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{DD_1}$.

1241. Дакажыце, што для любых пунктаў A , B , C , D існуе адзіны пункт M такі, што:

- а) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$;
б) праз яго праходзяць адрэзкі, якія злучаюць кожны пункт A , B , C , D з пунктам перасячэння медыян трохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца тры іншыя пункты.

1242. Ёсць трохвугольная піраміда $ABCD$ і пункт M . Медыяны трохвугольнікаў BCD , ACD , ABD , ABC перасякаюцца ў пунктах A_1 , B_1 , C_1 , D_1 адпаведна. Дакажыце, што прамыя, праведзеныя праз пункты A_1 , B_1 , C_1 , D_1 паралельна адпаведна прамым MA , MB , MC , MD , перасякаюцца ў адным пункце.

1243. Ёсць трохвугольная піраміда $ABCD$ і пункт M , пункты A_1 , B_1 , C_1 , D_1 — пункты перасячэння прамых MA , MB , MC , MD адпаведна з плоскасцямі $B_1C_1D_1$, $A_1C_1D_1$, $A_1B_1D_1$, $A_1B_1C_1$ (рыс. 365). Дакажыце, што праўдзіцца роўнасць

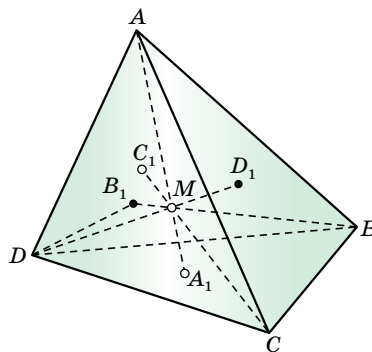


Рис. 365

$\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} + \frac{MD_1}{DD_1} = 1$, у адносінах якой улічваюцца кірункі адрэзкаў.

- 1244.** Пункт G на адрэзку DM , дзе M — пункт перасячэння медыян трохвугольніка ABC , выбраны так, што $DG = 3GM$. Плоскасць, якая праходзіць праз пункт G , перасякае прамыя DA , DB , DC у пунктах A_1 , B_1 , C_1 адпаведна. Дакажыце, што праўдзіцца роўнасць



$\frac{AA_1}{DA_1} + \frac{BB_1}{DB_1} + \frac{CC_1}{DC_1} = 1$, у адносінах якой улічваюцца кірункі адрэзкаў.

- 1245.** Пункт G на адрэзку DM , дзе M — пункт перасячэння медыян трохвугольніка ABC , выбраны так, што $DG = 3GM$. Прамая l , праведзеная праз пункт G , перасякае плоскасці BCD , CDA , DAB , ABC у пунктах A_1 , B_1 , C_1 , D_1 адпаведна. Дакажыце, што праўдзіцца роўнасць $\frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GB_1} + \frac{1}{GC_1} + \frac{1}{GD_1} = 0$, у якой улічваюцца кірункі адрэзкаў.



- 1246.** Прамая перасякае плоскасці BCD , CDA , DAB , ABC у пунктах A_1 , B_1 , C_1 , D_1 адпаведна. Дакажыце, што сярэдзіны адрэзкаў AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 ляжаць у адной плоскасці.



- 1247.** У трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ супадаюць пункты перасячэння медыян. Дакажыце, што сума дзевяці квадратаў адлегласцей паміж вяршынямі розных трохвугольнікаў залежыць толькі ад даўжынь старон трохвугольнікаў і не залежыць ад іх узаемнага размяшчэння.



- 1248.** У акружнасць з радыусам R умежаны правільны n -вугольнік. Знайдзіце суму квадратаў адлегласцей ад адной з яго вяршынь да астатніх.



- 1249.** Няхай дадзены адрэзкі AB і CD . Пункты M і M_1 раздзяляюць адпаведна адрэзак AB унутраным і знешнім чынам у адносіне $\frac{AC}{BD}$, а пункты N і N_1 раздзяляюць у такой самай адносіне адрэзак CD . Дакажыце, што адрэзкі MN і M_1N_1 перпендыкулярныя.



- 1250.** Усе плоскія вуглы пры вяршыні S тэтраэдра $SABC$ прамыя. Дакажыце, што трохвугольнік ABC востравугольны.



- 1251.** Дакажыце, што калі ў тэтраэдра цэнтр апісанай акружнасці з'яўляецца цэнтрам цяжару, то супрацьлеглыя канты гэтага тэтраэдра папарна роўныя.



- 1252.** Дакажыце, што калі супрацьлеглыя звёны замкнёнай шасцізвёнавай ломанай папарна паралельныя, то яны і папарна роў-



ныя, а сама ломаная мае цэнтр сіметрыі.

1253. У трохвугольніку ABC вугал C прамы, $AC = b$, $BC = a$. Выразіце вектар $\overrightarrow{CM}$ праз вектары $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$, улічыўшы, што:



- а) M — аснова вышыні, праведзенай з вяршыні C ;
б) M — цэнтр умежанай акружнасці.

1254. У трохвугольніку ABC праведзена бісектрыса AL . Улічыўшы, што $AB = c$ і $AC = b$, дакажыце роўнасць $\overrightarrow{AL} = \frac{b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}}{b + c}$.



1255. Трохвугольнік ABC умежаны ў акружнасць з цэнтрам O , CC_1 — яго вышыня. Выразіце вектар $\overrightarrow{OC_1}$ праз вектары $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.



1256. Трохвугольнік ABC умежаны ў акружнасць з цэнтрам O , CC_1 — яго бісектрыса. Устаноўце залежнасць паміж вугламі трохвугольніка, улічыўшы, што $\angle COC_1 = 90^\circ$.



1257. Прамавугольныя трохвугольнікі AOB і COD маюць агульную вяршыню прамых вуглоў, M і N — пункты перасячэння прамых AC і BD , AD і BC адпаведна (рыс. 366). Дакажыце, што трохвугольнік MON таксама прамавугольны.



1258. Стораны AB , AC , BC трохвугольніка ABC адпаведна роўны c , b , a . Дакажыце, што пункт Q з'яўляецца цэнтрам акружнасці, умежанай у трохвугольнік ABC , тады і толькі тады, калі $a \cdot \overrightarrow{QA} + b \cdot \overrightarrow{QB} + c \cdot \overrightarrow{QC} = \vec{0}$.



1259. Каля трохвугольніка ABC апісана акружнасць з цэнтрам O . Улічыўшы, што $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, дакажыце, што праўдзіцца роўнасць:



- а) $\sin 2\alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2\beta \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2\gamma \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$;
б) $(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) \cdot \overrightarrow{OA} + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma) \cdot \overrightarrow{OB} + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$,
калі трохвугольнік ABC не прамавугольны.

1260. У пункце H перасякаюцца прамыя, якія змяшчаюць вышыні трохвугольніка ABC . Дакажыце, што праўдзіцца роўнасць

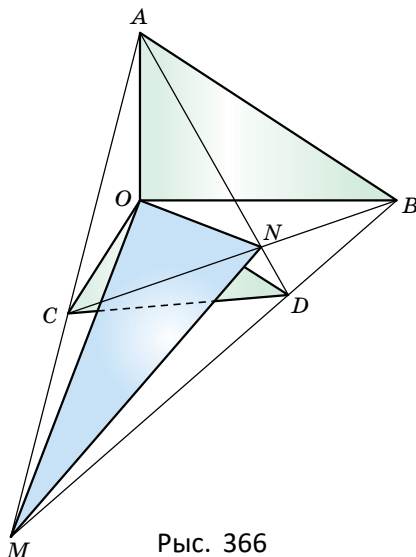


Рис. 366

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \overrightarrow{HA} + \operatorname{tg} \beta \cdot \overrightarrow{HB} + \operatorname{tg} \gamma \cdot \overrightarrow{HC} = \vec{0}$, у якой $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.

- 1261.** У трохвугольнік ABC умежана акружнасць, якая датыкаецца да старон BC , AC , AB у пунктах A_1 , B_1 , C_1 адпаведна. Дакажыце, што прамыя AA_1 , BB_1 , CC_1 перасякаюцца ў адным пункце J і пры гэтым $(p-a) \cdot \overrightarrow{JA} + (p-b) \cdot \overrightarrow{JB} + (p-c) \cdot \overrightarrow{JC} = \vec{0}$, дзе $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $2p = a + b + c$.



- 1262.** У трохвугольніку ABC праведзены медыяны AA_1 , BB_1 , CC_1 . Дакажыце, што праўдзіцца роўнасць:



- а) $\operatorname{ctg} \angle BC_1C + \operatorname{ctg} \angle CA_1A + \operatorname{ctg} \angle AB_1B = 0$;
 б) $\operatorname{ctg} \angle BCC_1 + \operatorname{ctg} \angle CAA_1 + \operatorname{ctg} \angle ABB_1 =$
 $= \operatorname{ctg} \angle ACC_1 + \operatorname{ctg} \angle BAA_1 + \operatorname{ctg} \angle CBB_1$.

- 1263.** Дакажыце, што для трохвугольніка ABC з плошчай S праўдзіцца роўнасць $\operatorname{ctg} \angle BAC + \operatorname{ctg} \angle CBA + \operatorname{ctg} \angle ACB = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$, дзе $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.



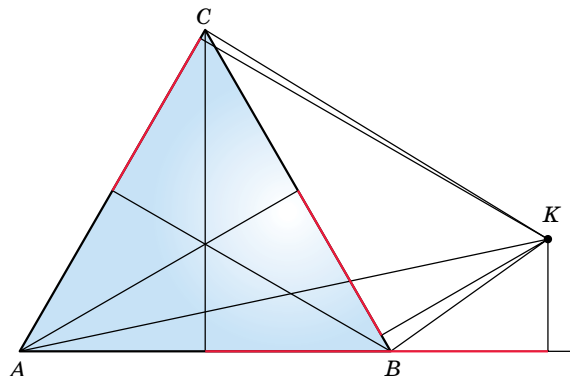
- 1264.** У плоскасці правільнага трохвугольніка ABC адзначаны пункт K . Адрэзкі KA , KB , KC праектуюцца адпаведна на прамыя BC , CA , AB (рыс. 367). Дакажыце, што сума дзвюх з гэтых праекцый роўная трэцяй.



