



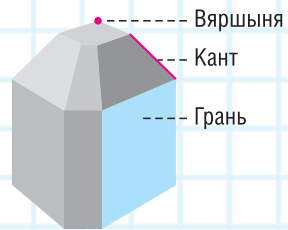
Л. А. Латоцін, Б. Д. Чабатарэўскі, І. У. Гарбунова

ГЕАМЕТРЫЯ

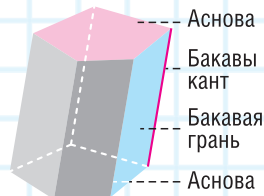


Целы

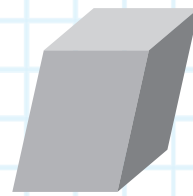
Мнааграннік



Прызма

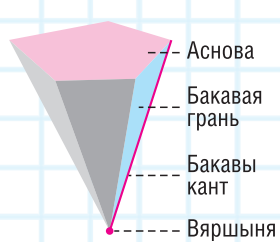


Паралелепіпед



Супрацьлеглыя грані роўныя.
Супрацьлеглыя канты роўныя.
Супрацьлеглыя грані паралельныя.
Дыяганалі перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам.

Піраміда



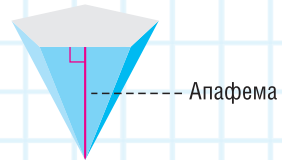
Прамая прызма



$$S_{\text{бок}} = Pl$$

P — перыметр асновы,
 l — бакавы кант.

Правільная піраміда



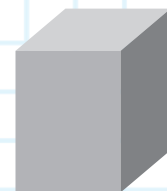
$$S_{\text{бок}} = pl$$

p — паўперыметр асновы,
 l — апафема.

Правільная прызма



Прамы паралелепіпед



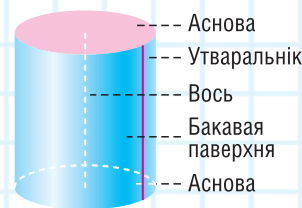
Прамавугольны паралелепіпед



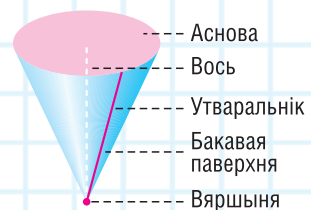
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

d — дыяганаль,
 a, b, c — вымярэнні.

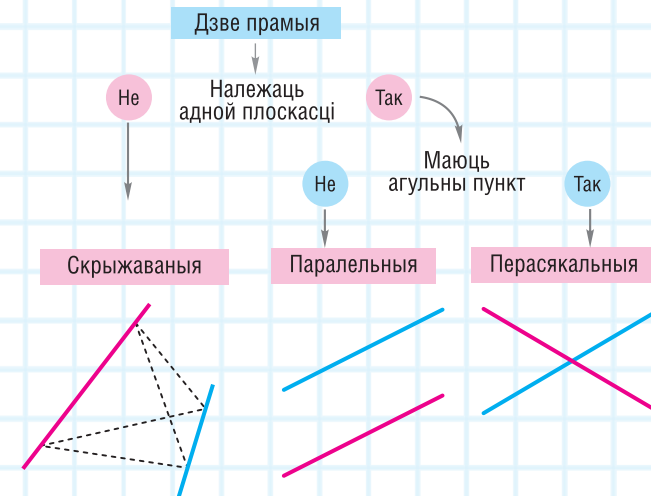
Цыліндр



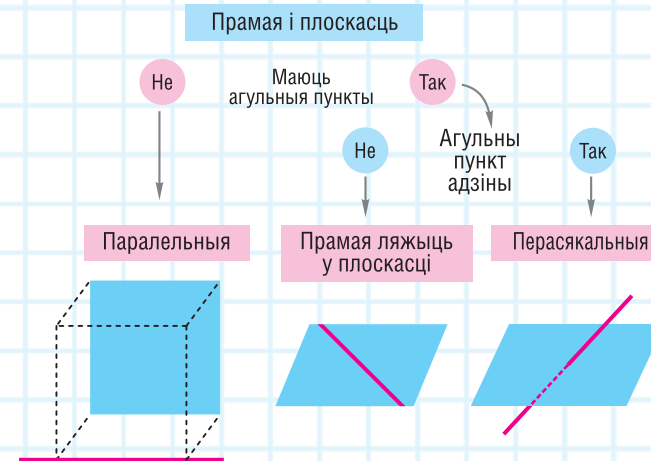
Конус



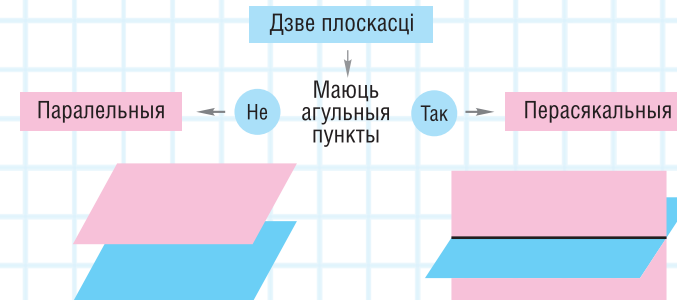
Прамыя ў прасторы



Прамая і плоскасць у прасторы

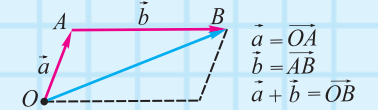


Дзве плоскасці ў прасторы

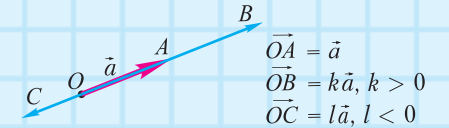


Вектары

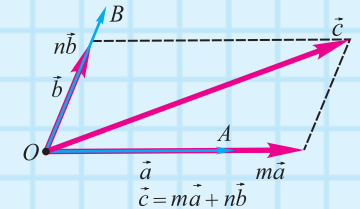
Складанне вектараў



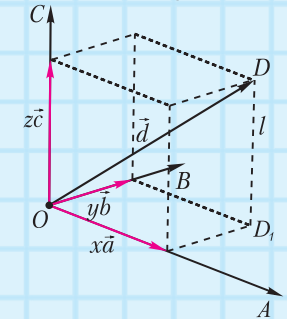
Множанне вектара на лік



Выражэнне любога вектара праз два некалінейныя вектары

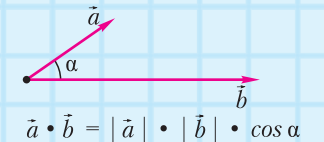


Выражэнне любога вектара праз тры некампланарныя вектары

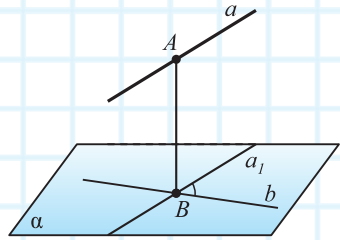


Вектары $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ кампланарныя толькі тады, калі $m\vec{a} + n\vec{b} + k\vec{c} = \vec{0}$ і $m^2 + n^2 + k^2 \neq 0$. Калі вектары $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некампланарныя, то праз іх адназначна выражаецца любы вектар $\vec{d}$: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Скалярны здабытак вектараў



Дзве прамыя ў прасторы



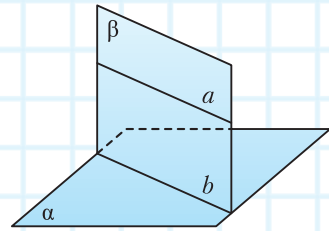
Вуглом паміж скрыжаванымі прамымі называецца вугал паміж перасякальнымі прамымі, паралельнымі да дзеных скрыжаваным прамым.

Калі $a \div b, a_1 \parallel a \text{ і } a_1 \cap b = B$, то $\angle(a, b) = \angle(a_1, b)$.

Адлегласцю паміж скрыжаванымі прамымі называецца даўжыня іх агульнага перпендыкуляра.

Калі $a \div b, A \in a, B \in b, AB \perp a \text{ і } AB \perp b$, то $d(a, b) = AB$.

Праяма і плоскасць у прасторы



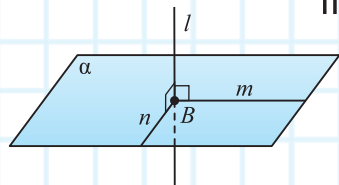
Паралельнасць прамой і плоскасці

Калі праяма, што не ляжыць у плоскасці, паралельная якой-небудзь прамой плоскасці, то яна паралельная гэтай плоскасці.

Калі $a \not\subset \alpha, a \parallel b \text{ і } b \subset \alpha$, то $a \parallel \alpha$.

Калі плоскасць праходзіць праз прамую, паралельную другой плоскасці, і перасякае гэту плоскасць, то лінія перасячэння паралельная гэтай прамой.

Калі $a \parallel \alpha, a \subset \beta \text{ і } \beta \cap \alpha = b$, то $b \parallel a$.



Перпендыкулярнасць прамой і плоскасці

Калі праяма перпендыкулярная дзвюм перасякальным прамым плоскасці, то яна перпендыкулярная гэтай плоскасці.

Калі $l \perp m, m \subset \alpha, l \perp n, n \subset \alpha \text{ і } m \cap n \neq \emptyset$, то $l \perp \alpha$.

Калі праяма перпендыкулярная адной з паралельных плоскасцей, то яна перпендыкулярная і другой плоскасці.

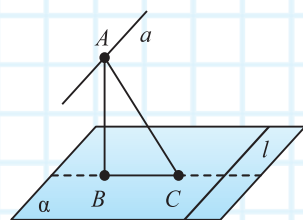
Калі $l \perp \alpha \text{ і } \alpha \parallel \beta$, то $l \perp \beta$.

Калі адной прамой перпендыкулярныя дзве плоскасці, то яны паралельныя.

Калі $\alpha \perp l \text{ і } \beta \perp l$, то $\alpha \parallel \beta$.

Адлегласцю паміж паралельнымі плоскасцямі называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з якога-небудзь пункта адной плоскасці да другой плоскасці.

Калі $\alpha \parallel \beta, A \in \alpha, B \in \beta \text{ і } AB \perp \beta$, то $d(\alpha, \beta) = AB$.



Праяма плоскасці перпендыкулярная праекцыі нахіленай на гэту плоскасць тады і толькі тады, калі яна перпендыкулярная самой нахіленай.

Калі $BC = \text{Пр}_\alpha AC \text{ і } l \subset \alpha$, то $l \perp BC$ раўназначна $l \perp AC$.

Вуглом паміж прамой і плоскасцю, што перасякае гэту прамую і не перпендыкулярная ёй, называецца вугал паміж прамой і яе праекцыяй на плоскасць.

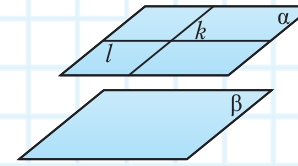
Калі $\text{Пр}_\alpha AC = BC \text{ і } AC \not\perp \alpha$, то $\angle(AC, \alpha) = \angle ACB$.

Адлегласцю паміж прамой і паралельнай ёй плоскасцю называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага да плоскасці з якога-небудзь пункта прамой.

Калі $a \parallel \alpha, A \in a, AB \perp \alpha \text{ і } B \in \alpha$, то $d(a, \alpha) = AB$.

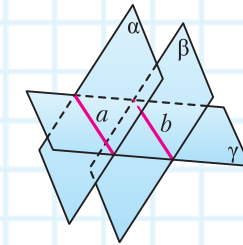
Дзве плоскасці ў прасторы

Паралельнасць плоскасцей



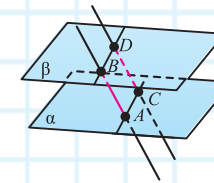
Калі плоскасць праходзіць праз дзве перасякальныя прамыя, паралельныя іншай плоскасці, то яна паралельная гэтай самай плоскасці.

Калі $k \subset \alpha \text{ і } k \parallel \beta, l \subset \alpha \text{ і } l \parallel \beta \text{ і } l \cap k \neq \emptyset$, то $\alpha \parallel \beta$.



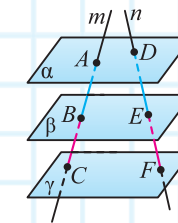
Лініі перасячэння дзвюх паралельных плоскасцей трэцяй плоскасцю паралельныя адна адной.

Калі $\alpha \cap \gamma = a \text{ і } \beta \cap \gamma = b, \alpha \parallel \beta$, то $a \parallel b$.



Адрэзкі паралельных прамых, заключаныя паміж дзвюма паралельнымі плоскасцямі, роўныя адзін аднаму.

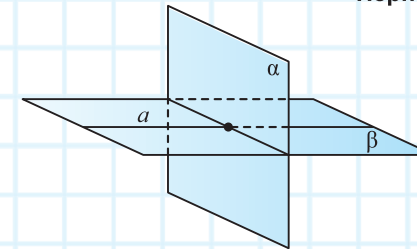
Калі $\alpha \parallel \beta, A \in \alpha, C \in \alpha, B \in \beta, D \in \beta \text{ і } AB \parallel CD$, то $AB = CD$.



Адрэзкі адвольных прамых, заключаныя паміж трыма паралельнымі плоскасцямі, прапарцыянальныя.

Калі $l \parallel \beta \parallel \gamma, A \in \alpha, D \in \alpha, B \in \beta, E \in \beta, AB \cap \gamma = C, DE \cap \gamma = F$, то $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Перпендыкулярнасць плоскасцей



Калі адна з дзвюх плоскасцей праходзіць праз прамую, перпендыкулярную другой плоскасці, то такія плоскасці перпендыкулярныя.

Калі $a \subset \beta \text{ і } a \perp \alpha$, то $\beta \perp \alpha$.

Плоскасць, перпендыкулярная лініі перасячэння дзвюх дадзеных плоскасцей, перпендыкулярная да кожнай з іх.

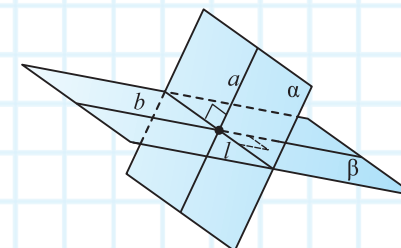
Калі $\alpha \cap \beta = a \text{ і } \gamma \perp a$, то $\gamma \perp \alpha \text{ і } \gamma \perp \beta$.

Калі дзве перасякальныя плоскасці перпендыкулярныя трэцяй плоскасці, то іх лінія перасячэння перпендыкулярная гэтай плоскасці.

Калі $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma \text{ і } \alpha \cap \beta = a$, то $a \perp \gamma$.

Калі праз пункт адной з перпендыкулярных плоскасцей правесці прамую, перпендыкулярную другой плоскасці, то гэтая праяма належыць першай плоскасці.

Калі $\alpha \perp \beta, K \in \alpha, K \in \beta \text{ і } b \perp \beta$, то $b \subset \alpha$.



Вуглом паміж перасякальнымі плоскасцямі называецца не большы за 90° вугал паміж перпендыкулярамі да ліній іх перасячэння, праведзенымі ў кожнай плоскасці.

Калі $\alpha \cap \beta = l, a \subset \alpha, a \perp l, b \subset \beta, b \perp l$, то $\angle(a, b) = \angle(a, b)$.

Л. А. Латоцін, Б. Д. Чабатарэўскі, І. У. Гарбунова

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для 10 класа ўстаноў
агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання
(базавы і павышаны ўзроўні)

*Допущена Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь*

Мінск
«Адукацыя і выхаванне»
2020

Правообладатель Адукацыя і выхаванне

УДК 514(075.3=161.3)

ББК 22.151я721

Л27

Рэцэнзенты: кафедра геаметрыі, тапалогіі і метадыкі выкладання матэматыкі Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта (кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт *С. Г. Конанай*); настаўнік матэматыкі вышэйшай кваліфікацыйнай катэгорыі дзяржаўнай установы адукацыі «Гімназія № 25 г. Мінска» *С. А. Скарукіна*

ISBN 978-985-599-209-8

© Латоцін Л. А., Чабатарэўскі Б. Д.,
Гарбунова І. У., 2020

© Афармленне. РУП «Адукацыя і
выхаванне», 2020

Правообладатель Адукацыя і выхаванне

ПАВАЖАНЫЯ ДЗЕСЯЦІКЛАСНІКІ!

У гэтым навучальным годзе вы будзеце вывучаць геаметрыю прасторы — стэрэаметрыю. Калі ў планіметрыі асноўнымі аб'ектамі вывучэння з'яўляюцца пункт, прамая і тыя фігуры, усе пункты якіх належаць адной плоскасці, то ў стэрэаметрыі да асноўных аб'ектаў вывучэння дадаецца плоскасць і вывучаюцца тыя фігуры, што маюць тры вымярэнні і якія прынята называць цэламі. Да асноўных цел адносяцца прызма, цыліндр, піраміда, конус, шар.

Стэрэаметрыя, як і планіметрыя, узнікла ў Старажытным Егіпце і развівалася ў сувязі з патрэбамі практычнай дзейнасці чалавека. Пры ўзвядзенні розных збудаванняў патрабавалася разлічыць, колькі матэрыялу спатрэбіцца, умець вылічваць адлегласці паміж пунктамі ў прасторы і велічыні вуглоў паміж прамымі і плоскасцямі, ведаць уласцівасці геаметрычных цел. Егіпецкія піраміды, збудаваныя 2–3 тыс. гадоў да н. э., уражваюць дакладнасцю метрычных суадносін, якія сведчаць пра тое, што іх будаўнікі мелі значныя веды па стэрэаметрыі.

Стэрэаметрыю можна разглядаць як абагульненне планіметрыі, таму на любой плоскасці ў прасторы з'яўляюцца праўдзівымі ўсе аксіёмы і тэарэмы планіметрыі, застаюцца такімі самымі і азначэнні.

Каб палегчыць успрыманне таго ці іншага сцверджання стэрэаметрыі і зрабіць яго больш наглядным, карысна змест сцверджання падмацаваць рысункам. Выявы планіметрычнай фігуры роўныя або падобныя ёй самой. Для стэрэаметрычнай фігуры і яе плоскай выявы такое немагчыма. Таму неабходна навучыцца рабіць плоскія выявы геаметрычных фігур такімі, каб яны выклікалі ў нашай свядомасці прасторавыя вобразы гэтых фігур, а таксама «чытаць» плоскія выявы прасторавых фігур. У гэтым нам дапамогуць правілы, прынятыя для такіх выяў, у прыватнасці, штрыхавое выяўленне ліній, нябачных пры ўспрыманні рэальнай прасторавай фігуры.

Матэматыка, асабліва геаметрыя, у пэўным сэнсе з'яўляецца самым лёгкаім вучэбным прадметам, бо ў ёй не трэба займацца механічным завучваннем зместу. Дастаткова зразумець тое, што завучваецца, і тады яно само запамінаецца. Разам з гэтым матэматыка — магутны сродак удасканалення разумовых здольнасцей. Яна дае магчымасць навучыцца аналізаваць, выяўляць памылкі ў разважаннях іншых. Таму можна пагадзіцца з выказваннем італьянскага вучонага Галілеа Галілея (1564–1642): «Трэба прызнацца, што спроба трактаваць рэальныя праблемы без геаметрыі ёсць спроба зрабіць немагчымае».

Вучэбны дапаможнік складаецца з чатырох раздзелаў: «Уводзіны ў стэрэаметрыю»; «Паралельнасць прамых і плоскасцей»; «Перпендыкулярнасць прамых і плоскасцей»; «Каардынаты і вектары ў прасторы» (для вучняў, якія вывучаюць матэматыку на павышаным узроўні).

Кожны раздзел адкрываецца ілюстраванай старонкай з назвай параграфа. Параграф пачынаецца з абмеркавання пытання, абазначанага

ў яго назве. Найбольш важныя новыя паняцці, правілы і сцверджанні вылучаны **паўтлустым шрыфтам**; паняцці і факты, на якія варта звярнуць увагу, — *курсівам*. Сэнсавыя блокі ў параграфі адзначаны каляровымі літарамі, напрыклад, **А**), **Б**), **В**), **Г**).

У вучэбным дапаможніку вы сустрэнеце наступныя ўмоўныя абазначэнні:



— асноўныя прыклады з рашэннямі і падрабязнымі апісаннямі паслядоўнасці дзеянняў;



— важныя правілы і сцверджанні;



— пытанні і заданні для самакантролю;



— заданні для работы ў класе і дома;



— матэрыял для паглыблення матэматычных ведаў;



— дадатковы матэрыял для самастойнага азнаямлення і вывучэння;



— вучэбны матэрыял павышанага ўзроўню.

Для праверкі разумення зместу тлумачальнага тэксту, фарміравання ўменняў па яго прымяненні ў канцы параграфу прадугледжаны кантрольныя пытанні, практычная частка (практыкаванні, задачы). Калі вы не змаглі адказаць на тое ці іншае пытанне, неабходна звярнуцца да тлумачальнага тэксту і з яго дапамогай паспрабаваць адказаць на гэта пытанне або, калі спатрэбіцца, выкарыстаць дадатковую літаратуру ці інтэрнэт. Практычная частка ўлучае згрупаваныя па сэнсавых блоках практыкаванні і задачы з улікам іх прызначэння (практыкаванні па прапанаваных рысунках; практыкаванні і задачы для засваення і замацавання новых паняццяў і тэрэм; задачы, выкананне якіх патрабуе выкарыстання як новых ведаў, так і раней атрыманых; практыкаванні і задачы з рэальным зместам).

Пры выкананні заданняў з практычнай часткі вы навучыцеся супастаўляць, знаходзіць агульнае і адрознае, рабіць правільныя высновы, прымяняць атрыманыя веды на практыцы.

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Геаметрыя-10» можна знайсці на сайце <http://e-vedy.edu.by>, раздзел «Матэматыка», курс «Матэматыка. 10 кл.».

Жадаем вам поспехаў!

Аўтары



«Першыя паняцці, з якіх пачынаецца якая-небудзь навука, павінны быць празрыстымі і прыведзенымі да найменшай колькасці. Тады толькі яны могуць служыць трывалай і дастатковай асновай вучэння»
(М. І. Лабацькі).

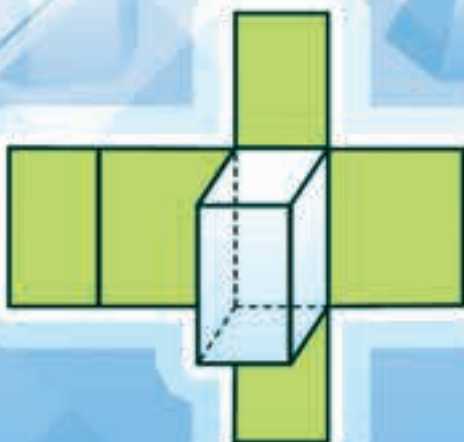
РАЗДЗЕЛ

1

УВОДЗІНЫ Ё СТЭРЭАМЕТРЫЮ

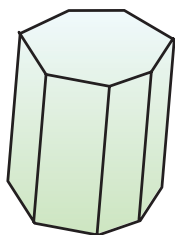
У гэтым раздзеле вы будзеце вывучаць:

- прасцейшыя прастагавыя фігуры;
- аксіёмы стэрэаметрыі і вынікі з іх;
- пабудаванні сячэнняў мнагаграннікаў.

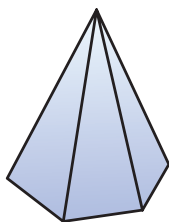


§ 1. Прастравыя фігуры

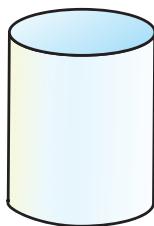
А) Геаметрычныя фігуры падзяляюцца на **плоскія** і **прастравыя** ў залежнасці ад таго, усе ці не ўсе пункты фігуры належаць адной плоскасці. Плоскія фігуры вы вивучалі ў ранейшых класах, там пазнаёміліся і з некаторымі прастравымі фігурамі — прызмай (рыс. 1), пірамідай (рыс. 2), цыліндрам (рыс. 3), конусам (рыс. 4), шарам (рыс. 5). Раздзел геаметрыі, у якім вивучаюцца плоскія фігуры, называецца *планіметрыяй*, а раздзел, у якім вивучаюцца прастравыя фігуры, — *стэрэаметрыяй*.



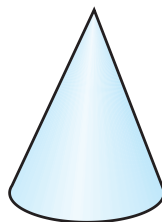
Рыс. 1



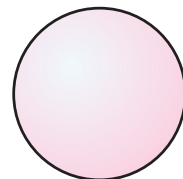
Рыс. 2



Рыс. 3

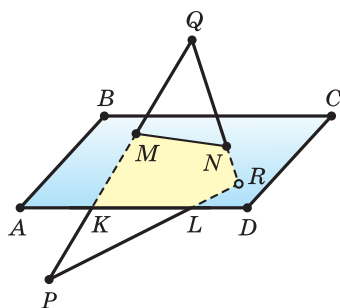


Рыс. 4



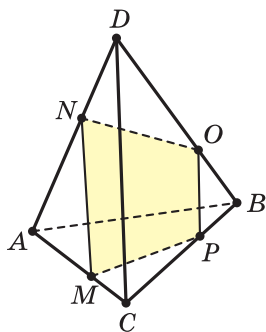
Рыс. 5

Тую ці іншую прастравую фігуру даводзіцца рысаваць на плоскасці ліста ў сшытку або на плоскасці дошкі. Адпаведны рысунак выконваюць такім чынам, каб ён ствараў тое ўражанне, што і сама фігура, чый відарыс робіцца. Пры гэтым нябачныя лініі робяць *штырхавымі*.



Рыс. 6

На рысунку 6 паказаны паралелаграм $ABCD$ і трохвугольнік PQR , якія перасякаюцца па адрэзку MN . Частка QMN трохвугольніка PQR знаходзіцца над паралелаграмам $ABCD$, частка $PMNR$ — пад ім. Пры гэтым частка PKL чатырохвугольніка $PMNR$ бачная, а частка $KMNRL$ — нябачная. Звяртаем увагу на тое, што пункты K і L трохвугольніка PQR не належаць паралелаграму $ABCD$, а значыць, і яго старане AD .



Рыс. 7

На рысунку 7 паказана трохвугольная піраміда $DABC$, якую перасякае плоскасць па чатырохвугольніку $MNOP$. Пры гэтым у піраміды нябачным з'яўляецца кант AB , а ў сячэння $MNOP$ — яго стараны NO і MP .

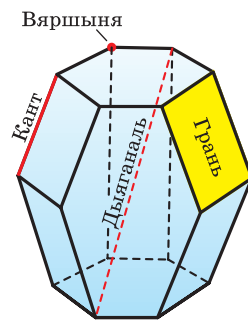
Адлюстраванне прастравай фігуры на рысунку называюць **відарысам фігуры**.

Важным класам прастравых фігур з'яўляюцца мнагаграннікі, пад якімі разумеюць цэлы, абмежаваныя плоскімі многавугольнікамі.

Гэтыя многавугольнікі называюцца **гранямі** мнагагранніка, іх вяршыні — **вяршынямі** мнагагранніка, а стораны — **кантамі** мнагагранніка.

Адрэзак, што злучае дзве вяршыні мнагагранніка, якія не належаць адной грані, называецца **дыяганаллю** мнагагранніка (рыс. 8).

Мнагаграннік называецца *выпуклым*, калі ён размешчаны па адзін бок ад плоскасці любой яго грані. На рысунку 9 паказаны нявыпуклы мнагаграннік.



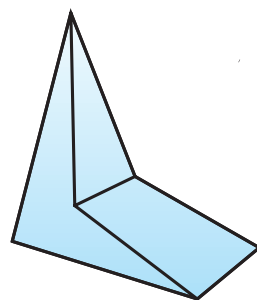
Рыс. 8

Б) Мы будзем вывучаць найпрасцейшыя выпуклыя мнагаграннікі — прызмы і піраміды.

Прызмай называецца мнагаграннік, дзве грані якога — роўныя n -вугольнікі, а астатнія n граняў — паралелаграмы.

Роўныя грані-многавугольнікі прызмы называюцца яе **асновамі**, а астатнія грані — **бакавымі гранямі**. Канты бакавой грані, якія не належаць асновам, называюцца **бакавымі кантамі** (рыс. 10).

У залежнасці ад колькасці старон асновы прызмы адрозніваюць **трохвугольную**, **чатырхвугольную**, **пяцівугольную** і г. д. прызмы. На рысунку 11 паказана шасцівугольная прызма.



Рыс. 9

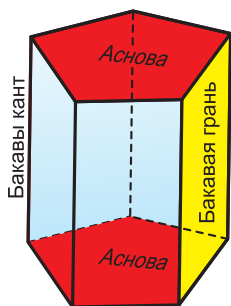
Сукупнасць бакавых граняў прызмы складаюць бакавую паверхню.

Плошча бакавой паверхні прызмы роўная суме плошчаў бакавых граняў.

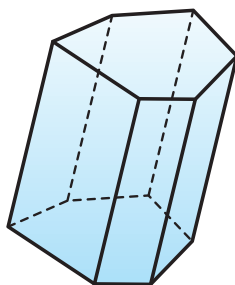
Прызмы падзяляюцца на *прамыя* і *нахіленыя*.

Прамая прызма — прызма, бакавыя грані якой з'яўляюцца прамавугольнікамі. Звычайна, рысуючы прамую прызму, яе бакавыя канты праводзяць вертыкальна (рыс. 12).

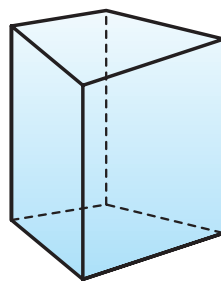
Прызма *прамая*, калі бакавыя канты перпендыкулярныя кантам асновы прызмы.



Рыс. 10



Рыс. 11

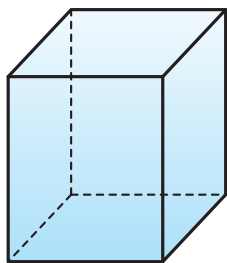


Рыс. 12

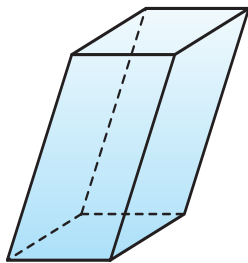
Прызма *нахіленая*, калі бакавыя канты не перпендыкулярныя кантам асновы прызмы.

Прамая прызма называецца **правільнай**, калі яе асновы з'яўляюцца правільнымі многавугольнікамі.

Прызма, асновамі якой з'яўляюцца паралелаграмы, называецца **паралелепіпедам**.



Рыс. 13



Рыс. 14

Паралелепіпед, як і прызма, можа быць і прамым (рыс. 13), і нахіленым (рыс. 14).

Прамы паралелепіпед, асновы якога з'яўляюцца прамавугольнымі, называецца **прамавугольным паралелепіпедам**.

Усе грані прамавугольнага паралелепіпеда з'яўляюцца прамавугольнікамі.

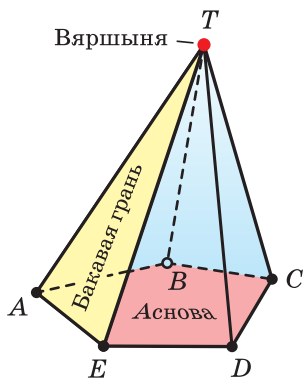
Тры канты прамавугольнага паралелепіпеда, якія збягаюцца ў адной вяршыні, называюцца **вымярэннямі** прамавугольнага паралелепіпеда.

Прамавугольны паралелепіпед, вымярэнні якога роўныя, называецца **кубам**. Усе грані куба — роўныя адзін аднаму квадраты.

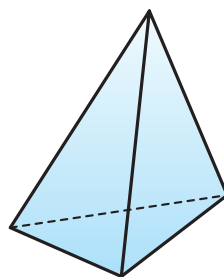
В) Пірамідай называецца мнагаграннік, адна грань якога — многавугольнік, а астатнія — трохвугольнікі з агульнай вяршыняй.

На рысунку 15 паказана піраміда $TABCDE$. Многавугольнік $ABCDE$ называюць **асновай піраміды**, трохвугольныя грані ATB , BTC , CTD , DTE , ETA — **бакавымі гранямі**, а агульную вяршыню T бакавых граняў — **вяршыняй піраміды**. Звычайна ў запісе абазначэння піраміды першая літара адпавядае яе вяршыні.

У залежнасці ад колькасці старон асноў піраміды адрозніваюць **трохвугольную**, **чатырохвугольную**, **пяцівугольную** і г. д. піраміды. Піраміда на рысунку 15 — пяцівугольная, а на рысунку 16 — трохвугольная.



Рыс. 15



Рыс. 16



Піраміда, основа якої — правильний многовугольник, а адрезак, що злучає її вершину з центром основи, перпендикулярний до будь-якої прямої, проведеної в площині основи через цей центр, називається **правильною**.

Вышина бакавої грані правильної піраміди, опущена з вершини піраміди, називається **апафемай** піраміди.

На рисунку 17 показана правильна чотирихвугільна піраміда $APQRS$, і адрезак AB — одна з її апафем.

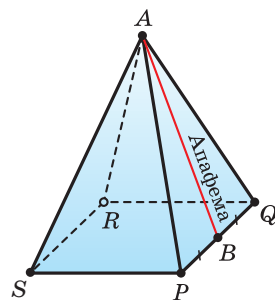


Рис. 17

Т е з е м а 1. У правильній піраміді роўныя яе: а) бакавыя грані; б) апафемы.

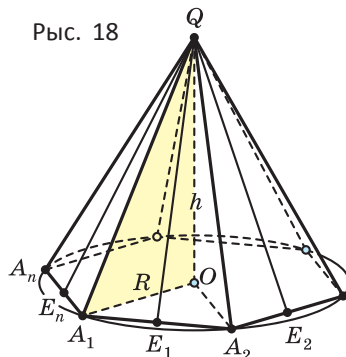
Доказ. Няхай $QA_1A_2...A_n$ — правильная піраміда і пункт O — центр яе асновы (рис. 18).

а) Паколькі трохвугольнікі QOA_1 і QOA_2 абодва прамавугольныя, маюць агульны катэт QO і роўныя катэты OA_1 і OA_2 , то яны роўныя. Таму роўныя і іх гіпатэнузы QA_1 і QA_2 . Аналагічна даказваецца, што іншыя бакавыя канты таксама роўныя QA_1 .

Бакавыя грані піраміды — раўнабедраныя трохвугольнікі з роўнымі бакавымі старанамі. Асновы гэтых трохвугольнікаў таксама роўныя паміж сабой як стораны правільнага многовугольніка, што ляжыць у аснове піраміды. Таму бакавыя грані роўныя адна адной па трох старанах.

б) Паколькі бакавыя грані піраміды $QA_1A_2...A_n$ роўныя адна адной, то роўныя і іх вышыні, праведзеныя з вершини Q , г. зн. што ўсе апафемы піраміды $QA_1A_2...A_n$ роўныя.

Рис. 18



Т е з е м а 2. Плошча бакавой паверхні правильнай піраміды роўная здабытку паўперыметра яе асновы і апафемы.

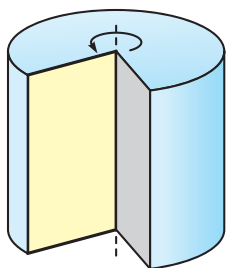
Доказ. Няхай $QA_1A_2...A_n$ — правильная піраміда (гл. рис. 18). Плошча S яе бакавой паверхні складаецца з плошчаў бакавых граняў-трохвугольнікаў, якія з'яўляюцца роўнымі адзін аднаму раўнабедранымі трохвугольнікамі з апафемай QE_1 , QE_2 , ..., QE_n , роўнымі адна адной. Таму

$$\begin{aligned} S &= S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + \dots + S_{A_nQA_1} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + \dots + \\ &+ \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n = \frac{1}{2} QE_1 \cdot (A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1) = \\ &= \frac{A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1}{2} \cdot QE_1 = p \cdot a, \end{aligned}$$

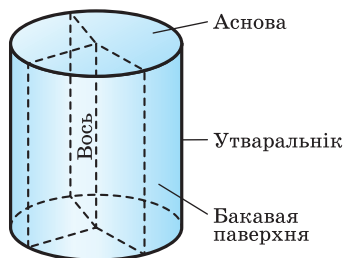
дзе p — паўперыметр асновы піраміды, a — апафема піраміды.

Г) Яшчэ адзін клас прасторавых фігур складаюць цэлы вярчэння, да якіх адносяцца цыліндр, конус, шар.

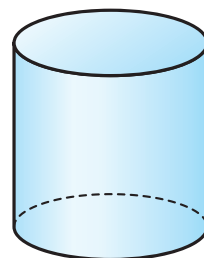
Цыліндрам называецца цэла, атрыманае вярчэннем прамавугольніка вакол адной з яго старон (рыс. 19). Пры гэтым вярчэнні адна старана прамавугольніка застаецца нерухомай, яе называюць *воссю цыліндра*. Старана, супрацьлеглая восі, утварае паверхню, якую называюць *бакавой паверхняй цыліндра*, а саму старану — *утваральнікам цыліндра*. Яшчэ дзве стараны прамавугольніка ўтвараюць паверхні, якія з'яўляюцца роўнымі кругамі, гэтыя кругі называюць *асновамі цыліндра* (рыс. 20). На рысунку 21 паказаны відарыс цыліндра.



Рыс. 19

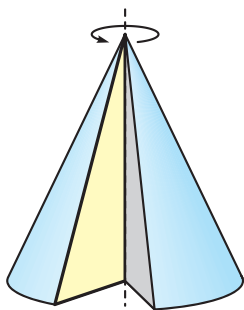


Рыс. 20

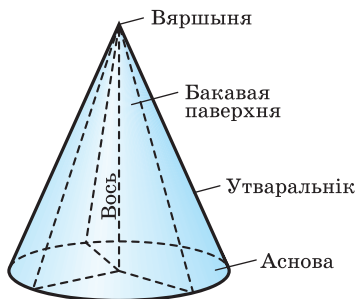


Рыс. 21

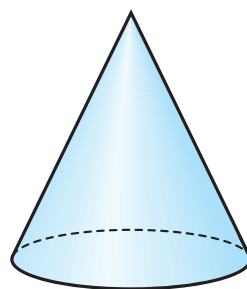
Конусам называецца цэла, атрыманае вярчэннем прамавугольнага трохвугольніка вакол аднаго з яго катэтаў (рыс. 22), які называюць *воссю конуса*. Другі катэт апісвае круг, які называюць *асновай конуса*; нерухомую вяршыню, якая не належыць аснове, называюць *вяршыняй конуса*. Гіпатэнуза пры вярчэнні ўтварае паверхню, якую называюць *бакавой паверхняй конуса*, саму гіпатэнузу называюць *утваральнікам конуса* (рыс. 23). На рысунку 24 паказаны відарыс конуса.



Рыс. 22

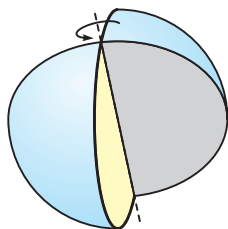


Рыс. 23

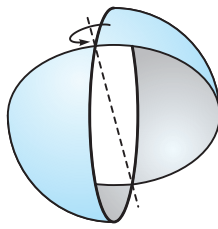


Рыс. 24

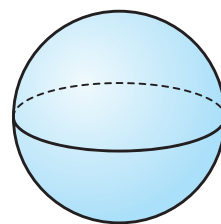
Шарам называецца цэла, атрыманае вярчэннем круга вакол свайго дыяметра (рыс. 25). Пры гэтым вярчэнні акружнасць апісвае паверхню, якую называюць *сферай* (рыс. 26). На рысунку 27 паказаны відарыс шара.