- 1265.** Плоскія вуглы BSC , CSA , ASB трохвугольнай піраміды $SABC$ роўны адпаведна α , β , γ . Знайдзіце косінус вугла паміж:

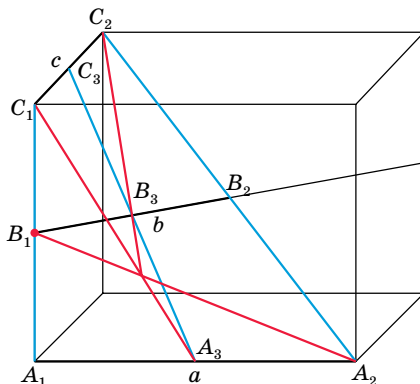


- а) кантам SA і бісектрысай вугла BSC ;
 б) бісектрысамі вуглоў ASB і ASC .



Рыс. 367

1266. Тры папарна скрыжавальныя прамыя a , b , c перасечаны трыма іншымі прамымі ў пунктах A_1, A_2 і A_3, B_1, B_2 і B_3, C_1, C_2 і C_3 (рыс. 368). Дакажыце, што прамыя A_2B_1, A_3C_1 і B_3C_2 праходзяць праз адзін пункт або паралельныя.



Рыс. 368

1267. Дакажыце, што калі звёны AB, BC, CD, DA замкнёнай ломанай датыкаюцца да:

- а) пэўнай сферы, то пункты дотыку ляжаць у адной плоскасці;
- б) пэўнага цыліндра, то пункты дотыку ляжаць у адной плоскасці;
- в) пэўнага конуса, то пункты дотыку ляжаць у адной плоскасці.

1268. У аснову цыліндра ўмежаны трохвугольнік ABC , пункт K выбраны на бакавой паверхні цыліндра. Дакажыце, што асновы перпендыкуляраў, апущаных з пункта K на прамыя AB, BC, CA , ляжаць на адной прамой.

1269. Дакажыце, што калі тры прамыя, якія змяшчаюць вышыні трохвугольнай піраміды, перасякаюцца ў адным пункце, то праз гэты пункт праходзіць і прамая, якая змяшчае чацвёртую вышыню.

1270. У трохвугольную піраміду $ABCD$ умежана сфера з цэнтрам I . Дакажыце, што праўдзіцца роўнасць

$$s_1 \cdot \overrightarrow{OA} + s_2 \cdot \overrightarrow{OB} + s_3 \cdot \overrightarrow{OC} + s_4 \cdot \overrightarrow{OD} = \vec{0},$$

дзе s_1, s_2, s_3, s_4 — плошчы граняў BCD, CDA, DAB, ABC адпаведна.

1271. Праз даўжыні кантаў трохвугольнай піраміды $ABCD$ выразіце:

- а) косінус вугла паміж кантамі AB і CD ;
- б) адлегласць ад вяршыні D да пункта перасячэння медыян трохвугольніка ABC .

1272. Пункты M і N выбраны адпаведна на скрыжавальных прамых AD і BC так, што MN — іх агульны перпендыкуляр. Выразіце вектар $\overrightarrow{MN}$ праз вектары $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DC}$.

1273. У трохвугольнай пірамідзе $ABCD$ канты асновы ABC і кант DA роўны 1, канты DB і DC — $\sqrt{2}$. Вызначце, у якой адносіне канты AB і CD раздзяляе іх агульны перпендыкуляр.



1274. Выразіце адлегласць ад вяршыні D трохвугольнай піраміды $ABCD$ да яе асновы ABC праз вектары $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DC}$.



4. Геаметрычныя пабудаванні

1275. Пабудуйце адрэзак даўжынёй $a + b - c$, улічыўшы, што a , b , c — даўжыні дадзеных адрэзкаў.

1276. Пабудуйце вугал велічынёй $\alpha + \beta - \varphi$, улічыўшы, што α , β , φ — велічыні дадзеных вуголоў.

1277. Дадзены адрэзак AB раздзяліце на 4 долі, на 8 долей.

1278. Дадзены вугал ABC раздзяліце на 4 долі, на 8 долей.

1279. Пабудуйце адрэзак з канцамі на дзвюх дадзеных прамых, які роўны і паралельны дадзенаму адрэзку AB .

1280. Пабудуйце пункт, што знаходзіцца:

а) на адлегласці $2a$ ад дадзеных пунктаў A і B , улічыўшы, што a — даўжыня адрэзка AB ;

б) на адлегласцях a і b ад дадзеных пунктаў A і B .

1281. Праз дадзены пункт C правядзіце прамую так, каб ён быў сярэдзінай адрэзка з канцамі на дзвюх дадзеных прамых.

1282. Праз дадзены пункт C правядзіце прамую так, каб дзве дадзеныя акружнасці высякалі з яе роўныя адрэзкі.

1283. Паралельна старане дадзенага трохвугольніка пабудуйце прамую, адрэзак якой з канцамі на старанах гэтага трохвугольніка роўны суме адрэзкаў, заключаных паміж гэтай прамой і асновай.

1284. Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік:

а) па яго аснове і вугле пры аснове;

б) па яго аснове і вугле супраць асновы;

в) па яго аснове і адрэзку, роўным перыметру;

г) па яго бакавой старане і адрэзку, роўным перыметру;

д) па яго бакавой старане і вышыні да асновы;

е) па яго вышыні і вугле пры вяршыні;

ж) па яго аснове і вышыні да бакавой стараны;

з) па яго бакавой старане і суме вышыні і асновы;

і) па яго бакавой старане і рознасці вышыні і асновы.

1285. Пабудуйце прамавугольны трохвугольнік:

- а) па яго катэце і медыяне, праведзенай да іншага катэта;
- б) па яго катэце і медыяне, праведзенай да гэтага катэта;
- в) па яго катэце і вышыні, праведзенай да гіпатэнузы;
- г) па яго вострым вугле і яго бісектрысе;
- д) па яго вострым вугле і медыяне, праведзенай да гіпатэнузы;
- е) па яго гіпатэнузе і медыянах, праведзеных да катэтаў.

1286. Пабудуйце трохвугольнік:

- а) па яго вугле і дзвюх вышынях, праведзеных да старон гэтага вугла;
- б) па дзвюх яго старанах і вугле супраць адной з іх;
- в) па дзвюх яго вышынях і медыяне, праведзенай да трэцяй стараны;
- г) па дзвюх яго вышынях і медыяне, што выходзіць з вяршыні, з якой праведзена адна з вышынь;
- д) па яго старане, супрацьлеглым вугле і адрэзку, роўным перыметру;
- е) па яго вышыні, перыметры і вугле пры аснове;
- ж) па двух яго вуглах і бісектрысе, праведзенай з трэцяга вугла;
- з) па яго старане, супрацьлеглым вугле і радыусе ўмежанай акружнасці;
- і) па суме квадратаў яго старон, вугле паміж імі і радыусе апісанай акружнасці;
- к) па яго аснове, медыяне, праведзенай да яе, і вугле паміж гэтай медыянай і вышынёй, праведзенай да асновы;
- л) умежаны ў дадзеную акружнасць, працягі вышыні, бісектрысы і медыяны якога, што праведзены з адной вяршыні, праходзяць праз тры дадзеныя на акружнасці пункты.

1287. Пабудуйце квадрат:

- а) па суме яго стараны з дыяганаллю;
- б) тры вяршыні якога ляжаць на трох дадзеных паралельных прамых.

1288. Пабудуйце паралелаграм, сярэдзіны трох старон якога знаходзяцца ў трох дадзеных пунктах.

1289. Дадзены дзве канцэнтрычныя акружнасці. Правядзіце прамую так, каб хорды, што высякаюцца на ёй, адносіліся як 3 : 1.

1290. Праз дадзены па-за акружнасцю пункт правядзіце сякучую так, каб утвораная хорда была роўна знешняй частцы сякучай.

1291. Пабудуйце акружнасць, якая:

- а) датыкаецца да старон дадзенага вугла і праходзіць праз дадзены пункт на яго старане;
- б) датыкаецца да адной стараны дадзенага вугла і высякае з другой яго стараны адрэзак дадзенай даўжыні;
- в) мае дадзены радыус і высякае на старанах дадзенага вугла адрэзкі дадзенай даўжыні.

1292. Праз дадзены пункт правядзіце прамую так, каб дзве дадзеныя паралельныя прамыя высякалі з яе адрэзак дадзенай даўжыні.

1293. Правядзіце прамую так, каб:

- а) дзве дадзеныя перасякальныя прамыя высякалі з яе адрэзак дадзенай даўжыні і вугал з адной з іх быў роўны дадзенаму вуглу;
- б) яна датыкалася да дадзенай акружнасці і ўтварала з дадзенай прамой дадзены вугал.

1294. Пабудуйце пункт, які знаходзіцца:

- а) на дадзенай адлегласці ад дадзенага пункта і на дадзенай адлегласці ад дадзенай прамой;
- б) на роўных адлегласцях ад старон дадзенага вугла і на дадзенай адлегласці ад дадзенай прамой;
- в) на роўных адлегласцях ад двух дадзеных пунктаў і на дадзенай адлегласці ад дадзенай прамой.

1295. Пабудуйце чатырохвугольнік:

- а) па трох яго старанах і дзвюх дыяганалях;
- б) па трох яго старанах, вугле і дыяганалі;
- в) па чатырох яго старанах і вугле;
- г) па дзвюх яго дыяганалях, вугле паміж імі і дзвюх старанах;
- д) па трох яго старанах і двух суседніх вуглах;
- е) па двух суседніх вуглах, вугле паміж дыяганалямі і дзвюх сумежных старанах;
- ж) па трох яго вуглах і дзвюх супрацьлеглых старанах.

АДКАЗЫ

10 клас

4. $35 + 12\sqrt{10} + \sqrt{185}$. 5. $24 + 18\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$ см. 6. 10. 7. $216 + 108\sqrt{3}$ см². 8. 96 см.
 9. $24 + 80\sqrt{3}$ см². 10. 916. 11. $216 + 120\sqrt{3} + 10\sqrt{318}$. 12. $144 + 216\sqrt{2}$.
 13. а) $144 + 96\sqrt{6}$; б) $576\sqrt{3}$. 14. 54. 15. 360 см²; $360 + 150\sqrt{3}$ см².
 16. 120 см²; $120 + 102\sqrt{3}$ см². 20. 12. 21. 1. 36. $240 - 48\sqrt{2}$ см; $768 + 32\sqrt{3}$ см².
 52. а) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{21}{16}$; в) $\frac{17\sqrt{166}}{162}$. 53. 28 см. 54. 14,5. 60. 15. 67. а) 80° ;
 б) 50° ; в) 70° . 76. а) 45° ; б) 90° ; в) 45° ; г) 90° ; д) 90° ; е) 60° ; ж) 90° ;
 з) 90° ; и) 90° . 77. а) 90° ; б) 45° ; в) $\arccos 0,25$. 78. а) $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$; б) $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$;
 в) $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$; г) 90° ; д) $\arccos \frac{2\sqrt{7}}{7}$; е) $\arccos \frac{3\sqrt{7}}{14}$; ж) $\arccos \frac{\sqrt{14}}{28}$; з) $\arccos \frac{\sqrt{35}}{7}$.
 79. а) 90° ; б) 90° ; в) 90° ; г) 60° ; д) $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$; е) 45° ; ж) 45° ; з) 60° ;
 и) $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$. 80. а) $\arccos \frac{5\sqrt{2}}{8}$; б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{8}$; в) $\arccos \frac{1}{4}$; г) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{10}$;
 д) $\arccos \frac{3}{4}$; е) 90° ; ж) $\arccos \frac{3}{4}$; з) $\arccos \frac{3}{4}$; и) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$. 81. а) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$;
 б) $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$; в) $\arccos \frac{5}{8}$; г) $\arccos \frac{1}{5}$; д) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$; е) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$. 82. а) 90° ;
 б) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$; в) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{6}$. 83. а) 60° ; б) $\arccos \frac{1}{4}$; в) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$. 97. 10 см.
 99. 42. 100. 6. 102. 5; 21,6. 112. 5 см; 7 см. 119. 24; 18. 141. 60° . 143. 5 см.
 144. 9; 6. 145. а) 20 м; б) 6,25 м. 148. 1. 150. $\sqrt{3}$. 151. $\frac{\sqrt{22}}{4}$. 152. 24 см.
 153. 19,5 см. 154. b , b , $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$; b , $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$,
 $\sqrt{2a^2 + b^2}$. 155. $2\sqrt{2,2}$ см. 156. 3 см. 157. а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) 90° . 158. 5 або 2.
 159. а) 12 см; б) $5\frac{1}{3}$ см; в) 4 см; г) $2\frac{2}{3}$ см. 160. 6. 161. $a^2\sqrt{2}$. 165. $\arccos \frac{7}{12}$.
 166. a . 167. $\frac{3ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$. 168. $\arccos (\sin \alpha \sin \beta)$. 169. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{4}$. 170. 90° або
 $\arccos \frac{\sqrt{6}}{4}$. 171. $\arccos \frac{\sin \alpha}{\sqrt{3\cos^2 \alpha - 1}}$. 172. $\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \right)$. 173. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 174. $\frac{ah}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}$.
 175. 90° . 176. 90° . 177. а) 90° ; б) 45° ; в) 90° . 178. $\arccos \frac{\sqrt{93}}{31}$.
 181. $\sqrt{b^2 - a^2}$. 182. 20. 184. $9 + \sqrt{145}$ см. 185. r . 188. а) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$;

- б) $\arccos \frac{1}{6}$. **189.** а) $\arccos \frac{a\sqrt{3}}{3b}$; б) $\arcsin \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{4b^2 - a^2}}$. **190.** $\frac{c}{2} \operatorname{tg} \varphi$. **191.** 30° .
192. $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$. **193.** 120° . **194.** 1. **195.** 45° , $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.
209. $\frac{1}{3} \sqrt{9a^2 - 3b^2}$. **210.** $\frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - 4a^2}$. **211.** 105° . **212.** 2l. **213.** 45° .
214. 109 мм. **215.** $Q\sqrt{2} - \frac{Q^2}{a^2}$. **216.** $\frac{m}{2n} \sqrt{8n^2 - 2m^2}$. **217.** 90° . **218.** 90° . **219.** $\frac{m\sqrt{6}}{3}$.
221. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\arccos(-\frac{1}{3})$, $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{3})$. **224.** а) 5; б) (2; 8; 0), (1; 1; 5),
 (-2; 5; 5), (5; 4; 5), (2; 8; 5); в) (1,5; 4,5; 0), (1,5; 4,5; 5), (3; 2,5; 2,5),
 (0; 6,5; 2,5), (-0,5; 3; 2,5), (3,5; 6; 2,5). **226.** (-1; 3; 1), (1; 4; 3), (4; 2; 5).
227. (12; -1; 11), (-8; 3; -5), (0; 7; 3). **228.** $D_1(3; 4; 11)$, $B_1(1; 5; 12)$,
 $C_1(4; 5; 13)$, $A_1(0; 4; 10)$, $C(2; 2; 0)$. **230.** а) $M(-2; 1; 3)$, $N(0; -1; 1)$.
231. (1; 1; 3). **232.** 5; 3; $3\sqrt{6}$; $\sqrt{14}$. **233.** $1,5\sqrt{3}$; $4,5\sqrt{5}$; $1,5\sqrt{34}$.
238. а) $1,5\sqrt{3}$; $4,5\sqrt{5}$; б) 8,5. **252.** 0. **253.** а) $\overline{MB} = \frac{3}{4}\overline{AB} - \frac{1}{4}\overline{AC}$;
 б) $\overline{CB} = \frac{4}{3}\overline{MB} - \frac{2}{3}\overline{AC}$. **254.** а) $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}$; б) $\overline{AB} = -2\overline{MC} - 4\overline{CN}$.
255. а) $\overline{AB} = -\frac{1}{2}\overline{AF} + \frac{1}{2}\overline{AC}$; б) $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{BD} + \frac{3}{4}\overline{FC}$. **261.** а) 3; б) -10; в) $-21\sqrt{2}$.
262. а) Знак «+»; б) знак «-». **263.** а) (0° ; 90°); б) (90° ; 180°). **264.** а) $-|\vec{a}|^2$;
 б) $k|\vec{b}|^2$. **265.** а) -2; б) 0; в) $-2\sqrt{3}$. **266.** а) У паралелаграме сума квадратаў
 дыяганалей роўна суме квадратаў яго старон; б) дыяганалі паралелаграма
 роўныя, г. зн. паралелаграм з'яўляецца прамавугольнікам, значыць,
 вугал паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўны 90° ; в) дыяганалі паралелаграма
 ўзаемна перпендыкулярныя, г. зн. паралелаграм з'яўляецца ромбам,
 значыць, вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ маюць роўныя даўжыні. **267.** а) $\vec{b}^2$; б) $-2\vec{a}^2 + 9\vec{b}^2$;
 в) $2\vec{a}^2 + \vec{b}^2$; г) $7\vec{a}^2 + 8\vec{b}^2$. **269.** а) $\vec{a}^2$; б) 0. **270.** c^2 . **271.** а) $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$;
 б) $\frac{1}{2}(b^2 - a^2 - c^2)$. **273.** а) 0; б) 3; 3; в) 90° . **275.** $\frac{1}{4}\sqrt{a^2 + 9b^2}$. **278.** а) $0,5a^2$
 і $-0,5a^2$; б) $-0,5a^2$ і $0,25a^2$; в) 0 і $0,5a^2$. **279.** а) 36; -50; -57; -7; 16;
 б) $\sqrt{41}$; $\sqrt{77}$; $\sqrt{34}$; $7\sqrt{2}$; 5; $\sqrt{41}$; $\sqrt{77}$; в) 0,6; $-\frac{5\sqrt{2}}{14}$; $-\frac{57\sqrt{82}}{574}$; $-\frac{\sqrt{2618}}{374}$;
 $\frac{8\sqrt{17}}{119}$. **281.** а) $\frac{a\sqrt{13}}{3}$; б) $a\sqrt{2} - 50$; в) a ; г) $\frac{4}{3}a$. **291.** 3 : 1. **292.** 1 : 2; 1 : 5.
293. 2 : 3. **294.** 1 : 5; 7 : 3. **295.** 5 : 6. **296.** 2 : 1. **297.** 1 : 5. **298.** 5 : 1.
299. 5 : 1. **300.** $\frac{2}{3}d$. **301.** 1 : 3.