Рыс. 25



Рыс. 26



Рыс. 27

?

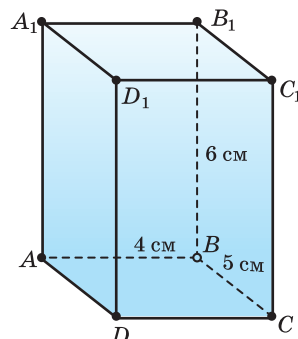
1. Якія геаметрычныя фігуры называюцца плоскімі; прасторавымі?
2. Якое цела называюць мнагаграннікам?
3. Што называюць гранямі мнагагранніка; кантамі мнагагранніка; вяршынямі мнагагранніка?
4. Які мнагаграннік называецца прызмай?
5. Што называюць асновамі прызмы; бакавымі гранямі прызмы; бакавымі кантамі прызмы?
6. Якая прызма называецца прамой прызмай; нахіленай прызмай?
7. Якая прызма называецца правільнай прызмай?
8. Якая прызма называецца паралелепіпедам; прамым паралелепіпедам?
9. Які прамы паралелепіпед называецца прамавугольным паралелепіпедам?
10. Якія канты прамавугольнага паралелепіпеда называюцца яго вымярэннямі?
11. Які мнагаграннік называецца пірамідай?
12. Што называюць асновай піраміды; бакавымі гранямі піраміды; вяршыняй піраміды?
13. Якая піраміда называецца правільнай пірамідай?
14. Які адрэзак называецца апафемай правільнай піраміды?
15. Сфармулюйце ўласцівасць бакавых кантаў правільнай піраміды; бакавых граняў правільнай піраміды; апафем правільнай піраміды.
16. Чаму роўная плошча бакавой паверхні правільнай піраміды?
17. Якое цела называецца цыліндрам?
18. Якое цела называецца конусам?
19. Якое цела называецца шарам?
20. Ці праўда, што:
 - а) колькасць вяршынь любой прызмы — лік цотны?
 - б) колькасць кантаў любой прызмы — лік, кратны тром?
21. Знайдзіце колькасць дыяганалей сямівугольнай прызмы.
22. Ці існуе піраміда, якая мае 11 кантаў? Абгрунтуйце свой адказ.



Задача 1. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прамой чатырохвугольнай прызмы, у аснове якой знаходзіцца прамавугольнік з вымярэннямі 4 см і 5 см, а бакавы кант роўны 6 см.

Рашэнне. Няхай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прамая прызма; $ABCD$ — прамавугольнік, $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $BB_1 = 6$ см (рыс. 28).

$ABB_1 A_1$, $CBB_1 C_1$, $CDD_1 C_1$, $ADD_1 A_1$ — прамавугольнікі ($ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прамая прызма), таму $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 6$ см.



Рыс. 28

$$S_{ABB_1 A_1} = AB \cdot BB_1 = 4 \cdot 6 = 24 \text{ (см}^2\text{)}, \text{ бо } AB = CD \text{ і } BB_1 = CC_1.$$

$$S_{CBB_1 C_1} = CB \cdot BB_1 = 5 \cdot 6 = 30 \text{ (см}^2\text{)}, \text{ бо } AD = BC \text{ і } AA_1 = CC_1.$$

$$\begin{aligned} \text{Значыць, } S_{\text{бак}} &= S_{ABB_1 A_1} + S_{DCC_1 D_1} + S_{CBB_1 C_1} + S_{ADD_1 A_1} = 2 \cdot (S_{ABB_1 A_1} + S_{CBB_1 C_1}) = \\ &= 2 \cdot (24 + 30) = 108 \text{ (см}^2\text{)}. \end{aligned}$$

А д к а з: 108 см^2 .



Бакавая паверхня прамой прызмы роўная здабытку перыметра яе асновы і бакавога канта. Дакажыце гэта самастойна.

Задача 2. Бакавая паверхня правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 240 см^2 , а яе апафема — 12 см. Знайдзіце плошчу асновы піраміды.

Рашэнне. Няхай $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда; $S_{\text{бак}} = 240 \text{ см}^2$; SH — апафема; $SH = 12$ см (рыс. 29).

$$S_{\text{бак}} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot SH, \text{ бо піраміда правільная, таму } 240 = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} \cdot 12,$$

$$\text{бо } P_{ABCD} = 2 \cdot 240 : 12 = 40 \text{ (см)}.$$

$$AB = 40 : 4 = 10 \text{ (см)}, \text{ бо } ABCD \text{ — квадрат.}$$

$$S_{ABCD} = AB^2 = 10^2 = 100 \text{ (см}^2\text{)}.$$

А д к а з: 100 см^2 .



Плошча бакавой паверхні піраміды роўная суме плошчаў бакавых граняў.

Задача 3. Апафема правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 30 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 24 см. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

Р а ш є н н є. Няхай $SABCD$ — правильна чотирохкуткова піраміда, SH — апафема, $SH = 30$ см, O — центр основи $ABCD$, $SO = 24$ см (гл. рис. 29).

$$OH = \sqrt{SH^2 - SO^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18 \text{ (см)}, \text{ бо } SO \perp OH,$$

$$AB = 2 \cdot OH = 2 \cdot 18 = 36 \text{ (см)}, \text{ бо } ABCD \text{ — квадрат, } P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 36 = 144 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{\text{бак}} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{2} \cdot 144 \cdot 30 = 2160 \text{ (см}^2\text{)}, \text{ бо}$$

піраміда правильна.

А д к а з: 2160 см^2 .

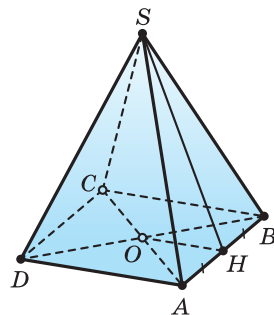


Рис. 29



У правильній піраміді адрізок, який з'єднує центр основи піраміди з основою апафему піраміди, — радіус акружності, уможливлений у основі піраміди. Додайте цю самостійно.

Задача 4. Старана основи AB правильній трикутній піраміді $MABC$ роїна $6\sqrt{3}$ см, а адрізок, що з'єднує вершину M піраміди з центром O основи, — 8 см. Знайдіть:

- бакаві канти піраміди;
- бакаву паверхню піраміди;
- поїну паверхню піраміди.

Р а ш є н н є. Няхай $MABC$ — правильна трикуткова піраміда, $AB = 6\sqrt{3}$ см, O — центр основи ABC ; $MO = 8$ см (рис. 30).

а) $OA = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 6$ (см), бо OA — радіус акружності, аписаний каля правильного трикутника ABC .

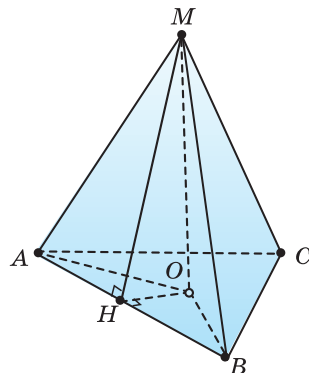


Рис. 30

$$MA = \sqrt{MO^2 + OA^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ (см)}, \text{ бо } MO \perp OA.$$

$MA = MB = MC = 10$ (см), бо $MABC$ — правильна трикуткова піраміда.

б) Няхай MH — апафема. Тади H — середина AB (у $\triangle AMB$ $MA = MB$ і $MH \perp AB$).

$OH \perp AB$ (медыяна, праведзеная да асновы раўнабедранага трохвугольніка OAB), таму OH — радыус умежанай у $\triangle ABC$ акружнасці і $OH = \frac{OA}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (см).

$$MH = \sqrt{MO^2 + OH^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \text{ (см), бо } MO \perp OH.$$

$$P_{ABC} = 3 \cdot AB = 3 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ (см)},$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3} \cdot AB^2}{4} = \frac{\sqrt{3}(6\sqrt{3})^2}{4} = 27\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}, \text{ бо } \triangle ABC \text{ — правільны.}$$

$$S_{\text{бак}} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} \cdot \sqrt{73} = 9\sqrt{219} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{в) } S_{\text{поўн}} = S_{\text{бак}} + S_{ABC} = 9\sqrt{219} + 27\sqrt{3} = 9\sqrt{3}(\sqrt{73} + 3) \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Адказ: а) } MA = MB = MC = 10 \text{ см; б) } S_{\text{бак}} = 9\sqrt{219} \text{ см}^2;$$

$$\text{в) } S_{\text{поўн}} = 9\sqrt{3}(\sqrt{73} + 3) \text{ см}^2.$$



Плошча поўнай паверхні піраміды роўная суме плошчы бакавой паверхні і плошчы асновы.



1. Адкажыце, якая — плоская ці прасторавая — ломаная паказана на рысунку:

а) 31;

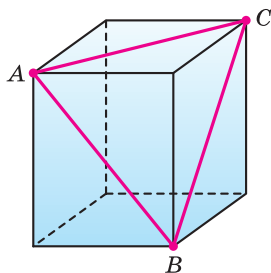
в) 33;

д) 35;

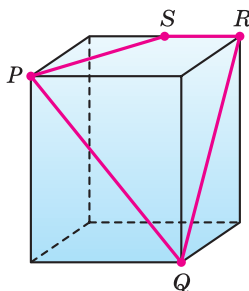
б) 32;

г) 34;

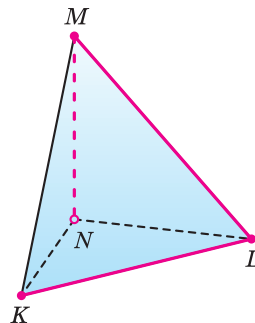
е) 36.



Рыс. 31



Рыс. 32



Рыс. 33

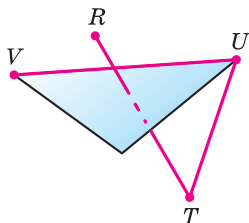


Рис. 34

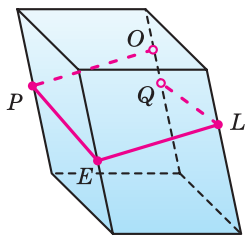


Рис. 35

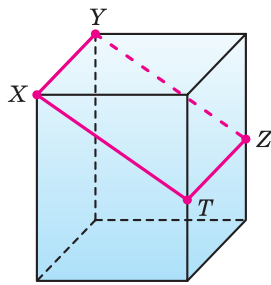


Рис. 36

2. Визначте, ці з'являється мнагаграннікам ціла, показане на рисунку:

- а) 37; б) 38; в) 39; г) 40; д) 41; е) 42.

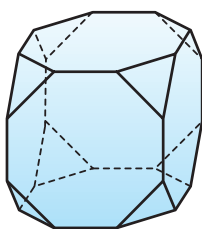


Рис. 37

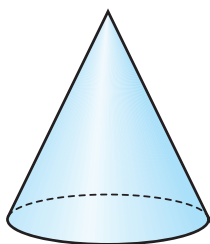


Рис. 38

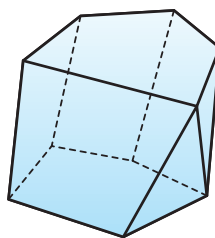


Рис. 39

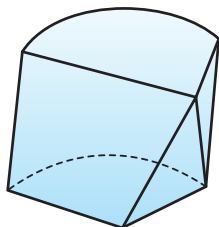


Рис. 40

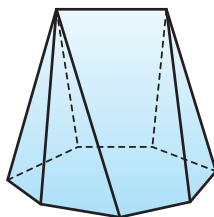


Рис. 41

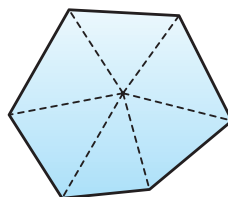


Рис. 42

3. На рисунку 43 показаны мнагаграннік $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$. Назавіце:

- а) грані з агульным кантам CD ;
 б) грані з агульным кантам DD_1 ;
 в) грані з агульною вяршыняй E ;
 г) грані з агульною вяршыняй C_1 ;
 д) канты з агульною вяршыняй A ;
 е) канты з агульною вяршыняй F_1 .

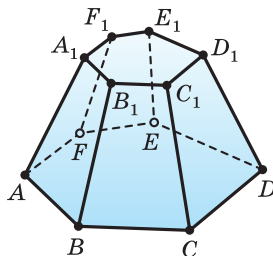
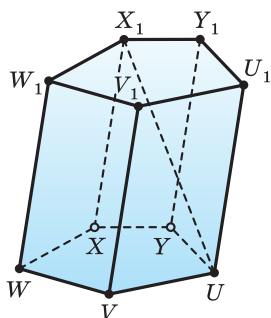
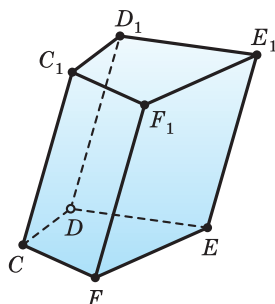


Рис. 43

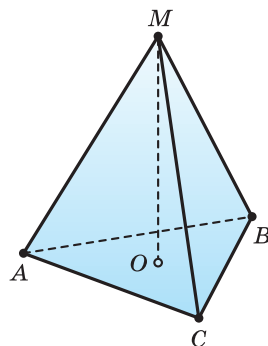
4. На рысунку 44 паказана пяцівугольная прызма $UVWXYU_1V_1W_1X_1Y_1$ і яе дыяганаль UX_1 . Назавіце іншыя дыяганалі гэтага мнагагранніка.
5. На рысунку 45 паказана чатырохвугольная прызма. Назавіце:
 - а) асновы прызмы;
 - б) бакавыя грані з кантам EE_1 ;
 - в) грані з кантам DE .
6. Старана асновы правільнай трохвугольнай прызмы роўная 6 см, а бакавы кант — 11 см. Знайдзіце бакавую і поўную паверхні прызмы.
7. Старана асновы правільнай n -вугольнай прызмы роўная a , а яе бакавы кант — h . Знайдзіце бакавую і поўную паверхні прызмы, улічыўшы, што:
 - а) $n = 3, a = 5, h = 10$;
 - б) $n = 4, a = 10, h = 30$;
 - в) $n = 6, a = 18, h = 32$.
8. Асновай прамой прызмы з'яўляецца трохвугольнік са старанамі 3 см і 5 см і вуглом паміж імі ў 120° , а найбольшая з плошчаў бакавых граняў роўная 35 см^2 . Знайдзіце поўную паверхню прызмы.
9. Асновай прамога паралелепіпеда з бакавым кантам 8 м з'яўляецца ромб з дыяганалямі 10 м і 24 м. Знайдзіце бакавую і поўную паверхні паралелепіпеда.
10. Асновай прамой прызмы з'яўляецца раўнабедраная трапецыя з асновамі 25 см і 15 см і вышынёй 12 см. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы, улічыўшы, што яе бакавы кант роўны 20 см.
11. Старана асновы ABC правільнай трохвугольнай піраміды $MABC$ роўная $10\sqrt{3}$ см, а адрэзак, што злучае вяршыню M піраміды з цэнтрам O асновы, — 12 см (рыс. 46). Знайдзіце:
 - а) апафему піраміды;
 - б) бакавую паверхню піраміды;
 - в) поўную паверхню піраміды.



Рыс. 44

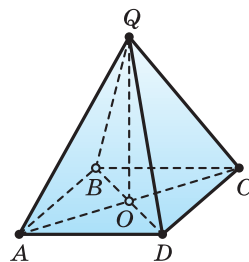


Рыс. 45



Рыс. 46

12. Апафема правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 15 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 12 см. Знайдзіце:
- а) бакавы кант;
 - б) бакавую паверхню піраміды;
 - в) поўную паверхню піраміды.
13. Бакавая паверхня правільнай шасцівугольнай піраміды роўная 150 см^2 , а яе апафема — 10 см. Знайдзіце плошчу асновы піраміды.
14. Старана асновы правільнай шасцівугольнай піраміды роўная 10 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — $\sqrt{69}$ см. Знайдзіце:
- а) бакавы кант і апафему піраміды;
 - б) бакавую паверхню піраміды;
 - в) поўную паверхню піраміды.
15. Апафема правільнай шасцівугольнай піраміды роўная 26 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 10 см. Знайдзіце:
- а) бакавы кант і старану асновы піраміды;
 - б) бакавую паверхню піраміды;
 - в) поўную паверхню піраміды.
16. Асновай піраміды $QABCD$ з'яўляецца ромб $ABCD$ са стараной, роўнай 10 см, адна з дыяганалей якога 16 см. Адрэзак, што злучае вяршыню Q піраміды з пунктам O перасячэння дыяганалей асновы, перпендыкулярны гэтым дыяганалям і роўны 14 см (рыс. 47). Знайдзіце:
- а) бакавыя канты піраміды;
 - б) бакавую паверхню піраміды.
17. Асновай піраміды $REFGH$ з'яўляецца паралелаграм $EFGH$ са старанамі 10 см і 18 см, плошчай 90 см^2 . Адрэзак, што злучае вяршыню R піраміды з пунктам O перасячэння дыяганалей асновы, перпендыкулярны гэтым дыяганалям і роўны 6 см. Знайдзіце:
- а) бакавыя канты піраміды;
 - б) бакавую паверхню піраміды;
 - в) поўную паверхню піраміды.
- 18*. Асновай піраміды з'яўляецца паралелаграм са старанамі 8 м, 10 м і меншай дыяганаллю 6 м. Адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з пунктам перасячэння дыяганалей асновы,



Рыс. 47

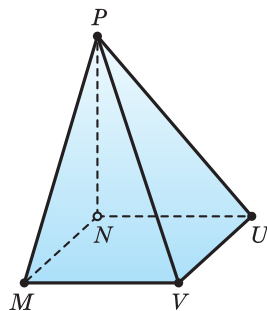
перпендыкулярны гэтым дыяганалям і роўны 4 м. Знайдзіце:

- а) бакавыя канты піраміды;
- б) бакавую паверхню піраміды;
- в) поўную паверхню піраміды.

- 19*.** Асновай піраміды $PMNUV$ з'яўляецца квадрат $MNUV$ (рыс. 48). Бакавы кант PN перпендыкулярны да кожнай прамой плоскасці асновы, што праходзіць праз пункт N , вуглы M і U граняў PMV і PUV прамыя, а вуглы M і U граняў PMN і PUN роўныя 45° кожны. Найбольшы бакавы кант роўны 24 см. Знайдзіце:

- а) іншыя бакавыя канты піраміды;
- б) бакавую паверхню піраміды;
- в) поўную паверхню піраміды.

- 20*.** Асновай піраміды з'яўляецца ромб са стараной 15 см і меншай дыяганаллю 18 см. Адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з пунктам перасячэння дыяганалей, перпендыкулярны ім і роўны 12 см. Знайдзіце вышыні граняў піраміды.

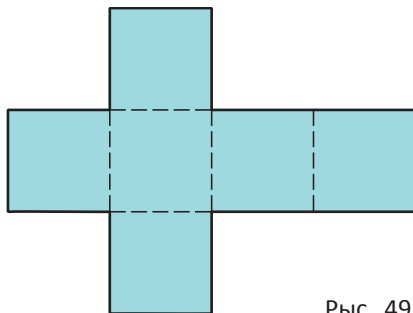


Рыс. 48

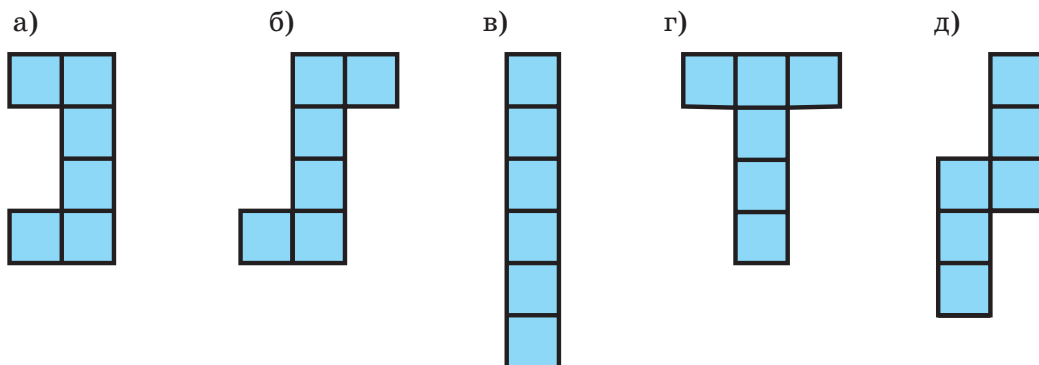


Прасторавое мадэляванне

1. Зрабіце выкрайку паверхні куба з кантамі 5 см, прадугледзеўшы палоскі для склейвання (рыс. 49), і склейце сам куб.
2. Якія з фігур, паказаных на рысунку 50, з'яўляюцца разгорткамі куба?
3. Зрабіце выкрайку паверхні прамой прызмы з бакавым кантамі 5 см, у аснове якой знаходзіцца трапецыя са старанамі 6 см, 3 см, 3 см, 3 см, і склейце саму прызму.

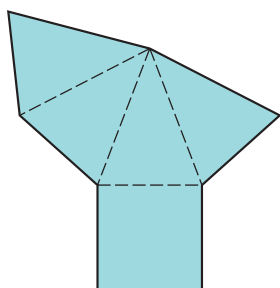


Рыс. 49



Рыс. 50

4. Зрабіце выкрайку паверхні правільнай чатырохвугольнай піраміды (рыс. 51), старана асновы якой роўная 5 см, а бакавы кант — 7 см, і склейце саму піраміду.



Рыс. 51



Рыс. 52

5. Зрабіце выкрайку паверхні піраміды, стораны асновы якой роўныя 4 см, 5 см і 7 см, а бакавыя канты — 7 см кожны, і склейце саму піраміду.

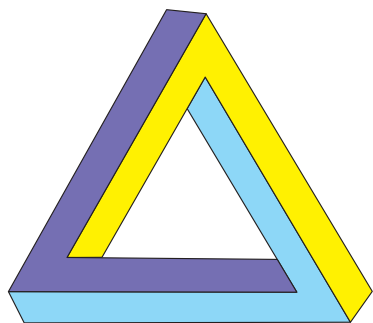
6. Знак нулявога кіламетра Беларусі ўстаноўлены на плошчы Незалежнасці (рыс. 52). Яго мадэллю з'яўляецца правільная чатырохвугольная піраміда, у якой суседнія бакавыя канты ўзаемна перпендыкулярныя, а старана асновы роўная 1 м 40 см. Якая колькасць матэрыялу спатрэбіцца для абліцоўвання бакавой паверхні такой піраміды?

7. Ці можа разгорткай піраміды быць:

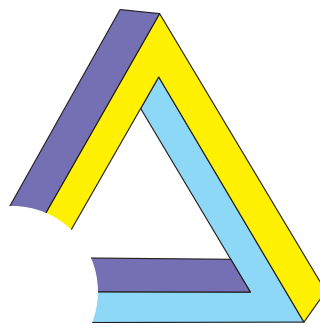
- | | |
|--------------------|-------------------|
| а) шасцівугольнік; | в) ромб; |
| б) прамавугольнік; | г) трохвугольнік? |

Адлюстраванне прасторавых фігур

Каб атрымаць відарыс прызмы, дастаткова пабудаваць многавугольнік — аснову прызмы. З вяршынь асновы правесці прамыя, паралельныя пэўнай фіксаванай прамой, і адкласці на іх роўныя адрэзкі. Злучаючы канцы гэтых адрэзкаў, атрымаем многавугольнік — другую аснову прызмы.



Рыс. 53



Рыс. 54



Рыс. 55

Каб атрымаць відарыс піраміды, дастаткова пабудаваць відарыс асновы піраміды, выбраць пэўны пункт у якасці выявы вяршыні піраміды і злучыць яго з вяршынямі многавугольніка асновы піраміды.

Не кожны відарыс успрымаецца намі як адлюстраванне фігуры, якая рэальна існуе. Ходкі выраз «падман зроку» па сутнасці сваёй няправільны. Вочы не могуць падмануць нас, паколькі з'яўляюцца толькі прамежковым звяном паміж аб'ектам і мозгам чалавека. Падман звычайна ўзнікае не з-за таго, што мы бачым, а з-за таго, што неўсвядомлена разважаем і міжвольна памыляемся.

Немагчымыя аб'екты ўяўляюць сабою рысункі на двухмернай плоскасці, і гэтыя рысункі адлюстроўваюць трохмерныя структуры, існаванне якіх у рэальным трохмерным свеце падаецца немагчымым. Класічным прыкладам такой простае фігуры з'яўляецца немагчымы трохвугольнік Пенроўза (рыс. 53). У гэтым трохвугольніку кожны вугал сам па сабе з'яўляецца магчымым, але парадокс узнікае тады, калі мы разглядаем яго цалкам. Стораны трохвугольніка накіраваны адначасова і на гледача, і ад яго, таму асобныя часткі трохвугольніка не могуць утварыць рэальны трохмерны аб'ект.

Наш мозг інтэрпрэтуе рысунак на плоскасці як трохмерную мадэль. Свядомасць задае «глыбіню», на якой знаходзіцца кожны пункт рысунка. Нашы ўяўленні пра рэальны свет сутыкаюцца з супярэчнасцю, з пэўнай непаслядоўнасцю, і даводзіцца рабіць некаторыя дапушчэнні: прамыя двухмерныя лініі інтэрпрэтуюцца як прамыя трохмерныя лініі; двухмерныя паралельныя лініі інтэрпрэтуюцца як трохмерныя паралельныя лініі; вострыя і тупыя вуглы інтэрпрэтуюцца як прамыя вуглы ў перспектыве; знешнія лініі разглядаюцца як мяжа формы, якая надзвычай важная для ўспрымання поўнай выявы.

Чалавечая свядомасць спачатку стварае агульны рысунак прадмета, а затым разглядае яго асобныя часткі. Кожны вугал сумяшчальны з прасторавай перспектывай, але, уз'яднаўшыся, яны ўтвараюць прасторавы парадокс. Калі закрыць любы з вугоў трохвугольніка (рыс. 54), то немагчымасць існавання знікае.

Падобныя фігуры сталі крыніцай натхнення для многіх творцаў. Графік Маўрыцыя Эшэр стварыў шэраг літаграфій (рыс. 55), якія прынеслі яму вядомасць мастака-ілюзіяніста.

§ 2. Прамыя і плоскасці

А) Прамыя і плоскасці ў прасторы могуць размяшчацца па-рознаму.

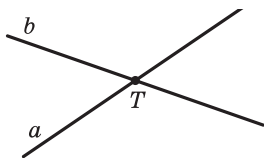


Рис. 56

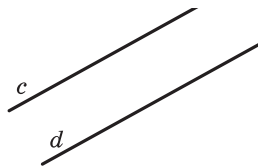


Рис. 57

Дзве прамыя плоскасці могуць мець толькі адзін агульны пункт. Такія прамыя называюцца перасякальнымі. На рысунку 56 паказаны перасякальныя прамыя a і b і іх адзіны агульны пункт T . Дзве прамыя плоскасці могуць не мець агульных пунктаў. Тады іх называюць *паралельнымі*. На рысунку 57 паказаны паралельныя прамыя c і d . У прасторы дзве прамыя могуць быць размяшчаны так, што яны не ляжаць у адной плоскасці, г. зн. няма такой плоскасці, якой бы яны абедзве належалі. Такія прамыя называюцца *скрыжаванымі*. Уяўленне пра такія прамыя даюць дзве дарогі, адна з якіх праходзіць па эстакадзе, а другая — пад эстакадай (рыс. 58). Такімі з'яўляюцца прамыя, што праходзяць праз канты MN і L_1M_1 паралелепіпеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рыс. 59).

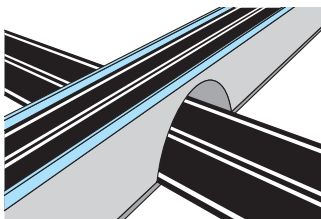


Рис. 58

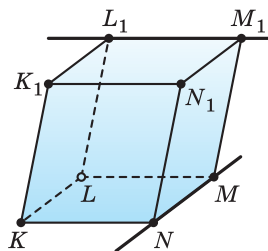


Рис. 59

Якім можа быць узаемнае размяшчэнне прамой і плоскасці?

Праяма можа ляжаць у плоскасці (рыс. 60). Калі праяма не ляжыць у плоскасці, то яна можа перасякаць яе ў пэўным пункце (рыс. 61) або не мець з плоскасцю ніводнага агульнага пункта (рыс. 62). У апошнім выпадку праяма і плоскасць называюцца *паралельнымі*.

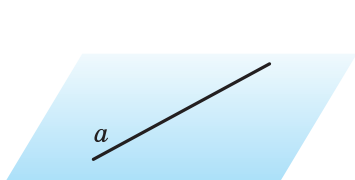


Рис. 60

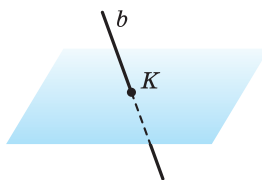


Рис. 61

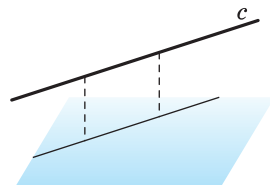
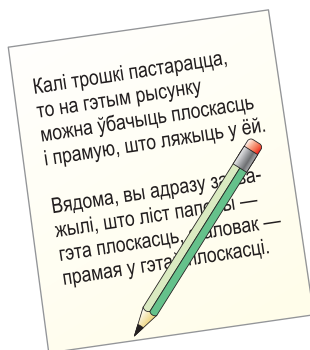
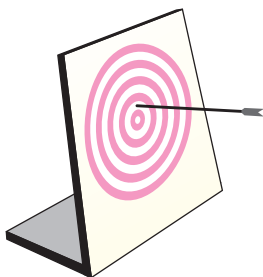


Рис. 62

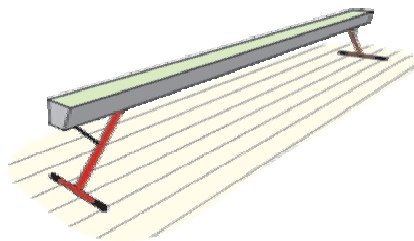
Уяўленне аб прамой, што ляжыць у плоскасці, дае аловак, які ляжыць на сталё (рыс. 63), пра перасякальныя прамую і плоскасць — стра-ла, выпушчаная з лука, якая патрапіла ў плоскую мішэнь (рыс. 64), аб прамой, якая не перасякае плоскасць, — падлога ў спартыўнай зале і гімнастычнае бярв'яно (рыс. 65).



Рыс. 63



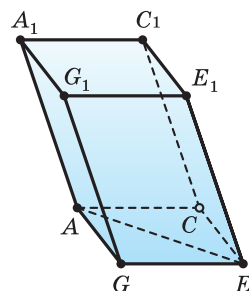
Рыс. 64



Рыс. 65

Названыя віды ўзаемнага размяшчэння пра-мой і плоскасці можна прасачыць і на відарысе паралелепіпеда (рыс. 66). Прамая, якой належыць дыяганаль AE грані $ACEG$, ляжыць у плоскасці гэтай грані. Прамая, якая праходзіць праз кант AA_1 , перасякае плоскасць грані $ACEG$. Прамая, якая змяшчае кант A_1C_1 , паралельная плоскасці грані $ACEG$.

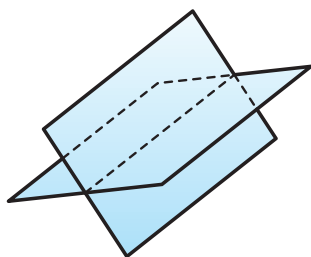
Як могуць размяшчацца ў прасторы дзве плоскасці?



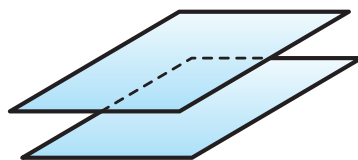
Рыс. 66

Плоскасці могуць перасякацца па прамой (рыс. 67) або не мець агульных пунктаў (рыс. 68). У адпаведнасці з гэтым іх называюць *перасякальнымі* або *паралельнымі*.

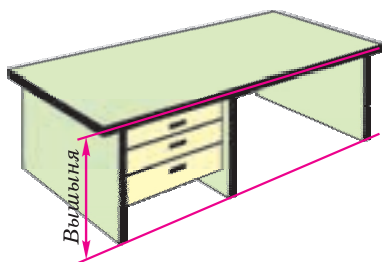
Уяўленне пра перасякальныя плоскасці даюць сталё і бакавіна ста-ла (рыс. 69), пра паралельныя плоскасці — падлога і стол у памяшканні (рыс. 70). На відарысе паралелепіпеда, што на рысунку 66, перасякальнымі з'яўляюцца плоскасці граняў AGG_1A_1 і $AGEC$, паралельнымі — плоскасці граняў AGG_1A_1 і CEE_1C_1 .



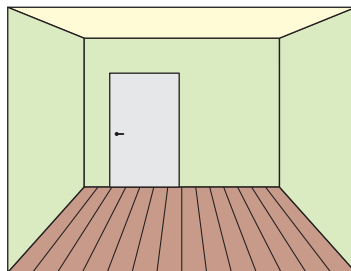
Рыс. 67



Рыс. 68



Рыс. 69



Рыс. 70

Знак $\parallel$ выкарыстоўваюць не толькі для абазначэння паралельнасці прамых, а і паралельнасці прамой і плоскасці і дзвюх плоскасцей. Калі ўлічыць, што прамыя абазначаюцца малымі лацінскімі літарамі $a, b, c, \dots$, а плоскасці — малымі грэчаскімі літарамі $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, то запісы $a \parallel b$, $c \parallel \alpha$, $\alpha \parallel \beta$ азначаюць, што паралельнымі з'яўляюцца прамыя a і b , прамая c і плоскасць α , плоскасці α і β .

В) Тэорыя ўзаемнага размяшчэння прамых і плоскасцей у прасторы грунтуецца на наступных аксіёмах.

Аксіёма 1. Калі тры пункты не ляжаць на адной прамой, то праз іх праходзіць адзіная плоскасць.

Аксіёма 2. Калі два пункты прамой ляжаць у плоскасці, то кожны пункт гэтай прамой належыць плоскасці.

У гэтым выпадку гавораць, што прамая ляжыць у плоскасці.

Аксіёма 3. Калі дзве плоскасці маюць агульны пункт, то яны маюць і агульную прамую, якая праходзіць праз гэты пункт.

Уласцівасць плоскасці, якую фіксуе аксіёма 1, часта выкарыстоўваецца на практыцы. Вастрыі ножак штатыва фотаапарата (рыс. 71) належаць адной плоскасці, і таму становішча фотаапарата ўстойлівае. Дзверы, замацаваныя на дзвюх петлях, не займаюць пэўнае становішча (рыс. 72), а калі дадаць трэці пункт мацавання — замок, становішча дзвярэй фіксуецца (рыс. 73). Калі ножкі табурэта няправільна падрэзаныя, то табурэт стаіць на трох ножках, а чацвёртая ножка вісіць над падлогай (рыс. 74).

Уласцівасць плоскасці, якую выражае аксіёма 2, выкарыстоўваюць для праверкі роўнасці рысавальнай лінейкі. Лінейку прыкладваюць



Рис. 71

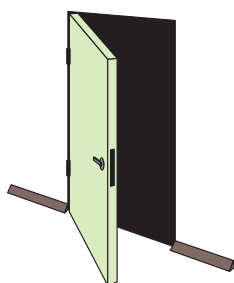


Рис. 72

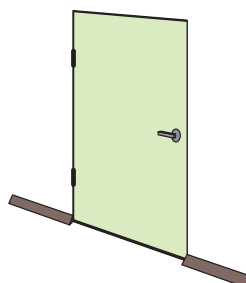


Рис. 73

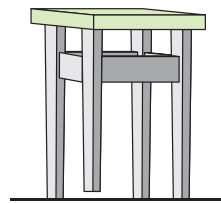


Рис. 74

краем да паверхні стала: калі край прамалінейны, то ён усімі сваімі пунктамі прылягае да паверхні стала (рис. 75), а калі няроўны, то паміж краем лінейкі і паверхняй стала ёсць шчыліна (рис. 76 і 77).



Рис. 75

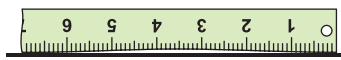


Рис. 76

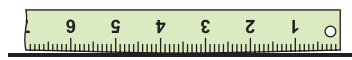


Рис. 77

Уласцівасць плоскасці, зафіксаваная аксіёмай 3, выяўляецца пры перасячэнні дзвюх сумежных сцен пакоя (рис. 78).

Адзначым, што ў стэрэаметрыі праўдзяцца ўсе аксіёмы планіметрыі і даказаныя ў ёй сцверджанні. У прыватнасці, прыметы роўнасці і прыметы падобнасці трохвугольнікаў з'яўляюцца праўдзівымі і для трохвугольнікаў, што ляжаць у розных плоскасцях.

У адпаведнасці з аксіёмай 1 плоскасць вызначаецца трыма сваімі пунктамі A, B, C , таму іншы раз плоскасць абазначаюць трыма вялікімі лацінскімі літарамі: плоскасць, якая праходзіць праз пункты A, B, C , абазначаюць (ABC) .

Прыклад. На кантах KK_1, K_1L_1, L_1M_1 прызмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ выбраны пункты A, B, C , прычым прамая, якую вызначаюць пункты B і C , не паралельная канту K_1N_1 (рис. 79). Плоскасці ABC і KNN_1 маюць агульны пункт A . У адпаведнасці з аксіёмай 3 яны маюць агульную прамую. Пабудуем яе.

Пункт A належыць грані KK_1N_1N , а пункты B, C — грані $K_1L_1M_1N_1$, і гэтыя грані перасякаюцца па прамой K_1N_1 . Гэта прамая і прамая BC ляжаць у адной плоскасці і не паралельныя. Таму яны перасякаюцца ў

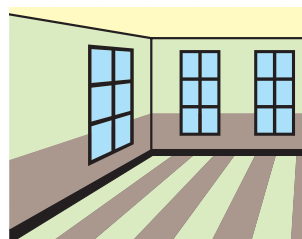


Рис. 78

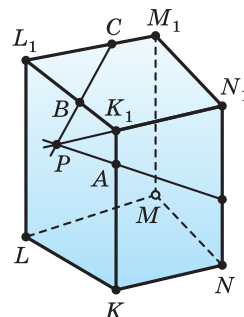


Рис. 79

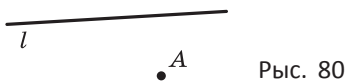
пэўным пункце. Знойдзем яго, прадоўжыўшы адрэзкі BC і K_1N_1 , і атрымаем пункт P .

Пункт P належыць прамым BC і K_1N_1 , значыць, ён належыць як плоскасці ABC , так і плоскасці KK_1N_1 . Гэтым жа плоскасцям належыць і пункт A . Значыць, прмая, што вызначаецца пунктамі P і A , належыць і плоскасці ABC , і плоскасці KK_1N_1 . Іншымі словамі, плоскасці ABC і KK_1N_1 перасякаюцца па прамой PA .

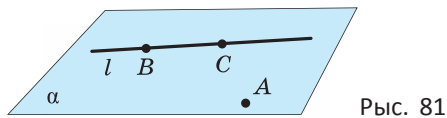
Тэарэма 3. Праз прамую і пункт па-за ёю праходзіць адзіная плоскасць.

Доказ. Няхай ёсць прмая l і пункт A , які не належыць прамой l (рыс. 80).

Выберам на прамой l два пункты B і C . Пункты A, B, C не ляжаць на адной прамой, таму па аксіёме 1 праз іх праходзіць пэўная плоскасць α (рыс. 81). Плоскасць α у адпаведнасці з аксіёмай 2 праходзіць і праз прамую l , бо два яе пункты B і C належаць плоскасці α .



Рыс. 80

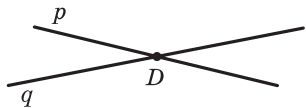


Рыс. 81

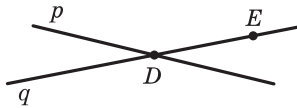
Дапусцім, што праз прамую l і пункт A праходзіць яшчэ адна плоскасць β . Тады плоскасць β праходзіць як праз пункт A , так і праз пункты B і C . Паколькі па аксіёме 1 праз тры розныя пункты праходзіць адзіная плоскасць, то плоскасць β супадае з плоскасцю α . Значыць, праз прамую і пункт A па-за ёю праходзіць адзіная плоскасць.

Тэарэма 4. Праз дзве перасякальныя прамыя праходзіць адзіная плоскасць.

Доказ. Няхай ёсць дзве перасякальныя прамыя p і q , і D — іх агульны пункт (рыс. 82).



Рыс. 82



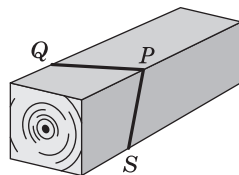
Рыс. 83

Выберам на прамой q які-небудзь пункт E , адрозны ад пункта D (рыс. 83). У адпаведнасці з тэарэмай 3 праз прамую p і пункт E праходзіць адзіная плоскасць γ . Плоскасць γ праходзіць і праз прамую q , бо два пункты D і E прамой q належаць плоскасці γ .

Дапусцім, што праз прамыя p і q праходзіць яшчэ адна плоскасць δ . Тады плоскасць δ праходзіць праз пункт E . Але праз гэты пункт і прамую p , у адпаведнасці з тэарэмай 3, праходзіць адзіная плоскасць. Значыць,

плоскасць δ супадае з плоскасцю γ . Такім чынам, праз перасякальныя прамыя p і q праходзіць адзіная плоскасць.

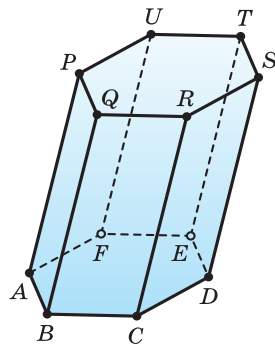
Тэарэма 4 знаходзіць сваё прымяненне на практыцы. Калі цесляру трэба распілаваць брус пад пэўным вуглом, ён, каб намеціць плоскасць распілу, праводзіць у дзвюх сумежных гранях бруса перасякальныя прамыя PQ і PS (рыс. 84).



Рыс. 84



1. Якія дзве прамыя плоскасці называюцца перасякальнымі; паралельнымі?
2. Якія прамыя называюцца скрыжаванымі?
3. Як могуць размяшчацца дзве прамыя ў прасторы?
4. Якія прамая і плоскасць называюцца перасякальнымі; паралельнымі?
5. Як могуць размяшчацца ў прасторы прамая і плоскасць?
6. Якія дзве плоскасці называюцца перасякальнымі; паралельнымі?
7. Як могуць размяшчацца ў прасторы дзве плоскасці?
8. Сфармулюйце ўласцівасць плоскасці, што праходзіць праз тры пункты, і прывядзіце прыклады мадэляў, што ілюструюць гэту ўласцівасць.
9. Сфармулюйце ўласцівасць прамой, два пункты якой належаць плоскасці, і прывядзіце прыклады мадэляў, што ілюструюць гэту ўласцівасць.
10. Сфармулюйце ўласцівасць пра агульную прамую дзвюх плоскасцей і прывядзіце прыклады мадэляў, што ілюструюць гэту ўласцівасць.
11. Як абазначаюцца пункты; прамыя; плоскасці?
12. Назавіце спосабы задання плоскасці.
13. Ці праўда, што:
 - а) праз любыя два пункты праходзіць адзіная прамая;
 - б) праз любыя тры пункты праходзіць адзіная плоскасць;
 - в) тры папарна перасякальныя прамыя ляжаць у адной плоскасці? Адказ абгрунтуйце.
14. На рысунку 85 паказана прызма, асновы якой — правільныя шасцівугольнікі. Назавіце:
 - а) прамыя, перасякальныя з плоскасцю ABC ;
 - б) прамыя, перасякальныя з плоскасцю UTF ;
 - в) прамыя, што ляжаць у плоскасці PTR ;
 - г) прамыя, якія належаць плоскасці CDR ;
 - д) прамыя, паралельныя плоскасці FEC ;
 - е) прамыя, паралельныя плоскасці AQB .



Рыс. 85

15. На рысунку 86 паказаны паралелепіпед. Назавіце:

- а) плоскасці, перасякальныя з прамой CQ ;
- б) плоскасці, перасякальныя з прамой OP ;
- в) плоскасці, у якіх ляжыць прамая NO ;
- г) плоскасці, якім належаць прамая DN ;
- д) плоскасці, паралельныя прамой CF ;
- е) плоскасці, паралельныя прамой EO .

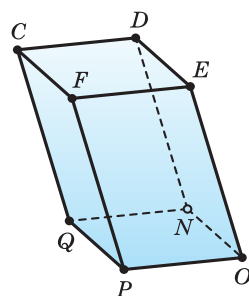


Рис. 86

16. Ці могуць дзве плоскасці мець:

- а) толькі адзін агульны пункт;
- б) толькі два агульныя пункты;
- в) толькі адну агульную прамую;
- г) толькі дзве агульныя прамыя?



Задача 1. Дакажыце, што:

а) калі пэўны пункт A належыць прамой k , якая належыць плоскасці α , то пункт A належыць плоскасці α ;

б) калі два пункты A і B належаць як прамой l , так і плоскасці α , то прамая l ляжыць у плоскасці α ;

в) калі плоскасці α і β перасякаюцца па прамой l і пункт A належыць як плоскасці α , так і плоскасці β , то пункт A належыць прамой l ;

г) прамая a , якая перасякае ў розных пунктах дзве перасякальныя прамыя k і l , належыць плоскасці гэтых прамых.

Рашэнне: а) $k \subset \alpha$ азначае, што любы пункт прамой k належыць таксама і плоскасці α .

Любы пункт прамой k належыць плоскасці α , таму і пэўны пункт A прамой k належыць плоскасці α .

б) $A \in l$ і $B \in l$, таму прамая AB і l супадаюць ($AB = l$) (аксіёма прамой).

$A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, таму $AB \subset \alpha$ (аксіёма 2).

$AB \subset \alpha$ і $AB = l$, таму $l \subset \alpha$.

в) $A \in \alpha$ і $A \in \beta$, таму $A \in \alpha \cap \beta$.

$A \in \alpha \cap \beta$ і $\alpha \cap \beta = l$, таму $A \in l$.

г) $k \cap l = O$, таму існуе такая плоскасць α , што $k \subset \alpha$ і $l \subset \alpha$.

$a \cap k = A$, $k \subset \alpha$, таму $A \in \alpha$.

$a \cap l = B$ і $l \subset \alpha$, таму $B \in \alpha$.

$A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, таму $AB \subset \alpha$ (аксіёма 2).

$a \cap k = A$, таму $A \in a$.

$a \cap l = B$, таму $B \in a$.

$A \in a$ і $B \in a$, таму $AB = a$.

$AB \subset \alpha$ і $AB = a$, таму $a \subset \alpha$.

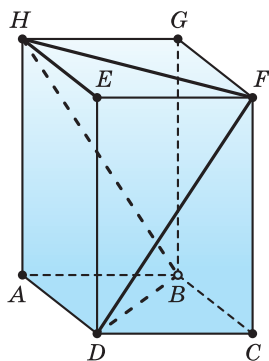
Задача 2. Асновай прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDHGFE$ з'яўляецца квадрат $ABCD$ са старонай 6 см, а бакавы кант AH паралелепіпеда роўны 8 см (рыс. 86). Знайдзіце даўжыню прасторавай ломанай $HFDBH$.

Рашэнне. $DB = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (см), $AC = 6\sqrt{2}$, бо $ABCD$ — квадрат.

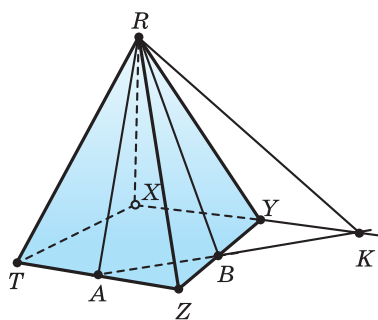
$FD = \sqrt{FC^2 + CD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см), бо $DEFC$ — прамавугольнік.
 $BH = FD = 10$ см, бо роўныя прамавугольнікі маюць роўныя дыяганалі.

$$l_{HFDBH} = HF + FD + DB + BH = 6\sqrt{2} + 10 + 6\sqrt{2} + 10 = \\ = (20 + 12\sqrt{2}) \text{ (см)} = 4 \cdot (5 + 3\sqrt{2}) \text{ (см)}.$$

Адказ: $4 \cdot (5 + 3\sqrt{2})$ см.



Рыс. 86



Рыс. 87

Задача 3. Пункты A і B — сярэдзіны кантаў TZ і YZ піраміды $RTXYZ$ (рыс. 87). Пабудуйце:

- пункт перасячэння прамой AB і плоскасці RXY ;
- прамую, па якой перасякаюцца плоскасці RAB і RXY .

Рашэнне. а) $A \in TZ$, $TZ \subset (TXY)$, таму $A \in (TXY)$;

$B \in YZ$, $YZ \subset (TXY)$, таму $B \in (TXY)$.

$AB \subset (TXY)$ (аксіёма 2).

$XY \subset (TXY)$, таму $AB \cap XY = K$, $K \in XY$ і $K \in AB$.

$XY \subset (RXY)$, таму $K \in (RXY)$ і $K = AB \cap (RXY)$.

б) $K \in (RXY)$ і $R \in (RXY)$, таму $KR \subset (RXY)$.

$K \in AB$ і $AB \subset (RAB)$, таму $K \in (RAB)$.

$K \in (RAB)$ і $R \in (RAB)$, таму $KR \subset (RAB)$.

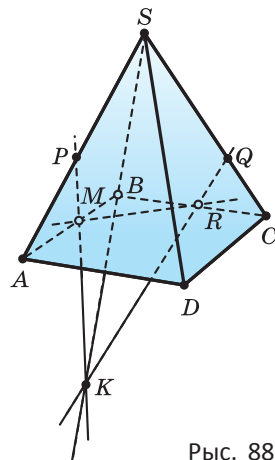
$KR \subset (RAB)$ і $KR \subset (RXY)$, таму $KR = (RAB) \cap (RXY)$.

Задача 4. Пункты P , Q і R належаць адпаведна кантам SA , SC і BC піраміды $SABCD$ (рыс. 88). Пабудуйце прамую, па якой плоскасць PQR перасякае плоскасць ABC .

Рашэнне. $Q \in SC$ і $SC \subset (SBC)$, таму $Q \in (SBC)$.

$R \in BC$ і $BC \subset (SBC)$, таму $R \in (SBC)$.

Па аксіёме 2 $QR \subset (SBC)$.
 $QR \subset (SBC)$ і $SB \subset (SBC)$,
таму $QR \cap SB = K$, $K \in SB$,
 $SB \subset (SAB)$ і $K \in (SAB)$.
 $P \in SA$ і $SA \subset (SAB)$, таму $P \in (SAB)$.
 $K \in (SAB)$ і $P \in (SAB)$, таму $KP \subset (SAB)$.
 $KP \subset (SAB)$ і $AB \subset (SAB)$,
таму $KP \cap AB = M \in AB$.
 $R \in BC$ і $BC \subset (ABC)$, таму $R \in (ABC)$;
 $R \in (PQR)$; тады $R \in (ABC) \cap (PQR)$.
 $M \in AB$ і $AB \subset (ABC)$, таму $M \in (ABC)$;
 $M \in KP$ і $KP \subset (PQR)$, таму $M \in (PQR)$;
тады $M \in (ABC) \cap (PQR)$.
Па аксіёме 3 $(PQR) \cap (ABC) = MR$.



Рыс. 88



21. Колькі агульных пунктаў могуць мець:
 - а) дзве прамыя;
 - б) прамая і плоскасць;
 - в) дзве плоскасці?
22. Ці могуць мець адзін агульны пункт:
 - а) дзве прамыя;
 - б) прамая і плоскасць;
 - в) дзве плоскасці;
 - г) тры плоскасці?
23. Колькі ўтвараецца ліній пры папарным перасячэнні трох плоскасцей?
24. Колькі розных прамых могуць вызначаць розныя пункты?
25. Выкарыстаўшы рысунак 89, назавіце:
 - а) пункты, якія ляжаць у плоскасцях LMQ і NME ;
 - б) плоскасці, у якіх ляжыць прамая NR ;
 - в) пункт перасячэння прамой BC з плоскасцю KLN ;
 - г) пункты перасячэння прамых PL і ND з плоскасцю OPR ;
 - д) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці KON і KLM ;
 - е) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці RDQ і MNK ;
 - ж) пункт перасячэння прамых AB і LM ;
 - з) пункт перасячэння прамых RQ і BD ;
 - і) пункт перасячэння прамых BQ і MC .
26. Чатырохвугольная піраміда $PGHKL$ на рысунку 90 — правільная, а PA і PB — вышыні яе граняў PGH і PHK . Дакажыце, што трохвугольнікі PGA і PHB роўныя.
27. Пункты A, B, C, D не ляжаць у адной плоскасці. Ці могуць:
 - а) якія-небудзь тры з іх ляжаць на адной прамой;
 - б) прамыя AB і CD перасякацца?
28. Пункты U і V з'яўляюцца пунктамі трохвугольніка ABC , а пункт W належыць прамой UV (рыс. 91). Ці належыць пункт W плоскасці ABC ?

36. Ёсць прамая a і пункт K , не прыналежаць ёй. Дакажыце, што ўсе прамыя, што праходзяць праз пункт K і перасякаюць прамую a , ляжаць у адной плоскасці.
37. Пункты M і N належаць кантам SS_1 і RR_1 прызмы $PQRSP_1Q_1R_1S_1$. Дакажыце, што прамая MN належыць плоскасці RSS_1 .
38. Прамая a ляжыць у адной з перасякальных плоскасцей β і перасякае другую плоскасць γ . Дакажыце, што прамая a перасякае лінію перасячэння плоскасцей β і γ .
39. Выкарыстаўшы рысунак 92, на якім пункты B і C належаць кантам PK і PT трохвугольнай піраміды $KPTU$, а пункт A ляжыць на прамой, што праходзіць праз кант KU :
- назавіце прамыя, якім належыць пункт U ;
 - дакажыце, што прамая AB ляжыць у плоскасці KPU ;
 - устанавіце, якім грэням піраміды належыць прамая BC ;
 - устанавіце, якім грэням піраміды належыць прамая KT ;
 - назавіце плоскасць, якой належыць пункт A ;
 - назавіце прамыя, праз якія праходзіць плоскасць KPT .
40. Выкарыстаўшы рысунак 93, на якім E — пункт канта AI чатырохвугольнай піраміды $Aijkl$, пункт F належыць канту AK , а пункт G ляжыць на прамені AK за пунктам K :
- назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці IAJ і JAK ;
 - назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці AJG і KAL ;
 - дакажыце, што прамая EF ляжыць у плоскасці IAK ;
 - дакажыце, што прамыя EF і FG ляжаць у адной плоскасці;
 - назавіце плоскасці, якім належыць прамая JL .
41. На рысунку 94 адлюстравана чатырохвугольная прызма $CDEF C_1D_1E_1F_1$, пункт P выбраны на прамені D_1E_1 за пунктам E_1 , а пункт R — на канце C_1F_1 . Выкарыстаўшы гэты рысунак:

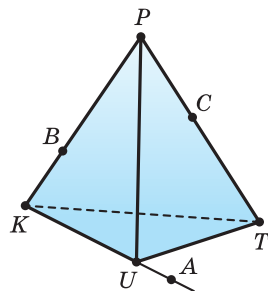


Рис. 92

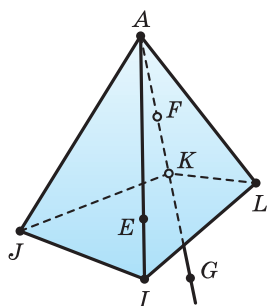


Рис. 93

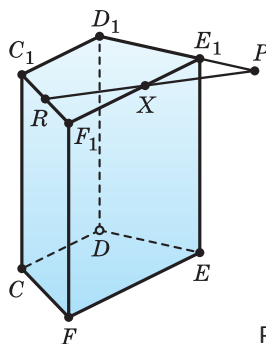
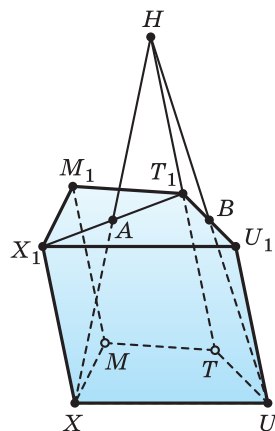


Рис. 94

- а) дакажыце, што прамая PR належыць плоскасці $C_1D_1F_1$;
- б) дакажыце, што прамая PR перасякае прамую E_1F_1 ;
- в) назавіце прамую, па якой плоскасць $C_1D_1F_1$ перасякае плоскасць DD_1E ;
- г) назавіце прамую, па якой плоскасць $C_1D_1F_1$ перасякае плоскасць PRF ;
- д) назавіце пункт, у якім прамая PR перасякае плоскасць DEE_1 ;
- е) назавіце пункт, у якім прамая PR перасякае плоскасць FF_1E_1 .

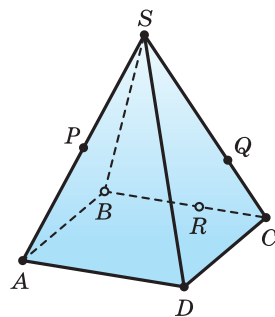
42. Ёсць прызма $MTUXM_1T_1U_1X_1$. На прамені TT_1 за пунктам T_1 выбраны пункт H , праз які праведзены прамыя HU і HX (рыс. 95). Выкарыстаўшы гэта:



Рыс. 95

- а) дакажыце, што прамыя HU і T_1U_1 перасякаюцца ў пэўным пункце B ;
- б) назавіце пункт, у якім прамая HU перасякае плоскасць $M_1T_1X_1$;
- в) дакажыце, што прамыя HX і T_1X_1 перасякаюцца ў пэўным пункце A ;
- г) дакажыце, што прамая HX і плоскасць $M_1T_1U_1$ перасякаюцца ў пункце A ;
- д) назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці XHU і T_1TU ;
- е) назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці XHU і MTX .

43. Пункты P , Q і R належаць адпаведна кантам SA , SC і BC піраміды $SABCD$ (рыс. 96). Пабудуйце прамую, па якой плоскасць PQR перасякае плоскасць:



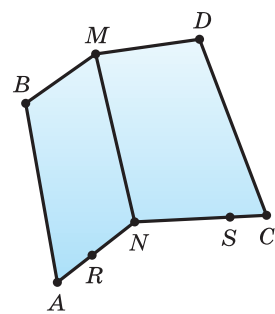
Рыс. 96

- а) SBC ;
- б) SAB ;
- в) SBD ;
- г) SDC .

44. Пункт M — унутраны пункт канта AJ трохвугольнай піраміды AJK , пункт N ляжыць на прамені AK за пунктам K . Пабудуйце:

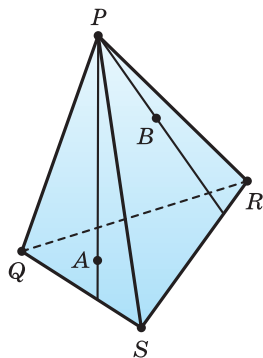
- а) пункт перасячэння прамой MN з плоскасцю IJK ;
- б) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці IMN і IJK .

45. На адрэзку MN як на старане ў розных плоскасцях пабудаваны два чатырохвугольнікі $MNAB$ і $MNCD$, на адрэзках NA і NC выбраны ўнутраныя пункты R і S адпаведна (рыс. 97).



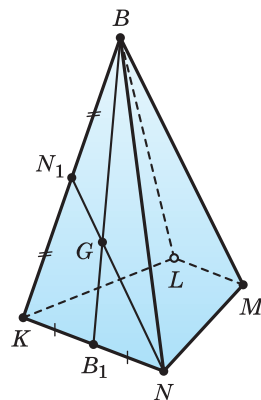
Рыс. 97

- Зрабіце такі рысунак у сшытку і:
- пабудуйце пункт, у якім прамая MR перасякае плоскасць ABC ;
 - пабудуйце пункт перасячэння прамой CD з плоскасцю ARS ;
 - дакажыце, што прамая RS належыць плоскасці CAN .
46. Пункты A і B — унутраныя пункты кантаў KM і KQ прызмы $KMOQK_1M_1O_1Q_1$. Пабудуйце:
- пункт, у якім прамая AB перасякае плоскасць M_1MO ;
 - прамую, па якой плоскасць ABO_1 перасякае плоскасць MOO_1 .
47. Пункты A, B, C з'яўляюцца сярэдзінамі кантаў T_1U_1, U_1V_1, V_1W_1 паралелепіпеда $TUVWT_1U_1V_1W_1$. Пабудуйце:
- пункт, у якім прамая AB перасякае плоскасць WW_1V_1 ;
 - прамую, па якой плоскасць ABC перасякае плоскасць WW_1V_1 .
48. Дыяганалі KM і LN асновы $KLMN$ піраміды $AKLMN$ перасякаюцца ў пункце O , пункт B — унутраны пункт адрэзка KO , а пункт C ляжыць на прамені LN за пунктам N . Пабудуйце:
- пункт, у якім прамая BC перасякае плоскасць ALM ;
 - прамую, па якой перасякаюцца плоскасці ABC і ALM .
49. Ёсць паралелепіпед $BCDEB_1C_1D_1E_1$. Пабудуйце:
- пункт перасячэння прамой EE_1 з лініяй перасячэння плоскасцей BC_1D і C_1CE ;
 - лінію перасячэння плоскасцей BC_1D і EDD_1 .
50. Пункты A і B ляжаць у гранях PQS і PRS трохвугольнай піраміды $PQRS$ (рыс. 98). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце пункт, у якім прамая AB перасякае:
- плоскасць QRS ;
 - плоскасць PQR .
51. Бакавая паверхня прамавугольнага паралелепіпеда з квадратнай асновай роўная 12 см^2 . Знайдзіце дыяганаль бакавой грані, улічыўшы, што дыяганаль асновы роўная $\sqrt{2} \text{ см}$.
52. Асновай прамой трохвугольнай прызмы з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік, радыусы ўмежанай у яго і апісанай каля яго акружнасцей роўныя адпаведна 4 см і 10 см . Знайдзіце поўную паверхню прызмы, улічыўшы, што яе бакавы кант роўны 16 см .
53. Асновай прамой прызмы з'яўляецца раўнабедраная трапецыя, у якую можна ўмежыць акружнасць. Бакавая старана трапецыі роўная 12 см і ўтварае з асновай вугал у 30° . Знайдзіце бакавы кант прызмы, улічыўшы, што яе поўная паверхня роўная 336 см^2 .



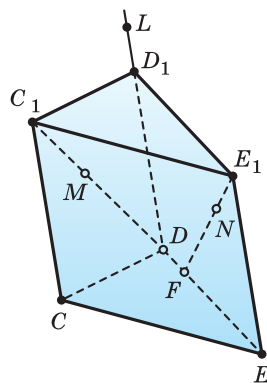
Рыс. 98

54. Медыяны BB_1 і NN_1 грані BKN чатырохвугольнай піраміды $BKLMN$ перасякаюцца ў пункце G (рыс. 99). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце пункт, у якім прамая MG перасякае плоскасць BLN .



Рыс. 99

55. Пункт M выберыце на дыяганалі DC_1 грані трохвугольнай прызмы $CDEC_1D_1E_1$, пункт N — на адрэзку E_1F , дзе F — унутраны пункт канта DE , пункт L — на прамені DD_1 за пунктам D_1 (рыс. 100). Пабудуйце прамую, па якой плоскасць MNL перасякае плоскасць ECC_1 .



Рыс. 100

56. Выберыце пункты A і B адпаведна на кантах MX і MY чатырохвугольнай піраміды $MXYZV$, а пункт C — на прамені YZ за пунктам Z . Пабудуйце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці ABC і XYZ .

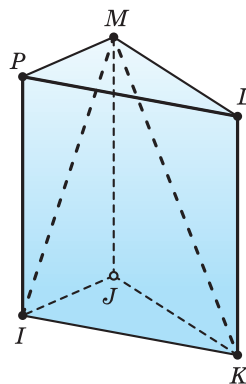
57. Кант асновы правільнай трохвугольнай прызмы $IJKPML$ (рыс. 101) адносіцца да бакавога канта як $2 : 3$. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы, улічыўшы, што даўжыня ломанай $IPLKMI$ роўная $16 + 4\sqrt{13}$ дм.

58. Пункты A і B дзеляць канты QD і QE правільнай чатырохвугольнай піраміды $QCDEF$ з усімі роўнымі кантамі ў адносіне $5 : 7$, калі лічыць ад вяршыні Q . Знайдзіце поўную паверхню піраміды, улічыўшы, што даўжыня ломанай $ABQFA$ роўная 70 см.

59*. Плошча бакавой паверхні прамавугольнага паралелепіпеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ з квадратнай асновай роўная 2640 мм^2 . Знайдзіце канты паралелепіпеда, улічыўшы, што радыус акружнасці, умежанай у трохвугольнік NKK_1 , роўны 5 мм.

60*. Дыяганаль бакавой грані прамавугольнага паралелепіпеда $CDEFC_1D_1E_1F_1$ з квадратнай асновай роўная 52 см, а радыус акружнасці, умежанай у трохвугольнік CC_1D , роўны 8 см. Знайдзіце поўную паверхню паралелепіпеда.

61*. Бакавы кант правільнай чатырохвугольнай піраміды роўны 8 см, а яе бакавая паверхня — $16\sqrt{15} \text{ см}^2$. Знайдзіце старану асновы піраміды, улічыўшы, што радыус акружнасці, умежанай у бакавую грань, роўны $2\sqrt{0,6}$ см.



Рыс. 101

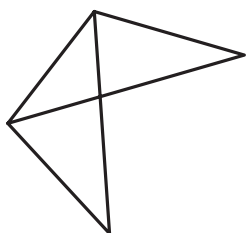


Прастаравае мадэляванне

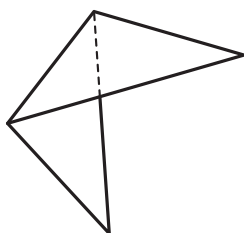
Адкажыце, якая — плоская ці прасторавая — фігура паказана на rysunku:

- а) 102; б) 103; в) 104.

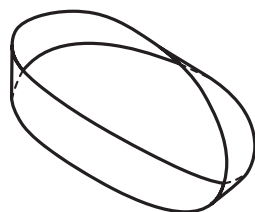
На рысунку 104 паказана паверхня, якую называюць стужкай Мёбіуса, або лістом Мёбіуса. Яе адкрылі незалежна адзін ад аднаго ў 1858 годзе нямецкія матэматыкі Аўгуст Мёбіус і Ёган Лістынг. Да гэтага меркавалася, што кожная паверхня мае два бакі, якія можна пафарбаваць рознымі колерамі.



Рыс. 102



Рыс. 103



Рыс. 104

Стужка Мёбіуса мае адзін бок і адзін край. У гэтым лёгка ўпэўніцца. Возьмем прамавугольную стужку $ABCD$ і склеім яе так, каб пункт A супаў з пунктам C , а пункт B — з пунктам D . Зрабіце гэта самі і паспрабуйце зафарбаваць атрыманую стужку, не пераходзячы праз яе край. Які вынік у вас атрымаўся?

Якая паверхня атрымаецца, калі ліст Мёбіуса разрэзаць па яго сярэдняй лініі? Паспрабуйце зафарбаваць гэту паверхню. Што атрымалася? А што будзе, калі ліст Мёбіуса разрэзаць, адступіўшы ад яго краю на трэць шырыні?

Памятны знак «Ліст Мёбіуса» (рыс. 105) быў устаноўлены 22 студзеня 2009 года да 80-годдзя Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі.

Уласцівасці стужкі Мёбіуса знайшлі практычнае прымяненне і ў прамысловасці. У выглядзе стужкі Мёбіуса робяць шліфавальныя стужкі, фарбавальную стужку матрычных прынтараў, паласу стужкавага канвеера, што



дазваляе павялічыць тэрмін службы, таму што ўся паверхня стужкі раўнамерна зношваецца. Стужку Мёбіуса прымяняюць у сістэмах запісу на бесперапынную плёнку, каб падвоіць час запісу.

Рыс. 105

§ 3. Пабудаванне сячэнняў мнагаграннікаў

А) Пры вывучэнні стэрэаметрыі даводзіцца праставава фігуры паказваць на плоскіх рысунках. Часта на рысунку трэба паказаць узаемае размяшчэнне дзвюх фігур. Калі адна з фігур — мнагаграннік, а другая — плоскасць, то іх узаемае размяшчэнне характарызуе тая частка мнагагранніка, якая належыць разглядаанай плоскасці, або, іншымі словамі, *сячэнне мнагагранніка плоскасцю*. Плоскасць пры гэтым называюць *сякучай плоскасцю*.

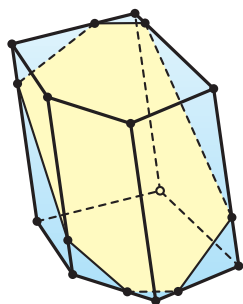


Рис. 106

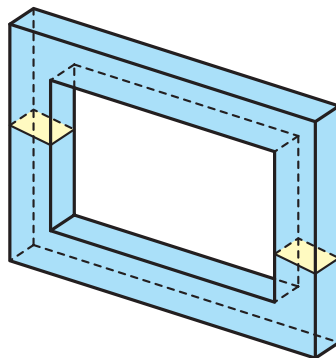


Рис. 107

Сякучая плоскасць перасякае паверхню мнагагранніка па адрэзках, а сячэннем мнагагранніка плоскасцю з'яўляецца адзін або некалькі многавугольнікаў.

На рысунку 106 паказана сячэнне пяцівугольнай прызмы, якое з'яўляецца сямівугольнікам. Сячэнне «рамы» плоскасцю на рысунку 107 складаецца з двух чатырохвугольнікаў.

Для пабудавання сячэння мнагагранніка дастаткова пабудаваць агульныя пункты яго граняў і сякучай плоскасці.

Прыклад 1. Пабудуем сячэнне трохвугольнай піраміды $SABC$ плоскасцю, што праходзіць праз пункты M , N і K на кантах SA , SB і SC .

Сякучая плоскасць MNK мае з плоскасцю SAB два агульныя пункты M і N , таму прамая MN належыць як сякучай плоскасці, так і плоскасці SAB . Значыць, адрэзак MN — лінія перасячэння грані SAB з плоскасцю MNK .

Разважаючы аналагічна, атрымліваем, што плоскасць MNK перасякае грані SAC і SBC па адрэзках MK і NK адпаведна.

Трохвугольнік MNK — шуканае сячэнне (рыс. 108).

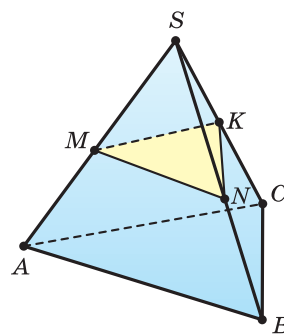
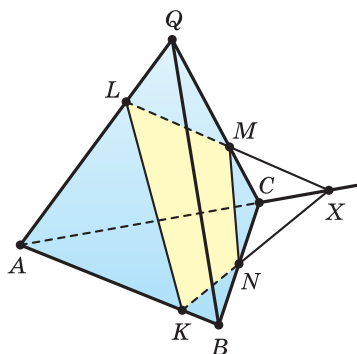


Рис. 108



Рыс. 109

Прыклад 2. Пабудуем сячэнне трохвугольнай піраміды $QABC$ плоскасцю α , што праходзіць праз пункты K , L , M кантаў AB , AQ , CQ .

Сякучая плоскасць α (рыс. 109) мае з гранню AQB два агульныя пункты K і L , таму яна перасякае гэту грань па адрэзку KL .

Гэтаксама, паколькі пункты L і M — агульныя пункты сякучай плоскасці і грані AQC , то LM — лінія перасячэння гэтых плоскасцей.

Грань ABC мае з сякучай плоскасцю агульны пункт K . Знойдзем пункт, у якім плоскасць α перасякае кант BC . Звернем увагу на

тое, што пункт X перасячэння прамых LM і AC належыць плоскасці α , плоскасці AQC і плоскасці ABC . А паколькі пункты K і X — агульныя пункты плоскасцей α і ABC , то KX — прамая, па якой плоскасць α перасякае плоскасць ABC . Пункт N перасячэння прамой KX з кантам BC належыць плоскасці α . Значыць, плоскасць α перасякае грань ABC па адрэзку KN , а грань BQC — па адрэзку MN .

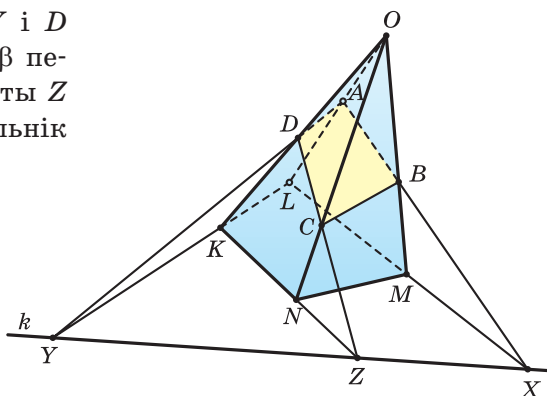
Чатырохвугольнік $KLMN$ — шуканае сячэнне піраміды плоскасцю α .

Прамыя KL і KN называюць слядамі плоскасці α на плоскасцях ABQ і ABC адпаведна.

Прыклад 3. Пабудуем сячэнне піраміды $OKLMN$ плоскасцю β , што праходзіць праз пункт A на канце OL і прамую k у плоскасці асновы $KLMN$.

Знойдзем пункт X (рыс. 110), у якім перасякаюцца прамыя LM і k . Гэты пункт належыць і сякучай плоскасці β як пункт прамой k , і плоскасці грані LOM як пункт прамой LM . Пункт A таксама належыць гэтым абедзвюм плоскасцям. Таму плоскасць β перасякае плоскасць LOM па прамой AX , а грань LOM — па адрэзку AB , дзе B — пункт перасячэння прамых AX і OM .

Гэтаксама знойдзем пункты Y і D і адрэзак AD , па якім плоскасць β перасякае грань OLK , а затым пункты Z і C і адрэзкі DC і BC . Чатырохвугольнік $ABCD$ — шуканае сячэнне.



Рыс. 110

Б) A, B, C — пункты на розных кантах чатырохвугольнай прызмы. Знойдзем сячэнне прызмы плоскасцю ABC .

Пабудаванне шуканага сячэння залежыць ад таго, на якіх кантах прызмы ляжаць пункты A, B, C . Найбольш проста будаваць сячэнне ў тым выпадку, калі пункты A, B, C ляжаць на кантах, што выходзяць з адной вяршыні. Шуканае сячэнне ў гэтым выпадку — трохвугольнік ABC .

Прыклад 4. Пункты A, B, C размешчаны так, як паказана на рысунку 111. Пабудуем сячэнне прызмы плоскасцю ABC . Спачатку пабудуем след сякучай плоскасці ABC на плоскасці ніжняй асновы. Для гэтага знойдзем пункты M і N перасячэння прамых AB і BC , якія ляжаць у сякучай плоскасці, з плоскасцю $RSUV$: M — пункт перасячэння прамых AB і RV , N — прамых BC і UV . Прамая MN — агульная прамая сякучай плоскасці і плоскасці ніжняй асновы.

Пункт P перасячэння прамой RS са следам MN належыць і сякучай плоскасці, і плоскасці грані RR_1S_1S . Улічыўшы, што гэтым дзвюм плоскасцям належыць і пункт A , атрымліваем, што прамая PA — след сякучай плоскасці на плоскасці RR_1S_1S . Значыць, плоскасць ABC персякае грань RR_1S_1S па адрэзку AD , а грань UU_1S_1S — па адрэзку CD .

Шуканым сячэннем з'яўляецца чатырохвугольнік $ABCD$.

Бачым, што новым элементам у гэтым рашэнні ў параўнанні з прыкладам 2 з'яўляецца пабудаванне следу сякучай плоскасці на плоскасці асновы.

Прыклад 5. Пункты A, B, C размешчаны так, як паказана на рысунку 112. Пабудуем сячэнне прызмы плоскасцю ABC .

Спачатку пабудуем след сякучай плоскасці ABC на плоскасці ніжняй асновы. Для гэтага знойдзем пункты M і N перасячэння прамых AB і BC , якія ляжаць у сякучай плоскасці, з плоскасцю $RSUV$: M — пункт перасячэння прамых AB і RV , N — прамых BC і UV . Прамая MN — агульная прамая сякучай плоскасці і плоскасці ніжняй асновы.

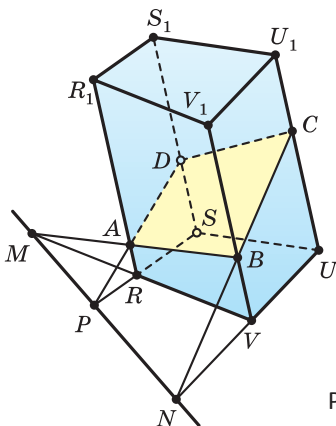


Рис. 111

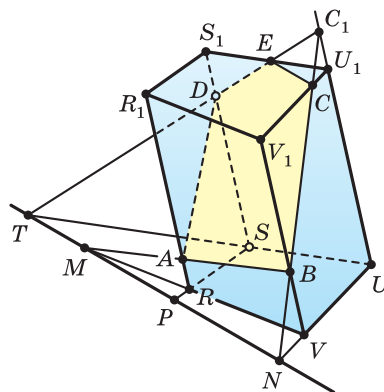


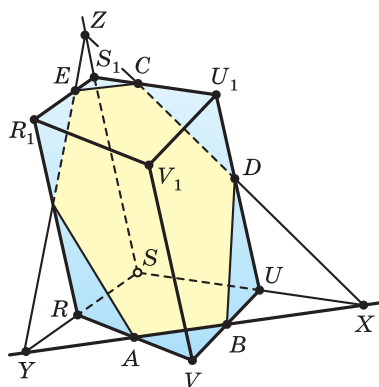
Рис. 112

Пункт P перасячэння прамой RS са следам MN належыць і сякучай плоскасці, і плоскасці грані RR_1S_1S . Улічыўшы, што гэтым дзвюм плоскасцям належыць і пункт A , атрымліваем, што прамая PA — след сякучай плоскасці на плоскасці RR_1S_1S . Значыць, плоскасць ABC перасякае грань RR_1S_1S па адрэзку AD .