11 клас

308. 100 м^2 , 148 м^2 . 309. 90 дм^2 . 310. $\sqrt{(d^2 - d_1^2)(d_0^2 + d_1^2 - d^2)}$ або $\sqrt{(d^2 - d_0^2)(d_0^2 + d_1^2 - d^2)}$. 311. 960 см^2 , 1056 см^2 , 720 см^3 . 312. $120\sqrt{2} \text{ см}^2$, $16(2 + 9\sqrt{2}) \text{ см}^2$, $60(4 + 3\sqrt{2}) \text{ см}^3$. 313. $\sqrt{\left(\frac{Q}{S}\right)^3}$. 314. 5 см , 7 см . 315. 120° . 316. $571,2 \text{ см}^2$, 336 см^2 , 272 см^2 . 317. 63° . 318. а) 18 см ; б) 9 см ; в) $9\sqrt{3} \text{ см}$; г) $9\sqrt{2} \text{ см}$. 319. 540 см^3 . 320. 600 см^2 . 324. $28,8 \text{ см}$, $24\frac{24}{29} \text{ см}$, 20 см . 325. 840 см^2 , 1680 см^3 . 326. 3240 см^2 , $24(135 + 4\sqrt{10}) \text{ см}^2$, $2160\sqrt{10} \text{ см}^3$. 327. 30° . 328. $\arccos \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2}$. 329. $\frac{3ab}{4 \cos \alpha}$. 330. $1 : 2$. 331. $\frac{S\sqrt{2}}{2}$. 332. а) $144\sqrt{3} \text{ см}^2$, $\arccos \frac{12\sqrt{3}}{35}$; б) $393,25\sqrt{3} \text{ см}^2$, $\arccos \frac{22\sqrt{13}}{1519}$. 333. 2352 см^2 , 1428 см^2 . 334. a або $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 335. $3 + 3\sqrt{3}$. 336. $1,5\sqrt{3} \text{ см}$. 337. а) $\frac{7l^2\sqrt{3}}{6}$; б) $0,5l^2(\sqrt{3} + 6)$; в) $l^2\left(1 + \frac{1}{6\sqrt{3}}\right)$; г) $l^2\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{6} + 1\right)$. 338. а) 906 см^2 ; б) $30(55 + 9\sqrt{2}) \text{ дм}^2$. 339. 1400 см^2 , або 1420 см^2 , або 1480 см^2 . 340. 58 см . 341. $a\sqrt{6}$; $a\sqrt{2}$. 342. $\arccos \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. 343. 5280 см^2 . 344. 2592 см^2 . 345. 4428 см^2 . 346. 65 см , $3\sqrt{569} \text{ см}$. 347. al і $0,5bl$ або bl і $0,5al$. 348. $\frac{a}{4}$. 349. $5,25\sqrt{219}$. 350. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16 \cos \varphi}$, $\frac{3a^3 \operatorname{tg} \varphi}{16}$. 351. $0,5Qd \cos \alpha \sin \beta$. 352. $\frac{1}{8h}(S^2 - 4Q^2)$. 353. 2352 см^2 , 1428 см^2 . 354. a або $a\frac{\sqrt{6}}{2}$. 355. а) $15\sqrt{3} \text{ см}^2$; б) $2\sqrt{133} \text{ см}^2$. 356. а) $15\sqrt{5} \text{ см}^2$; б) 39 см^2 . 357. $240\sqrt{2} \text{ см}^2$. 358. 40 см^3 . 359. 120 см^3 . 360. $54\sqrt{2} \text{ см}^3$. 361. $18\sqrt{2} \text{ см}^3$. 362. $Q\sqrt{Q\sqrt{3} \cos \varphi \sin \varphi}$. 363. $2\sqrt{2}$, $4 + 4\sqrt{3}$. 364. $8(3 + \sqrt{3}) \text{ см}^2$. 365. $\arccos \frac{3}{\sqrt{13}}$. 366. $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$. 367. $3 : 2$. 368. 405 . 369. $25\sqrt{6} \text{ см}^3$. 370. $\frac{S}{4} \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}$. 371. $22,5\sqrt{23} \text{ см}^3$. 372. 4000 см^3 . 373. 630 см^3 . 374. $0,5a^3 \sin \alpha \sin \beta \cos^2 \beta$. 375. $0,25l^3 \sin 2\alpha \operatorname{tg}^2 \beta$. 376. $\frac{a^2}{2\sqrt{2a^2 - 4b^2}}$. 377. $\frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2$, $\frac{16\sqrt{6}}{3} \text{ см}^2$. 378. $\sqrt{a^4 - (b^2 - c^2)^2} + \sqrt{b^4 - (c^2 - a^2)^2} + \sqrt{c^4 - (a^2 - b^2)^2}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}$.

- 379.** $4\sqrt{3}(14 + \sqrt{2})$, $4\sqrt{3}(3 + 2\sqrt{2})$. **380.** $2l\sqrt{3a^2 + 4b^2}$ або $2l\sqrt{4a^2 + 3b^2}$.
381. 90° . **382.** $32\sqrt{3}$ см², $32(6 + \sqrt{6})$ см². **383.** 90° . **384.** а) 60° ; б) $\arctg \frac{8}{3}$;
 в) $\arctg \frac{\sqrt{3}}{4}$; г) $32\sqrt{3}$; д) $32\sqrt{3}$; е) $32\sqrt{3}$; ж) $32\sqrt{3}$. **385.** а) 60° ; б) 90° ;
 в) $\arctg \frac{\sqrt{3}}{6}$; г) $\arctg 2$; д) $\arctg 2\sqrt{3}$; е) $\arctg 4$; ж) $\arcsin \frac{\sqrt{39}}{13}$; з) $\arctg \frac{2}{\sqrt{13}}$;
 і) $\arctg \frac{\sqrt{15}}{5}$; к) $\arcsin \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{65}}$; л) $\arcsin \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$; м) $\sqrt{13}$ см²; н) $6(1 + \sqrt{3})$ см²;
 о) $2\sqrt{3}$ см³. **386.** а) 6 см; б) $\arcsin \frac{1}{3}$, $\arcsin \frac{2}{3}$, $\arcsin \frac{2}{3}$; в) $8\sqrt{5}$ см², $8\sqrt{5}$ см²,
 $8\sqrt{2}$ см²; г) 45° , $\arccos 2$, 45° , $\arccos 2$; д) $\arctg \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\arcsin \frac{2\sqrt{6}}{5}$; е) 45° ,
 $\arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$; ж) 64 см²; з) 32 см³. **387.** а) $162\sqrt{3}$; б) $243\sqrt{3}$; в) 81; $54\sqrt{3}$;
 г) 60° , $\arccos \frac{7}{8}$, $\arccos \frac{5}{8}$; д) $\arccos \frac{3\sqrt{6}}{8}$, $\arccos \frac{\sqrt{6}}{8}$, $\arccos \frac{\sqrt{6}}{4}$; е) 45° ;
 ж) $364,5\sqrt{3}$. **388.** ab і ab . **389.** $a^2(5 + 2\sqrt{3})$, $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **390.** а) 12; $6\sqrt{10}$;
 б) $\arccos \frac{3}{4}$; $\arccos \frac{29\sqrt{30}}{180}$; в) 72; $36\sqrt{10}$; г) 60° ; 30° ; $\arctg \frac{2}{3}$; д) 60° ;
 $\arccos \frac{3}{4}$; $\arccos(-\frac{1}{8})$; е) $\arccos \frac{3}{4}$; $\arccos \frac{4\sqrt{3}}{9}$; ж) $252\sqrt{3}$; з) 324.
394. $16(a^2 + b^2 + c^2)$. **405.** а) 598π см²; б) 1690π см³; в) 240 см²; г) 780 см²,
 $2535\sqrt{3}$ см³; д) $520\sqrt{2}$ см²; 3380 см³. **406.** 5 см. **407.** 9 см. **408.** $\pi : 1$.
409. 2 : 3. **410.** $d^2 \cos \alpha \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{2\pi} \right)$, $\frac{d^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{4\pi}$ або $d^2 \sin \alpha \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{2\pi} \right)$,
 $\frac{d^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{4\pi}$. **411.** $1 + \frac{m}{n} : \sqrt{\pi^2 + \left(\frac{m}{2n} \right)^2}$. **412.** $2\pi a(a + b)$, $\pi a^2 b$ або $2\pi b(a + b)$,
 πab^2 . **415.** 1 : 1, $a : b$. **416.** $\sqrt[3]{\left(\frac{V_1^2}{\pi V_2} \right)^2 + \left(\frac{V_2^2}{\pi V_1} \right)^2}$. **417.** $2S + \pi Q$; $0,5Q\sqrt{\pi S}$.
418. $4R^2 + l^2 = 8Rl$. **420.** $R : r$. **421.** 13 дм. **422.** 21 см. **423.** $4\left(\frac{2}{\pi} + 5 \right)$ см²
 або $5\left(\frac{5}{2\pi} + 4 \right)$ см². **424.** $90\sqrt{3}$ см². **425.** $50\sqrt{3}$ см², $12,5 \cdot (16\pi + \sqrt{3})$ см²,
 $12,5 \cdot (4\pi - \sqrt{3})$ см². **426.** $2\left(\frac{l}{R} \right)^2 - \frac{2l}{R} \sqrt{\left(\frac{l}{R} \right)^2 - 1} - 1$. **427.** πa^2 . **428.** $\sqrt{D^2 - \frac{4V}{\pi l}}$.
430. $1\frac{5}{8}$ см. **431.** $a\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}$. **432.** а) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{2\pi a^2 \sqrt{2}}{3}(\sqrt{2} + 1)$; в) $\frac{2\pi a^3 \sqrt{3}}{9}$.
433. а) 2 : 3; б) 1200π см³ і 1800π см³. **434.** 9 см. **435.** 7 см. **436.** 648π см².
439. 30° . **440.** $2\pi \sqrt{\frac{2Vl}{3\sqrt{3}}}$. **441.** $\frac{16\pi}{3}$ дм³. **442.** 2 : 1, 4 : 1. **443.** $\frac{3\pi a^3}{4}$.