Знойдзем пункт C_1 перасячэння прамой BC і плоскасці грані S_1SUU_1 . Прамая BC ляжыць у сякучай плоскасці з плоскасцю S_1SUU_1 і перасякае кант UU_1 у пункце C_1 . Таму C_1 належыць сякучай плоскасці. Улічыўшы, што гэтым дзвюм плоскасцям належыць пункт D , атрымліваем, што прамая DC_1 — след сякучай плоскасці на плоскасці S_1SUU_1 . Значыць, плоскасць ABC перасякае грань S_1SUU_1 па адрэзку ED .

Шуканым сячэннем з'яўляецца пяцівугольнік $ABCED$.

Прыклад 6. Пункты A, B, C размешчаны так, як паказана на рысунку 113. Пабудуем сячэнне прызмы плоскасцю ABC .



Рыс. 113

След AB сякучай плоскасці на плоскасці асновы дазваляе паслядоўна знайсці пункты X і Y яго перасячэння з гранямі SUU_1S_1 і RSS_1R_1 , след XC сякучай плоскасці — на плоскасці SUU_1S_1 . Значыць, плоскасць ABC перасякае грань SUU_1S_1 па адрэзку CD . Няхай пункт Z — пункт перасячэння прамой XC і плоскасці грані RSS_1R_1 . Тады Z — пункт перасячэння канта SS_1 з сякучай плоскасцю і след ZY сякучай плоскасці на грані RSS_1R_1 . Таму плоскасць ABC перасякае грань RSS_1R_1 па адрэзку EF .

Шуканым сячэннем з'яўляецца шасці-вугольнік $ABDCEF$.



1. Якая фігура называецца сячэннем мнагагранніка? Якой фігурай можа быць гэта сячэнне?
2. Якая прамая называецца следам адной плоскасці на другой?
3. Якім можа быць сячэнне плоскасцю чатырохвугольнай прызмы?
4. Ці праўда, што сячэннем пяцівугольнай піраміды можа быць:
 - а) пункт;
 - б) адрэзак;
 - в) чатырохвугольнік;
 - г) шасцівугольнік;
 - д) сямівугольнік?

5. Ці праўда, што сячэннем пяцівугольнай прызмы можа быць:

- а) адрэзак;
- б) чатырохвугольнік;
- в) шасцівугольнік;
- г) сямівугольнік;
- д) васьмівугольнік?

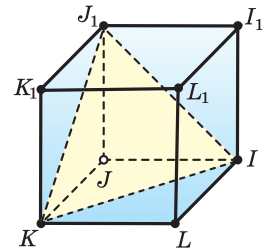
Задача 1. Побудуйце сячэнне куба $IJKLI_1J_1K_1L_1$ плоскасцю IKJ_1 (рыс. 114). Знайдзіце кант куба, улічыўшы, што плошча гэтага сячэння роўная S .

Рашэнне. Плоскасць IKJ_1 перасякае грані $IJKL$, IJJ_1I_1 , JKK_1J_1 па адрэзках IK , IJ_1 , J_1K адпаведна. Таму трохвугольнік IKJ_1 — шуканае сячэнне.

$$\triangle IKJ_1 \text{ — правільны, таму } S_{IKJ_1} = \frac{\sqrt{3}IK^2}{4}, \text{ або } S = \frac{\sqrt{3}IK^2}{4}. \text{ Таму } IK^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}}.$$

$$\triangle IJK \text{ — раўнабедраны прамавугольны з прамым вуглом } J, \text{ таму } 2IJ^2 = IK^2, \text{ або } IJ^2 = \frac{IK^2}{2}, \text{ або } IJ^2 = \frac{2S}{\sqrt{3}}, \text{ або } IJ = \sqrt{\frac{2S}{\sqrt{3}}}.$$

$$\text{А д к а з: } \sqrt{\frac{2S}{\sqrt{3}}}.$$



Рыс. 114

Задача 2. Побудуйце сячэнне правільнай піраміды $QABCD$ плоскасцю, што праходзіць праз бакавы кант і супрацьлеглую яму вяршыню асновы. Знайдзіце плошчу гэтага сячэння, улічыўшы, што ўсе канты гэтай піраміды роўныя a .

Рашэнне. Няхай $QABCD$ — правільная піраміда; $AB = BC = CD = DA = QA = QB = QC = QD = a$.

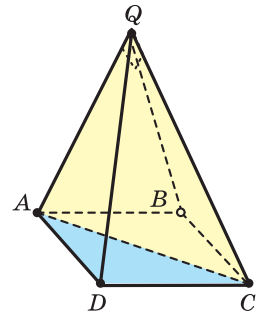
Q, A, C — вяршыні піраміды, таму QAC — шуканае сячэнне.

$$AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \text{ (} ABCD \text{ — квадрат).}$$

$$\text{У } \triangle AQC \text{ } AQ = QC = a, AC = a\sqrt{2}. \text{ Таму } \angle AQC = 90^\circ$$

$$\text{і } S_{\text{сяч}} = S_{AQC} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{А д к а з: } \frac{a^2}{2}.$$



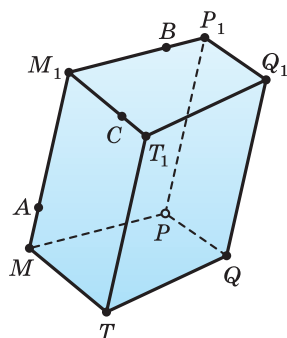
Рыс. 115



1. Колькасць дыяганальных сячэнняў чатырохвугольнай піраміды роўная:
 - а) 1; в) 3;
 - б) 2; г) 4.
2. Вызначце від фігуры, што з'яўляецца сячэннем куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскасцю, якая праходзіць праз вершыні A , C і D_1 .

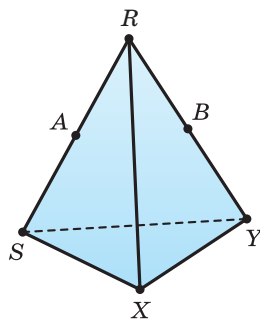


62. Нарысуйце куб $STRUS_1 T_1 R_1 U_1$ і пазначце пункты B і C на кантах SU і RU . Пабудуйце сячэнне куба плоскасцю BCT_1 .
63. Пункты A , B , C ляжаць на кантах MM_1 , M_1P_1 , M_1T_1 прызмы $MPQTM_1P_1Q_1T_1$ (рыс. 116). Зрабіце такі рысунак у шпытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю ABC .
64. Нарысуйце куб $MNOPM_1N_1O_1P_1$ і пазначце сярэдзіны A , B і C кантаў NM , NO і NN_1 . Выкарыстаўшы атрыманы рысунак:
 - а) пабудуйце сячэнне куба плоскасцю ABC ;
 - б) дакажыце, што трохвугольнік ABC правільны;
 - в) знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC , прымаючы кант куба роўным 1 м.
65. Нарысуйце куб $NORQN_1O_1R_1Q_1$ і пазначце сярэдзіны A і B яго кантаў NQ і QR . Дакажыце, што сячэнне куба плоскасцю ABQ_1 з'яўляецца раўнабедраным трохвугольнікам. Знайдзіце кант куба, улічыўшы, што перыметр гэтага трохвугольніка роўны a .



Рыс. 116

66. Пабудуйце сячэнне піраміды $ABCD$ плоскасцю, што праходзіць праз сярэдзіны кантаў AB , AC , AD . Знайдзіце плошчу гэтага сячэння, улічыўшы, што ўсе канты гэтай піраміды роўныя a .
67. На рысунку 117 паказана правільная піраміда $RSXY$, у якой грань асновы роўная бакавой грані. На яе кантах RS і RY пазначаны іх сярэдзіны A і B . Зрабіце такі рысунак у шпытку і пабудуйце сячэнне піраміды



Рыс. 117

плоскасцю ABX . Дакажыце, што трохвугольнік ABX з'яўляецца раўнабедраным, і знайдзіце яго перыметр і плошчу, улічыўшы, што кант піраміды роўны a .

68. Канты UX , UZ , UU_1 прамавугольнага паралелепіпеда $UXYZU_1X_1Y_1Z_1$ роўныя 6 см, 6 см, 8 см адпаведна. Дакажыце, што сячэнне паралелепіпеда плоскасцю XY_1Z ёсць раўнабедраны трохвугольнік, і знайдзіце вышыні гэтага трохвугольніка.

69. Нарысуйце прамавугольны паралелепіпед $TPQRT_1P_1Q_1R_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз прамую T_1Q_1 і вяршыню R . Знайдзіце плошчу гэтага сячэння, улічыўшы, што канты RT і RQ роўныя адзін аднаму і роўныя l , а радыус акружнасці, апісанай каля чатырохвугольніка RQQ_1R_1 , роўны a .

70. На rysunku 118 паказана трохвугольная піраміда $MNOP$. Пабудуйце сячэнне трохвугольнай піраміды $MNOP$ плоскасцю ABC , улічыўшы, што пункты A , B , C выбраны адпаведна на кантах MN , OP , PN .

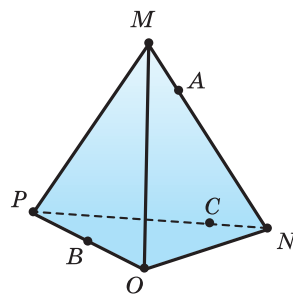
71. На rysunku 119 пункты U , V , W выбраны на кантах AB , BC , AD піраміды $ABCDE$. Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю UVW .

72. Пабудуйце сячэнне чатырохвугольнай прызмы $RSTVR_1S_1T_1V_1$ плоскасцю ABC , улічыўшы, што пункты A , B , C выбраны адпаведна на кантах RS , RV , TT_1 (rys. 120).

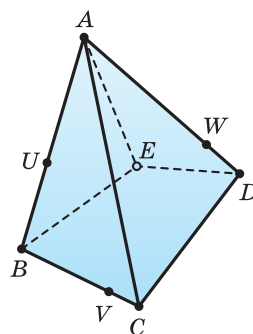
73. Старана асновы правільнай трохвугольнай прызмы $CDEC_1D_1E_1$ роўная 12 см, а яе бакавы кант — 6 см. Знайдзіце плошчу сячэння прызмы плоскасцю, якой належыць старана асновы і супрацьлеглая вяршыня другой асновы.

74. Кант асновы правільнай трохвугольнай піраміды і яе бакавы кант адпаведна роўныя k і l . Знайдзіце плошчу сячэння піраміды плоскасцю, што праходзіць праз дзве вяршыні асновы і сярэдзіну бакавога канта.

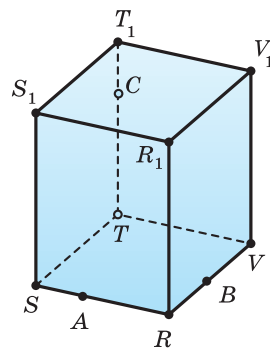
- 75*. Пункт C — сярэдзіна канта JL даўжынёй a правільнай трохвугольнай піраміды $IJKL$, бакавая грань якой роўная грані асновы.



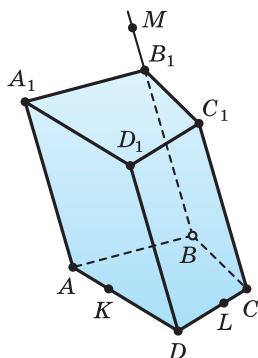
Рыс. 118



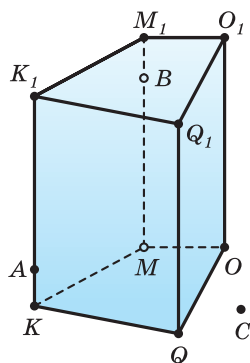
Рыс. 119



Рыс. 120



Рыс. 121



Рыс. 122

Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю IKC і знайдзіце радыусы акружнасцей, адна з якіх умежана ў гэта сячэнне, а другая апісана каля яго.

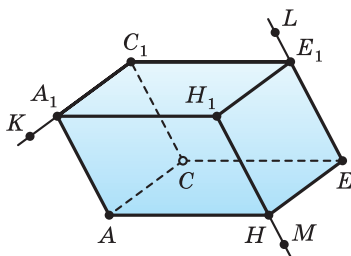
- 76*.** Нарысуйце куб $RSTVR_1S_1T_1V_1$ і пазначце сярэззіну C яго канта SS_1 . Пабудуйце сячэнне куба плоскасцю, што праходзіць праз прамую RT і пункт C . Знайдзіце медыяны трохвугольніка RTC , улічыўшы, што кант куба роўны 40 мм.

- 77.** Пункты K і L выбраны на кантах DA і DC прызмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, а пункт M — на прамені BB_1 за пунктам B_1 (рыс. 121). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю KLM .

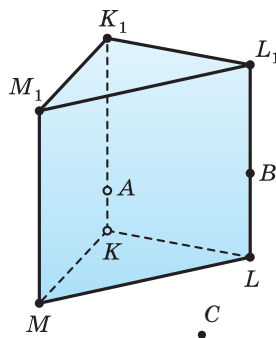
- 78.** Пункты A і B ляжаць адпаведна на кантах KK_1 і MM_1 прызмы $KMOQK_1M_1O_1Q_1$, а пункт C — на плоскасці грані $KMOQ$ (рыс. 122). Пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю ABC .

- 79.** Пабудуйце сячэнне прамавугольнага паралелепіпеда $ACEHA_1C_1E_1H_1$ плоскасцю KLM , улічыўшы, што пункты K, L, M ляжаць адпаведна на праменях C_1A_1, EE_1, H_1H за пунктамі A_1, E_1, H (рыс. 123).

- 80.** Пункты A і B ляжаць на кантах KK_1 і LL_1 трохвугольнай прызмы $KLMK_1L_1M_1$, а пункт C — на плоскасці KLM (рыс. 124). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю ABC .

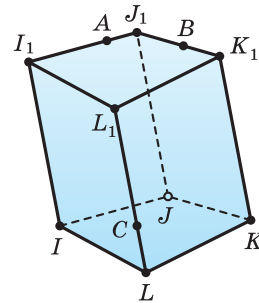


Рыс. 123

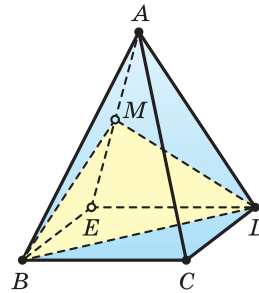


Рыс. 124

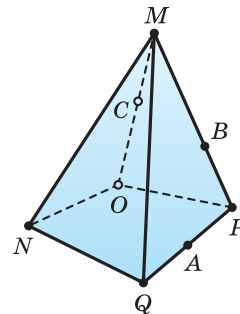
81. На rysunku 125 паказана прызма $IJKLI_1J_1K_1L_1$, на кантах J_1I_1 , J_1K_1 , LL_1 выбраны пункты A , B , C . Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю ABC .
82. Нарысуйце прызму $MNOPM_1N_1O_1P_1$ і на яе кантах NN_1 , MP , OP выберыце пункты C , D , E . Пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю CDE .
83. Ёсць правільная прызма $XYZX_1Y_1Z_1$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. Знайдзіце плошчу сячэння прызмы плоскасцю XY_1Z_1 , улічыўшы, што поўная паверхня прызмы роўная S .
84. Ёсць такая правільная трохвугольная прызма, што плоскасць, якая праходзіць праз старану яе асновы і супрацьлеглую вяршыню другой асновы, дзеліць поўную паверхню прызмы ў адносіне $2 : 3$. Знайдзіце гэту паверхню, улічыўшы, што кант асновы роўны a .
85. На rysunku 126 паказана правільная піраміда $ABCDE$ і на канце AE пазначана яго сярэдзіна M . Трохвугольнік BMD ёсць сячэнне гэтай піраміды плоскасцю, якой належаць прамая BD і пункт M . Знайдзіце вышыні трохвугольніка BMD , улічыўшы, што ўсе канты піраміды роўныя 20 мм.
86. Пункт A — сярэдзіна бакавога канта KE правільнай чатырохвугольнай піраміды $KCDEF$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, што праходзіць праз прамую DF і пункт A . Знайдзіце поўную паверхню піраміды, улічыўшы, што плошча гэтага сячэння роўная S .
87. Зрабіце ў сшытку рысунак, падобны рысунку 127, на якім паказана чатырохвугольная піраміда $MNOPQ$ і адзначаны пункты A , B , C на кантах PQ , PM , OM адпаведна. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, што праходзіць праз пункты A , B , C .
88. Нарысуйце чатырохвугольную піраміду $STUVW$ і пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз пункты A , B , C на кантах ST , TW , VW .
89. Пункт A ляжыць на канце PQ трохвугольнай піраміды $PQRS$, пункт B — на прамені QR за



Рыс. 125

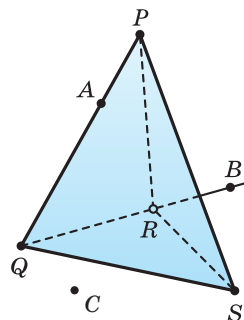


Рыс. 126



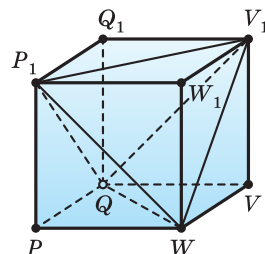
Рыс. 127

пунктам R , а пункт C — на плоскасці QRS (рыс. 128). Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю ABC .



Рыс. 128

90. Ёсць піраміда $RMNOP$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. Сячэннем гэтай піраміды плоскасцю, што праходзіць праз вяршыню R і прамую NP , з'яўляецца трохвугольнік RNP . Знайдзіце бакавую паверхню піраміды, улічыўшы, што радыус акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка, роўны R .
91. Нарысуйце правільную піраміду $TUVWX$ і пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз вяршыню T і прамую UW . Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды, улічыўшы, што плошча пабудаванага сячэння роўная плошчы асновы, а кант асновы роўны l .
92. Піраміда V_1P_1QW мае сваімі вяршынямі вяршыні куба $PQVWP_1Q_1V_1W_1$ (рыс. 129). Знайдзіце поўную паверхню гэтай піраміды, улічыўшы, што кант куба роўны 1 м.

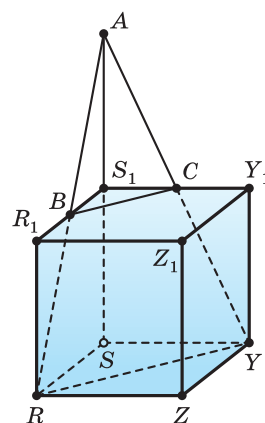


Рыс. 129

- 93*. Пабудуйце сячэнне прамавугольнага паралелепіпеда $ABTVA_1B_1T_1V_1$ плоскасцю AB_1T . Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля бакавой грані паралелепіпеда, улічыўшы, што яго асновай з'яўляецца квадрат са старонай a , а плошча пабудаванага сячэння роўная S .

- 94*. Пабудуйце сячэнне прамавугольнага паралелепіпеда $IJKLI_1J_1K_1L_1$ плоскасцю, што праходзіць праз вяршыню I і прамую J_1L_1 . Знайдзіце поўную паверхню паралелепіпеда, улічыўшы, што яго асновай з'яўляецца квадрат са старонай a , а вугал J_1IL_1 роўны γ .

- 95*. Чатырохвугольнік $RBCY$ — сячэнне прамавугольнага паралелепіпеда плоскасцю, што праходзіць праз прамую RY і пункт A на прамені SS_1 за пунктам S_1 (рыс. 130). Дакажыце, што гэта сячэнне ёсць раўнабедраная трапецыя, і знайдзіце яе плошчу, улічыўшы, што аснова паралелепіпеда ёсць квадрат $RSYZ$ са старонай s , вышыня RR_1 паралелепіпеда роўная h , а вяршыня S_1 дзеліць адрэзак SA папалам.



Рыс. 130

- 96***. Нарысуйце куб $KPTVK_1P_1T_1V_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз прамую K_1T_1 , і такі пункт A праменя V_1T_1 , што вяршыня T_1 дзеліць адрэзак V_1A ў адносіне $2 : 1$, калі лічыць ад пункта V_1 . Знайдзіце перыметр гэтага сячэння, улічыўшы, што кант куба роўны 2 м.
- 97.** Нарысуйце трохвугольную піраміду $CDEF$ і пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз сярэдзіны кантаў FC , FD , FE . Знайдзіце плошчу грані піраміды, улічыўшы, што ўсе яе грані — роўныя правільныя трохвугольнікі, а плошча сячэння роўная 120 см^2 .
- 98***. Кант асновы правільнай чатырохвугольнай прызмы роўны a , а плошча сячэння прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз канцы кантаў, што выходзяць з адной вяршыні, роўная Q . Знайдзіце бакавую паверхню прызмы.



Прастаравае мадэляванне

Пры вырабе бэлькі з цыліндрычнага бярвяна робяць наступнае:

- 1) на тарцы бярвяна праводзяць дыяметр;
- 2) дзеляць яго на пяць роўных частак;
- 3) другі дыяметр праводзяць так, каб яго праекцыя на першы складала $\frac{3}{5}$ яго;
- 4) канцы пабудаваных дыяметраў прымаюць за вяршыні чатырохвугольнага сячэння і счэсваюць лішак;

Параўнайце трывалася такой бэлькі з трываласцю бэлькі з квадратным сячэннем, атрыманай з такога самага бярвяна, улічыўшы, што трываласць бэлькі з прамавугольным сячэннем прапарцыянальна шырыні і квадрату вышыні сячэння.

Праверце свае веды

1. Тры пункты размешчаны на роўных адлегласцях адзін ад аднаго. Ці можна выбраць яшчэ адзін пункт, роўнаадалены ад усіх астатніх?
2. Якую найбольшую колькасць прамых можна правесці праз розныя пары з пяці пунктаў:
 - а) 5; б) 6; в) 8; г) 10?
3. Якую найбольшую колькасць плоскасцей можна правесці праз розныя тройкі з чатырох пунктаў?
4. Колькі ўтвараецца ліній пры папарным перасячэнні трох плоскасцей?
 - а) 2; б) 3; в) 4; г) 6.

5. Нарысуйце прызму $ABCDEF PQRSTU$, асновы якой — правільныя шасцівугольнікі. Назавіце:

- а) плоскасці, перасякальныя з плоскасцю UQR ;
- б) плоскасці, перасякальныя з прамой FT .

6. Старана асновы правільнай трохвугольнай прызмы роўная 6 см, а бакавы кант — 11 см. Знайдзіце поўную паверхню прызмы.

7. Кант асновы правільнай трохвугольнай прызмы $IJKPML$ адносіцца да бакавога канта як $2 : 3$. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы, улічыўшы, што даўжыня ломанай $IPLKMI$ роўная $4 + \sqrt{13}$ см.

8. Бакавая паверхня правільнай трохвугольнай піраміды роўная $30\,420\text{ мм}^2$, а яе бакавы кант — 169 мм. Знайдзіце плошчу асновы піраміды.

9. Старана асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 12 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 16 см. Знайдзіце:

- а) бакавы кант і апафему піраміды;
- б) бакавую паверхню піраміды;
- в) поўную паверхню піраміды.

10. Плошча сячэння правільнай чатырохвугольнай піраміды $RUSVW$ з кантам асновы a плоскасцю RUV роўная Q . Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.



«Веды толькі тады з'яўляюцца ведамі,
калі яны набыты намаганнямі
свайго мыслення, а не памяці»
(Л. М. Талстой).

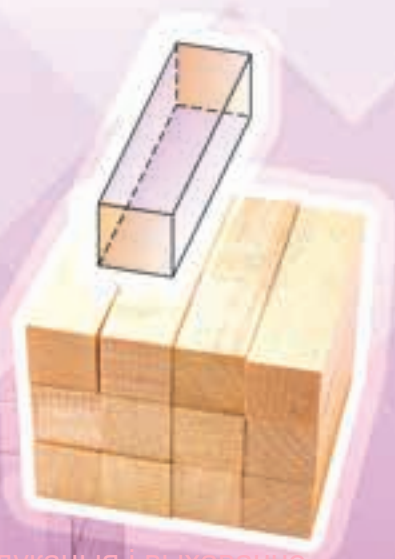
РАЗДЗЕЛ

2

ПАРАЛЕЛЬНАСЦЬ ПРАМЫХ І ПЛОСКАСЦЕЙ

У гэтым раздзеле вы будзеце вывучаць:

- » узаемнае размяшчэнне прамых у прасторы;
- » узаемнае размяшчэнне прамой і плоскасці ў прасторы;
- » узаемнае размяшчэнне дзвюх плоскасцей.



§ 4. Узаємне розміщення прямих у просторі

А) Дзве прямі простору називаються **паралельними прямими**, калі яны ляжаць у адной плоскості і не маюць агульных пунктаў.

На плоскості праз дадзены пункт можна правесці адзіную прамую, паралельную дадзенай. Гэта сцверджанне з'яўляецца праўдзівым і ў простору.

Тэарэма 1. Праз пункт па-за дадзенай прамой можна правесці адзіную прамую, паралельную дадзенай прамой.

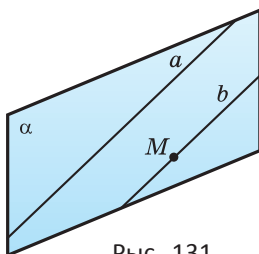


Рис. 131

Доказ. Няхай ёсць прамая a і пункт M па-за ёю (рис. 131). Па тэарэме 3 з параграфу 2 праз прамую a і пункт M праходзіць адзіная плоскасць — плоскасць α . Калі прамая праходзіць праз пункт M паралельна прамой a , то яна павінна ляжаць у плоскасці α . У плоскасці α праз пункт M праходзіць адзіная прамая b , паралельная прамой a . Прамая b — шуканая прамая, і яна адзіная.

На плоскості, калі адна з паралельных прамых перасякае іншую прамую, то і другая таксама перасякае яе. Аналагічнае сцверджанне з'яўляецца праўдзівым і ў простору.

Тэарэма 2. Калі адна з дзвюх паралельных прамых перасякае плоскасць, то і другая прамая перасякае гэту плоскасць.

Доказ. Няхай ёсць дзве паралельныя прамыя b і c , і адна з іх — прамая b — перасякае плоскасць β у пункце M (рис. 132).

Паколькі прамыя b і c паралельныя, то яны ляжаць у адной плоскасці, няхай гэта будзе плоскасць γ . Плошасці β і γ маюць агульны пункт M , таму па аксіёме 3 яны маюць і агульную прамую l . Гэта прамая ляжыць у плоскасці γ і перасякае прамую b у пункце M , таму яна перасякае паралельную ёй прамую c у пэўным пункце N .

Паколькі прамая l ляжыць і ў плоскасці β , то пункт N належыць гэтай плоскасці. Значыць, пункт N — агульны пункт плоскасцей β і γ .

Застаецца даказаць, што прамая c з плоскасцю β не мае іншых агульных пунктаў. Дапусцім, што гэта не так. Няхай прамая c мае з плоскасцю β яшчэ адзін агульны пункт K . Тады па аксіёме 2 прамая c ляжыць у плоскасці β . Атрымліваецца, што прамая c — агульная прамая плоскасцей β і γ . Але такой прамой з'яўляецца прамая l . Значыць, прамая c супадае з прамой l , што немагчыма, бо прамая b паралельная прамой c і перасякае прамую l .

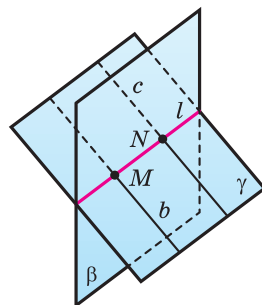


Рис. 132

Вы ведаеце, што калі на плоскасці дзве прамыя паралельныя трэцяй, то яны паралельныя і адна адной. Дакажам, што такое сцверджанне з'яўляецца правільным і ў прасторы.

Тэарэма 3. Калі дзве розныя прамыя паралельныя трэцяй прамой, то яны паралельныя і адна адной.

Доказ. Няхай прамыя m і n паралельныя прамой p (рыс. 133). Дакажам, што прамая m паралельная прамой n , г. зн. прамыя m і n ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца.

На прамой m выберам адвольна пункт A , праз яго і прамую n правядзём плоскасць α . Дакажам, што прамая m ляжыць у гэтай плоскасці. Дапусцім, што гэта не так. Улічыўшы, што прамая m мае з плоскасцю α агульны пункт, трэба пагадзіцца, што прамая m перасякае плоскасць α . Тады па тэарэме 2 гэту плоскасць перасякае прамая p , бо яна паралельная прамой m і прамая n паралельная прамой p . Але такое немагчыма, бо прамая n ляжыць у плоскасці α . Значыць, прамая m разам з прамой n ляжаць у плоскасці α .

Правыя m і n не перасякаюцца. Дапусцім, што гэта не так, г. зн. прамыя m і n перасякаюцца ў пэўным пункце B . Атрымліваецца, што праз пункт B праходзяць дзве розныя прамыя m і n , паралельныя прамой p , што супярэчыць тэарэме 1.

Выкарыстаўшы тэарэму 3, можна даказаць важныя сцверджанні пра паралелепіпед.

Тэарэма 4. У паралелепіпеда: а) супрацьлеглыя грані роўныя; б) усе яго дыяганалі перасякаюцца ў адным пункце і дзеляцца ім папалам.

Доказ. Няхай ёсць паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рыс. 134).

а) Дакажам, напрыклад, роўнасць супрацьлеглых граняў $ABCD$ і $A_1 B_1 C_1 D_1$.

Адрэзкі AB і $A_1 B_1$ а таксама BC і $B_1 C_1$ роўныя, як супрацьлеглыя стораны паралелаграмаў $ABB_1 A_1$ і $BCC_1 B_1$ адпаведна. Адрэзкі AA_1 і CC_1 паралельныя і роўныя адзін аднаму, бо кожны з іх паралельны адрэзку BB_1 і роўны яму. Значыць, чатырохвугольнік $ACC_1 A_1$ — паралелаграм. А таму адрэзкі AC і $A_1 C_1$ роўныя адзін аднаму як супрацьлеглыя стораны гэтага паралелаграма.

Паколькі $AB = A_1 B_1$, $BC = B_1 C_1$ і $AC = A_1 C_1$, то трохвугольнікі ABC і $A_1 B_1 C_1$ роўныя. Таму роўныя і вуглы ABC і $A_1 B_1 C_1$. Значыць, роўныя адзін аднаму і паралелаграмы-грані $ABCD$ і $A_1 B_1 C_1 D_1$.

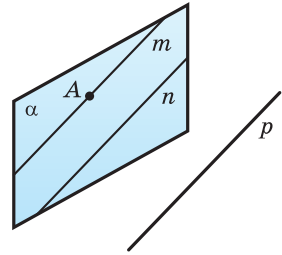


Рис. 133

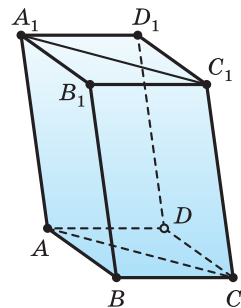


Рис. 134

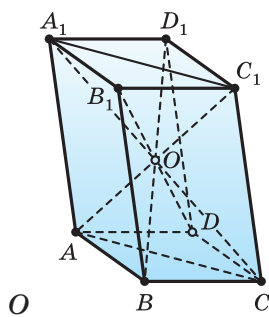


Рис. 135

б) Дакажам, што ўсе дыяганалі паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перасякаюцца ў адным пункце і дзеляцца ім папалам.

Чатырохвугольнік $AA_1 C_1 C$ — паралелаграм, бо яго супрацьлеглыя стораны AA_1 і CC_1 роўныя і паралельныя адна адной з-за таго, што кожны з адрэзкаў AA_1 і CC_1 роўны адрэзку DD_1 і паралельны яму (рыс. 135). Таму дыяганалі AC_1 і CA_1 пунктам перасячэння дзеляцца папалам.

Чатырохвугольнік $DCB_1 A_1$ — таксама паралелаграм, таму яго дыяганаль DB_1 перасякае другую дыяганаль CA_1 у яе сярэдзіне, г. зн. у пункце O .

Нарэшце, чатырохвугольнік $ABC_1 D_1$ — паралелаграм, таму яго дыяганаль BD_1 перасякае другую дыяганаль AC_1 у яе сярэдзіне O .

Калі дзве прамыя перасякаюцца (рыс. 136) або паралельныя (рыс. 137), то яны ляжаць у адной плоскасці. Дзве прамыя, якія не ляжаць у адной плоскасці, называюцца **скрыжаванымі** (рыс. 138).

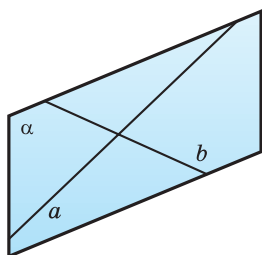


Рис. 136

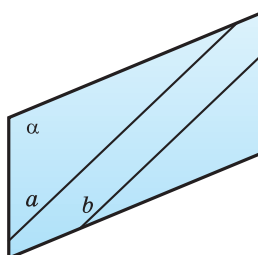


Рис. 137

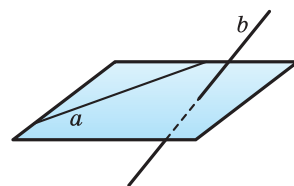


Рис. 138

Дакажам прымету скрыжаванасці прамых.

Тэарэма 5. Калі з дзвюх прамых адна належыць пэўнай плоскасці, а другая перасякае гэту плоскасць у пункце, не прыналежным першай прамой, то такія прамыя з'яўляюцца скрыжаванымі.

Доказ. Няхай прамая p ляжыць у плоскасці α , а прамая q перасякае гэту плоскасць у пункце A , што не належыць прамой p (рыс. 139). Дакажам, што прамыя p і q скрыжоўваюцца.

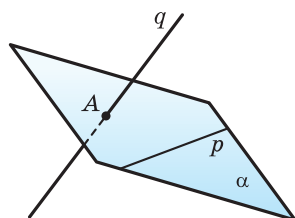


Рис. 139

Дапусцім, што прамыя p і q ляжаць у пэўнай плоскасці β . Тады плоскасці β належыць прамая p і пункт A , які належыць прамой q , і, значыць, плоскасць β супадае з плоскасцю α . Атрымалася, што плоскасці α належыць прамая q , якая па ўмове ёй не належыць. Гэта супярэчнасць азначае, што зробленае дапушчэнне непраўдзівае.

Б) Мы ведаем, што *вуглом паміж перасякальнымі прамымі* называецца велічыня аднаго з чатырох узніклых пры гэтым вуглоў, які не большы за 90° (рыс. 140).

Вуглом паміж скрыжаванымі прамымі называецца вугал паміж перасякальнымі прамымі, паралельнымі дадзеным скрыжаваным прамым.

Дакажам, што гэта азначэнне карэктнае, г. зн. не залежыць ад выбару пункта, праз які праходзяць прамыя, паралельныя дадзеным скрыжаваным прамым.

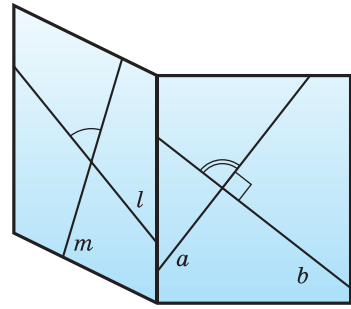


Рис. 140

Тэарэма 6. Вугал паміж перасякальнымі прамымі роўны вуглу паміж паралельнымі ім перасякальнымі прамымі.

Доказ. Няхай прамыя a і b перасякаюцца ў пункце O , прамыя a_1 і b_1 — у пункце O_1 і $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (рыс. 141).

Ад пункта O на прамой a адкладзём роўныя адрэзкі OA і OB , а на прамой b — адрэзак OC , роўны адрэзку OA . Праз пункты A і B правядзём прамыя, паралельныя прамой OO_1 , яны перасякуць прамую a_1 ў пунктах A_1 і B_1 адпаведна. Праз пункт C правядзём прамую, паралельную прамой OO_1 , яна перасячэ прамую b_1 у пункце C_1 .

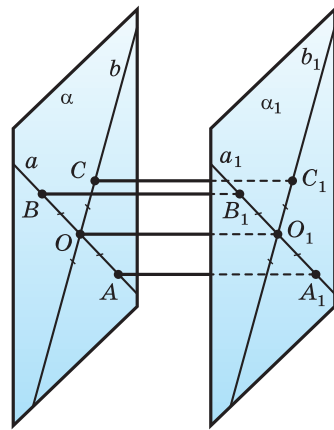


Рис. 141

Чатырохвугольнік OO_1A_1A з'яўляецца паралелаграмам, бо яго супрацьлеглыя стораны OA і O_1A_1 паралельныя і роўныя. Таму $AA_1 = OO_1$ і $AA_1 \parallel OO_1$. Гэтаксама, паколькі чатырохвугольнік OO_1B_1B — паралелаграм, то $BB_1 = OO_1$ і $BB_1 \parallel OO_1$, а паколькі OO_1C_1C — паралелаграм, то $BB_1 = CC_1$ і $CC_1 \parallel OO_1$.

Паколькі кожны з адрэзкаў AA_1 , BB_1 , CC_1 роўны і паралельны адрэзку OO_1 , то яны роўныя і паралельныя адзін аднаму. Таму чатырохвугольнікі AA_1C_1C і BB_1C_1C абодва з'яўляюцца паралелаграмамі і, значыць, $AC = A_1C_1$ і $BC = B_1C_1$.

Цяпер па прымеце роўнасці трохвугольнікаў па трох старанах можна сцвярджаць, што $\triangle AOC = \triangle A_1O_1C_1$ і $\triangle BOC = \triangle B_1O_1C_1$, а таму $\angle AOC = \angle A_1O_1C_1$ і $\angle BOC = \angle B_1O_1C_1$.

Такім чынам мы даказалі, што вуглы, утвораныя пры перасячэнні прамых a і b , такія самыя, як і пры перасячэнні прамых a_1 і b_1 .

На рысунку 142 паказана, як можна знайсці вугал паміж скрыжаванымі прамымі: выбраць адвольна пункт A прасторы і праз яго правесці

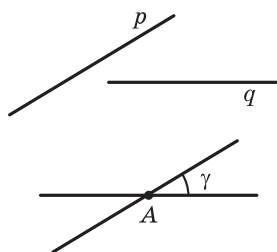


Рис. 142

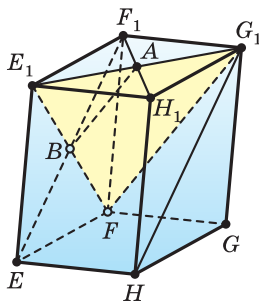


Рис. 143

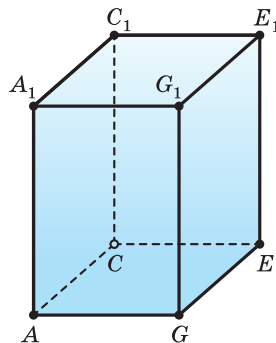


Рис. 144

прямая, паралельна цьому скриваваному прямим. Зрозуміла, що пункт A може бути вибраний і на одній з скриваваних прямих.

Приклад. На рисунку 143 пункти A і B — пункти пересічення діагоналей граней $E_1F_1G_1H_1$ і EE_1F_1F паралелепіпеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$. Побудуємо кут між скриваваними прямими AB і HG_1 . Для цього в площині E_1FG_1 , в якій належить пункт G_1 і пряма AB , пропустимо через пункт G_1 паралельно прямій AB прямую. Ця пряма G_1F . Кут FG_1H — шуканий кут між скриваваними прямими AB і HG_1 .

Кут між паралельними прямими лічимо нуль.

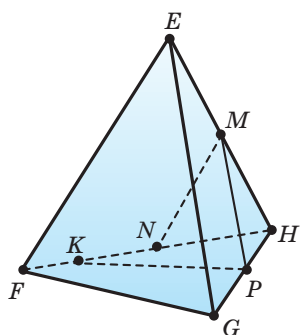
Прямі, кут між якими нуль 90° , називаються **перпендикулярними** прямими.

Перпендикулярні прямі можуть бути пересікальними, а можуть бути і скриваваними. Наприклад, перпендикулярні прямі AC і AG , які проходять через відповідні канти прямокутного паралелепіпеда $ACEGA_1C_1E_1G_1$ (рис. 144), пересікаються, а перпендикулярні прямі AC і EE_1 скриваються.

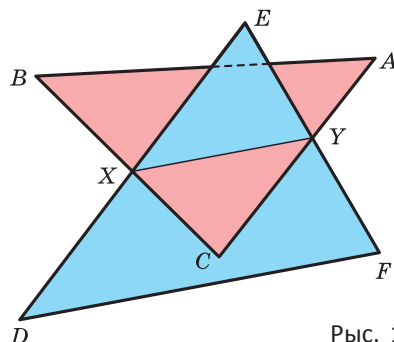


1. Сформулюйте твердження про прямих, що проходять через заданий пункт паралельно заданій прямій.
2. Які дві прямих простору називаються паралельними; пересікальними; скриваваними?
3. Сформулюйте твердження про паралельні прямі, одна з яких пересікає задану площину.
4. Сформулюйте твердження про прямих, паралельних іншій прямій.
5. Сформулюйте властивість супротивних кутів граней прямокутного паралелепіпеда; діагоналей прямокутного паралелепіпеда.
6. Сформулюйте ознаку скриваваних прямих.
7. Який кут називають кутом між пересікальними прямими; скриваваними прямими; паралельними прямими?

8. Як пабудаваць вугал паміж скрыжаванымі прамымі?
9. Якія прамыя называюць перпендыкулярнымі?
10. Пункты M, N, P — адпаведна сярэдзіны кантаў HE, HF, HG трохвугольнай піраміды $EFGH$ (рыс. 145), а пункт K ляжыць на адрэзку FN . Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых:
- а) PK і FG ; б) MP і EG ; в) NH і EF .
11. Вызначце, ці перасякаюцца прамыя, на якіх ляжаць асновы двух трохвугольнікаў BAC і DFE (рыс. 146), што маюць агульную сярэднюю лінію.



Рыс. 145



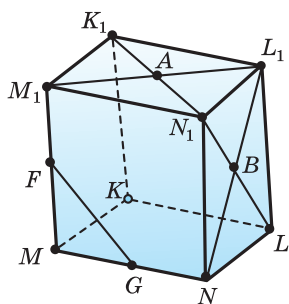
Рыс. 146

12. Вызначце ўзаемнае размяшчэнне ліній ракі і ліній моста (рыс. 147).

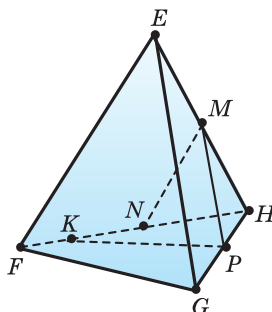


Рыс. 147

13. Ёсць куб $LKMNL_1K_1M_1N_1$. Пакажыце скрыжаваныя прамыя, выкарыстаўшы рысунак 148.
14. У трохвугольнай пірамідзе $EFGH$ пункты M, N, P — сярэдзіны кантаў HE, HF, HG адпаведна, а пункт K ляжыць на адрэзку FN (рыс. 149). Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых:
- а) KP і MN ; б) MN і EG ; в) MH і FG .



Рыс. 148



Рыс. 149



Задача 1. Діагоналі грані $L_1K_1M_1N_1$ куба $LKMNL_1K_1M_1N_1$ пересикаються в пункце A , а діагоналі грані LL_1N_1N — у пункце B . Сярэдзінамі кантаў MM_1 і MN з'яўляюцца пункты F і G адпаведна (рыс. 150). Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых AB і FG .

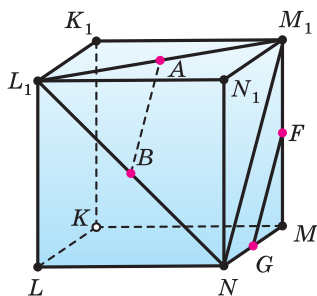


Рис. 150

Рашэнне. $LKMNL_1K_1M_1N_1$ — куб, таму $L_1K_1M_1N_1$ — квадрат і LL_1N_1N — квадрат.

$L_1K_1M_1N_1$ — квадрат і $L_1M_1 \cap K_1N_1 = A$, таму A — сярэдзіна L_1M_1 .

LL_1N_1N — квадрат і $L_1N \cap LN_1 = B$, таму B — сярэдзіна L_1N .

Паколькі AB — сярэдняя лінія $\triangle NL_1M_1$ (A — сярэдзіна L_1M_1 і B — сярэдзіна L_1N), то $AB \parallel NM_1$.

Паколькі FG — сярэдняя лінія $\triangle NMM_1$ (F — сярэдзіна MM_1 і G — сярэдзіна MN), то $FG \parallel NM_1$.
 $AB \parallel NM_1$ і $FG \parallel NM_1$, таму $AB \parallel FG$.

А д к а з: $AB \parallel FG$.

Задача 2. Адрэзак XY мае з плоскасцю β адзіны агульны пункт X . Праз пункт Y і сярэдзіну Z адрэзка XY праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць плоскасць β у пунктах Y_1 і Z_1 адпаведна (рыс. 151).

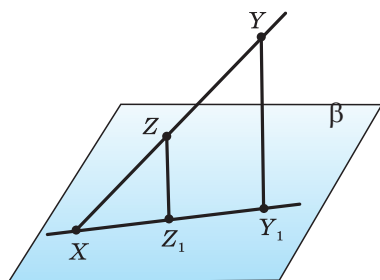


Рис. 151

Знайдзіце даўжыню адрэзка YY_1 , улічыўшы, што $ZZ_1 = 10$ см.

Рашэнне. Перасякальныя прамыя XY і YY_1 вызначаюць плоскасць XYY_1 .

$XY_1 \subset (XYY_1)$ і $XY_1 \subset \beta$, таму $(XYY_1) \cap \beta = XY_1$.

$Y_1 \in \beta$, $Z_1 \in \beta$ і $YY_1 \parallel ZZ_1$, таму $ZZ_1 \subset (XYY_1)$ і $Z_1 \in XY_1$.

ZZ_1 — сярэдняя лінія $\triangle XYY_1$ (Z — сярэдзіна XY і $YY_1 \parallel ZZ_1$), таму $YY_1 = 2ZZ_1 = 2 \cdot 10 = 20$ (см).

А д к а з: 20 см.

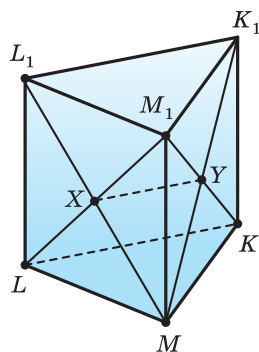


Рис. 152

Задача 3. $LKML_1K_1M_1$ — правільная трохвугольная прызма, даўжыня кожнага канта якой роўная 1 м. Дыяганалі граняў LL_1M_1M і MM_1K_1K перасякаюцца адпаведна ў пунктах X і Y (рыс. 152). Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка XL_1K_1Y .

Рашэнне. $LKML_1K_1M_1$ — правільная трохвугольная прызма і $LK = KM = LM = L_1K_1 = K_1M_1 = L_1M_1 = LL_1 = KK_1 = MM_1 = 1$ м, таму LL_1M_1M і MM_1K_1K — квадраты са старонай 1 м.

Таму $ML_1 = MK_1 = \sqrt{2}$ м.

$X = ML_1 \cap LM_1$ і $Y = KM_1 \cap MK_1$, тому $MX = XL_1$ і $K_1Y = YM$.
 $MX = XL_1$ і $K_1Y = YM$, тому XY — середня лінія $\triangle ML_1K_1$.

XY — середня лінія $\triangle ML_1K_1$, тому $XY = \frac{1}{2} L_1K_1 = \frac{1}{2} (м)$ і $XY \parallel L_1K_1$.

XY — середня лінія $\triangle ML_1K_1$, тому $S_{MHY} = \frac{1}{4} S_{ML_1K_1}$, $S_{XL_1K_1Y} = \frac{3}{4} S_{ML_1K_1}$.

$$p_{ML_1K_1} = \frac{ML_1 + L_1K_1 + MK_1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{2} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} (м).$$

$$\begin{aligned} S_{ML_1K_1} &= \sqrt{p_{ML_1K_1} (p_{ML_1K_1} - ML_1) (p_{ML_1K_1} - L_1K_1) (p_{ML_1K_1} - MK_1)} = \\ &= \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \right) \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4} (м^2). \end{aligned}$$

$$S_{XL_1K_1Y} = \frac{3}{4} S_{ML_1K_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{16} (м^2).$$

А д к а з: $\frac{3\sqrt{7}}{16} м^2$.

Задача 4. На канце HX трохвугольної піраміди $HXYZ$ (рис. 153) выбрані такі пункт S , што $HS : SX = 2 : 5$, і праз яго праведзена прамая q , паралельная медыяне HP грані XYZ . Знайдзіце медыяну HP , улічыўшы, што даўжыня адрэзка прамой q , размешчанага ўнутры піраміды, роўная 35 см.

Рашэнне. Паколькі пункты X і P ляжаць як у плоскасці HXP , так і ў плоскасці XYZ , то $(HXP) \cap (XYZ) = XP$. Пункт S прамой HX ляжыць у плоскасці HXP , бо $HX \subset (HXP)$.

Прамая q праходзіць праз пункт S плоскасці HXP паралельна прамой HP гэтай плоскасці, таму $q \subset (HXP)$.

Паколькі прамыя $q \parallel HP$, а прамыя HP і XP перасякаюцца, то перасякаюцца і прамыя q і XP . Няхай $q \cap XP = Q$.

$\triangle HXP \sim \triangle SXQ$ ($SQ \parallel HP$), таму $HP : SQ = HX : SX$,

$$\begin{aligned} HP &= SQ \cdot HX : SX = SQ \cdot \frac{HS + SX}{SX} = SQ \cdot \left(\frac{HS}{SX} + 1 \right) = \\ &= 35 \cdot \left(\frac{2}{5} + 1 \right) = 49 (см). \end{aligned}$$

А д к а з: 49 см.

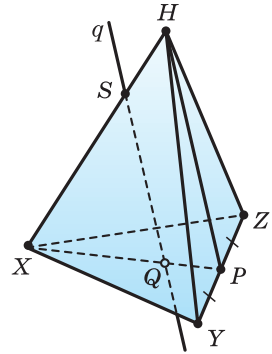


Рис. 153

Задача 5. Прямая l паралельна діагоналі AC паралелограма $ABCD$ і не ляжить у його площині. Докажіть, що пряма l і CD — скривавані, і знайдіть кут між ними, якщо $\angle BAC = 60^\circ$.

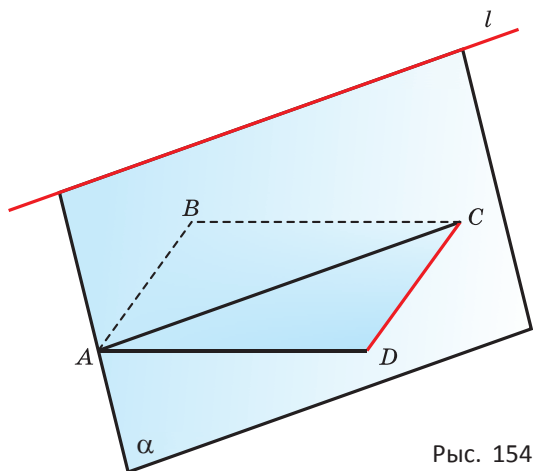


Рис. 154

Розв'язок. Нехай α — площина, у якій лежать паралельні прямі l і AC . Тоді $\alpha \cap (ACD) = AC$ (рис. 154).

Оскільки $C \in \alpha$, а $D \notin \alpha$, то $C = \alpha \cap CD$.

Прямі l і CD — скривавані за теоремою 5 ($l \subset \alpha$, $C = \alpha \cap CD$ і $C \notin l$).

$l \parallel AC$, тому кут між l і CD рівний куту між AC і CD і рівний куту DCA (теорема 6).

$ABCD$ — паралелограм, тому $\angle DCA = \angle BAC = 60^\circ$.

Відповідь: 60° .



99. Точки M і N — середини ребер PC і PD трикутної піраміди $PCDE$, а точки U і V — середини відрізків EM і EN (рис. 155). Визначте, чи є прямі MN і UV паралельними.
100. Докажіть, що середини сторін просторового чотирикутника (рис. 156) є вершинами паралелограма.
101. Паралелограм $MNKL$ і трикутник NAK не лежать у одній площині. Прямі a проходить через точку P прямою AK і паралельна прямою NK . Визначте взаємне розташування прямих a і ML .
102. Є правильна чотирикутна піраміда $PMNKL$. На прямій PL вибрано точку D , через яку проведена пряма l , паралельна прямою LK . Визначте взаємне розташування прямих MN і l .

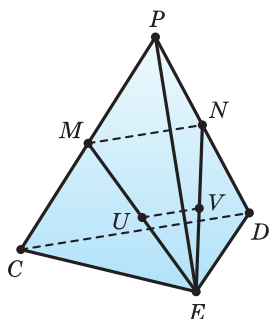
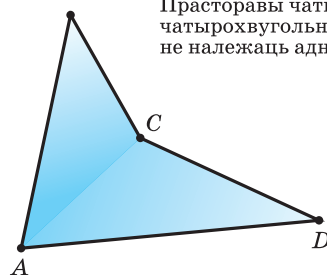


Рис. 155

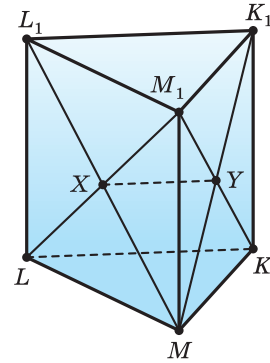


Просторовий чотирикутник — чотирикутник, вершини якого не належать одній площині.

Рис. 156

103. Ёсць паралелаграм $MNOP$ і трапецыя $MNEK$ з асновай EK , прычым гэтыя чатырохвугольнікі не ляжаць у адной плоскасці.
а) Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых OP і EK .

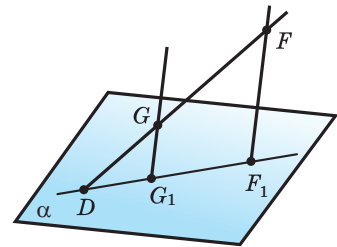
б) Знайдзіце перыметр трапецыі, улічыўшы, што ў яе можна ўмежыць акружнасць, а яе асновы MN і EK роўныя 45 см і 55 см адпаведна.



Рыс. 157

104. $LKML_1K_1M_1$ — правільная трохвугольная прызма, даўжыня кожнага канта якой роўная 2 м. Дыяганалі граняў LL_1M_1M і MM_1K_1K перасякаюцца адпаведна ў пунктах X і Y (рыс. 157). Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $XLKY$.

105. Пункт P ляжыць на працягу канта NM паралелепіпеда $LKMN L_1K_1M_1N_1$. Знайдзіце адлегласць ад пункта N да пункта перасячэння прамой M_1P з плоскасцю LL_1N , улічыўшы, што $MM_1 = 24$ м, $NM = 12$ м, $PM = 18$ м.



Рыс. 158

106. Канец D адрэзка DF належыць плоскасці α , праз другі яго канец F і яго пункт G праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць плоскасць α у пунктах F_1 і G_1 (рыс. 158). Знайдзіце даўжыню адрэзка GG_1 , улічыўшы, што $FF_1 = 32$ см і $DG : GF = 3 : 5$.

107. Вяршыні M і N трапецыі $MNLK$ з асновамі NL і KM належаць плоскасці γ , а дзве іншыя вяршыні не належаць ёй. Знайдзіце адлегласць ад пункта M да пункта перасячэння прамой LK з плоскасцю γ , улічыўшы, што $MK = 16$ см, $MN = 9$ см, $NL = 12$ см.

108. Пункт E ёсць пункт адрэзка TR , які не перасякае плоскасць γ . Паралельныя прамыя, праведзеныя праз пункты T, R, E , перасякаюць плоскасць γ у пунктах T_1, R_1, E_1 адпаведна. Дакажыце, што пункты T_1, R_1, E_1 ляжаць на адной прамой, і знайдзіце адрэзак EE_1 , улічыўшы, што $TT_1 = 27$ см, $RR_1 = 15$ см, $TE : RE = 1 : 3$.

109. На адрэзку AB , канец A якога належыць плоскасці α , выбраны пункт C , і праз пункты B і C праведзены паралельныя прамыя, што перасякаюць плоскасць α у пунктах B_1 і C_1 адпаведна. Знайдзіце адрэзак CC_1 , улічыўшы, што:

- а) пункт C — сярэдзіна адрэзка AB і $BB_1 = 14$ см;
б) $AC : CB = 3 : 2$ і $BB_1 = 50$ см.

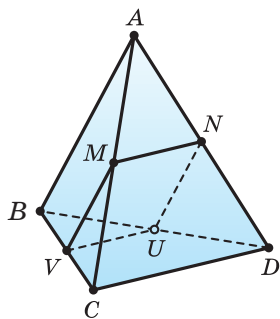


Рис. 159

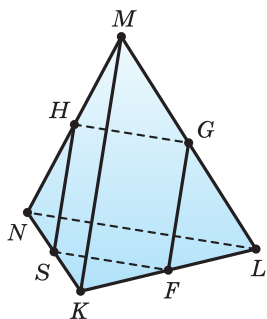


Рис. 160

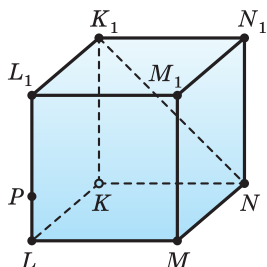
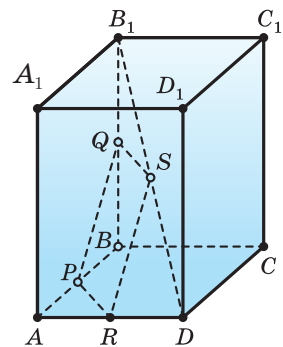


Рис. 161

- 110.** Точки M, N, U, V — відповідно середини ребер AC, AD, BD, BC трикутної піраміди $ABCD$ (рис. 159). Знайдіть периметр чотирикутника $MNUV$, врахувавши, що $AB = 20$ см, $CD = 30$ см.
- 111.** Точки H, G, F, S — середини ребер MN, ML, LK, KN трикутної піраміди $MKLN$ (рис. 160). Знайдіть периметр чотирикутника $HGFS$, врахувавши, що $LN = 18$ мм, $MK = 22$ мм.
- 112.** Точка P вибрана на ребрі LL_1 куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рис. 161). Зробіть такі рисунки у шпальці і побудуйте точку перетину з площиною M_1N_1M прямої q , яка проходить через точку P і паралельна прямої NK_1 .
- 113.** Через вершини D і Q трикутника PDQ стараною PQ , рівної 20 см, проведена площина α , якої не належить вершина P . Врахувавши, що пряма x паралельна прямої PQ і перетинає сторону PD у точці C , що $PC : CD = 2 : 3$:
- докажіть, що пряма x перетинає площину α ;
 - знайдіть відстань від точки C до точки перетину прямої x з площиною α .
- 114.** На ребрі GH трикутної піраміди $FGHK$ з рівними до одного ребрами вибрані такі точки T , що $HT : TG = 1 : 3$, і через нього проведена пряма h , яка паралельна медіані HM бакової грані KHF і яка перетинає верхню піраміду у точці R . Знайдіть ребро піраміди, врахувавши, що $TR = 6$ см.
- 115.** Через точку перетину медіан грані MNK трикутної піраміди $JMNK$ з рівними до одного ребрами проведена пряма b , паралельна прямої MJ , а на ребрі MJ позначена його середина Z . Знайдіть площу трикутника NZZ , врахувавши, що відрізок прямої b , розміщений всередині піраміди, рівний m .
- 116.** Пряма t перетинає сторону AB трикутника ABC . Визначте взаємне розміщення прямих t і BC , врахувавши, що:
- пряма t лежить у площині ABC і не перетинає відрізок AC ;
 - пряма t не лежить у площині ABC .

- 117.** Пункты M і N выбраны на скрыжаваных прамых a і b адпаведна. Праз прамую a і пункт N праведзена плоскасць α , а праз прамую b і пункт M — плоскасць β . Вызначце:
- ці ляжыць прамая b у плоскасці α ;
 - ці перасякаюцца плоскасці α і β , і калі яны перасякаюцца, то па якой прамой.
- 118.** Дакажыце, што калі AB і CD — скрыжаваныя прамыя, то AD і BC — таксама скрыжаваныя прамыя.
- 119.** Праз пункт M па-за прамой a праведзены дзве прамыя, якія з прамой a не маюць агульных пунктаў. Дакажыце, што прынамсі адна з гэтых прамых і прамая a з'яўляюцца скрыжаванымі.
- 120.** Прамая t перасякае прамую k і не перасякае прамую l , паралельную прамой k . Дакажыце, што l і t — скрыжаваныя прамыя.
- 121.** Прамыя XU і VT — паралельныя, а прамыя XY і VT — скрыжаваныя. Знайдзіце вугал паміж прамымі XY і VT , улічыўшы, што:
- $\angle YXU = 40^\circ$;
 - $\angle YXU = 135^\circ$;
 - $\angle YXU = 90^\circ$.
- 122.** Прамая l паралельная старане BC паралелаграма $ABCD$ і не ляжыць у яго плоскасці. Дакажыце, што l і CD — скрыжаваныя прамыя, і знайдзіце вугал паміж імі, улічыўшы, што адзін з вуглоў паралелаграма роўны:
- 58° ;
 - 133° .
- 123.** Прамая t паралельная дыяганалі FH ромба $EFGH$ і не ляжыць у плоскасці ромба. Дакажыце скрыжаванасць прамых:
- t і EG і знайдзіце вугал паміж імі;
 - t і EH і знайдзіце вугал паміж імі, улічыўшы, што $\angle EFG = 128^\circ$.
- 124.** Праз вяршыню P ромба $PQRS$ праведзена прамая a , паралельная дыяганалі QS , а праз вяршыню R — прамая b , якая не ляжыць у плоскасці ромба. Дакажыце, што:
- прамая a і RS перасякаюцца;
 - a і b скрыжоўваюцца.
- 125.** Стораны AB і CD прасторавага чатырохвугольніка $ABCD$ роўныя. Дакажыце, што прамыя AB і CD утвараюць роўныя вуглы з прамой, што праходзіць праз сярэдзіну адрэзкаў BC і AD .
- 126*.** Пункты P , Q , R , S — сярэдзіны кантаў AB , BB_1 , AD і дыяганалі B_1D прамавугольнага паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у аснове якога ляжыць квадрат са стараной 1 м, а бакавы кант роўны 7 м (рыс. 162). Вызначце, у колькі разоў старана PQ чатырохвугольніка $PQSR$ большая за яго старану QS .



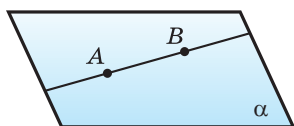
Рыс. 162

§ 5. Узаємне розміщення прямої і площини в просторі

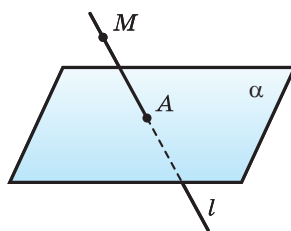
А) У просторі агульних пунктаў у прамой і плоскасці можа быць ні аднаго, адзін або больш за адзін.

Калі ў прамой і плоскасці агульных пунктаў больш за адзін, то, як сцвярджае аксіёма **2**, сама прамая належыць плоскасці (рыс. 163).

Прамая і плоскасць могуць мець адзіны агульны пункт. Няхай α — пэўная плоскасць (рыс. 164). Выберам пункт A на плоскасці α і пункт M па-за плоскасцю α . Пункты A і M вызначаюць адзіную прамую l , якая не мае з плоскасцю α іншых агульных пунктаў, акрамя пункта A . Сапраўды, калі дапусціць адваротнае, то па аксіёме **2** прамая l будзе ляжаць у плоскасці α , а значыць, у гэтай плоскасці будзе ляжаць і пункт M , што супярэчыць выбару пункта.



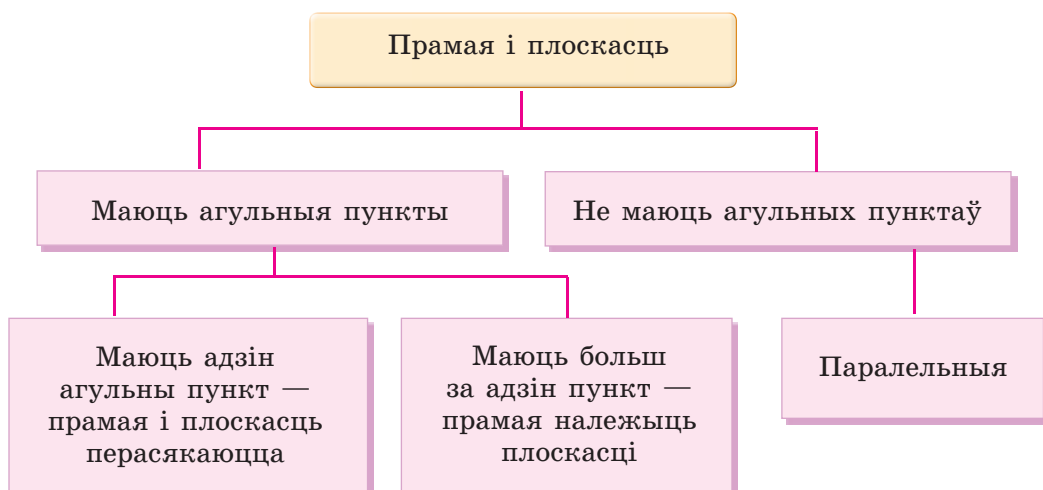
Рыс. 163



Рыс. 164

Прамая і плоскасць, якія маюць адзін агульны пункт, называюцца *перасякальнымі*.

Прамая і плоскасць могуць не мець агульных пунктаў. У гэтым выпадку гавораць, што прамая a **паралельная** плоскасці α , і пішуць $a \parallel \alpha$.



Дакажам прымету паралельнасці прамой і плоскасці.

Тэарэма 7. Калі прамая, што не ляжыць у плоскасці, паралельная якой-небудзь прамой плоскасці, то яна паралельная гэтай плоскасці.

Доказ. Няхай прамая l паралельная прамой k , што належыць плоскасці β , і l не належыць плоскасці β (рыс. 165). Трэба даказаць, што прамая l не мае агульных пунктаў з плоскасцю β . Дапусцім, што гэта не так, г. зн. што прамая l перасякае плоскасць β у пэўным пункце U . Гэты пункт не можа ляжаць на прамой k , бо $k \parallel l$. Тады па прымеце скрыжаванасці прамых атрымліваем, што прамыя k і l — скрыжаваныя.

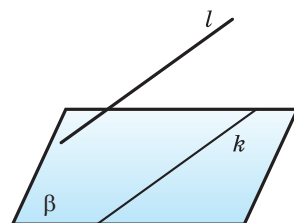


Рис. 165

А гэта супярэчыць таму, што прамыя k і l паралельныя. Атрымалі, што прамая l і плоскасць β не могуць мець агульных пунктаў, г. зн. $l \parallel \beta$.

Б) Дакажам уласцівасць прамой, паралельнай плоскасці.

Тэарэма 8. Лінія перасячэння плоскасцей, з якіх адна праходзіць праз прамую, паралельную другой плоскасці, паралельная гэтай прамой.

Доказ. Няхай прамая a , паралельная плоскасці α , належыць плоскасці β , і прамая b — лінія перасячэння плоскасцей α і β (рыс. 166). Тады прамыя a і b абедзве ляжаць у плоскасці β і не перасякаюцца, бо ў адваротным выпадку прамая a перасякала б плоскасць β . Значыць, прамыя a і b паралельныя.

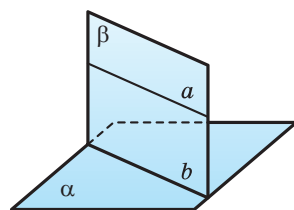


Рис. 166

 **Прыклад 1*.** Дакажам, што праз кожную з дзвюх скрыжаваных прамых праходзіць адзіная плоскасць, паралельная другой прамой.

Няхай прамыя a і b — скрыжаваныя (рыс. 167). На прамой a выберам адвольна пункт U і праз яго правядзём прамую c , паралельную прамой b . Прамыя a і c перасякаюцца, таму праз іх праходзіць адзіная плоскасць α . Плоскасць α паралельная прамой b , бо прамая b не ляжыць у плоскасці α і паралельная прамой c , што ляжыць у плоскасці α .

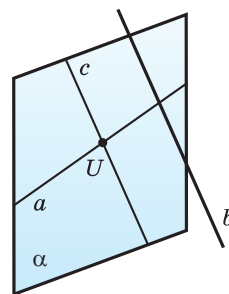


Рис. 167



1. Сформулюйте примету паралельності прямої і площини.
2. Сформулюйте властивість прямої, паралельної площині.

3. Визначте взаємне розміщення навішаних тралейбусних або трамвайних проводів і площини землі (рис. 168). Приведіть приклади взаємного розміщення прямої і площини з наважкою асиметрії.
4. Трикутники ABC і ABD лежать у різних площинах (рис. 169). Чи правда, що будь-яка пряма, паралельна прямій CD , перетинає обидві площини?



Рис. 168

5. Точки P і Q лежать у площині α , а точка R не належить їй. Визначте становище прямої, яка проходить через середини відрізків PR і QR (рис. 170), і площини α .
6. На площині прямокутника $UVXY$ вибрані точки Z (рис. 171). Визначте взаємне розміщення прямої UV і площини XZR .

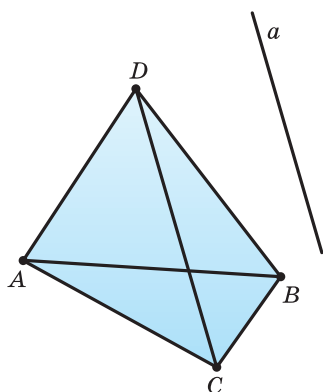


Рис. 169

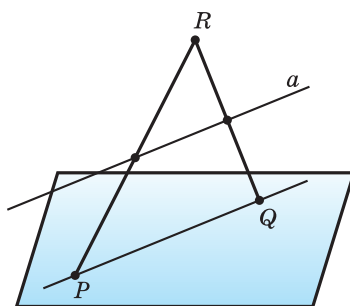


Рис. 170

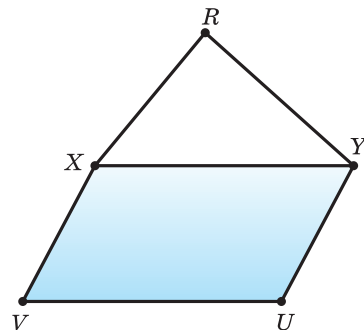


Рис. 171



Задача 1. Основа LM трапеції $KLMN$ рівна 48 см. На площині трапеції вибрані точка O і відзначена середина P відрізка LO (рис. 172). Побудуйте точку H перетину площини KNP і відрізка OM . Знайдіть довжину відрізка PH .

Рашэнне. $M \notin LO$, таму вызначана (LOM) (тэарэма 4).

$KN \parallel LM$ і $LM \subset (LOM)$, таму $KN \parallel (LOM)$ (тэарэма 7).

$P \in LO$ і $LO \subset (LOM)$, таму $P \in (LOM)$.

$P \in (LOM)$ і $P \in (KPN)$, таму $(LOM) \cap (KPN) = a$ і $P \in a$ (аксіёма 3).

$KN \subset (KPN)$, $KN \parallel (LOM)$,
 $(LOM) \cap (KPN) = a$, таму $a \parallel KN$
 (тэарэма 8).

$a \parallel KN$ і $KN \parallel LM$, таму $a \parallel LM$.

$(LOM) \cap (KPN) = a$, таму $a \subset (LOM)$.

$a \parallel LM$ і $a \cap OM = H$, таму $H \in OM$ і $H \in a$.

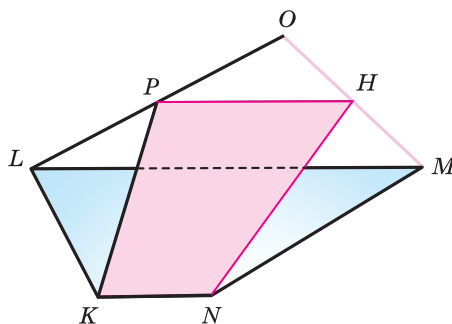
$P \in a$ і $H \in a$, таму $a = PH$.

P — сярэдзіна LO і $PH \parallel LM$, таму PH — сярэдняя лінія $\triangle LOM$.

$LM = 48$ см і PH — сярэдняя лінія $\triangle LOM$, таму $PH = \frac{1}{2}LM$.

$PH = \frac{1}{2}LM$ і $LM = 48$ см, таму $PH = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24$ (см).

Адказ: 24 см.



Рыс. 172

Задача 2. Пабудуйце сячэнне правільнай чатырохвугольнай піраміды $FABCD$ плоскасцю α , якая праходзіць праз кант AB і пункт X на канце FC .

Рашэнне. Вызначым, па якой лініі перасякае паверхню піраміды плоскасць α , якой належаць прамая AB і пункт X .

$AB \subset \alpha$ і $AB \subset (FAB)$, таму $\alpha \cap (FAB) = AB$ (рыс. 173).

$B \in \alpha$ і $B \in (FBC)$, $X \in \alpha$ і $X \in (FBC)$, таму $\alpha \cap (FBC) = BX$.

$X \in \alpha$ і $X \in (FCD)$, таму $\alpha \cap (FCD) = a$ і $X \in a$.

$FABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, таму $ABCD$ — квадрат і $AB \parallel CD$.

$AB \parallel CD$ і $CD \subset (FCD)$, таму $AB \parallel (FCD)$ (тэарэма 7).

$AB \subset \alpha$, $AB \parallel (FCD)$ і $\alpha \cap (FCD) = a$, таму $a \parallel AB$ і $a \subset \alpha$ (тэарэма 8).

$\alpha \cap (FCD) = a$ і $a \cap FD = Y$, таму $Y \in a$ і $Y \in FD$.

$X \in a$ і $Y \in a$, таму $a = XY$, $XY \parallel AB$, $|XY| < |AB|$.

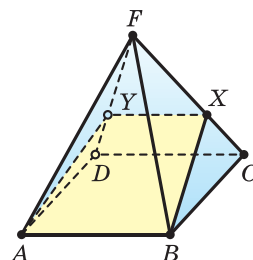
$Y \in FD$ і $FD \subset (FCD)$, таму $Y \in (FCD)$.

$Y \in a$ і $a \subset \alpha$, таму $Y \in \alpha$.

$X \in \alpha$ і $X \in (FCD)$, $Y \in \alpha$ і $Y \in (FCD)$, таму $\alpha \cap (FCD) = XY$.

$A \in \alpha$ і $A \in (FAD)$, $Y \in \alpha$ і $Y \in (FAD)$, таму $\alpha \cap (FAD) = AY$.

Атрымалі, што плоскасць α перасякае піраміду $FABCD$ па трапеццы $ABXY$.



Рыс. 173

а) докажите, что средняя линия MN трапеции параллельна плоскости α ;

б) выразите, что параллельна плоскости α средняя линия BC трехугольника UAR .

129. Точка D не лежит в плоскости параллелограмма $ABMN$. Выразите взаимное расположение прямой AB и плоскости MDN .

130. Точка A не лежит в плоскости параллелограмма $MNPQ$, а точка B — середина отрезка NA (рис. 177). Докажите, что плоскость MBQ пересечет прямую AP .

131. На ребре DD_1 куба $DFGED_1F_1G_1E_1$ выбраны точка Q (рис. 178). Значит так рисунок в тетрадь и постройте точку пересечения с верхней гранью куба прямой s , которая проходит через точку Q и параллельна прямой D_1G .

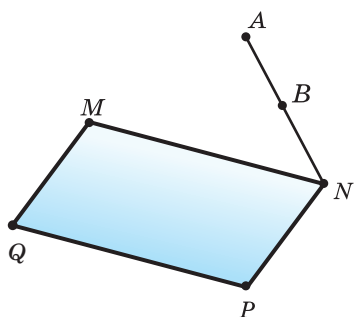


Рис. 177

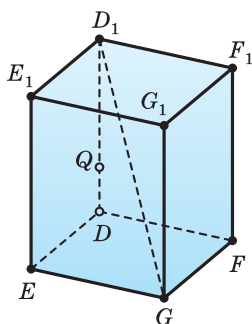


Рис. 178

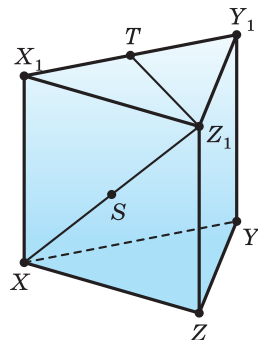


Рис. 179

132. Все ребра правильной трехугольной призмы $XYZX_1Y_1Z_1$ равны, а точка S — середина диагонали XZ_1 грани XX_1Z_1Z (рис. 179). Значит так рисунок в тетрадь и:

а) постройте точку пересечения с ребром XX_1Y_1Y прямой p , которая проходит через точку S и параллельна медиане Z_1T грани $X_1Y_1Z_1$;

б) найдите площадь боковой поверхности призмы, учитывая, что длина отрезка прямой p , расположенного внутри призмы, равна 10 см.

133. Все ребра трехугольной призмы $XYZX_1Y_1Z_1$ равны между собой, Q — точка пересечения медиан грани XYZ . Найдите длину расположенного внутри призмы отрезка прямой, что проходит через середину отрезка X_1Q и параллельна прямой ZQ , учитывая, что площадь боковой поверхности призмы равна S .