444. $\frac{729\sqrt{3}}{2} \text{ см}^3$. 445. $\frac{CS}{4\pi}$. 446. $\pi : 3, 8\pi : 9\sqrt{3}$. 448. $\frac{a \sin \alpha}{\sqrt{3 - \cos 2\alpha}}$.
449. $\frac{4}{17}(\sqrt{21} - 2)$. 450. а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 451. $720\pi \text{ см}^3$. 452. $960\pi \text{ см}^3$.
453. $4 : 1; 16 : 7$. 454. а) 1080° ; б) $360^\circ(n - 1)$. 457. $30^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$.
469. $90^\circ, 67,5^\circ, 90^\circ, 112,5^\circ$. 447. 90° . 471. 1750 см^2 . 472. $\frac{5}{7}$. 473. 60° .
474. $\frac{9S}{64}$ або $\frac{9S}{8}$. 475. 36 см^2 . 476. $\frac{a^2}{4}(2\sqrt{3} + \sqrt{15})$. 477. $6\sqrt{10} \text{ см}$ і $9\sqrt{10} \text{ см}$ або $18\sqrt{10} \text{ см}$ і $3\sqrt{10} \text{ см}$. 478. 90 см^3 . 479. 34128 см^3 . 480. 300 см^3 .
481. $1500 \text{ см}^2, 1800 \text{ см}^3$. 482. $518,4 \text{ см}^3$. 483. 13440 см^3 . 484. а) $770\frac{2}{3} \text{ см}^3$; б) 384 см^3 . 485. $448 \text{ см}^2, 448 \text{ см}^3$. 486. $\frac{d^2}{8}(3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{6})$. 487. $336 \text{ см}^3, 360 \text{ см}^2$.
488. $a^2(\sqrt{3} + \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{3 + 4\operatorname{tg}^2 \alpha})$. 489. 1050 см^3 . 490. а) $4 : 3$; б) $7 : 12$.
491. $20 \text{ см}^2, 68 \text{ см}^2$. 492. $0,75S$. 493. $39\sqrt{7} \text{ см}^3$. 494. 17640 см^2 . 495. $5 : 8$.
496. $\frac{Q\sqrt{3Q}}{3}$. 497. $\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{Q^2 - (S_1 - S_2)^2}$. 498. $0,25(3|a^2 - b^2| + \sqrt{3}(a^2 + b^2))$.
499. $-\frac{a^2\sqrt{2}\cos^2\alpha\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}$ пры $\alpha > 45^\circ$ і 0 пры $\alpha \leq 45^\circ$.
500. $\frac{a^2\sqrt{3}\cos^2\alpha(4\sin^4\alpha + 4\sin^2\alpha - 2)}{\sin^3\alpha(3 + \cos^2\alpha)}$. 501. а) $\frac{3h^2\sqrt{2}}{4}$; б) 45° . 502. 888 см^3 , 3648 см^3 . 503. $205,2 \text{ т}$. 504. $56 \text{ см}, 70 \text{ см}$. 506. $19,5\sqrt{3} \text{ см}^3$. 507. 48 см^3 .
508. $0,5\sqrt{a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2}$, $0,5\sqrt{a^2 + a_1^2 - b^2 - b_1^2 + c^2 + c_1^2}$, $0,5\sqrt{-a^2 - a_1^2 + b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2}$. 509. $0,25d$. 510. 768 см^2 . 511. $\frac{a^2}{2}(3 + \sqrt{7})$, $\frac{a^2}{2}(3 + \sqrt{7} + 3\sqrt{3})$. 512. 1395 см^3 . 513. 910 см^3 . 514. 21 см^2 . 515. а) 75 см^2 ; б) 108 см^2 . 519. $\frac{a(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}{b}$. 520. $\frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{8(3 + \operatorname{ctg} \alpha)^3}$. 521. $\frac{2\pi a^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{9\sin 2\alpha}$, $\frac{2\pi a^3}{81\sin \alpha \sin 2\alpha}$.
522. $\frac{4\pi l^4}{4l^2 - a^2 - b^2}$. 523. $\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$. 526. 32 см^2 .
527. 15° . 528. 200 см^2 . 529. $0,75l$. 530. $\frac{7l\sqrt{3}}{16}$. 531. $145152\pi \text{ см}^3, 9360\pi \text{ см}^2$, $11664\pi \text{ см}^2$. 532. $1125\pi\sqrt{3} \text{ см}^3, 450\pi \text{ см}^2, 675\pi \text{ см}^2$. 533. $1000\pi \text{ см}^3, 200\pi\sqrt{3} \text{ см}^2, 100\pi \text{ см}^2$. 534. $100\pi \text{ см}^3, 65\pi \text{ см}^2, 90\pi \text{ см}^2$. 535. 30° . 536. $80\pi \text{ см}^3$.
537. $1080\pi \text{ см}^3, 369\pi \text{ см}^2, 450\pi \text{ см}^2$. 538. $\frac{500\pi\sqrt{5}}{3} \text{ см}^3$. 539. $\frac{\pi S}{3}\sqrt{S \operatorname{ctg} \alpha}$.
540. $28224\pi \text{ см}^3, 5208\pi \text{ см}^2$. 541. $\frac{250\pi\sqrt{3}}{3} \text{ см}^3, 100\pi \text{ см}^2$. 542. $247\pi \text{ см}^2$.

543. $721\pi \text{ см}^2$. 544. 1500 см^3 , $600\pi \text{ см}^2$. 545. $\pi h^2(1 + \sqrt{2})$. 546. $\pi l^2 \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}$.
547. а) $680\pi \text{ см}^2$, $900\pi \text{ см}^3$; б) $194,4\pi \text{ см}^2$, $1296\pi \text{ см}^3$. 548. $1350\pi \text{ см}^2$, $6300\pi \text{ см}^3$. 549. а) Нельга; б) можна. 550. а) Нельга; б) можна. 551. $36\pi \text{ см}^2$, $16\pi \text{ см}^3$. 552. $\frac{3\pi l^2}{7}(1 + \sqrt{2})$, $\frac{\pi l^3 \sqrt{21}}{49}$. 553. $390\pi \text{ см}^2$. 555. $38\pi \sqrt{481} \text{ см}^2$, $3549\pi \text{ см}^3$ або $38\pi \sqrt{1241}\pi \text{ см}^2$, $\frac{304 \cdot 307 \pi}{3} \text{ см}^3$. 556. $1036\pi \text{ см}^2$, $7280\pi \text{ см}^3$.
557. $2288\pi \text{ см}^2$, $24 \cdot 832\pi \text{ см}^3$. 558. 2700 см^2 . 559. $2\pi a^2(3 \pm 3\cos\alpha + \cos^2\alpha)$. 560. $4,5l^2\cos\alpha \sin\alpha$. 561. $0,5\pi d^2\cos\alpha\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$. 562. $\left((b-a)\frac{k}{n} + a\right)^2$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. 563. $8\pi + 3\sqrt{3} : 4\pi - 3\sqrt{3}$. 567. $R\sqrt{6}$. 568. $12,5 \text{ см}$.
570. 48 см , 60 см , 64 см . 571. 21 см . 572. 20 см , 30 см . 573. $48\pi \text{ см}$. 574. $80\pi \text{ см}$. 575. 11 см або 25 см . 576. 84 см . 577. $12\frac{1}{8} \text{ см}$. 578. 60 см . 579. 10 см . 580. 9 см . 581. 24π . 582. $1 : 49$. 583. 75 см^2 . 584. а) $64\pi \text{ см}^2$; б) $348\frac{4}{9}\pi \text{ см}^2$; в) $\frac{64\pi}{9} \text{ см}^2$; г) 576 см^2 . 585. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}R$. 586. $3ab$, $\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.
587. $12R^2\sqrt{3}$. 588. $8,1 \text{ дм}$. 589. $\frac{h}{3}$. 590. $\frac{21}{16}R^3$. 591. $\frac{\pi(h^2+r^2)^2}{h^2}$. 592. $\pi r^2(7+5\sqrt{2})$. 593. 3 . 594. $r\left(1-\frac{r}{a}\right)$. 595. $96\pi \text{ дм}^3$. 596. 1254 см^3 . 597. $40\pi \text{ дм}^3$. 598. $3\pi(2\sqrt{6}-1) \text{ см}^2$. 599. $2(a^2+ab+b^2) \text{ см}^2$, $\frac{\sqrt{ab}}{3}(a^2+ab+b^2) \text{ см}^2$. 600. 64 м^3 . 601. $\frac{392\pi}{3} \text{ дм}^3$. 602. а) $\frac{a^3}{4}$; б) $4,5a^3$. 603. $\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{n^2} \cdot h$. 604. $0,48$. 605. $\frac{3}{7}$. 606. $3r$, $\frac{r}{3}$. 607. $\frac{r}{5}(5 \pm \sqrt{13})$. 608. $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{8}}$. 609. 608 см^3 . 610. 3136 см^2 . 611. 7 см . 612. 702 см^2 . 613. 13 см . 614. 17 см . 615. $2R^3$. 616. $2\pi a^2$. 617. $\frac{a^2}{2H}$. 618. а) Пры $a < H\sqrt{2}$; б) пры $a = H\sqrt{2}$; в) пры $a > H\sqrt{2}$. 619. 27 см . 620. $11\frac{4}{7} \text{ см}$. 621. 30 см . 622. а) $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$; б) $\frac{3a^2\sqrt{15}}{16}$. 623. $3 : 1$. 624. 65 . 625. а) $\frac{\sqrt{930}}{3}$; б) $9\sqrt{2}$; в) $\frac{7\sqrt{66}}{3}$. 626. $\frac{25\sqrt{73}}{8}$. 627. $\frac{\sqrt{481}}{8}$. 628. 13 см . 629. $\frac{48\pi R^2}{17}$. 630. $16 \cdot 800\pi \text{ см}^3$ або $17 \cdot 640\pi \text{ см}^3$. 631. 25 см . 632. $288\pi\sqrt{13} \text{ см}^2$. 633. а) $(17-4\sqrt{13}) : 9$;