134. Учитывая, что точки N и M — середины диагоналей BC_1 и BD adjacent граней прямоугонного параллелепипеда $BCDEB_1C_1D_1E_1$:

а) докажите, что отрезок MN параллелен плоскости, в которой лежат грань CDD_1C_1 ;

б) найдите длину отрезка MN , учитывая, что $BE = 6$ см, $EE_1 = 8$ см.

135. Точка A — середина ребра PY трикутної піраміди $PXYZ$, усі ребра якої рівні $4\sqrt{3}$. Побудуйте точку пересічення з поверхнею піраміди прямою b , яка проходить через точку A і паралельна медіані YR грані XYZ . Знайдіть довжину відрізка геть прямою, розміщеного всередині піраміди.
136. Через точку пересічення медіан грані MPQ трикутної піраміди $MNPQ$ проведена пряма, паралельна медіані PA грані MNP . Знайдіть довжину відрізка, розміщеного всередині піраміди, паралельного геть прямою, врахувавши, що $PA = m$.
137. Усі ребра правильної чотирикутної піраміди $TPQUV$ рівні між собою, точки B, C, D — серединами ребер TP, TV, TU . Через точку B проведена пряма p , паралельна прямою CD . Побудуйте точку A пересічення прямою p з площиною TQU і знайдіть площу основи піраміди, врахувавши, що площа чотирикутника $ABCD$ рівна S .
138. Є паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$, на ребрі SS_1 якого вибрано точку B (рис. 180). Побудуйте січення гетього паралелепіпеда площиною, що проходить через точки B, Q, P_1 .
139. На рисунку 181 показана чотирикутна піраміда, основою якої є трапеція $MNKL$ з основами KL і MN . Зробіть такий рисунок у вигляді з'єднання і побудуйте січення піраміди площиною, яка проходить через точку B ребра SL і пряму MN . Якою фігурою є січення?
140. Є пряма a , паралельна площині α , і точка T , що належить гетьій площині. Покажіть, що пряма, яка проходить через точку T і паралельна прямою a , лежить у площині α .
141. Одна основа трапеції паралельна площині β , а вершина другої лежить у гетьій площині. Покажіть, що:
а) друга основа трапеції лежить у площині β ;
б) середня лінія трапеції паралельна площині β .
142. Покажіть, що калі задана пряма не лежить у пересічних площинах і паралельна лінії їх пересічення, то вона паралельна і гетьим площинам.

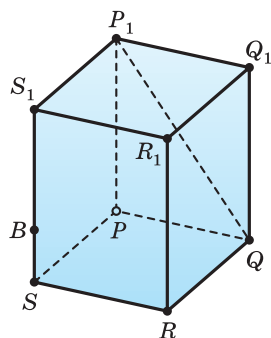


Рис. 180

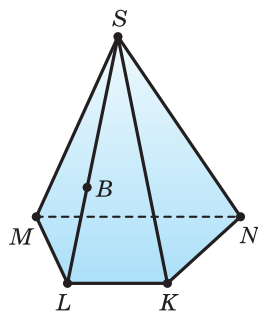


Рис. 181

143*. Побудуйте сячіння паралелепіпеда $CDEF C_1 D_1 E_1 F_1$ площиною, що проходить через кант EE_1 і пункт A , вибраний на канті CC_1 .



144. Точки A, B, C — відповідно середини ребер FE, GH, GK чотирикутної піраміди $FGHEK$, у основі якої лежить паралелограм $GHEK$. Побудуйте відрізок, який площина ABC перетинає діагональну сячіння FHK піраміди.

145. Сторона RT трикутника RST паралельна площині γ , а сторони RS і ST перетинаються з цєю площиною в точках M і N . Докажіть, що трикутники RST і MSN подібні.

146. На відрізку AB вибрані такі точки C , що $AB : BC = 4 : 3$. Через точку B відрізка AB проведена площина α . Паралельно цій площині побудовано відрізок CD , довжини 24 см. Докажіть, що пряма AD перетинає площину α у певній точці E , і знайдіть відрізок BE .

147. Точки D і E на сторонах AB і AC трикутника ABC вибрані так, що $DE = 5$ см і $\frac{BD}{DA} = \frac{2}{3}$. Площина, проведена через точки B і C , паралельна відрізку DE . Знайдіть довжину відрізка BC .

148. Їсть правильна трикутна піраміда $MNPQ$, довжина якогось ребра якої рівна 6 см, а основою з'являється трикутник зі стороною 4 см. Знайдіть периметр сячіння піраміди площиною, яка паралельна NP і проходить через середину ребра PQ , і середню лінію трикутника MNP .

149. Точки A, B, C — відповідно середини ребер LN, LK, MK трикутної піраміди $LMNK$, усі ребра якої рівні одному, а площа грані рівна $16\sqrt{3}$ см². Знайдіть периметр сячіння цю піраміди площиною ABC .

150. На рисунку 182 показана правильна трикутна піраміда $IJKL$. Чотирикутник $XYZT$ — сячіння піраміди площиною, яка проходить через середини X і Y ребра JI і JL і паралельна медіані JE грані JKL . Знайдіть довжину відрізка XY і ZT , врахувавши, що $IK = 48$ см.

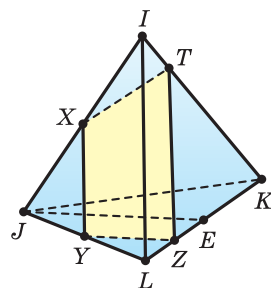


Рис. 182

151. Точка Q — середина ребра FA чотирикутної піраміди $FABCD$, основою якої з'являється трапеція $ABCD$ з паралельними сторонами BC і AD . Знайдіть відрізок, який площина QBC перетинає ребро FAD , врахувавши, що кант BC і середня лінія трапеції відповідно рівні 30 см і 40 см.

152. Старана основи правильнай чатырохвугольнай піраміды роўная 60 см, а бакавы кант — 78 см. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіны дзвюх супрацьлеглых старон основи і паралельная якому-небудзь бакавому канту, і знайдзіце плошчу сячэння.

153*. Ёсць правильная чатырохвугольная піраміда $FMNKL$, бакавы кант якой у два разы большы за старану основи, а плошча бакавой паверхні роўная S . Знайдзіце даўжыню размешчанага ўнутры піраміды адрэзка прамой, якая праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей основи і паралельная медыяне FR грані FLK .

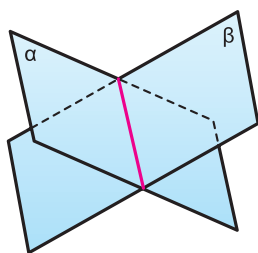
154*. Пункт A — сярэдзіна канта FK чатырохвугольнай піраміды $FGHEK$, у аснове якой ляжыць трапецыя $GHEK$, $KG \parallel HE$. Пабудуйце пункт P , у якім плоскасць AEN перасякае прамую FG . Дакажыце, што адрэзкі PE і HA перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам, улічыўшы, што сярэдняя лінія трапецыі $GHEK$ роўная $\frac{3}{2} HE$.

§ 6. Узаемнае размяшчэнне плоскасцей у прасторы

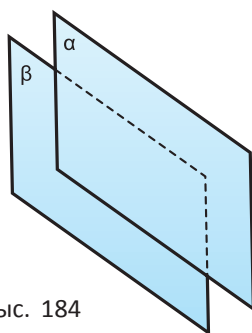
А) Дзве плоскасці або маюць агульны пункт, або не маюць яго. У першым выпадку ў адпаведнасці з аксіёмай 3 плоскасці маюць агульную прамую, г. зн. перасякаюцца па гэтай прамой (рыс. 183). У другім выпадку плоскасці не перасякаюцца (рыс. 184).

Плоскасці, якія не перасякаюцца, называюцца **паралельнымі плоскасцямі**.

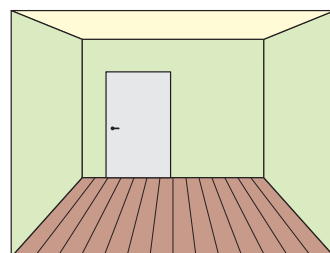
Уяўленне пра паралельныя плоскасці даюць паверхні столі і падлогі або паверхні супрацьлеглых сцен пакоя (рыс. 185). Наступная тэарэма дае прымету паралельнасці плоскасцей.



Рыс. 183



Рыс. 184

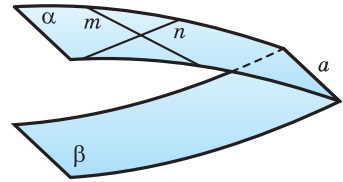


Рыс. 185

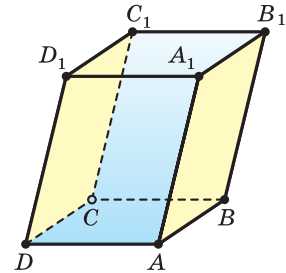
Тэарэма 9. Плоскасць, якая праходзіць праз дзве перасякальныя прамыя, паралельная другой плоскасці, паралельная гэтай самай плоскасці.

Доказ. Няхай плошасць α праходзіць праз перасякальныя прамыя m і n , якія абедзве паралельныя плошасці β (рыс. 186). Дакажам, што плошасць α паралельная плошасці β .

Дапусцім, што плошасць α перасякае плошасць β па пэўнай прамой a . Тады па тэарэме 8 прамая a паралельная і прамой m , і прамой n . Значыць, па тэарэме 3 прамыя m і n паралельныя адна адной. Але гэта супярэчыць умове пра іх перасякальнасць. З гэтага вынікае, што плошасць α паралельная плошасці β .



Рыс. 186



Рыс. 187

Вынік 1. Калі дзве перасякальныя прамыя адной плошасці адпаведна паралельныя двом перасякальным прамым другой плошасці, то такія плошасці паралельныя.

Гэты вынік атрымліваецца з тэарэмы 9 з улікам прыметы паралельнасці прамой і плошасці.

Вынік 2. Супрацьлеглыя грані паралелепіпеда паралельныя, г. зн. ляжаць у паралельных плошасцях.

Напрыклад, грань AA_1B_1B паралелепіпеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ (рыс. 187) змяшчае прамыя AB і AA_1 , а грань DD_1C_1C — прамыя DC і DD_1 . Паколькі $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — паралелаграмы, то $AB \parallel DC$ і $AA_1 \parallel DD_1$, і, значыць, плошасці AA_1B_1B і DD_1C_1C паралельныя.

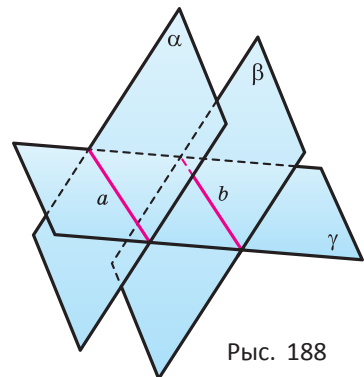
В) Дакажам уласцівасці паралельных плошасцей.

Тэарэма 10. Лініі перасячэння дзвюх паралельных плошасцей трэцяй плошасцю паралельныя адна адной.

Доказ. Няхай плошасць γ перасякае паралельныя плошасці α і β па прамых a і b (рыс. 188). Дакажам, што прамыя a і b паралельныя.

Дапусцім, што гэта не так, г. зн. прамыя a і b маюць агульны пункт Q . Тады пункт Q належыць плошасці α , бо прамая a належыць плошасці α , пункт Q належыць і плошасці β , бо прамая b належыць плошасці β . Атрымліваецца, што плошасці α і β маюць агульны пункт Q , але гэта немагчыма, бо па ўмове плошасці α і β паралельныя.

Значыць, прамыя a і b не могуць мець агульнага пункта. А паколькі яны ляжаць у адной плошасці, менавіта плошасці γ , то яны паралельныя.



Рыс. 188

Приклад 1. Паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пересечений площиною, що проходить через середини M, N, O його ребра $DD_1, AA_1, A_1 B_1$ відповідно. Визначимо, яка фігура атримується у сяченні.

Площина MNO пересікає грані $AA_1 D_1 D$ і $AA_1 B_1 B$ на відрізках MN і NO (рис. 189), при цьому $MN \parallel A_1 D_1$, бо MN — середня лінія прямокутника $AA_1 D_1 D$ ($AN = A_1 N$ і $DM = D_1 M$).

Покладімо площину MNO проходить через пряму MN , паралельну площині $A_1 B_1 C_1 D_1$, то лінія перетинання цих площин — пряма OP — паралельна MN . Чотирикутник $MNOP$ — шукане сячення.

Улічимо, що площини граней $DD_1 C_1 C$ і $AA_1 B_1 B$ паралельні. З теорему 10 випливає, що прямих NO і MP , на яких площини $DD_1 C_1 C$ і $AA_1 B_1 B$ пересікає площина MNO , паралельні. А поскільки $MN \parallel OP$ і $NO \parallel MP$, то чотирикутник $MNOP$ — паралелограм.

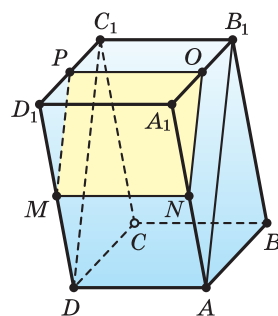


Рис. 189

Теорема 11. Через задану точку поза даною площиною проходить пряма, паралельна заданій.

Доказ. Нехай єсть площина α і точка T поза ёю (рис. 190). У площині α проведемо які-небудь перетинаючі прямі k і l , а через точку T — прямі k_1 і l_1 , паралельні прямим k і l відповідно. Площина β , визначена прямими k_1 і l_1 , з уліком властивості паралельності площин паралельна площині α і проходить через точку T .

Додамо до площини β . Допустимо, що єсть ще одна площина γ , яка проходить через точку T і паралельна площині α (рис. 191). Прямі k_1 і l_1 абедзве не можуть належати площині γ , бо тоді площини β і γ супадали б. Нехай k_1 не належить площині γ . Через точку T і пряму k проведемо площину δ . Яна пересікає площину β на прямою k_1 , а площину γ — на прямою k_2 , які абедзве па теорему 10 паралельні прямою k .

Але таке неможливо, бо на площині через задану точку паралельна заданій прямою проходить адільки одна пряма.

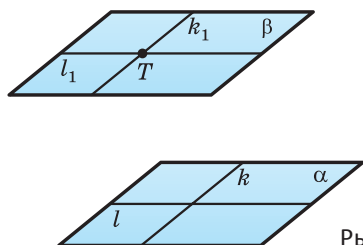


Рис. 190

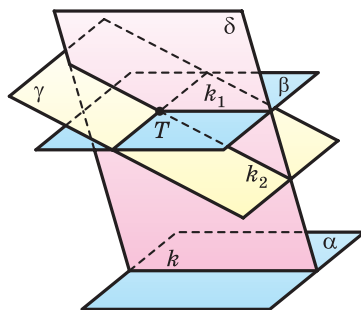


Рис. 191

Вынік 3. Калі кожная з дзвюх дадзеных плоскасцей паралельная трэцяй плоскасці, то гэтыя дзве плоскасці паралельныя адна адной.



Калі прамая a перасякае плоскасць β , то яна перасякае і любую плоскасць, паралельную плоскасці β . Дакажыце самастойна.



Калі плоскасці α і β паралельныя, і прамая l , якая праходзіць праз пункт A плоскасці β , паралельная плоскасці α , то прамая l ляжыць у плоскасці β . Дакажыце самастойна.

Сячэнне піраміды плоскасцю, паралельнай аснове, ёсць многавугольнік, падобны аснове. Дакажыце самастойна.



Тэарэма 12. Адрэзкі паралельных прамых, заключаныя паміж дзвюма паралельнымі плоскасцямі, роўныя аднаму.

Доказ. Няхай паралельныя плоскасці α і β высякаюць з паралельных прамых k і l адрэзкі AB і CD (рыс. 192). Дакажам, што гэтыя адрэзкі роўныя.

Плоскасць γ , якой належаць паралельныя прамыя k і l , перасякае паралельныя плоскасці па паралельных прамых AC і BD . У выніку атрымліваецца чатырохвугольнік $ABDC$, у якім супрацьлеглыя стораны паралельныя. Значыць, гэты чатырохвугольнік — паралелаграм, таму яго супрацьлеглыя стораны AB і CD роўныя.

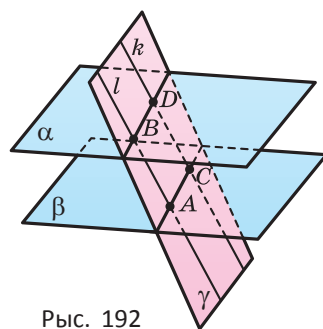
Прыклад 2. Дакажам, што адрэзкі адвольных прамых, заключаныя паміж трыма паралельнымі плоскасцямі, прапарцыянальныя.

Няхай паралельныя плоскасці α , β , γ высякаюць з прамой m адрэзкі AB і BC , а з прамой n — адрэзкі DE і EF (рыс. 193). Дакажам,

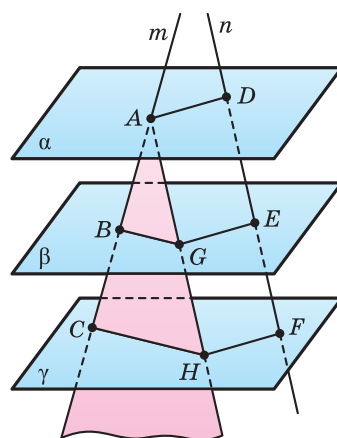
што $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Праз пункт A правядзём прамую, паралельную прамой n , няхай яна перасякаецца з плоскасцямі β і γ у пунктах G і H адпаведна. У трохвугольніку ACH адрэзак BG паралельны старане CH . Таму $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH}$.

Але $AG = DE$ і $GH = EF$ у адпаведнасці з тэарэмай 12. Значыць, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.



Рыс. 192



Рыс. 193

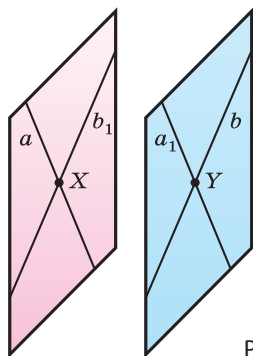
Паралельныя або перасякальныя прамыя вызначаюць адзіную плоскасць. Скрыжаваныя прамыя вызначаюць адзіную пару паралельных плоскасцей.

Прыклад 3. Дакажам, што праз скрыжаваныя прамыя можна правесці паралельныя плоскасці, прычым такая пара плоскасцей адзіная.

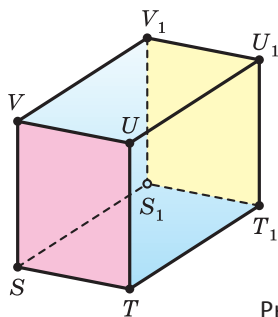
Няхай ёсць скрыжаваныя прамыя a і b (рыс. 194). Выберам адвольна на прамой a пункт X , на прамой b — пункт Y , і праз пункт X правядзём прамую b_1 , паралельную прамой b , а праз пункт Y — прамую a_1 , паралельную прамой a . Перасякальныя прамыя a і b_1 , а таксама b і a_1 вызначаюць плоскасці α і β , якія з улікам прыметы паралельнасці плоскасцей з'яўляюцца паралельнымі.

Адзінасць шуканай пары плоскасцей даказваецца метадам ад адваротнага, падобна да таго, як гэта было зроблена ў доказе тэарэмы 11. Правядзіце гэта разважанне самастойна.

На рысунку 195 плоскасці граняў $STUV$ і $S_1T_1U_1V_1$ паралелепіпеда $STUVS_1T_1U_1V_1$ праходзяць праз скрыжаваныя прамыя TU і U_1V_1 .



Рыс. 194



Рыс. 195



1. Назавіце магчымыя выпадкі ўзаемага размяшчэння дзвюх плоскасцей.
2. Якія плоскасці называюцца паралельнымі?
3. Сфармулюйце прымету паралельнасці плоскасцей.
4. Сфармулюйце сцверджанне пра лініі перасячэння дзвюх паралельных плоскасцей трэцяй плоскасцю.
5. Сфармулюйце сцверджанне пра адрэзкі, якія дзве паралельныя плоскасці высякаюць з паралельных прамых.
6. Сфармулюйце сцверджанне пра адрэзкі, якія тры паралельныя плоскасці высякаюць з адвольных прамых.
7. Сфармулюйце сцверджанне пра плоскасць, якая праходзіць праз дадзены пункт паралельна дадзенай плоскасці.

8. Сформулюйте ссвердження про площасці, які паралельны іншай площасці.
9. Сформулюйте ссвердження про паралельны площасці, што вызначае пара скрыжаваных прамых.
10. Пакажыце паралельныя площасці на прадметах вашага класа.
11. Прамая m перасякае площасць α у пункце A . Ці існуе площасць, якая праходзіць праз прамую m і паралельная площасці α ?
12. Площасці α і β паралельныя, прмая m ляжыць у площасці α . Устанавіце, ці будзе прмая m паралельная площасці β .
13. Улічыўшы, што паралельныя адрэзкі T_1T_2 , U_1U_2 і V_1V_2 заключаны паміж паралельнымі площасцямі α і β (рыс. 196):
- вызначце від чатырохвугольнікаў $T_1U_1U_2T_2$, $U_1V_1V_2U_2$ і $T_1V_1V_2T_2$;
 - ці праўда, што $\triangle T_1U_1V_1 = \triangle T_2U_2V_2$.

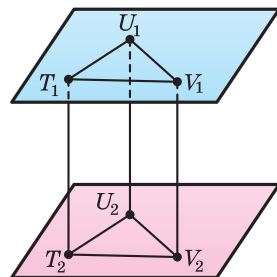


Рис. 196



Задача 1. Улічыўшы, што пункт T не ляжыць у площасці трохвугольніка ABC з плошчай, роўнай 48 см^2 , а пункты M , N , P — сярэдзіны адрэзкаў TA , TB , TC (рыс. 197):

- дакажыце, што площасці MNP і ABC паралельныя;
- знайдзіце плошчу трохвугольніка MNP .

Рашэнне. а) Пункты M і N — сярэдзіны адрэзкаў TA і TB , таму $MN \parallel AB$ і $MN = \frac{1}{2}AB$.

Пункты M і P — сярэдзіны адрэзкаў TA і TC , таму $MP \parallel AC$ і $MP = \frac{1}{2}AC$.

$MN \parallel AB$ і $AB \subset (ABC)$, таму $MN \parallel (ABC)$.

$MP \parallel AC$ і $AC \subset (ABC)$, таму $MP \parallel (ABC)$.

$MN \cap MP = M$, $MN \parallel (ABC)$ і $MP \parallel (ABC)$, таму $(MNP) \parallel (ABC)$.

б) Паколькі MN і MP — сярэднія лініі ў $\triangle ATB$ і $\triangle ATC$ адпаведна, то пункты N і P — сярэдзіны кантаў TB і TC . Таму NP — сярэдняя лінія ў $\triangle BTC$.

$\triangle MNP$ і $\triangle ABC$ падобныя па трэцяй прымеце ($MN : AB = MP : AC = NP : BC = 1 : 2$). Таму $S_{MNP} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12 \text{ (см}^2\text{)}$.

Адказ: 12 см^2 .

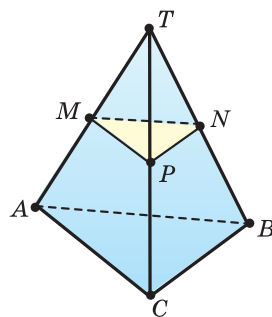


Рис. 197

Задача 2. Довести, що у паралелепіпеді $FGHI$ площина F_1IG паралельна площині I_1HG_1 .

Доведення. У чотирикутнику GII_1G_1 сторони GI і I_1G_1 паралельні і рівні. Таму GII_1G_1 — паралелограм. Значить, $GI \parallel G_1I_1$ і $GI \parallel (G_1I_1H)$.

У чотирикутнику HIF_1G_1 сторони HI і G_1F_1 паралельні і рівні. Таму HIF_1G_1 — паралелограм. Значить, $IF_1 \parallel HG_1$ і $IF_1 \parallel (G_1I_1H)$.

Покількі прямі GI і IF_1 лежать у площині GIF_1 і перетинаються, то $(F_1IG) \parallel (I_1HG_1)$ (теорема 9).

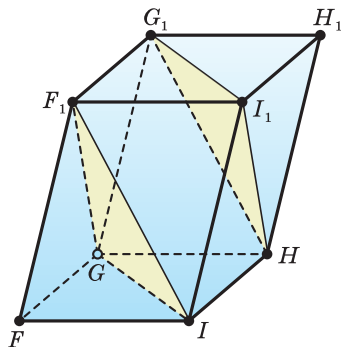


Рис. 198

Задача 3. У паралелепіпеді $MNKL$ точка R — середина ребра KK_1 (рис. 199). Побудуйте сечення паралелепіпеда площинами MM_1K_1 і MLR і відрізок, який перетинає ці площини.

Розв'язок. $MNKL$ — паралелепіпед, таму $MM_1 \parallel KK_1$ і $MM_1 = KK_1$. А поскільки $MM_1 \subset (KMM_1)$ і $K \in (KMM_1)$, то $KK_1 \subset (KMM_1)$. Значить, (MM_1K_1) перетинає паралелепіпед $MNKL$ по паралелограмі MM_1K_1K .

Грани LMM_1L_1 і NKK_1N_1 паралельні. А поскільки $NK \parallel ML$ і $NK \subset (NKK_1)$, то $(NKK_1) \cap (MLR) = RP$ і $RP \parallel NK$.

$NKRP$ і $NKLM$ — паралелограми, таму $RP = KN = ML$.

P — середина ребра NN_1 , бо R — середина ребра KK_1 і $RP \parallel NK$.

(MLR) перетинає паралелепіпед $MNKL$ по паралелограмі $MLRP$.

Точки M і R належать як площині KMM_1 , так і площині MLR . Таму $(KMM_1) \cap (MLR) = MR$.

Адже: $(MM_1K_1) \cap (MLR) = MR$.

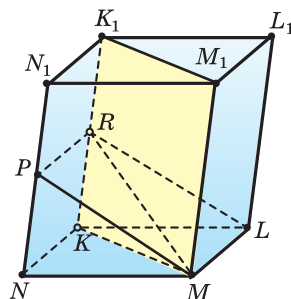


Рис. 199



155. Дві сторони трикутника паралельні площині β . Визначте, чи паралельна і третя сторона цього трикутника площині β .
156. Три відрізки P_1P_2 , Q_1Q_2 і R_1R_2 , які не лежать у одній площині, мають спільну середню. Визначте, чи паралельні площинам $P_1Q_1R_1$ і $P_2Q_2R_2$.
157. $MNKL$ — чотирикутний паралелепіпед. Визначте, чи лежать у паралельних площинах основи $MNKL$ і $M_1N_1K_1L_1$ паралелепіпеда.

159. Для праверкі гарызантальнасці ўстаноўкі дыска вугламерных інструментаў карыстаюцца дзвюма грунтвагамі, размешчанымі ў плоскасці дыска на перасякальных прамых (рыс. 200). Чаму грунтвагі нельга размяшчаць на паралельных прамых?

160. Паралельныя плоскасці α і β перасякаюць старану CB вугла BCD у пунктах B_1 і B_2 , а старану CD — у пунктах D_1 і D_2 адпаведна. Знайдзіце:

а) CB_2 і CD_2 , улічыўшы, што $B_2D_2 = 3B_1D_1$, $B_1B_2 = 12$ см, $CD_1 = 5$ см;

б) B_2D_2 і CB_2 , улічыўшы, што $B_1D_1 = 18$ см, $CB_1 = 24$ см, $CB_2 = \frac{3}{2} B_1B_2$.

161. Тры прамыя, якія праходзяць праз адзін пункт і не ляжаць у адной плоскасці, перасякаюць адну з паралельных плоскасцей у пунктах I_1 , J_1 і K_1 , а другую — у пунктах I_2 , J_2 і K_2 . Дакажыце, што трохвугольнікі $I_1J_1K_1$ і $I_2J_2K_2$ падобныя.

162. Улічыўшы, што праз пункт перасячэння медыян грані JKL трохвугольнай піраміды $IJKL$ праведзена плоскасць, паралельная грані IJK :

а) дакажыце, што сячэнне піраміды гэтай плоскасцю ёсць трохвугольнік, падобны трохвугольніку IJK ;

б) знайдзіце, як адносіцца плошча сячэння да плошчы трохвугольніка IJK .

163. Нарысуйце трохвугольную піраміду $KLMN$ і:

а) пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, якая праходзіць праз кант KL і сярэдзіну A канта MN ;

б) дакажыце, што плоскасць, якая праходзіць праз сярэдзіны E , O і F адрэзкаў LM , MA і MK , паралельная плоскасці LKA ;

в) знайдзіце плошчу трохвугольніка EOF , улічыўшы, што плошча трохвугольніка LKA роўная 24 см².

164. Нарысуйце паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і пабудуйце яго сячэнне:

а) плоскасцю ABC_1 ; б) плоскасцю ACC_1 .

Дакажыце, што пабудаваныя сячэнні з'яўляюцца паралелаграмамі.

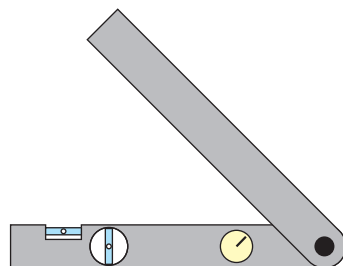
165. Нарысуйце паралелепіпед $IJKL I_1 J_1 K_1 L_1$ і адзначце ўнутраны пункт M грані $I I_1 J_1 J$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, што праходзіць праз пункт M паралельна:

а) плоскасці асновы $IJKL$; б) грані $J J_1 K_1 K$.

166. Нарысуйце паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, якое праходзіць праз:

а) кант CC_1 і пункт перасячэння дыяганалей грані $AA_1 D_1 D$;

б) пункт перасячэння дыяганалей грані $ABCD$ паралельна плоскасці $AB_1 C_1$.



Рыс. 200

167. Нарисуйте паралелепіпед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ і побудуйте його сяченне площиною, яке проходить через точки F_1 , H_1 і середіну канта GH . Докажіть, що побудоване сячіння — трапеція.
168. Нарисуйте паралелепіпед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ і побудуйте його сяченне площиною FKL , де K — середина канта EE_1 , а L — середина канта GG_1 . Докажіть, що побудоване сячіння — паралелограм.
169. Улічіть, що діагоналі NL і MK грані $KLMN$ паралелепіпеда $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$ пересикаються в пункті Q , середіною канта NN_1 з'являється пункт R , а чотирикутник N_1ALB єсь сяченне паралелепіпеда площиною, яка проходить через пункт N_1 і паралельна площині MRK (рис. 201):

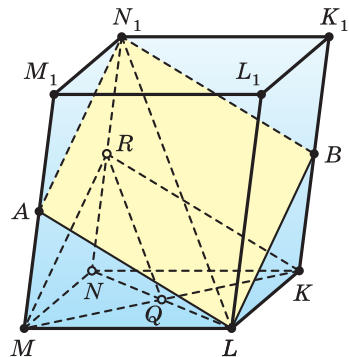


Рис. 201

- а) визначте, ці з'являється паралелограмом чотирикутник N_1ALB ;
 б) докажіть, що прями RQ і N_1L паралельні.
170. Нарисуйте паралелепіпед $OPQRO_1P_1Q_1R_1$ і побудуйте його сяченне площиною MNK , де точки M , N і K лежать відповідно на кантах:

а) PP_1 , OO_1 , OR ; б) QQ_1 , OR , PP_1 .

171. Нарисуйте трикутну піраміду $ABCD$ і адзначте пункт M на канці AB . Побудуйте сяченне піраміди площиною, яка проходить через пункт M паралельно грані BDC .

172. Улічіть, що точки I , J , K і L не лежать у одній площині, а медіани трикутника IJK і KJL пересикаються відповідно в пунктах M_1 і M_2 :

- а) докажіть, що відрізки IL і M_1M_2 паралельні;
 б) знайдіть M_1M_2 , улічіть, що $IL = 12$ см.

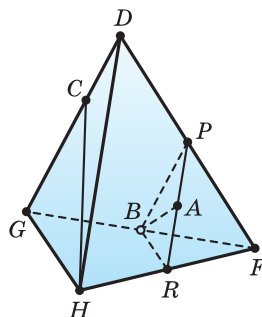


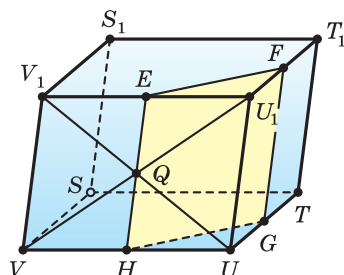
Рис. 202

173. На кантах QA , QB і QC трикутної піраміди $QABC$ адзначані такі пункти M , N , P , що $QM : MA = QN : NB = QP : PC$. Докажіть, що площини MNP і ABC паралельні. Знайдіть площу трикутника MNP , улічіть, що площа трикутника ABC роуна 18 см^2 і $QM : MA = 2 : 1$.

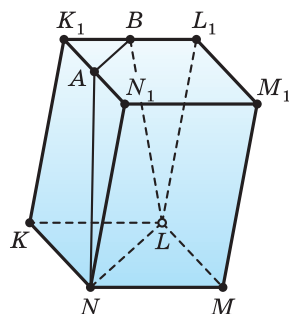
174. Улічіть, що точки B , P , R — середіни канта FG , FD , FH піраміди $DFGH$, відрізок AB — медіана трикутника BPR , а пункт C належить канту DG (рис. 202):

- а) докажіть, що пряма AB паралельна площині DGH ;
 б) визначте, ці пересикається пряма HC з площиною BPR .

175. Нарисуйте паралелепіпед $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$ і позначте сярэдзіны A і B кантаў NN_1 і LL_1 . Пабудуйте сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт B і паралельная плоскасці MAK . Пабудуйте адрэзак, па якім гэта сячэнне перасякае дыяганальнае сячэнне $NLL_1 N_1$.
176. На кантах $N_1 K_1$, LK , MM_1 паралелепіпеда $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$ выбраны пункты Q , T , R адпаведна. Пабудуйте сячэнне паралелепіпеда плоскасцю QTR .
177. Пункты Q , B і R ёсць адпаведна сярэдзіны кантаў SY , XX_1 і $S_1 T_1$ паралелепіпеда $STXY S_1 T_1 X_1 Y_1$. Пабудуйте сячэнне паралелепіпеда плоскасцю QBR .
178. Улічыўшы, што чатырохвугольнік $EFGH$ — сячэнне паралелепіпеда $STUV S_1 T_1 U_1 V_1$ плоскасцю, якая праходзіць праз пункт Q перасячэння дыяганалей грані $UVV_1 U_1$ і паралельная плоскасці TVV_1 (рыс. 203):
 а) растлумачце, чаму прамыя FE і GH паралельныя;
 б) вызначце, ці паралельныя прамыя GF і HE ;
 в) растлумачце, чаму прамая SS_1 паралельная плоскасці сячэння.
179. Улічыўшы, што чатырохвугольнік $LNAB$ — сячэнне паралелепіпеда $KLMNK_1 L_1 M_1 N_1$ плоскасцю, якая праходзіць праз прамую LN і сярэдзіну A канта $N_1 K_1$ (рыс. 204), устанавіце, ці з'яўляецца трапецыяй чатырохвугольнік $LNAB$.
180. Нарисуйте паралелепіпед $KLMNK_1 L_1 M_1 N_1$. Пабудуйте сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей грані $KLMN$ і паралельная плоскасці MLK_1 . Дакажыце, што прамая LN_1 паралельная плоскасці сячэння.
181. Сячэнне трохвугольнай піраміды $TXYZ$, паралельнае плоскасці XYZ , дзеліць бакавы кант у адносіне $1 : 3$, калі лічыць ад вяршыні. Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што плошча трохвугольніка XYZ роўная q .
182. Сячэнне піраміды, паралельнае аснове, дзеліць бакавы кант у адносіне $2 : 3$, калі лічыць ад вяршыні. Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што яго плошча на 336 см^2 меншая за плошчу асновы.



Рыс. 203



Рыс. 204

- 183.** Улічуйте, що трикутник PRQ — сячення правильної трикульної піраміди $HEFG$ площиною, яка паралельна площині HFG і проходить через такі точки Q ребра FE , що $FQ : QE = 1 : 2$ (рис. 205):
 а) докажите, что треугольники PRQ и GHF подобны;
 б) найдите периметр треугольника PRQ , учитывая, что сторона основания пирамиды равна 30 см, а боковой ребро — 90 см.

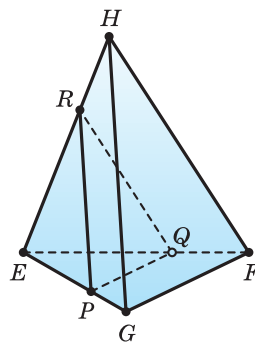


Рис. 205

- 184.** Есть прямоугольный параллелепипед $CDEF C_1 D_1 E_1 F_1$ с квадратной основой $CDEF$, измерения которого равны 10 см, 10 см и 24 см. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через середину ребра CC_1 и параллельна плоскости CFE_1 , и найдите его периметр.

- 185.** Есть прямая четырехугольная призма $AJ C D A_1 J_1 C_1 D_1$, основой которой является ромб с стороной 18 см и острым углом 60° . Постройте сечение призмы плоскостью, которая проходит через меньшую диагональ $J_1 D_1$ ромба и середину ребра AD . Найдите периметр сечения, учитывая, что длина бокового ребра призмы равна 40 см.

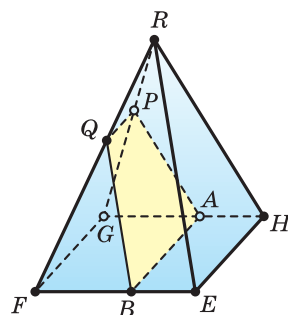


Рис. 206

- 186.** Все ребра прямой призмы $B D F B_1 D_1 F_1$ равны длине друг друга. Найдите площадь боковой поверхности призмы, учитывая, что площадь сечения призмы плоскостью, которая проходит через вершины B, D и середину ребра FF_1 , равна S .

- 187.** Плоскость, которая параллельна плоскости RHE и проходит через такие точки Q ребра RF правильной четырехугольной пирамиды $REFGH$, что $FQ : QR = 3 : 2$, пересекает пирамиду по четырехугольнику $QPAV$ (рис. 206). Найдите периметр сечения, учитывая, что $EH = 30$ см, $ER = 25$ см.

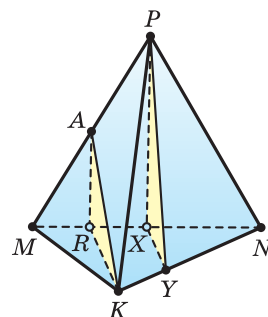


Рис. 207

- 188*.** Точки X и A есть середины ребер MN и MP правильной трикульной пирамиды $PMNK$, а трикульники ARK и PXY — параллельные сечения, которые проходят через прямые KA и PX соответственно (рис. 207). Найдите площадь треугольника PXY , учитывая, что площадь треугольника ARK равна S .



- 189*.** Бакавы кант чатырохвугольнай піраміды падзелены на тры долі, і праз пункты дзялення праведзены плоскасці, паралельныя плоскасці асновы. Знайдзіце плошчы атрыманых сячэнняў, улічыўшы, што плошча асновы роўная S .
- 190*.** Плошча сячэння піраміды плоскасцю α , якая праходзіць праз пункт на бакавым канце і паралельная аснове, роўная 5 см^2 . Вызначце, у якой адносіне плоскасць α дзеліць бакавы кант піраміды, улічыўшы, што плошча асновы роўная 80 см^2 .
- 191*.** Пункт M дзеліць бакавы кант CX трохвугольнай піраміды $CXYZ$ у адносіне $2 : 3$, калі лічаць ад вяршыні. Трохвугольнік MBP ёсць сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт M і паралельная плоскасці XYZ . Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды $CMBP$, улічыўшы, што плошча бакавой паверхні піраміды $CXYZ$ роўная q .
- 192*.** Старана асновы і бакавы кант правільнай трохвугольнай піраміды адпаведна роўныя m і n . Праз пункт, які дзеліць бакавы кант у адносіне $1 : 3$, калі лічаць ад вяршыні піраміды, праведзена сячэнне, паралельнае бакавой грані. Знайдзіце яго плошчу.
- 193*.** На канце M_1L_1 прамавугольнага паралелепіпеда $MNKL M_1N_1K_1L_1$ выбраны такі пункт Q , што $M_1Q : QL_1 = 3 : 2$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт Q і паралельная плоскасці MN_1K , і знайдзіце яго плошчу, улічыўшы, што плошча трохвугольніка MN_1K роўная 200 см^2 .

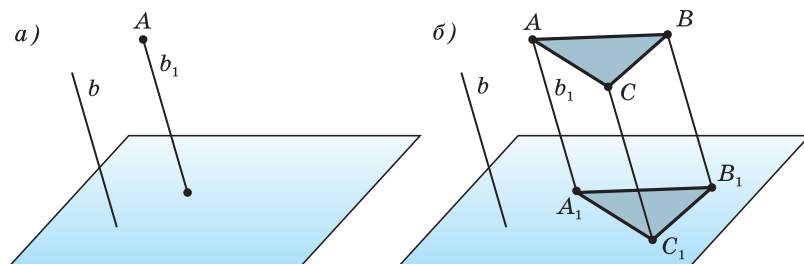


Прастаравае мадэляванне

Пры адлюстраванні на плоскасці (на паперы) фігур, размешчаных у прасторы, выкарыстоўваюць паралельнае праектаванне.

Няхай ёсць плоскасць β і прамая b , якая перасякае гэту плоскасць.

Возьмем адвольны пункт A , правядзём праз яго прамую b_1 так, што $b_1 \parallel b$ (рыс. 208а). Прамая b_1 перасякае плоскасць β у пэўным пункце A_1 . Пункт A_1 называецца праекцыяй на плоскасць β пункта A пры праектаванні паралельна прамой b . Плоскасць β — плоскасць праекцыі, прамая b задае кірунак праектавання.



Рыс. 208



Рыс. 209

Паралельнай праекцыяй фігуры F называюць мноства F_1 праекцый усіх яе пунктаў на зададзеную плоскасць β (рыс. 208б). Фігура F_1 называецца паралельнай праекцыяй фігуры F .

Паралельнай праекцыяй рэальнай фігуры з'яўляецца яе цень, які падае на плоскую паверхню пры сонечным асвятленні, таму што сонечныя прамені можна лічыць паралельнымі (рыс. 209).

Калі вы паглядзіце на свой цень на зямлі або на сцяне, то ўбачыце ўласную паралельную праекцыю.

Дадатковыя заданні да раздзела 2

194. Паралелаграмы $MNLK$ і $MNXY$ не ляжаць у адной плоскасці. Дакажыце, што чатырохвугольнік $KLXY$ з'яўляецца паралелаграмам.
195. Адрэзак PE — агульная медыяна трохвугольнікаў QPS і TPA , а пункты K, L, M, N — сярэдзіны адрэзкаў PS, PA, ET, EQ . Дакажыце, што прамыя KL і MN паралельныя.
196. Вызначце, ці можа кожная з дзвюх скрыжаваных прамых быць паралельнай трэцяй прамой.
197. Дакажыце, што прамая s , якая перасякае ў розных пунктах прамыя a і b адной плоскасці, таксама ляжыць у гэтай плоскасці.
198. Дакажыце, што калі стораны AB і BC паралелаграма $ABCD$ перасякаюць плоскасць, то прамыя AD і DC таксама перасякаюць гэту плоскасць.
199. Сярэдняя лінія трапецыі ляжыць у плоскасці β . Вызначце, якія стораны трапецыі перасякаюць плоскасць β .
200. Дакажыце, што калі тры плоскасці, якія не пераходзяць праз адну прамую, папарна перасякаюцца, то лініі іх перасячэння або паралельныя, або маюць агульны пункт.
201. Нарысуйце паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, пабудуйце яго сячэнні плоскасцямі ABC_1 і DCB_1 , а таксама агульны адрэзак гэтых сячэнняў.
202. Прамая a паралельная плоскасці α . Вызначце, ці існуюць плоскасці, якія праходзяць праз прамую a і паралельныя плоскасці α , і калі існуюць, то колькі ёсць такіх плоскасцей?
203. Прамая a паралельная адной з дзвюх паралельных плоскасцей. Дакажыце, што прамая a або паралельная другой з гэтых плоскасцей, або ляжыць у ёй.
204. Па-за плоскасцю трапецыі $ABCD$ з асновай AD выбраны пункт T . Дакажыце, што прамая AD паралельная плоскасці BTC .

205. Пункт D не ляжыць у плоскасці паралелаграма $IJKL$. Дакажыце, што прмая KL паралельная плоскасці IDJ .
206. Плоскасць α праходзіць праз сярэдзіну стараны AB трохвугольніка ABC паралельна старане BC . Дакажыце, што плоскасці α належыць сярэдзіна стараны AC .
207. Ёсць прмая a , паралельная плоскасці α , і пункт T , прыналежны гэтай плоскасці. Дакажыце, што прмая, якая праходзіць праз пункт T і паралельная прамой a , ляжыць у плоскасці α .
208. Дакажыце, што калі прмая a перасякае плоскасць β , то яна перасякае і любую плоскасць, паралельную β .
209. Вызначце, якія многавугольнікі могуць атрымацца пры перасячэнні плоскасці і:
- а) трохвугольнай прызмы;
 - б) паралелепіпеда.
210. Пункт A — сярэдзіна канта PY трохвугольнай піраміды $PXYZ$, усе канты якой роўныя a . Пабудуйце пункт перасячэння з паверхняй піраміды прамой b , якая праходзіць праз пункт A і паралельная медыяне YR грані XYZ . Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, размешчанага ўнутры піраміды.
211. Ёсць правільная чатырохвугольная піраміда $FGHIJ$ з вуглом грані HFI пры вяршыні F , роўным 60° . Праз пэўны пункт Q канта GJ , праведзена сячэнне плоскасцю, паралельнай грані FJI . Знайдзіце перыметр гэтага сячэння, улічыўшы, што даўжыня яго дыяганалі роўная 14 см, а $GQ = 6$ см.

Праверце свае веды

1. Вызначце, якія многавугольнікі могуць атрымацца пры перасячэнні плоскасці і:
 - а) трохвугольнай піраміды;
 - б) чатырохвугольнай піраміды.
2. Па-за плоскасцю трапецыі $ABCD$ з асновай AD выбраны пункт T . Дакажыце, што прмая AD паралельная плоскасці BTC .
3. Пункт P ляжыць на працягу канта NM паралелепіпеда $LKMNL_1K_1M_1N_1$. Знайдзіце адлегласць ад пункта N да пункта перасячэння прамой M_1P з плоскасцю LL_1N , улічыўшы, што $MM_1 = 24$ м, $NM = 12$ м, $PM = 18$ м.
4. Пункты N і M — сярэдзіны дыяганалей BC_1 і BD адпаведных граняў прамавугольнага паралелепіпеда $BCDEB_1C_1D_1E_1$. Знайдзіце даўжыню адрэзка MN , улічыўшы, што $BE = 6$ см, $EE_1 = 8$ см.
5. Пункт A — сярэдзіна канта PY трохвугольнай піраміды $PXYZ$, усе канты якой роўныя $12\sqrt{3}$. Пабудуйце пункт перасячэння з паверхняй піраміды прамой b , якая праходзіць праз пункт A і паралельная медыяне YR грані XYZ . Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, размешчанага ўнутры піраміды.

6. Вершини M і N трапеції $MNLK$ з основами NL і KM належать площині γ , а дві інші вершини не належать їй. Знайдіть відстань від точки M до точки перетину прямої LK з площиною γ , врахувавши, що $MK = 8$ см, $MN = 5$ см, $NL = 6$ см.

7. Точка E є точкою перетину площини TR , які не перетинає площину γ . Паралельні прямі, проведені через точки T , R , E , перетинають площину γ у точках T_1 , R_1 , E_1 відповідно. Доведіть, що точки T_1 , R_1 , E_1 лежать на одній прямій, і знайдіть відстань EE_1 , врахувавши, що $TT_1 = 16$ см, $RR_1 = 10$ см, $TE : RE = 1 : 2$.

8. На відрізку AB вибрані такі точки C , що $AB : BC = 4 : 3$. Через точку B відрізок AB проведений в площину α . Паралельна цій площині побудована відрізок CD , довжина 24 см. Доведіть, що пряма AD перетинає площину α у певній точці E , і знайдіть відрізок BE .

9. Є пряма чотирикутна призма $AJCD A_1 J_1 C_1 D_1$, основою якої є ромб зі стороною 16 см і гострим кутом 60° . Побудуйте перетин призми площиною, що проходить через меншу діагональ $J_1 D_1$ ромба і середину ребра AD . Знайдіть периметр перетину, врахувавши, що довжина будь-якого ребра призми дорівнює 20 см.

10. Точки X , Y , Z є точками середин ребер OK , MK , MN правильної трикутної піраміди $OMNK$. Площа перетину площиною, яка проходить через точку M і паралельна прямій NK , дорівнює Q . Знайдіть площу перетину піраміди площиною, яка проходить через точки Y і Z і паралельна прямій MX .



«Наш розум па прыродзе сваёй надзелены
нястомнай прагай пазнаваць ісціну»
(Цыцэрон).

РАЗДЗЕЛ

3 ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНАСЦЬ ПРАМЫХ І ПЛОСКАСЦЕЙ

У гэтым раздзеле вы даведаецеся:

- » пра перпендыкулярнасць прамых і плоскасцей;
- » пра адлегласці паміж прамымі і плоскасцямі;
- » пра вуглы паміж прамымі і плоскасцямі.



§ 7. Перпендикулярність прямої і площасці

А) Нагадаєм, што *перпендикулярними* называюць прамыя, вугал паміж якімі роўны 90° . Перпендикулярныя прамыя могуць быць перасякальнымі і могуць быць скрыжаванымі. На рысунку 210 перпендикулярныя прамыя a і p перасякаюцца, а перпендикулярныя прамыя a і q скрыжоўваюцца.

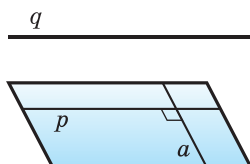


Рис. 210

Праяма называецца **перпендикулярнай плошасці**, калі яна перпендикулярная любой прамой гэтай плошасці.

Перпендикулярнасць прамой a плошасці α запісваюць так: $a \perp \alpha$. Гавораць таксама, што і плошасць α перпендикулярная прамой a , і пішуць $\alpha \perp a$.

Праяма l , перпендикулярная плошасці β , абавязкова гэту плошасць перасякае. Калі дапусціць, што праяма l ляжыць у плошасці β або паралельная ёй, то ў плошасці β ёсць прамыя, паралельныя прамой l , і вугал паміж l і такімі прамымі не роўны 90° .

Навакольнае асяроддзе дае многа прыкладаў, што ілюструюць перпендикулярнасць прамой і плошасці. Слупы з асвятляльнымі лямпамі і калоны ўстанаўліваюць перпендикулярна да гарызантальнай паверхні зямлі (рыс. 211).

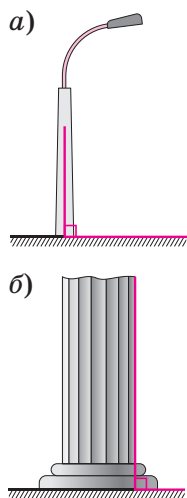


Рис. 211

З тэарэмы 6 параграфу 5 вынікае, што пры вызначэнні вугла паміж прамымі іх можна замяняць паралельнымі прамымі. Таму калі адна з паралельных прамых перпендикулярная плошасці, то і другая таксама перпендикулярная гэтай плошасці. Праўдзіцца і адваротнае сцверджанне.

Тэарэма 1. Калі дзве прамыя перпендикулярныя плошасці, то яны паралельныя адна адной.

Доказ. Няхай прамыя x і y абедзве перпендикулярныя плошасці α (рыс. 212). Дакажам, што прамыя x і y паралельныя адна адной.

Праз які-небудзь пункт M прамой x правядзём прамую x_1 , паралельную прамой y . Тады $x_1 \perp \alpha$. Дакажам, што праяма x_1 супадае з прамой x . Дапусцім, што гэта не так. Тады атрымліваецца, што ў плошасці β , зададзенай прамымі x і x_1 , праз пункт M праведзены дзве прамыя, перпендикулярныя прамой a , па якой перасякаюцца плошасці α і β , што немагчыма. Значыць, прамыя x і y паралельныя.

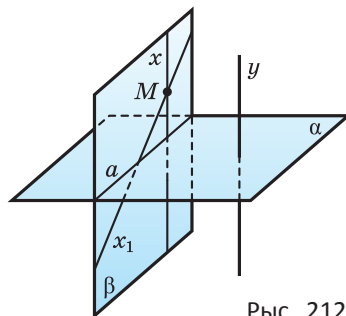


Рис. 212

Няхай ёсць плоскасць α і прамая l , якая яе перасякае і не перпендыкулярная α (рыс. 213). Асновы перпендыкуляраў, апущаных з пунктаў прамой l на плоскасць α , утвараюць прамую l_1 . Гэта прамая называецца *праекцыяй прамой l на плоскасць α* .

Наступная тэарэма ўстанаўлівае *прымету перпендыкулярнасці прамой і плоскасці*.

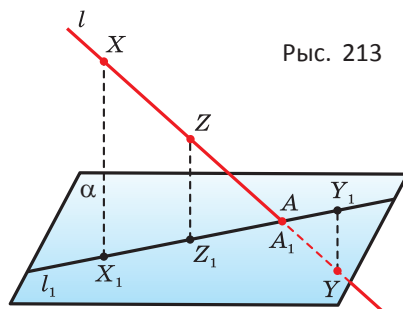


Рис. 213

Тэарэма 2. Калі прамая перпендыкулярная дзвюм перасякальным прамым плоскасці, то яна перпендыкулярная гэтай плоскасці.

Доказ. Няхай прамая p перасякае плоскасць α у пункце O і перпендыкулярная перасякальным прамым a і b , што ляжаць у плоскасці α (рыс. 214). Дакажам, што прамая p перпендыкулярная плоскасці α , г. зн. прамая p перпендыкулярная прамой m , адвольна выбранай у плоскасці α .

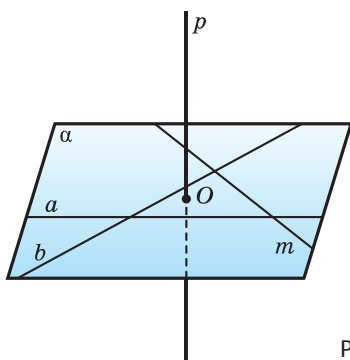


Рис. 214

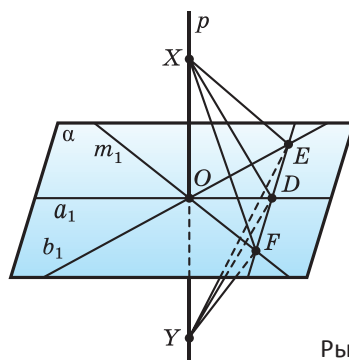
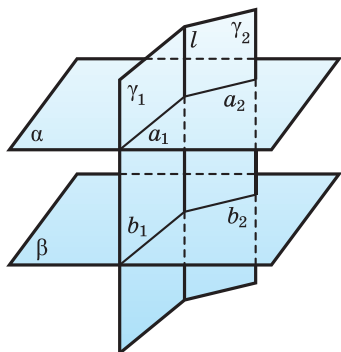


Рис. 215

Правядзём праз пункт O прамыя a_1 , b_1 і m_1 , адпаведна паралельныя прамым a , b і m . У плоскасці α правядзём якую-небудзь прамую так, каб яна перасякала прамыя a_1 , b_1 і m_1 у пунктах D , E , F (рыс. 215). На прамой p адзначым пункты X і Y на адволькавых адлегласцях ад пункта O . Прамыя a_1 і b_1 — пасярэднія перпендыкуляры да адрэзка XY , таму $DX = DY$ і $EX = EY$. Значыць, трохвугольнікі XDE і YDE роўныя па трох старанах, а таму вуглы XEF і YEF роўныя. Улічыўшы гэта, атрымаем, што трохвугольнікі XEF і YEF роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі. Таму $FX = FY$. Гэта азначае, што трохвугольнік XFY з'яўляецца раўнабедраным, а таму яго медыяна FO з'яўляецца і вышыняй, г. зн. прамыя p і m_1 , а таксама прамыя p і m перпендыкулярныя.

Вынік 1. Калі прамая перпендыкулярная адной з паралельных плоскасцей, то яна перпендыкулярная і другой плоскасці.

Няхай плоскасці α і β паралельныя і прамая l перпендыкулярная плоскасці α (рыс. 216). Дакажам, што прамая l перпендыкулярная



Рыс. 216

плоскасці β . Для доказу правядзём праз прамую l дзве якія-небудзь плоскасці γ_1 і γ_2 . Няхай яны перасякаюць плоскасць α па прамых a_1 і a_2 , а паралельную ёй плоскасць β — па прамых b_1 і b_2 . Паколькі $a_1 \parallel b_1$ і $a_2 \parallel b_2$, $l \perp a_1$ і $l \perp a_2$, то $l \perp b_1$ і $l \perp b_2$. Па тэарэме 2 атрымліваем, што $l \perp \beta$.

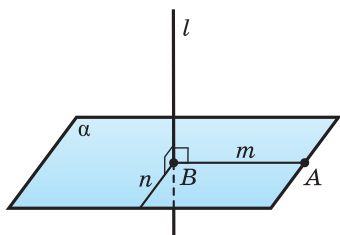
Вынік 2. Калі адной прамой перпендыкулярныя дзве плоскасці, то яны паралельныя.

Правядзіце самастойна абгрунтаванне гэтага сцверджання, выкарыстаўшы рысунак 216.

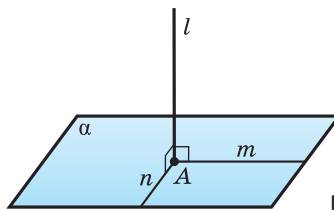
В)

Тэарэма 3. Праз кожны пункт прасторы праходзіць адзіная плоскасць, перпендыкулярная дадзенай прамой.

Доказ. Няхай ёсць прамая l і пункт A . У выпадку, калі пункт A ляжыць на прамой l (рыс. 217), у плоскасці, што вызначаецца пунктам A і прамой l , праз пункт A правядзём прамую m , перпендыкулярную прамой l , і праз пункт B перасячэння прамых m і l — яшчэ адну прамую n , перпендыкулярную прамой l .

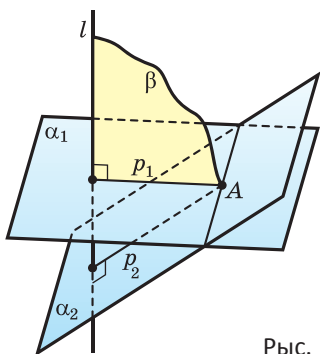


Рыс. 217

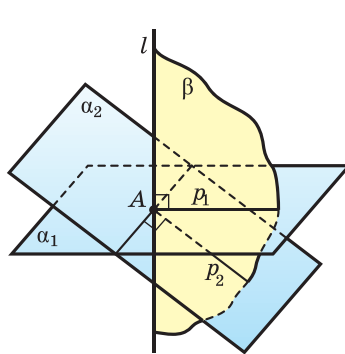


Рыс. 218

У выпадку, калі пункт A ляжыць на прамой l (рыс. 218), праз пункт A правядзём прамыя m і n , перпендыкулярныя прамой l . Праз прамыя m і n правядзём плоскасць α . Гэтая плоскасць і прамая l перпендыкулярныя па прымеце перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.



Рыс. 219



Рыс. 220

Дакажам цяпер, што пабудаваная плоскасць α адзіная. Дапусцім, што гэта не так. Няхай праз пункт A праведзены дзве плоскасці α_1 і α_2 , перпендыкулярныя прамой l (рыс. 219 і 220). Праз прамую l і пункт A правядзём якую-небудзь плоскасць β . Яна перасякае плоскасці α_1 і α_2 па пэўных прамых p_1 і p_2 , бо плоскасць β мае з плоскасцямі α_1 і α_2 агульны пункт A . Паколькі $l \perp \alpha_1$ і $l \perp \alpha_2$, то $l \perp p_1$ і $l \perp p_2$. Атрымліваецца, што ў плоскасці β праз пункт A праведзены дзве прамыя p_1 і p_2 , перпендыкулярныя прамой l , што немагчыма.

Тэарэма 4. Праз кожны пункт прасторы праходзіць адзіная прамая, перпендыкулярная дадзенай плоскасці.

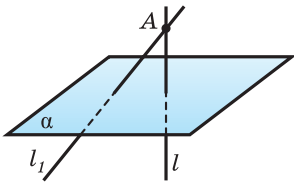
Доказ. Няхай ёсць пункт A і плоскасць α . Няхай a — прамая ў плоскасці α , а β — плоскасць, якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярная прамой a . Няхай плоскасці α і β перасякаюцца па прамой b (рыс. 221). У плоскасці β праз пункт A правядзём прамую l , перпендыкулярную прамой b . Прамая l — шуканая, бо яна перпендыкулярная перасякальным прамым a і b : $l \perp b$ па пабудаванні; $l \perp a$, бо $a \perp \beta$ і l належыць β .

Прамая l — адзіная. Дапусцім, што гэта не так. Няхай праз пункт A праходзіць яшчэ адна прамая l_1 , перпендыкулярная плоскасці α (рыс. 222 і 223). Тады па тэарэме 1 прамыя l і l_1 паралельныя адна адной. Але такое немагчыма, бо прамыя l і l_1 перасякаюцца ў пункце A .

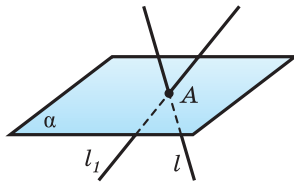
Вынік 3. Квадрат дыяганалі прамавугольнага паралелепіпеда роўны суме квадратаў трох яго вымярэнняў.

Няхай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прамавугольны паралелепіпед (рыс. 224). Паколькі кант CC_1 перпендыкулярны плоскасці $ABCD$, то трохвугольнік ACC_1 прамавугольны з прамым вуглом C . Таму $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. А паколькі трохвугольнік ABC таксама прамавугольны з прамым вуглом B , то $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Улічыўшы, што $CC_1 = AA_1$ і $BC = AD$, атрымліваем, што

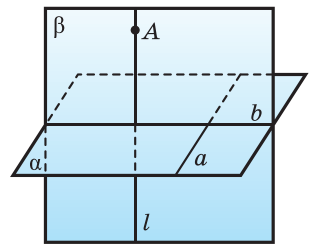
$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$



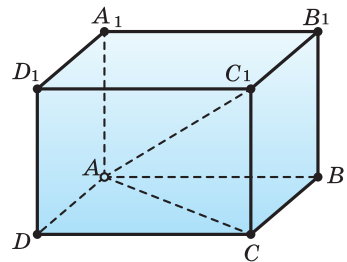
Рыс. 222



Рыс. 223



Рыс. 221



Рыс. 224



1. Якія прамыя прасторы называюцца перпендыкулярнымі? Ці могуць скрыжаваныя прамыя быць перпендыкулярнымі?
2. Якую прамую называюць перпендыкулярнай плоскасці?
3. Сфармулюйце ўласцівасць прамых, перпендыкулярных адной плоскасці.
4. Сфармулюйце прымету перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.
5. Сфармулюйце ўласцівасць прамой, перпендыкулярнай да адной з паралельных плоскасцей.
6. Сфармулюйце ўласцівасць плоскасцей, перпендыкулярных да адной прамой.
7. Сфармулюйце сцверджанне пра плоскасць, якая перпендыкулярная дадзенай прамой і праходзіць праз дадзены пункт.
8. Сфармулюйце сцверджанне аб прамой, якая перпендыкулярная дадзенай плоскасці і праходзіць праз дадзены пункт.
9. Назавіце ў сваім класе мадэлі прамых, перпендыкулярных плоскасці.
10. У правільнай трохвугольнай прызме выбіраюць грань. Колькі ёсць кантаў гэтай прызмы, перпендыкулярных выбранай грані?
11. Прамая FA перпендыкулярная плоскасці BCF , і пункт F — сярэдзіна адрэзка AD . Ці праўда, што:
 - а) $AB = DB$;
 - б) калі $BF = FC$, то $AB = AC$;
 - в) калі $AB = DC$, то $BF = FC$?
12. Ёсць паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Ці праўда, што:
 - а) калі $\angle BAD = 90^\circ$, то $CD \perp B_1 C_1$ і $AB \perp A_1 D_1$;
 - б) калі $AB \perp DD_1$, то $AB \perp CC_1$ і $DD_1 \perp A_1 B_1$?



Задача 1. Дакажыце, што калі канты PQ і PS , а таксама PR і PT чатырохвугольнай піраміды $PQRST$, асновай якой з'яўляецца паралелаграм, роўныя адзін аднаму (рыс. 225), то адрэзак, які злучае вяршыню P з пунктам O перасячэння дыяганалей гэтага паралелаграма, перпендыкулярны аснове $QRST$.

Р а ш э н н е. $QRST$ — паралелаграм і $QS \cap RT = O$, таму $OQ = OS$ і $OR = OT$.

Паколькі $\triangle PQS$ раўнабедраны і $OQ = OS$, то $PO \perp QS$.

Паколькі $\triangle PRT$ раўнабедраны і $OR = OT$, то $PO \perp RT$.

$PO \perp QS$ і $QS \subset (QRS)$, $PO \perp RT$ і $RT \subset (QRS)$, таму $PO \perp (QRS)$ (тэарэма 2).

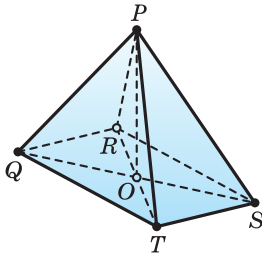


Рис. 225

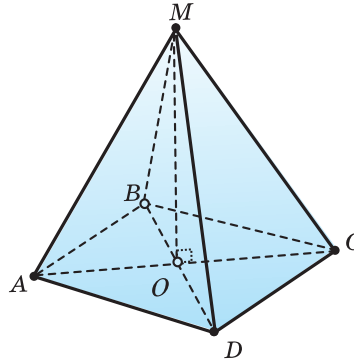


Рис. 226

Викарystаўшы рысунак 226, дакажыце самастойна адваротнае сцверджанне: «Калі адрэзкі MA і MC , а таксама MB і MD злучаюць пункт M перпендыкулярна, узвядзенага з цэнтра O паралелаграма $ABCD$, з супрацьлеглымі яго вяршынямі, то гэтыя адрэзкі папарна роўныя».

Задача 2. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $DABC$ пункт M — сярэдзіна BC (рыс. 227). Дакажыце, што прамая BC перпендыкулярная плоскасці ADM .

Рашэнне. $DABC$ — правільная трохвугольная піраміда, таму $\triangle ABC$ — роўнастаронні і $\triangle DBC$ — раўнабедраны.

$\triangle ABC$ — роўнастаронні і M — сярэдзіна BC , таму $BC \perp AM$.

$\triangle DBC$ — раўнабедраны і M — сярэдзіна BC , таму $BC \perp DM$.

$BC \perp AM$ і $BC \perp DM$, таму $BC \perp (ADM)$.

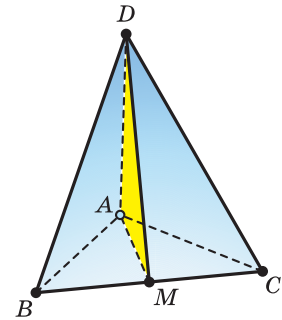


Рис. 227



Задача 3*. Дакажыце, што дыяганаль BD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка AB_1C (рыс. 228).

Рашэнне. $ABCD$ — квадрат, таму $AC \perp BD$.

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, таму $AC \perp BB_1$.

$AC \perp BD$ і $AC \perp BB_1$, таму $AC \perp (BB_1D)$.

$AC \perp (BB_1D)$ і $BD_1 \subset (BB_1D)$, таму $AC \perp BD_1$.

$BB_1 C_1 C$ — квадрат, таму $B_1C \perp BC_1$.

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, таму $AB \perp B_1C$.

$B_1C \perp BC_1$ і $AB \perp B_1C$, таму $B_1C \perp (ABC_1)$.

$B_1C \perp (ABC_1)$ і $BD_1 \subset (ABC_1)$, таму $B_1C \perp BD_1$.

$AC \perp BD_1$ і $B_1C \perp BD_1$, таму $BD_1 \perp (AB_1C)$.

Викарystаўшы рысунак 228, устанавіце, у якім пункце прамая BD_1 перасякае плоскасць AB_1C .

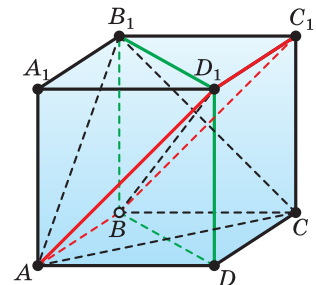


Рис. 228



212. Визначте, чи перпендикулярна пряма l площині α , улічуйте, що на рисунку:

а) 229 паралельні прямі a і b лежать у площині α і пряма l перпендикулярна їм абедзвум;

б) 230 пересикальні прямі c і d лежать у площині α і пряма l перпендикулярна їм абедзвум;

в) 231 пересикальні прямі m і n лежать у площині α і пряма l перпендикулярна їм абедзвум;

г) 232 пряма r перпендикулярна пересикальним прямим p і q площині α і пряма l паралельна прямій r .

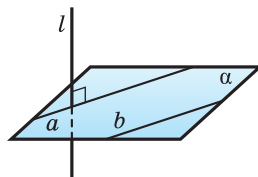


Рис. 229

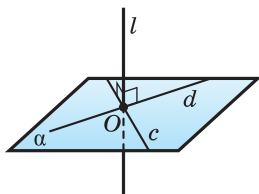


Рис. 230

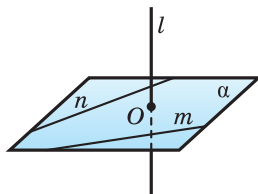


Рис. 231

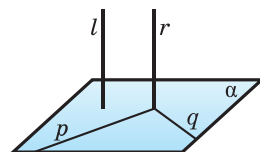


Рис. 232

213. На кантах F_1G_1 і FF_1 прямокутного паралелепіпеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$ вибрані точки A і B (рис. 233). Визначте, чи перпендикулярні:

а) пряма FG і площина EE_1F_1 ;

б) прямі AB і GH ;

в) прямі F_1G і EF .

214. Точки L , M і O лежать на прямій, перпендикулярній площині α , а точки O , B , C і D лежать у цій площині (рис. 234). Визначте, чи з'являється прямим кутом:

а) $\angle LOB$;

б) $\angle MOC$;

в) $\angle DLM$;

г) $\angle DOL$;

д) $\angle BMO$.

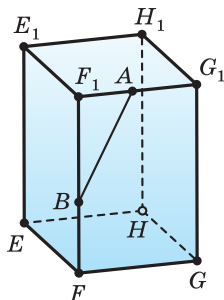


Рис. 233

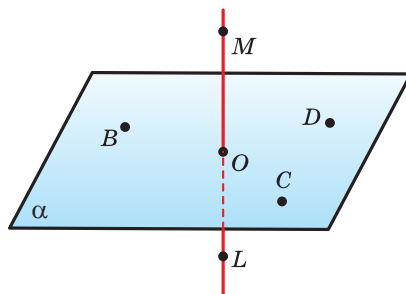
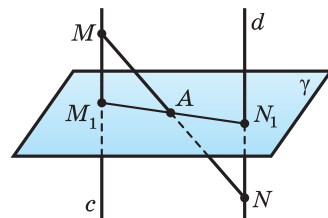


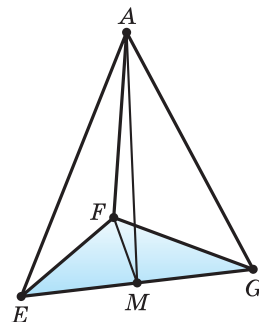
Рис. 234

215. Проз канцы P і Q адрэзка PQ , паралельнага плоскасці γ , праведзены прамыя, перпендыкулярныя гэтай плоскасці, якія перасякаюць яе ў пунктах P_1 і Q_1 . Дакажыце, што $PQ = P_1Q_1$.



Рыс. 235

216. На канце HE чатырохвугольнай піраміды $REFGH$, у якой бакавы кант FR перпендыкулярны плоскасці асновы, выбраны пункт A і на адрэзках AF і AR адзначаны іх сярэдзіны B і C . Дакажыце, што прамая BC перпендыкулярная плоскасці асновы $EFGH$, і знайдзіце вугал паміж прамымі BC і GH .



Рыс. 236

217. Проз канцы M і N адрэзка, які перасякае плоскасць γ у пункце A , праведзены прамыя c і d . Гэтыя прамыя перпендыкулярныя плоскасці γ і перасякаюць яе ў пунктах M_1 і N_1 адпаведна (рыс. 235). Дакажыце, што пункты M_1 , N_1 і A ляжаць на адной прамой, і знайдзіце адрэзак MN , улічыўшы, што $MM_1 = 24$ см, $NN_1 = 8$ см, $AN_1 = 6$ см.

218. Проз пункты A і B праведзены прамыя, перпендыкулярныя плоскасці α , якія перасякаюць яе ў пунктах C і D адпаведна. Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі A і B , улічыўшы, што $AC = 9$ м, $BD = 6$ м, $CD = 7,2$ м і адрэзак AB не перасякае плоскасць α .

219. Проз пункты A і B праведзены прамыя, перпендыкулярныя плоскасці α , якія перасякаюць яе ў пунктах A_1 і B_1 адпаведна. Знайдзіце A_1B_1 , улічыўшы, што $AB = 30$ см, $AA_1 = 43$ см, $BB_1 = 67$ см.

220*. Проз вяршыню C правільнага трохвугольніка ABC са стараной $16\sqrt{3}$ см праведзена прамая k , перпендыкулярная плоскасці ABC , а праз артацэнтр O гэтага трохвугольніка — прамая l , паралельная прамой k . На прамых k і l выбраны пункты D і E , адлеглыя ад пунктаў C і O на 16 см і 12 см адпаведна. Знайдзіце адлегласць DE і адлегласці ад пунктаў D і E да вяршынь трохвугольніка.



221*. Проз цэнтр O сіметрыі квадрата са стараной a праведзена прамая l , перпендыкулярная плоскасці квадрата. Знайдзіце адлегласць ад вяршынь квадрата да пункта K прамой l , улічыўшы, што $OK = d$.



222. Ёсць прамавугольны трохвугольнік EFG з прамым вуглом F і катэтамі FE і FG , роўнымі 6 см і 8 см адпаведна. Ад вяршыні F на прамені, перпендыкулярным плоскасці трохвугольніка, адкладзены адрэзак FA , роўны 12 см, а на гіпатэнузе EG пазначана яе сярэдзіна M (рыс. 236). Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка AFM .

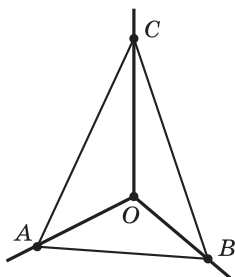


Рис. 237

223. На рисунку 237 прямые OA , OB і OC попарно перпендикулярні. Знайдіть відрізок BC , врахувавши, що:

а) $OA = 6$ см, $AB = 14$ см, $OC = 3$ см;

б) $AC = 18$ см, $AB = 32$ см, $OC = 10$ см;



в*) $OA = p$, $AB = q$, $OC = r$;

г*) $AC = k$, $AB = l$, $OC = m$.

224. З вершини B трикутника ABC проведено відрізок BD , перпендикулярний площині трикутника. Знайдіть довжину цього відрізка, врахувавши, що $DA = 13$ см, $DC = 15$ см, а сторона BC довільніша за сторону BA на 4 см.

225. На прямій, яка перпендикулярна площині α і перетинає її в точці O , вибрані дві точки A і B , а на площині α — така точка X , що $XA = 3$, $XB = 4$. Знайдіть OX , врахувавши, що:

а) $AB = 5$;

б) $AB = 6$;

в) $AB = 7$.

226*. Багатокутник OYZ трикутної піраміди $OXYZ$ перпендикулярний площині її основи XYZ . Знайдіть цей кут, врахувавши, що кути YX і YZ рівні 27 см і 48 см відповідно і кути OZ і OX відносяться як 4 : 3.

227. Основний прямокутний паралелепіпед з'являється прямокутником з вимірами 9 см і 12 см, а діагональ паралелепіпеда рівна $15\sqrt{2}$ см. Знайдіть третій вимір паралелепіпеда.

228. Кут A і B трикутника ABC разом складають 90° , а пряма BD перпендикулярна площині ABC . Докажіть, що прямі CD і AC перпендикулярні.

229. Пряма AM перпендикулярна площині квадрата $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O . Докажіть, що пряма BD перпендикулярна:

а) площині AMO ; б) прямою MO .

230. Кут AB і AC , а також DB і DC трикутної піраміди $ABCD$ рівні, а точка M — середина ребра BC . Докажіть, що площина трикутника ADM перпендикулярна прямій BC .

231. Є прямокутний паралелепіпед $CDEF C_1 D_1 E_1 F_1$, ребро $CDEF$ якого з'являється квадратом. Знайдіть площу багатогранної чотирикутної піраміди $C_1 CDEF$, врахувавши, що $CD = 20$ мм, $CE_1 = 20\sqrt{6}$ мм.

232. Кут прямокутного паралелепіпеда рівний 12 см, 16 см і 28 см відповідно. Визначте площу сечення, проведеного через ребра трьох ребер, що виходять з однієї вершини.

233*. Вимярэнні AB , AD і дыяганаль AC_1 прамавугольнага паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ роўныя 6, 12 і 18 адпаведна. Пункты K і K_1 выбраны на кантах AD і $A_1 D_1$ так, што $AK : KD = A_1 K_1 : K_1 D_1 = 1 : 3$. Дакажыце, што плоскасць BKK_1 перпендыкулярная прамой AC , і знайдзіце плошчу сячэння паралелепіпеда плоскасцю BKK_1 .