- б) $(47 - 8\sqrt{31}) : 15$. **634.** 1583 дм^2 . **635.** $1 : 3$. **636.** $1 : 3$. **637.** $a : b$.
638. $3 : 2$. **651.** $\arccos(\sqrt{5} - 2)$. **652.** $320\pi \text{ см}^2$. **653.** $4550\pi \text{ см}^2$ або $1950\pi \text{ см}^2$. **654.** $2\pi R^2 \left(1 + \cos \frac{180^\circ}{n}\right)$. **655.** $2298\pi \text{ см}^2$. **656.** $r(\sqrt{5} - 1)$. **657.** $\frac{2}{9}$.
658. а) $\frac{dR}{R-r}$; б) $\frac{r(b+d)-bR}{\sqrt{d^2-(R-r)^2}}$; в) $\frac{r(b+d)-bR}{\sqrt{d^2-(R+r)^2}}$. **659.** $\sqrt[3]{36\pi V^2}$. **660.** $10 \text{ дм}, 7 \text{ дм}$.
663. Павялічылася ў $\sqrt[3]{n}$ разоў. **664.** $(3\sqrt{2} + 1) : 2, 2 : 1$. **665.** $3658\frac{1}{3}\pi \text{ см}^3$.
666. $M\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\right)$. **667.** $a\left(\sqrt[3]{1 + 4\left(\frac{h}{R}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^3} - 1\right)$. **668.** $1143\frac{1}{6}\pi \text{ см}^3$. **669.** $3280,5 \text{ см}^3$.
670. $486\pi \text{ см}^3$. **671.** $\frac{n\left(1 + \sqrt{5 + 4\text{tg}^2 \frac{180^\circ}{n}}\right)}{16\pi \text{tg}^4 \frac{180^\circ}{n}}$. **672.** $\frac{16n \sin \frac{360^\circ}{n} \sin^4 \frac{180^\circ}{n}}{\pi\left(1 + 4\sin^2 \frac{180^\circ}{n}\right)^3}$. **673.** 60° .
676. $4 : 1$. **677.** $\frac{500\pi}{81} \text{ см}^3$. **678.** 8 м . **679.** $90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$. **680.** Можна. **681.** 1008 см^2 .
682. $3\pi R^2$. **683.** $\frac{5\sqrt{97}}{16} \text{ см}$. **684.** $\pi R^2(1 + \sqrt{3})$. **686.** 60° . **687.** a . **690.** $\frac{4\pi a\sqrt{3}}{9}$.
691. $\pi R(\sqrt{3} - 1)$. **692.** $\frac{\pi R^2}{2}(22 + 9\sqrt{6})$. **693.** $\frac{\pi H\sqrt{3}}{2}$. **694.** $(\sqrt{2} - 1) : 1$.
695. $\frac{784\pi R^3}{375}$. **696.** $90\pi \text{ см}^2, 36\pi\sqrt{5} \text{ см}^3$. **697.** 3 см . **698.** $266\pi \text{ см}^2, 532\pi\sqrt{5} \text{ см}^3$. **699.** $4256\pi \text{ см}^3$. **700.** $9,6\pi \text{ см}$. **701.** $\frac{n(a+b)^2}{4} \text{ctg} \frac{180^\circ}{n}$.
702. $4,5 \text{ см}$. **703.** $2\pi R^3(2 - \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ пры $n = 3$; $\pi R^3\sqrt{2}$ пры $n = 4$; $\frac{\pi R^3}{\sqrt{5}}(2 + \sqrt{2\sqrt{5} - 2})$ пры $n = 5$; $\frac{1}{3}\pi R^3$ пры $n = 6$. **704.** $\frac{3}{4}(6 - \sqrt{7})$.
705. $240\pi \text{ см}^2$. **707.** $1 : 2$. **708.** $\frac{M}{6} \sqrt{\frac{M^2 + S^2}{\pi M}}$. **709.** $108\pi \text{ см}^2, 216\pi \text{ см}^2$.
710. $49 : 4864$. **711.** $34\,182\pi \text{ дм}^3$. **712.** $14\,094\pi \text{ дм}^3$.
713. $(m^3 + 3m^2n) : (3mn^2 + n^3)$. **714.** а) $\frac{11}{16}$; б) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$; в) $\frac{9\sqrt{3}}{16}$.
715. $2401\frac{1}{3}\pi \text{ см}^3$. **716.** $3528\pi \text{ дм}^3$. **717.** $\frac{2R}{n+1}, \frac{2Rn}{n+1}, \frac{3n+1}{n^2(n+3)}$. **718.** $\frac{R(\sqrt{17}+1)}{4}$.
719. $R\sqrt{0,6}$. **720.** $\approx 853 \text{ г}$. **721.** $138\frac{2}{3}\pi \text{ см}^3; 98\pi \text{ см}^2$. **724.** $\frac{\pi R^2}{2}(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})$,
 $\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{12}$. **726.** $\frac{\pi a^2}{6}$. **727.** а) $\frac{\pi S}{6}$; б) $\frac{2\pi S\sqrt{3}}{9}$; в) $\frac{2\pi S}{3}$; г) πS ; д) $\frac{4\pi S\sqrt{3}}{9}$.

728. а) 3 : 1; б) 9 : 1; в) 3 : 1; г) 2 : 1; д) 4 : 1. 729. $\frac{19\pi a^2}{9}$.
 730. $(7 - 4\sqrt{3}) : 1$. 731. 1 : 4. 732. $24\pi(\sqrt{6} - 1)$ см². 733. а) $\pi\sqrt{3} : 2$;
 б) $\pi : 1$; в) $3\pi\sqrt{3} : 2$. 734. а) $\pi : 6$; б) $\pi : 3\sqrt{3}$; в) $\pi : 6\sqrt{3}$. 735. $\frac{3s\sqrt{3}}{2\pi}\sqrt{1 + \frac{s}{s}}$.
 736. 8R. 737. 12R.

Паўтарэнне курса геаметрыі

744. 90°. 745. 5 см. 746. 54°. 747. 12°. 748. а) 100°, 55°, 25°; б) 100°, 60°, 20°; в) 100°, 32°, 48°. 750. $\arcsin 0,6$; $\arcsin 0,8$. 751. $2\arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2}$;
 $\pi - 4\arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2}$; $2\arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 752. 6 см. 757. $\sqrt{a(a+b)}$; $\sqrt{b(a+b)}$.
 758. 30°, 60°. 760. $m+n$; $n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$; $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$. 761. 15 см, 20 см, 25 см.
 762. $6\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$. 763. $8+12\sqrt{2}$. 765. $m\sqrt{2}$. 766. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}c$; $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}c$.
 767. 5; 12; 13. 768. 13 см. 769. $\arcsin 0,6$. 770. $\arctg 3$. 771. 1 : 2.
 772. 7; 24. 773. 19; $\arcsin \frac{5\sqrt{3}}{38}$; $\arcsin \frac{8\sqrt{3}}{19}$. 774. 2 см; $\arcsin \frac{3\sqrt{3}}{14}$; $\arcsin \frac{1}{7}$.
 775. 75°; $3,5\sqrt{6}$; $3,5(1+\sqrt{3})$. 776. 3 м, 6 м, 30°, 90°. 777. 60°. 778. 90°. 783. 1. 785. а) $4n - m$; б) $\frac{1}{3}n$. 786. 20, 21. 795. 55°. 796. 47°. 797. 32 см.
 799. 67°. 800. 10. 801. 128 см. 802. 96°. 803. 58 см. 806. 48 см. 807. 52°. 808. 100 см. 809. 78 см. 810. $13\sqrt{2}$ см. 811. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$. 812. 0,8.
 814. 14 см і 48 см. 821. 5 см, 10 см, 5 см. 822. $\sqrt{3} : 4$; 1 : 3. 823. 54°. 824. 24 см. 825. 8 см, 6 см. 826. 28 см, 20 см. 827. 57 см. 828. 32 см.
 829. 60°. 830. 70 см. 831. 46 см. 833. 5 см. 834. $\frac{3b-a}{2}$ см. 835. 10 см, 30 см. 841. $\frac{2r}{9}$. 842. 60 см. 843. 31,2 см. 846. 7,2 см, $21\frac{1}{80}$ см.
 847. $0,5\sqrt{a^2+b^2+ab+(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}$. 848. $2Rr$. 849. 90°. 850. 3 см.
 851. $0,5a(\sin \alpha + \sin \beta)$, $0,5a(\sin \beta - \sin \alpha)$. 852. $\frac{r}{2}(2+\sqrt{3})$. 866. 120°. 867. 13 см. 868. 24 см. 869. 14 см, $10\sqrt{3}$ см, $6\sqrt{3}$ см. 870. $2a$ або $2a(3+2\sqrt{2})$. 871. а) Датыкаліся б знешнім чынам; б) адна ўнутры другой; в) перасякаліся б; г) адна па-за другой. 872. 12 см. 873. а) 8 см; б) $16\sqrt{3}$ см

- і 32 см. **874.** 18° , 63° . **875.** 180° , 100° , 40° , 40° . **876.** 90° або 10° . **877.** 60° . **878.** 12,5 см, 12,5 см. **879.** 1 : 3. **880.** 60° . **881.** 110° , 80° . **882.** 130° , 50° . **883.** 60 см. **884.** $45^\circ - \alpha$. **885.** а) 14 см, 6 см, 2 см; б) 22 см, 6 см, 2 см. **886.** 72° . **887.** а) $2\alpha + \beta > 180^\circ$; б) $2\alpha + \beta < 180^\circ$; в) $2\alpha + \beta = 180^\circ$. **888.** 5 см. **889.** 135° , 105° , 45° , 75° . **890.** 6 см, 24 см, 30 см, 12 см. **891.** 14 см, 7 см. **892.** 18 см, 12 см, 20 см. **893.** а) $ma > nb$; б) $ma < nb$; в) $ma = nb$. **894.** $\frac{ab}{a+b}$. **895.** а) 3 : 4; б) 5 : 12; в) $m : n$. **896.** $\frac{a}{3}\sqrt{13+12\cos\alpha}$; $\frac{a}{3}\sqrt{13-12\cos\alpha}$. **897.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}(a^2+ab+b^2)$. **898.** $\frac{b^2}{2a+b}$. **899.** 12 см. **900.** 55 см, 15,3 см². **901.** 56 см, 168 см². **902.** 2,4 м. **903.** 15 см, 10 см. **904.** а) 56 см або 42 см; б) $62\frac{2}{17}$ см. **905.** $\frac{4}{9}$ см² або 4 см². **906.** $\frac{mb+na}{m+n}$. **907.** 5 см, 3 см, 2 см. **908.** 4 см, 8 см, 8 см, 4 см. **909.** 12 : 9 : 7. **912.** 12 см або 24 см. **914.** $\frac{|a-b|}{a+b}a$, $\frac{|a-b|}{a+b}b$. **915.** 1 см. **916.** 3 см. **917.** 8 см. **918.** $\frac{2Rr}{R+r}$. **919.** 6 см. **920.** 6 м. **921.** $9\frac{1}{32}$, $3\frac{3}{4}$. **922.** 7 см. **923.** 30° , 60° , 90° . **924.** 40° , 108° , 140° , 72° . **925.** а) $\frac{d}{2}(1+\sin\varphi)$, $\frac{d}{2}(1-\sin\varphi)$; б) $d^2\cos^3\varphi$. **930.** $\frac{\pi r^2(1-\cos\alpha)}{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha}$. **931.** $\frac{Rh}{2R+h}$. **932.** 84 см². **933.** $\frac{41-4\sqrt{91}}{57}$. **934.** 24,5 см, $7(\sqrt{6}-1)$ см. **935.** $R+r\pm\sqrt{r^2-2Rr-r^2}$. **936.** 12 см. **937.** 4 см, $26\frac{9}{16}$ см. **938.** а) $a+b$; б) $|a-b|$. **939.** $a+b-c$. **940.** $|\alpha-\beta|$. **944.** $2\sqrt{\frac{Rr}{R+r}}(\sqrt{R}+\sqrt{r}+\sqrt{R+r})$; $\frac{2Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$. **945.** 6. **946.** $\frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$. **949.** 14 см, 18 см або 2 см. **951.** $30\sqrt{1921}$ см². **952.** $48\sqrt{20-\sqrt{111}}$ см², $48\sqrt{20+\sqrt{111}}$ см². **953.** $80\sqrt{170}$ см², $\frac{672\sqrt{85}}{17}$ см². **954.** 48 см². **955.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **957.** $\frac{3a\sqrt{a^2+2b^2}}{4}$. **958.** 175 см², 273 см². **959.** 1404 см². **960.** $\frac{a\sqrt{10}}{3}$. **961.** $5\sqrt{6}$; $\arccos 0,2$; 6; 12. **962.** 1; $\arctg \frac{5}{3}$; $\arccos 0,2$; $\sqrt{10}$. **963.** 12 см, $12\frac{36}{37}$ см; $36\frac{12}{13}$ см. **964.** $\frac{250}{\pi}$ см³. **965.** 5 см. **966.** а) M — сярэдзіна гіпатэнузы; б) M унутры трохвугольніка; в) M па-за трохвугольнікам. **971.** Нельга. **973.** Акружнасць з дыяметрам QR , дзе R — праекцыя P на плоскасць α . **974.** $\frac{h\sqrt{b^2-h^2}}{b+\sqrt{b^2-h^2}}$.

975. $\frac{2\pi R^3}{3}(2+3\sqrt{2})$. 976. а) $\frac{dr}{R-r}$; б) $\frac{2\pi R^2}{d}(d-R+r)$. 977. $\frac{\sqrt{84}}{3}$ дм.
978. а) $\arccos \frac{m-n}{m+n}$; б) $\arctg \frac{\sqrt{mn}}{m-n}$. 979. $\frac{4}{3}$. 980. 1 : 2. 981. $2r \operatorname{tg}^2 \frac{180^\circ}{n}$.
982. $\frac{3}{16}$; $\frac{4}{43}$. 983. h або $\frac{h}{5}$. 984. 2 або 0,75. 985. а) 0,48 см; б) $\frac{72}{85}$ см;
- в) 1,5 см. 986. $2\frac{2}{3}$ см. 987. $\frac{5}{6}$ см. 988. 45° . 994. $40^\circ < \angle SCB < 180^\circ$.
997. $\frac{|d|}{|n|}$. 998. Цэнтр сферы — такі пункт P , што $\overline{OP} = \vec{a}$, радыус сферы роўны $\sqrt{(\vec{a})^2 - M}$. 999. $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{n} + d|}{|\vec{n}|} = \sqrt{(\vec{a})^2 - M}$. 1001. 50 см, 32 см.
1002. 224 см. 1003. 1452 см. 1004. 3,72 см. 1005. 37 см. 1006. 6 см або $3\sqrt{14}$ см. 1007. $\frac{2a^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$, $\frac{2a^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$, $\frac{2ab}{\sqrt{4a^2-b^2}}$ або $\frac{2b^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$, $\frac{2b^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$, $\frac{2ab}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. 1009. $1,5\sqrt{3}$. 1010. 13,44 см. 1011. $\frac{34\sqrt{30}}{3}$ см.
1012. 65 см. 1013. $\sqrt{ab}$. 1014. $\sqrt{3}$, 30° . 1015. 96 см^2 . 1016. 32 см. 1017. а) 10 см; б) $\sqrt{133}$ см. 1018. 540 см^2 ; 108 см. 1019. 60 см^2 ; $9\frac{3}{13}$ см.
1020. 90° . 1021. $-m \operatorname{tg} 2\alpha$. 1022. 2,4 см, $3\frac{1}{3}$ см. 1023. 12 м, 3 м.
1024. $\frac{2R}{\sqrt{170}}$, $\frac{12R}{\sqrt{170}}$. 1025. $\frac{R}{4}$, $\frac{R}{2}$, $\frac{R}{4}$. 1026. а) Пры $a \in (23 \text{ см}; 37 \text{ см})$; б) пры $a = 37 \text{ см}$; в) пры $a \in (37 \text{ см}; 47 \text{ см})$. 1027. а) 7 см; б) 7 см; в) 5 см; г) 15 см; д) 7 см і 8 см; е) $5\sqrt{3}$ см або $8\sqrt{3}$ см; ж) $6\sqrt{2}$ см або $\sqrt{2}$ см.
1028. 65 см. 1029. 120° або 60° . 1030. 33,6 см. 1031. 52 см. 1032. 2 см. 1033. 7 см. 1035. 15 см або 23,4 см. 1036. 60 см. 1037. 6 см і 8 см.
1038. 12 см^2 . 1039. 14 см. 1040. $\frac{ab}{a+b}$. 1041. а) Не; б) існуе. 1042. 192 см^2 . 1043. а) 60 см^2 ; б) $17\frac{1}{3} \text{ см}^2$; в) $3,5 \text{ см}^2$. 1044. 25 см. 1045. а) 270 см^2 ; б) 36 см^2 ; в) 960 см^2 ; г) 72 см^2 . 1046. а) 6 см, 12 см, 14 см; б) 8 см, 26 см, 30 см; в) 3 см, 4 см, 5 см. 1047. а) 30 см; б) 21 см або 9 см. 1048. 12 см, 27 см. 1049. $2(R^2 + a^2)$. 1050. $2Ra$. 1051. $\frac{8m \sin(\alpha + \beta)}{\cos 2\beta - \cos 2(\alpha + \beta)}$. 1052. $\frac{2m \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$, $\frac{2m \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. 1056. $\frac{24\sqrt{30}}{17}$; $1,5\sqrt{21}$; $1,6\sqrt{14}$. 1057. а) 1 : 1; б) 5 : 3.

1058. а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{7}{30}$. 1059. $3a^2\sqrt{3}$. 1060. $0,5\sqrt{m^2 - 4S}$. 1061. 4 см або 3 см.
1062. $\frac{2h^2}{\sin\alpha}$. 1063. 84 см². 1064. Калі адна аснова трапецыі — b м, то другая — $(50 - b)$ м. 1065. Не менш за 12 см. 1066. $\frac{2ab+b^2}{4a}\sqrt{3a^2 - 2ab - b^2}$.
1067. 546 см², $\sqrt{1621}$ см. 1068. $\frac{2S}{P}$. 1069. 120 см². 1070. $0,2S$. 1071. $2 : 7$.
1072. 36 см, 24 см, 18 см. 1073. 14 см. 1074. $11\frac{11}{13}$ см або $\frac{8}{9}$ см.
1075. 12 см або 18 см. 1076. $\frac{1}{6}$. 1077. $11\frac{3}{7}$ см, $\frac{352\sqrt{5}}{147}$ см². 1078. 7 см.
1079. $0,5\sqrt{47}$. 1080. $0,5(\sqrt{d_1^2 - h^2} + \sqrt{d_2^2 - h^2})$. 1081. $R^2(4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi)$.
1082. $\frac{R^2}{27}(3\sqrt{3} - \pi)$. 1083. $0,5 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. 1084. $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$. 1087. $\sqrt{2} : (\sqrt{3} - \sqrt{2})$.
1088. $\frac{\sqrt{3}}{3}R$, $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}R$. 1089. 8 м², 42 м², 112 м² або 32 м², 66 м², 64 м².
1091. $\frac{a\sqrt{2b^2 - a^2}}{2b}$. 1092. $\sqrt{4b^2 - 3a^2}$, $\sqrt{3b^2 - 2a^2}$. 1093. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. 1094. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ см².
1095. $\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\sqrt{a^2 - b^2}$; $\frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}\sqrt{a^2 - b^2}$. 1096. $\sqrt{a(a - 2b)}$. 1097. b пры $a \leq b$;
- $\sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{3}}$ пры $a > b$. 1098. $\frac{1}{4}\sqrt{4d_1^2d_2^2 - (d_1^2 + d_2^2)\sin^2\varphi}$. 1099. $\frac{2}{3}a$. 1100. $18\sqrt{2}$.
1101. $1 : 23$. 1102. 144 см³. 1103. а) a ; б) 60° , 120° ; в) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; г) a^2 , $a^2\sqrt{3}$; д) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. 1104. 5940 см², 14 850 см³. 1105. $\frac{Q}{a}$. 1106. $\frac{a\sqrt{58}}{4}$.
1107. $\frac{3\sqrt{42}}{4}$. 1108. 182 см². 1109. 48 см². 1110. $0,75a\sqrt{a^2 + 2b^2}$.
1111. а) $Q(\sqrt{3} + 1)(2 + \sqrt{2})$; б) $Q(\sqrt{3} + 1)(2 + \sqrt{2}) + \frac{2Q^2(2 + \sqrt{3})}{3h^2}$; в) $\frac{Q^2(2 + \sqrt{3})}{3h}$.
1112. а) 36 см²; б) $12(3 + \sqrt{3})$ см²; в) 12 см², $6\sqrt{3}$ см²; г) $12\sqrt{3}$ см³.
1113. a^3 , b^3 . 1114. $\frac{m^3V}{m^3 + n^3}$, $\frac{n^3V}{m^3 + n^3}$. 1115. $24\sqrt{17}$ см²; $24\sqrt{65}$ см².
1116. $100\sqrt{\frac{89}{85}}$ см²; $80\sqrt{89}$ см². 1117. 90 см³. 1118. 120° і 60° . 1119. 1500 см³.
1120. $3Q\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{Q^3}{2\sqrt{2}}}$. 1121. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. 1122. 2016 см². 1123. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. 1124. 198 см².
1125. $3h(a - \sqrt{b^2 - h^2})$. 1126. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 2Q\sqrt{3}$. 1127. $18(10 + \sqrt{3})$ см²
- або $180 + \frac{25\sqrt{3}}{8}$ см². 1128. $300(5 + 2\sqrt{13})$ см². 1129. 4300 см².

1130. $22 + \frac{35\sqrt{10}}{8} \text{ см}^2$. 1131. $6H^2$; $2H^2(3 + \sqrt{3})$. 1132. $(a+b)\sqrt{4H^2 + (a-b)^2}$.
 1133. $14\,800 \text{ см}^2$, $504\,000 \text{ см}^3$. 1134. 3360 см^2 , $7024,64 \text{ см}^3$.
 1135. $\frac{a+b}{4}(4c + \sqrt{4c^2 + 3(a-b)^2})$. 1136. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a(2b^2 - a^2)}{2b+a}}$. 1137. $H\sqrt{\frac{n-1}{n}}$,
 $H\sqrt{\frac{n-2}{n}}$, ..., $H\sqrt{\frac{1}{n}}$. 1138. $\frac{16d^2H^3}{3(H^2 - d^2)}$. 1139. $\frac{a\sqrt{16S^2 - 3a^4}}{4}$. 1140. $\frac{4H^3(2-k^2)}{3k^2}$.
 1141. $0,5\sqrt[3]{3V}$. 1142. $752,64 \text{ см}^3$. 1143. 1024 см^3 . 1144. 324 см^3 .
 1145. 960 см^3 . 1146. $\frac{32\,000\pi}{3} \text{ см}^3$. 1147. $\approx 3,13 \text{ см}$. 1148. $12,96\pi \text{ м}^2$.
 1149. $18\pi \text{ см}^3$. 1150. $812,16 \text{ м}^2$. 1151. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. 1152. $64\pi : 27$. 1153. 3480 см^2 ,
 $11\,600 \text{ см}^3$. 1154. $\arccos \frac{a^2 + b^2 + n^2 - m^2}{2ab}$. 1155. $\frac{\cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$. 1156. $\frac{h}{\sqrt{-\cos 2\varphi}}$. 1157. $4S$.
 1158. $\frac{S \operatorname{ctg}^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta}{\pi \sin \alpha}$. 1159. $\frac{a \sin \alpha}{2\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}\right)}$. 1161. $7 : 20$. 1162. $\frac{340\pi}{3} \text{ дм}^3$,
 $172\pi \text{ дм}^2$. 1163. $2\pi R^2$, $\frac{5\pi}{12} R^3$. 1164. $4\arccos \frac{\sqrt{34} + \sqrt{2}}{8}$. 1165. $4\operatorname{arctg} \sqrt{1,5}$.
 1171. а) $M(-6; 3; -2)$; б) $M(2; -1; -6)$. 1172. $D(4; -1; 6)$. 1174. $D(1; 4; -1)$.
 1175. а) $\frac{50}{17}$; 5; $4\sqrt{29}$; б) $\frac{79}{\sqrt{337}}$; 6,2; 2,6. 1176. а) $3\sqrt{2}$; $\sqrt{26}$; 6; $\frac{7\sqrt{2}}{18}$; $\frac{2\sqrt{13}}{39}$;
 $\frac{11\sqrt{26}}{78}$; б) 7; $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{6}$; $\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\frac{\sqrt{6}}{6}$; $\frac{\sqrt{30}}{18}$. 1177. а) $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 14$;
 б) $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 18$. 1178. $m = -3$, $n = -0,5$, $l = -5$.
 1179. а) $2x - 2y + 4z + 1 = 0$; б) $x - 2y + 4z - 5 = 0$. 1180. $(-0,5; -0,5; 0)$.
 1181. а) $m = -8$, $n = -5$; б) $m = -21$, $n = -15$. 1182. $\vec{a} = (2; 1; -1)k$.
 1183. а) $7x - 5y + 5z - 2 = 0$; б) $11x - 8y + 8z - 5 = 0$. 1184. а) $(-9; -2; 0)$,
 $(-4; 0; -1)$, $(0; 1,6; -1,8)$; б) $(-1; 5; 0)$, $(1,5; 0; 2,5)$, $(0; 3; 1)$.
 1186. а) $3x + 2y + 7z + 4 = 0$; б) $3x + 2y + 7z - 1 = 0$. 1187. а) $\sqrt{206}$;
 б) $2\sqrt{42}$. 1188. а) $\left(2 + \frac{6}{\sqrt{14}}; 1 + \frac{5}{\sqrt{14}}; 2 + \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$; $\left(2 - \frac{6}{\sqrt{14}}; 1 - \frac{5}{\sqrt{14}}; 2 - \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$;
 б) $\left(\frac{\sqrt{14}}{7}; -1 + \frac{2\sqrt{14}}{7}; \frac{4\sqrt{14}}{7}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{14}}{7}; -1 - \frac{2\sqrt{14}}{7}; -\frac{4\sqrt{14}}{7}\right)$.
 1189. $(7; 7; 7)$, 7 або $(13; 13; 13)$, 13. 1193. $2x + 3y + 2z - 6 = 0$.
 1194. $2x + y - 3z + 1 = 0$. 1195. а) $3x + 2y + 6z - 6 = 0$;

б) $6x - 3y - 2z - 6 = 0$. **1196.** а) $3x - y - 6 = 0$; б) $x - z - 1 = 0$;
 в) $y - 3z + 3 = 0$. **1197.** а) $2x + 5y - z + 4 = 0$; б) $x + 7y - 5z + 11 = 0$.
1198. а) $x - y - z + 1 = 0$; б) $x - y - z - 2 = 0$. **1199.** а) $(-2; -1; -2)$;
 б) $(1; 0; -4)$. **1200.** а) $(2; -2; -6)$; б) $(-1; 1; 3)$. **1201.** а) 90° ; б) $\arcsin \frac{1}{3}$.

$$1203. \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} - R^2.$$

$$1204. (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (R_1 \pm R_2)^2. \quad 1219. 1 : 4. \quad 1248. 2nR^2.$$

$$1253. \text{ а) } \overrightarrow{CM} = \frac{a^2 \cdot \overrightarrow{CA} + b^2 \cdot \overrightarrow{CB}}{a^2 + b^2}; \quad \text{б) } \overrightarrow{CM} = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2b} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2a} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

$$1255. \overrightarrow{OC_1} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}, \text{ дзе } k = \frac{(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})}{(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})^2}.$$

$$1256. \cos(\angle A - \angle B) + \cos \angle C = 1. \quad 1265. \text{ а) } \cos \varphi = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2 \cos \frac{\gamma}{2}};$$

$$\text{б) } \cos \psi = \frac{1 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}. \quad 1271. \text{ а) Косінус вугла паміж вектарамі } \overrightarrow{AB}$$

$$\text{і } \overrightarrow{CD} \text{ роўны } \frac{1}{2AB \cdot CD} (BC^2 + AD^2 - AB^2 - CD^2);$$

$$\text{б) } \frac{1}{3} (DA^2 + DB^2 + DC^2) - \frac{1}{9} (AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

1273. $AM : MB = 2 : 5$, $CN : ND = 3 : 4$. **1274.** Калі D — вышыня піраміды $ABCD$, то $\overrightarrow{DK} = x\overrightarrow{DA} + y\overrightarrow{DB} + z\overrightarrow{DC}$, $x + y + z = 1$, $\overrightarrow{DK} \perp \overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DK} \perp \overrightarrow{AC}$. З трох апошніх умоў знаходзяцца x , y , z , затым $\overrightarrow{DK}$ і $|\overrightarrow{DK}| = \sqrt{(\overrightarrow{DK})^2}$.

ЗМЕСТ

Ад аўтараў	3
------------------	---

10 КЛАС

1. Прасторавыя фігуры	4
2. Прамыя і плоскасці	6
3. Пабудаванне сячэнняў мнагаграннікаў	9
4. Узаемнае размяшчэнне прамых у прасторы	12
5. Узаемнае размяшчэнне прамой і плоскасці ў прасторы	16
6. Узаемнае размяшчэнне плоскасцей у прасторы	19
7. Перпендыкулярнасць прамой і плоскасці	24
8. Адлегласці	26
9. Вугал паміж прамой і плоскасцю	30
10. Перпендыкулярнасць плоскасцей	32
11. Каардынаты ў прасторы	36
12. Вектар. Дзеянні над вектарамі	37
13. Скалярны здабытак вектараў	40
14. Прымяненні вектараў і каардынат	43

11 КЛАС

1. Прызма	48
2. Цыліндр	62
3. Піраміда	69
4. Конус	78
5. Сфера	83
6. Шар	96
7. Правільныя мнагаграннікі	104

Паўтарэнне курса геаметрыі

1. Геаметрычныя фігуры і іх уласцівасці	106
2. Геаметрычныя велічыні	139
3. Каардынаты і вектары	160
4. Геаметрычныя пабудаванні	174
Адказы	177

Вучэбнае выданне

Латоцін Леанід Аляксандравіч
Чабатарэўскі Барыс Дзмітрыевіч

ЗБОРНІК ЗАДАЧ ПА ГЕАМЕТРЫІ

Вучэбны дапаможнік для 10—11 класаў
устаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання
(базавы і павышаны ўзроўні)

Заг. рэдакцыі *Г. А. Бабаева*. Рэдактар *Н. М. Алганава*.
Мастацкі рэдактар *В. М. Карповіч*.

Тэхнічнае рэдагаванне і камп'ютарная вёрстка *Г. А. Дудко*.
Карэктары *В. С. Казіцкая, А. П. Тхір, Г. В. Алешка*.

Падпісана да друку 17.09.2021. Фармат $70 \times 90^{1/16}$. Папера афсетная.
Друк афсетны. Ум. друк. арк. 14,04. Ул.-выд. арк. 10,0.
Тыраж 6327 экз. Заказ .

Выдавецкае рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства
«Народная асвета» Міністэрства інфармацыі Рэспублікі Беларусь.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/2 ад 08.07.2013.
Пр. Пераможцаў, 11, 220004, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

Адкрытае акцыянернае таварыства «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 2/3 ад 10.09.2018.
Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

Правообладатель Народная асвета

(Назва ўстановы адукацыі)

Навучальны год	Імя і прозвішча навучэнца	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака навучэнцу за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			