234. Праз цэнтр O апісанай каля трохвугольніка ABC акружнасці праведзена прмая, перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка (рыс. 238). Дакажыце, што кожны пункт X гэтай прамой роўнаадлеглы ад вяршынь трохвугольніка.

235. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія праходзяць праз дадзены пункт M прамой a і перпендыкулярныя да яе, ляжаць у плоскасці, якая перпендыкулярная да прамой a і праходзіць праз пункт M .

236. Дакажыце, што калі пункт X роўнаадлеглы ад канцоў дадзенага адрэзка AB , то ён ляжыць у плоскасці, якая праходзіць праз сярэдзіну адрэзка AB і перпендыкулярная прамой AB .

237. Праз вяршыні A і B трохвугольніка ABC праведзены прамыя k і l , перпендыкулярныя яго плоскасці, а праз медыяну CD — плоскасць, якая перасякае прамыя k і l у пунктах E і F адпаведна (рыс. 239). Вызначце:

а) чым з'яўляецца адрэзак CD у трохвугольніку CEF ;

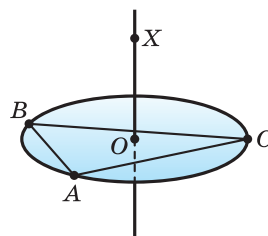
б) што калі $CA = CB$, то трохвугольнік CEF з'яўляецца раўнабедранным.

238. На прамой, якая перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка PQR і праходзіць праз вяршыню P , выбраны пункт A . На адрэзку, што злучае сярэдзіну стараны QR з пунктам A , адзначаны такі пункт T , што $AT : TP = 2 : 1$. Улічыўшы, што G — цэнтр цяжару трохвугольніка PQR , вызначце вугал паміж прамымі:

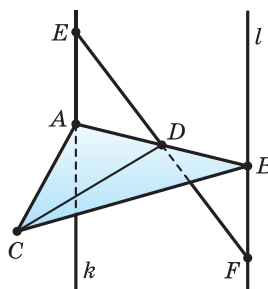
а) GT і QR ; б) GT і PQ .

239. Пункт Q з'яўляецца цэнтрам квадратнай асновы $ABCD$, а пункт K — сярэдзінай канта PA чатырохвугольнай піраміды $PABCD$, усе канты якой роўныя 100. Нарысуйце сячэнне піраміды і знайдзіце яго плошчу, улічыўшы, што плоскасць сячэння праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная прамой:

а) AC ; в) PQ ;
б) PA ; г) BD .



Рыс. 238



Рыс. 239

- 240.** Усе грані трохвугольнай піраміды $IJKL$ — правільныя трохвугольнікі са стараной 6 см. Пабудуйце сячэнне гэтай піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіну канта KL і перпендыкулярная яму, і знайдзіце плошчу гэтага сячэння.
- 241.** Пункт Q — сярэдзіна канта KK_1 прамавугольнага паралелепіпеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, пункт H канта MM_1 такі, што $MH : HM_1 = 4 : 1$. Знайдзіце даўжыню адрэзка HQ , улічыўшы, што дыяганаль паралелепіпеда роўная 41 см, а дыяганаль яго асновы — 9 см.
- 242*.**  Асновай трохвугольнай піраміды $SXYZ$ з'яўляецца правільны трохвугольнік, а канты SZ , SX , SY узаемна перпендыкулярныя. Праз пункт Q , выбраны на канце XZ , праведзена плоскасць, перпендыкулярная прамой SZ . Знайдзіце кант SX піраміды, улічыўшы, што плошча сячэння роўная 32 см^2 , а $SQ = 17 \text{ см}$.
- 243*.**  Ёсць трохвугольная піраміда $QABC$, аснова якой — правільны трохвугольнік ABC , а бакавыя канты QA , QB , QC роўныя адзін аднаму. З вяршыні C і з такога пункта X канта AC , што $AX = 45 \text{ см}$ і $XC = 30 \text{ см}$, праведзены перпендыкуляры да грані QAB . Знайдзіце даўжыні гэтых перпендыкуляраў, улічыўшы, што адлегласць паміж іх асновамі роўная 18 см.
- 244*.**  Ёсць правільная трохвугольная прызма $MNKM_1N_1K_1$. Пункты A і B — сярэдзіны кантаў MK і KK_1 адпаведна. Праз гэтыя пункты праведзены прамыя, якія перпендыкулярныя грані MM_1N_1N і перасякаюць яе ў пунктах P і Q адпаведна. Знайдзіце старану асновы і бакавы кант прызмы, улічыўшы, што $AB = 2\sqrt{61} \text{ см}$, а $PQ = 13 \text{ см}$.
- 245*.**  У трохвугольнай пірамідзе $QFGH$ аснова FGH — правільны трохвугольнік, а бакавыя канты QF , QG , QH роўныя адзін аднаму. Адно сячэнне піраміды перпендыкулярнае канту QH і праходзіць праз вяршыню F , другое — паралельнае канту QH і змяшчае вяршыню G і такі пункт B канта FH , што $FB = 8 \text{ см}$ і $BH = 7 \text{ см}$. Знайдзіце адрэзак, па якім перасякаюцца гэтыя сячэнні, улічыўшы, што $QF = 12 \text{ см}$.
- 246*.**  Ёсць трохвугольная піраміда $PABC$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. У ёй пазначаны цэнтр Q яе асновы ABC і ўнутраны пункт K канта PB . Зрабіце адпаведны рысунак у спытку і нарысуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная прамой:
- а) BC ; б) BP ; в) BQ .
- 247*.**  Пункт K — сярэдзіна канта A_1B_1 адзінкавага куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Нарысуйце сячэнне куба і знайдзіце яго перыметр і плошчу,

улічыўшы, што плоскасць праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная прамой:

- а) DD_1 ; б) CD ; в) C_1D ; г) CD_1 ; д) BD .



Прастарае мадэляванне

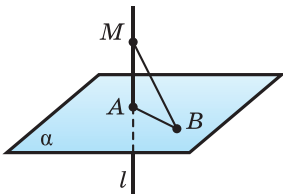
Пры выкананні задання на вызначэнне вертыкальнасці слупа для плота (рыс. 240) вучань правярэў вертыкальнасць першага са слупоў, а далей, вымераўшы вышыні першага і другога слупоў і адлегласць паміж імі знізу і зверху, зрабіў вывад пра тое, што і другі слуп таксама вертыкальны. Вызначце, ці забяспечваюць атрыманыя вучнем звесткі праўдзівасць яго вываду. Адказ абгрунтуйце.



Рыс. 240

§ 8. Адлегласці

А) Няхай ёсць плоскасць α і пункт M па-за ёю (рыс. 241). Праз пункт M правядзём прамую l , перпендыкулярную плоскасці α , і няхай A — пункт перасячэння прамой l з плоскасцю α . Адрэзак MA называецца *перпендыкулярам да плоскасці*, праведзеным з пункта M , а пункт A — *асновай перпендыкуляра*.



Рыс. 241

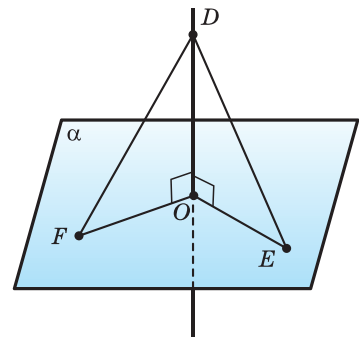
Злучым пункт M яшчэ з якім-небудзь пунктам B плоскасці α . Адрэзак MB называецца *нахіленай да плоскасці*, праведзенай з пункта M , а пункт B — *асновай нахіленай*. Адрэзак AB называецца *праекцыяй нахіленай* на плоскасць α .

Уласцівасці перпендыкуляра і нахіленых

Калі з аднаго пункта па-за плоскасцю да яе праведзены дзве нахіленыя (рыс. 242), то:

- нахіленыя, якія маюць роўныя праекцыі, роўныя адна адной;
- тая нахіленая большая, праекцыя якой большая;
- роўныя нахіленыя маюць роўныя праекцыі;
- большая нахіленая мае большую праекцыю.

Уласцівасці перпендыкуляраў і нахіленых дакажыце самастойна, выкарыстоўваючы малюнак.



Рыс. 242

Тэарэма 5. Перпендыкуляр да плоскасці, праведзены з пэўнага пункта, меншы за любую нахіленую да гэтай плоскасці, праведзеную з таго самага пункта.

Доказ. Няхай адрэзак AB на рысунку 243 — перпендыкуляр, а адрэзак AC — нахіленая да плоскасці α . Гэтыя перпендыкуляр і нахіленая ў прамавугольным трохвугольніку ABC з'яўляюцца адпаведна катэтам і гіпатэнузай. Таму $AB < AC$.

У адпаведнасці са сцверджаннем тэарэмы 5, з усіх адлегласцей ад дадзенага пункта да розных пунктаў прыведзенай плоскасці найменшай з'яўляецца адлегласць, вымераная па перпендыкуляры.

Б) Адлегласцю ад пункта да плоскасці называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з гэтага пункта да плоскасці.

Калі мы гаворым, напрыклад, што вулічны ліхтар знаходзіцца на вышыні 8 м ад зямлі, то мяркуем, што адлегласць ад ліхтара да паверхні зямлі, вымераная па перпендыкуляры, праведзеным ад ліхтара да плоскасці зямлі, складае 8 м (рыс. 244).

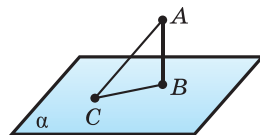


Рис. 243

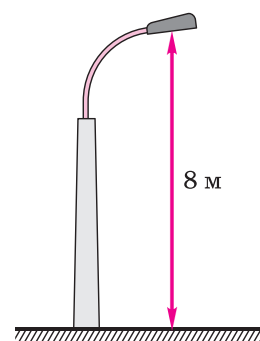


Рис. 244

Тэарэма 6. Адлегласць ад любога пункта адной з паралельных плоскасцей да другой плоскасці адна і тая і роўная даўжыні іх агульнага перпендыкуляра.

Доказ. Няхай ёсць паралельныя плоскасці α і β (рыс. 245). Няхай A — які-небудзь пункт плоскасці α , адрэзак AA_1 — перпендыкуляр, праведзены з пункта A да плоскасці β . Возьмем адвольны пункт X плоскасці α і правядзём з яго перпендыкуляр XX_1 да плоскасці β . Тады па тэарэме 1 прамыя AA_1 і XX_1 паралельныя, а па тэарэме 12 з параграфа 6 адрэзкі AA_1 і XX_1 роўныя адзін аднаму. Гэта азначае, што адлегласць ад любога пункта X плоскасці α да плоскасці β роўная адрэзку AA_1 . Паколькі адрэзак AA_1 перпендыкулярны і плоскасці β , то ён з'яўляецца і адлегласцю ад пункта A_1 да плоскасці α . Зразумела, што адлегласць ад любога пункта Y плоскасці β да плоскасці α роўная адрэзку AA_1 .

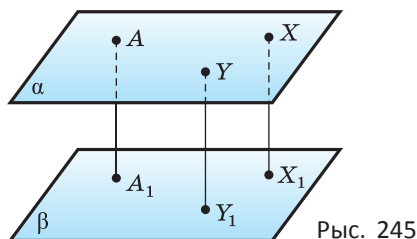


Рис. 245

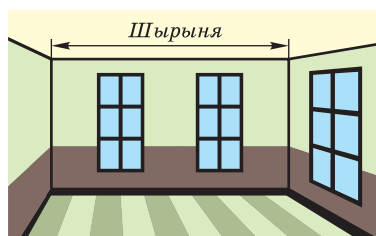


Рис. 246

Адлегласцю паміж паралельнымі плоскасцямі называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з якога-небудзь пункта адной плоскасці да другой плоскасці.

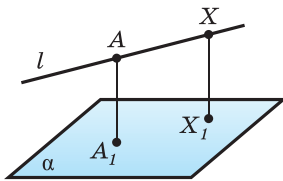
Усе пункты адной сцяны пакая знаходзяцца на аднолькавай адлегласці ад супрацьлеглай сцяны (рыс. 246). Гэта адлегласць і ёсць шырыня пакая.

Тэарэма 7. Адлегласць ад любога пункта прамой, паралельнай плоскасці, да гэтай плоскасці адна і тая і роўная перпендыкуляру, праведзенаму з якога-небудзь пункта прамой да плоскасці.

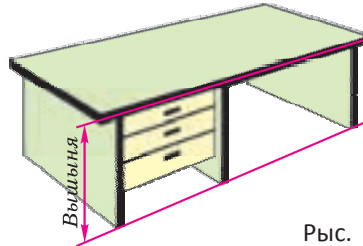
Выкарыстаўшы рысунак 247, правядзіце доказ тэарэмы самастойна.

Адлегласцю паміж прамой і паралельнай ёй плоскасцю называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з якога-небудзь пункта прамой да плоскасці.

Усе пункты краю стала знаходзяцца на адной адлегласці ад падлогі (рыс. 248). Гэта адлегласць і ёсць вышыня стала.



Рыс. 247



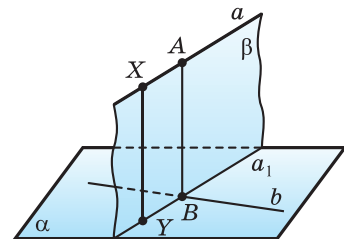
Рыс. 248



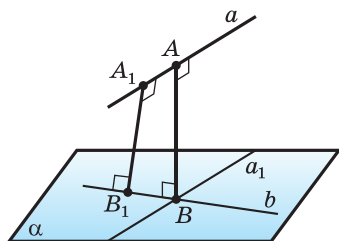
Тэарэма 8. Дзве скрыжаваныя прамыя маюць адзіны агульны перпендыкуляр.

Доказ. Няхай ёсць скрыжаваныя прамыя a і b (рыс. 249). Дакажам, што на гэтых прамых можна выбраць такія пункты A і B , што прамая AB перпендыкулярная і прамой a , і прамой b .

Няхай α — плоскасць, якая праходзіць праз прамую b паралельна прамой a . Возьмем на прамой a пункт X і апусцім перпендыкуляр XU на плоскасць α . Няхай β — плоскасць, што праходзіць праз перасякальныя прамыя a і XU . Абазначым a_1 — прамую, па якой перасякаюцца плоскасці α і β . Паколькі $a_1 \parallel a$, то прамыя a_1 і b перасякаюцца ў пэўным пункце B . У плоскасці β апусцім перпендыкуляр BA на прамую a . Прамыя AB і XU ляжаць у адной плоскасці β і перпендыкулярныя да прамой a . Таму $AB \parallel XU$ і $AB \perp \alpha$, значыць, $AB \perp a$ і $AB \perp b$.



Рыс. 249



Рыс. 250

Гэтым самым існаванне агульнага перпендыкуляра скрыжаваных прамых абгрунтавана. Дакажам цяпер яго адзінасць.

Няхай скрыжаваныя прамыя a і b маюць яшчэ адзін агульны перпендыкуляр A_1B_1 , прычым пункт A_1 належыць прамой a , а пункт B_1 — прамой b (рыс. 250).

Пункты A і A_1 , B і B_1 супадаць не могуць, бо з аднаго пункта да прамой можна правесці толькі адзін перпендыкуляр. Паколькі $A_1B_1 \perp a$ і $A_1B_1 \perp b$, то прамая A_1B_1 , як і прамая AB , перпендыкулярная плоскасці α , што праходзіць праз прамую b паралельна прамой a . Таму $A_1B_1 \parallel AB$ і пункты A_1 , B_1 , A , B належаць адной плоскасці. Значыць, і прамыя AA_1 і BB_1 належаць адной плоскасці. Атрымалі супярэчнасць з тым, што гэтыя прамыя скрыжоўваюцца.

Адлегласцю паміж скрыжаванымі прамымі называецца даўжыня іх агульнага перпендыкуляра.

З доказу тэарэмы 8 вынікае, што *адлегласць паміж скрыжаванымі прамымі роўная адлегласці ад любога пункта адной з іх да плоскасці, што змяшчае другую прамую і паралельная першай*.

Каб знайсці адлегласць паміж скрыжаванымі прамымі, можна дзейнічаць па-рознаму.

а) Можна пабудаваць адрэзак з канцамі на гэтых прамых, які перпендыкулярны ім абедзвюм, і знайсці яго даўжыню.

Прыклад 1. Знойдзем адлегласць паміж прамымі, якія змяшчаюць кант куба даўжынёй a і дыяганаль грані, якая з гэтым кантам не мае агульных пунктаў.

Рашэнне. Няхай трэба знайсці адлегласць паміж прамымі AB і A_1C_1 (рыс. 251). Паколькі $AA_1 \perp AB$ і $AA_1 \perp A_1C_1$, то AA_1 — агульны перпендыкуляр скрыжаваных прамых AB і A_1C_1 , а таму шуканая адлегласць роўная канту куба, г. зн. a .

б) Можна пабудаваць плоскасць, якая змяшчае адну з прамых і паралельная другой. Тады шуканая адлегласць будзе роўнай адлегласці ад гэтай плоскасці да другой прамой.

Прыклад 2. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ канты асновы $ABCD$ роўныя 4, а бакавыя канты — 6. Знойдзем адлегласць паміж прамымі BD і AM , дзе M — сярэдзіна канта SC .

Рашэнне. Няхай O — цэнтр квадрата $ABCD$. Праз прамую BD правядзём плоскасць BDN , паралельную прамой AM (рыс. 252). Паколькі плоскасць SAC перпендыкулярная прамой BD і змяшчае прамую AM , то перпендыкуляр, апущаны з любога пункта прамой AM на плоскасць BDN , належыць плоскасці SAC .

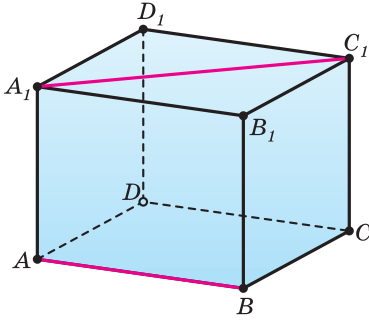


Рис. 251

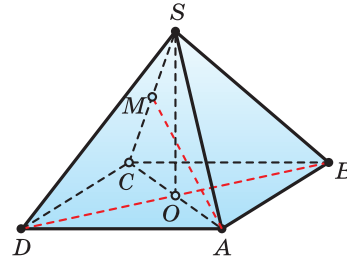


Рис. 252

Няхай K — такі пункт на прамой AM , што $KO \perp AM$. Улічыўшы, што O — сярэдзіна стараны AC трохвугольніка ACM , атрымліваем, што OK роўны палавіне вышыні трохвугольніка ACM , праведзенай да стараны AM . Таму $OK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2S_{ACM}}{AM} = \frac{S_{SAC}}{2AM}$. Знойдзем плошчу трохвугольніка SAC і яго медыяну AM :

$$\begin{aligned} AC &= 4\sqrt{2}, \quad SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7}, \\ S_{SAC} &= 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{7} = 4\sqrt{14}, \quad AM = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(AS^2 + AC^2) - SC^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(36 + 32) - 36} = 5. \quad \text{Цяпер } OK = \frac{2\sqrt{14}}{5}. \end{aligned}$$

Адказ: $\frac{2\sqrt{14}}{5}$.

в) Можна пабудаваць дзве паралельныя плоскасці, кожная з якіх змяшчае адну са скрыжаваных прамых і паралельная другой. Тады шуканая адлегласць будзе роўнай адлегласці паміж гэтымі плоскасцямі.

Прыклад 3. Знойдзем адлегласць паміж прамымі, якія змяшчаюць непарасякальныя дыяганалі дзвюх сумежных граняў куба з кантамі a .

Рашэнне. Няхай трэба знайсці адлегласць паміж прамымі AB_1 і A_1C_1 (рис. 253). Плоскасць, што змяшчае A_1C_1 і паралельная AB_1 , перасякае грань CC_1D_1 па прамой, паралельнай AB_1 , г. зн. па прамой C_1D , а грань DAA_1 — па прамой DA_1 . Разважаючы гэтаксама, атрымліваем, што плоскасць, якая змяшчае AB_1 і паралельная A_1C_1 , перасякае грань $ABCD$ па прамой AC , а грань BCC_1 — па прамой B_1C .

Дыяганаль BD_1 куба як прамая плоскасці BB_1D_1D утварае прамы вугал з прамымі AC і A_1C_1 , якія перпендыкулярныя гэтай плоскасці, а як прамая плоскасці BAD_1C_1 утварае прамы

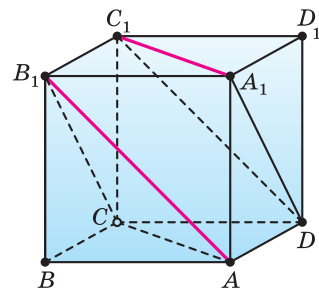


Рис. 253

вугал з прямими B_1C і A_1D , які перпендикулярні як до однієї, так і до другої площини. Таму пряма BD_1 перпендикулярна як до площини AB_1C , так і до площини A_1C_1D .

Площина BDD_1 перетинає площини AB_1C і A_1C_1D по прямих B_1O і DO_1 , де O і O_1 — центри граней $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 254), пряма BD_1 перетинає площини AB_1C і A_1C_1D у пунктах K і N на прямих B_1O і DO_1 . Паколькі $B_1O \parallel DO_1$, то па тэарэме Фалеса $BK = KN$ і $KN = ND_1$. Таму агульны перпендикуляр KN площин AB_1C і A_1C_1D мае даўжыню $\frac{BD_1}{3}$, г. зн. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Адказ: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

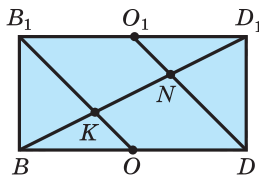


Рис. 254



Дыяганаль куба дзеліцца плошасцю трохвугольніка, старанамі якога служаць дыяганалі граняў куба, што маюць з разглядаанай дыяганаллю куба агульны пункт, у адносіне 1 : 2.

г) Можна пабудаваць плошасць, перпендикулярную адной са скрыжаваных прамых, і пабудаваць праекцыю на яе другой прамой. Тады шуканая адлегласць будзе роўнай даўжыні перпендикуляра, апущанага з пункта, што з'яўляецца праекцыяй першай прамой на пабудаваную плошасць, на праекцыю другой прамой.

Прыклад 4. У чатырохвугольнай пірамідзе $QABCD$ усе канты роўныя a . Знайдзем адлегласць паміж скрыжаванымі кантамі AB і QC (рис. 255).

Рашэнне. З тэарэмы 8 вынікае, што на прамых AB і QC ёсць такія пункты X і Y , што пряма XY перпендикулярна як прамой AB , так і прамой QC , і, разам з гэтым, плошасці, якая праходзіць праз адну з гэтых прамых паралельна другой.

Няхай α — плошасць, якая праходзіць праз пункт Q перпендикулярна прамой AB . Яна праходзіць праз сярэдзіны M і N кантаў AB і CD . Тады $XY \parallel \alpha$, і праекцыяй адрэзка XY на плошасць α будзе адрэзак, роўны XY .

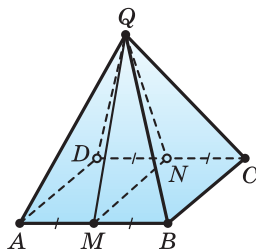


Рис. 255

Вызначым, у якія пункты спраектуюцца пункты X і Y . Паколькі $AB \perp \alpha$, то ўся пряма AB праектуецца ў адзін пункт M . Значыць, пункт X праектуецца ў пункт M .

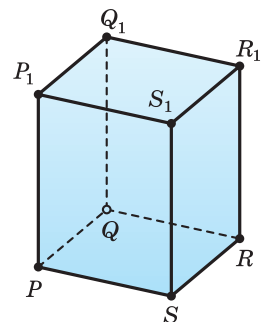
Паколькі пункты Q і C праектуюцца ў пункты Q і N адпаведна, то пряма QC праектуецца ў прамую QN . Улічым таксама, што пряма QN належыць плошасці, паралельнай прамой AB . Таму шуканая праекцыя адрэзка XY ёсць перпендикуляр да прамой QN , праведзены з пункта M .

Даўжыню d гэтага перпендыкуляра знойдзем, выкарыстаўшы плошчу раўнабедранага трохвугольніка QMN з асновай, роўнай a , і бакавымі старонамі, роўнымі $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Атрымаем $\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot d$, адкуль $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Адказ: $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.



1. Які адрэзак называецца перпендыкулярам да плоскасці? Які пункт называецца асновай перпендыкуляра?
2. Які адрэзак называецца нахіленай да плоскасці? Які пункт называецца асновай нахіленай?
3. Сфармулюйце сцверджанне пра параўнанне даўжынь перпендыкуляра і нахіленай да плоскасці, праведзеных з аднаго пункта.
4. Што называецца адлегласцю ад пункта да плоскасці?
5. Сфармулюйце сцверджанне пра адлегласць ад любога пункта адной з паралельных плоскасцей да другой плоскасці.
6. Што называецца адлегласцю паміж паралельнымі плоскасцямі?
7. Сфармулюйце сцверджанне пра адлегласць да плоскасці ад любога пункта прамой, паралельнай гэтай плоскасці.
8. Што называецца адлегласцю паміж прамой і паралельнай ёй плоскасцю?
9. Сфармулюйце сцверджанне пра агульны перпендыкуляр дзвюх скрыжаваных прамых.
10. Што называецца адлегласцю паміж скрыжаванымі прамымі?
11. Патлумачце, у чым адрозненне:
 - а) перпендыкуляра да плоскасці і прамой, перпендыкулярнай плоскасці;
 - б) нахіленай да плоскасці і прамой, што перасякае плоскасць.
12. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 256). Назавіце праекцыю прамой:
 - а) PQ на плоскасць SS_1R ;
 - б) PQ на плоскасць QQ_1R_1 ;
 - в) PQ_1 на плоскасць PQR .
13. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 256). Назавіце адрэзак, даўжыня якога выражае адлегласць паміж пунктам P і прамой:
 - а) RS ; в) RR_1 ;
 - б) P_1S_1 ; г) Q_1R_1 .



Рыс. 256



Задача 1. Punkt M адлеглы на 40 см ад кожнай вяршыні правільнага трохвугольніка ABC са стараной 60 см. Знайдзіце адлегласць ад пункта M да плоскасці ABC .

Рашэнне. $MD \perp (ABC)$ і ABC — правільны трохвугольнік, таму D — цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC , і AD — яе радыус (рыс. 257).

$$AD = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

$MD \perp (ABC)$, таму $\triangle ADM$ — прамавугольны.

Тады

$$MD = \sqrt{AM^2 - AD^2} = \sqrt{40^2 - (20\sqrt{3})^2} = 20 \text{ (см)}.$$

Адказ: 20 см.

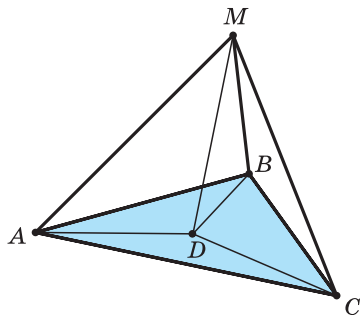


Рис. 257

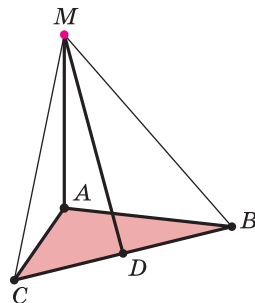


Рис. 258

Задача 2. З вяршыні A раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай BC узведзены перпендыкуляр AM , і пункт M злучаны з сярэдзінай D гэтай асновы (рыс. 258). Дакажыце, што прамыя MD і BC перпендыкулярныя.

Рашэнне. AM — перпендыкуляр да плоскасці ABC , таму AB і AC — праекцыі нахіленых MB і MC на (ABC) .

ABC — раўнабедраны трохвугольнік з асновай BC , таму $AB = AC$.

AB і AC — праекцыі нахіленых MB і MC на (ABC) і $AB = AC$, таму $MB = MC$.

$MB = MC$ і D — сярэдзіна BC , таму $MD \perp BC$.



- 248.** З пункта A да плоскасці α праведзены чатыры роўныя нахіленыя AX , AY , AZ , AT . Ці будуць пункты X , Y , Z , T належаць адной акружнасці, цэнтрам якой з'яўляецца праекцыя O пункта A на плоскасць α ?

249. З аднаго пункта праведзены да плоскасці перпендыкуляр і нахіленая, вугал паміж якімі роўны β . Знайдзіце:
- нахіленую і яе праекцыю на гэту плоскасць, калі перпендыкуляр роўны d ;
 - перпендыкуляр і праекцыю нахіленай, улічыўшы, што нахіленая роўная m .

250. Пункт K належыць прамой p , якая праходзіць праз вяршыню A прамавугольнага $ABCD$ і перпендыкулярная да яго плоскасці. Улічыўшы, што $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см, знайдзіце адлегласць:



- ад пункта K да плоскасці прамавугольнага $ABCD$;
- паміж прамымі AK і CD .

251. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя даўжынямі 2 м кожная. Знайдзіце адлегласць ад пункта да плоскасці, улічыўшы, што нахіленыя ўтвараюць вугал у 60° , а іх праекцыі перпендыкулярныя.

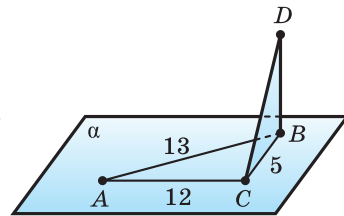
252. Даўжыня перпендыкуляра PQ з пункта P да плоскасці роўная 1, а даўжыні нахіленых PA і PB да гэтай самай плоскасці роўныя 2. Пункт C — сярэдзіна адрэзка AB . Знайдзіце QC , улічыўшы, што:
- $\angle APB = 90^\circ$;
 - $\angle APB = \beta$.

253. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя даўжынямі 10 см і 17 см, праекцыі якіх адрозніваюцца на 9 см. Знайдзіце гэтыя праекцыі.

254. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя. Знайдзіце даўжыні нахіленых, улічыўшы, што:

- адна з іх на 14 см большая за другую, а праекцыі нахіленых роўныя 16 см і 40 см;
- нахіленыя адносяцца як 1 : 2, а праекцыі нахіленых роўныя 10 см і 70 см.

255. З вяршыні B тупога вугла паралелаграма $ABCD$ да яго плоскасці ўзведзены перпендыкуляр BH . Знайдзіце стораны паралелаграма, улічыўшы, што $AH = 5$ см, $HD = HC = 8,5$ см, $AC = 1,5\sqrt{33}$ см.



Рыс. 259

256. З вяршыні B квадрата $ABCD$ да яго плоскасці ўзведзены перпендыкуляр QB . Знайдзіце плошчу трохвугольніка QAD , улічыўшы, што $QB = 24$ см, $AB = 18$ см.

- 257*. Стораны AB , AC , BC трохвугольніка ABC адпаведна роўныя 13, 12 і 5, а адрэзак BD перпендыкулярны плоскасці гэтага трохвугольніка (рыс. 259). Дакажыце, што прамыя CD і AC перпендыкулярныя.



- 258.** Їсть прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (рис. 260). Назавіце адрэзкі, даўжыні якіх выражаюць адлегласць паміж паралельнымі плоскасцямі:
 а) $PQRS$ і $P_1Q_1R_1S_1$; в) PP_1S_1S і QQ_1R_1R .
 б) PP_1Q_1Q і SS_1R_1R ;
- 259.** Їсть прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рис. 260). Назавіце адрэзкі, даўжыні якіх выражаюць адлегласць паміж паралельнымі прамой і плоскасцю:
 а) PQ і $P_1Q_1R_1S_1$; в) PR і $P_1Q_1R_1S_1$.
 б) PQ_1 і SS_1R_1R ;
- 260*.** Їсть прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рис. 260). Назавіце адрэзкі, даўжыні якіх выражаюць адлегласць паміж скрываваемымі прамымі:
 а) PQ і SS_1 ; б) PQ_1 і SS_1 ; в) PR і P_1S_1 .
- 261*.** У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a . Знайдзіце адлегласці паміж прамой AB (рис. 261) і прамой:
 а) B_1C_1 ; б) B_1D_1 ; в) A_1D_1 ; г) C_1D_1 ; д) F_1E_1 ; е) D_1F_1 .
- 262.** Канцы адрэзка даўжынёй 100 см належаць паралельным плоскасцям, адлеглым на 80 см. Знайдзіце праекцыі адрэзка на кожную плоскасць.
- 263.** Їсть дзве паралельныя плоскасці. З двух пунктаў адной з іх праведзены нахіленыя да другой плоскасці даўжынямі 37 см і 125 см, прычым праекцыя першай нахіленай на адну з плоскасцей роўная 12 см. Знайдзіце праекцыю другой нахіленай.
- 264.** Адрэзак AD даўжынёй 12 см перпендыкулярны плоскасці раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай BC і бакавой старонай, роўнымі 6 см і 5 см адпаведна. Вызначце, на якіх адлегласцях ад прамой BC знаходзяцца канцы адрэзка AD .
- 265*.** У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a . Знайдзіце адлегласці паміж прамой BC_1 (рис. 262) і прамой:
 а) A_1D_1 ; б) F_1E_1 ; в) A_1F_1 ; г) A_1D ; д) F_1E ; е) A_1F .

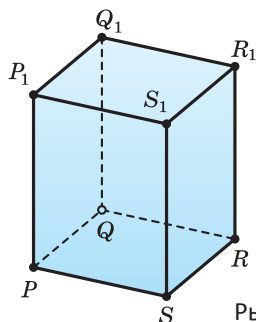


Рис. 260

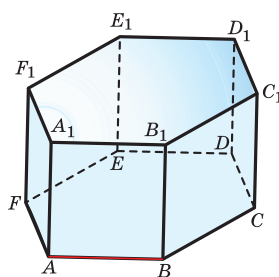


Рис. 261

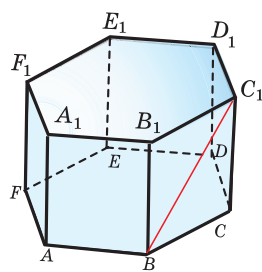
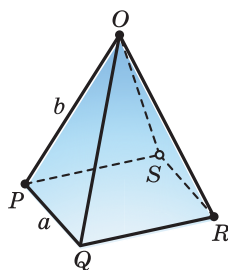


Рис. 262

275*. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты роўныя a . Знайдзіце адлегласць паміж кантамі, якія не належаць адной грані.



276*. У чатырохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a , а ўсе бакавыя канты — b (рыс. 265). Знайдзіце адлегласць паміж бакавым кантам і кантам асновы, які не ляжыць з ім у адной плоскасці.



Рыс. 265

277*. Стороны AB , AC , BC трохвугольніка ABC адпаведна роўныя 17, 8 і 15, а адрэзак BD перпендыкулярны плоскасці гэтага трохвугольніка. Знайдзіце адлегласць ад канцоў BD да меншай стараны трохвугольніка, улічыўшы, што $BD = 36$.

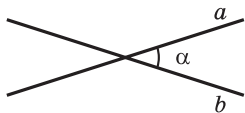


278*. Пункт M ляжыць на прамой, якая праходзіць праз вяршыню B ромба $ABCD$ і перпендыкулярная яго плоскасці. Знайдзіце адлегласці ад пункта M да прамых, якія змяшчаюць стораны ромба, улічыўшы, што $AB = 25$ см, $\angle BAD = 60^\circ$, $BM = 12,5$ см.

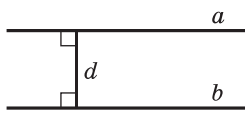


§ 9. Вугал паміж прамой і плоскасцю

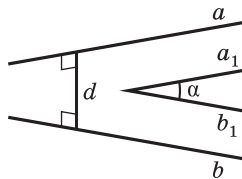
А) З дапамогай лікаў, што выражаюць адлегласць паміж двюма прамымі і велічыню вугла паміж імі, можна апісаць узаемнае размяшчэнне гэтых прамых у прасторы. Калі прамыя a і b перасякаюцца, то іх узаемнае размяшчэнне характарызуе вугал α паміж імі, адлегласць паміж такімі прамымі лічыцца роўнай нулю (рыс. 266). Калі прамыя a і b паралельныя, то іх узаемнае размяшчэнне характарызуе адлегласць d паміж імі, вугал паміж такімі прамымі роўны нулю (рыс. 267). Калі прамыя a і b скрыжаваныя, то іх узаемнае размяшчэнне характарызуе вугал α і адлегласць d паміж імі (рыс. 268).



Рыс. 266



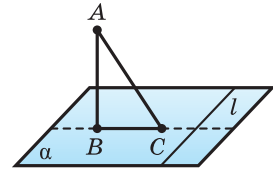
Рыс. 267



Рыс. 268

Тэарэма 9. Калі прамая плоскасці перпендыкулярная праекцыі нахіленай на гэту плоскасць, то яна перпендыкулярная і самой нахіленай, а калі прамая плоскасці перпендыкулярная нахіленай да плоскасці, то яна перпендыкулярная і праекцыі гэтай нахіленай.

Доказ. Няхай адрэзкі AB і AC — адпаведна перпендыкуляр і нахіленая да плоскасці α , тады адрэзак BC — праекцыя нахіленай AC на гэту плоскасць (рыс. 269).



Рыс. 269

Няхай прамая l плоскасці α перпендыкулярная праекцыі BC . Дакажам, што прамая l перпендыкулярная да самой нахіленай AC .

Прамая l перпендыкулярная да перасякальных прамых BC і AB плоскасці ABC — да першай прамой па ўмове, а да другой з-за таго, што яна ляжыць у плоскасці α , да якой перпендыкулярная прамая AB . Таму прамая l перпендыкулярная і да прамой BC плоскасці ABC .

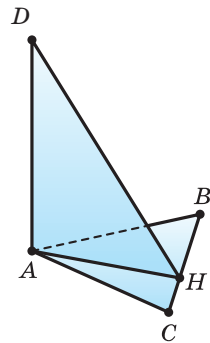
Няхай прамая l плоскасці α перпендыкулярная нахіленай AC . Дакажам, што прамая l перпендыкулярная да праекцыі BC гэтай нахіленай.

Прамая l перпендыкулярная да перасякальных прамых AC і AB плоскасці ABC . Таму яна перпендыкулярная і да прамой AC плоскасці ABC .

Тэарэма 9 называецца *тэарэмай пра тры перпендыкуляры* з-за таго, што ў ёй гаворыцца пра дачыненне перпендыкулярнасці паміж трыма прамымі. Прывядзём прыклады выкарыстання гэтай тэарэмы.

Прыклад 1. З вяршыні A да плоскасці трохвугольніка ABC , стораны якога AB , BC , CA адпаведна роўныя 13, 20, 11, узведзены перпендыкуляр AD даўжынёй 36 (рыс. 270). Знойдзем адлегласць ад пункта D да прамой BC .

Рашэнне. Шуканая адлегласць ёсць даўжыня перпендыкуляра, апушчанага з пункта D на прамую BC . Правядзенне гэтага перпендыкуляра патрабуе знайсці яго аснову на прамой BC . Для гэтага ў плоскасці трохвугольніка ABC пабудуем вышыню AH гэтага трохвугольніка. Паколькі прамая BC перпендыкулярная вышыні AH , якая з'яўляецца праекцыяй нахіленай DH , то па тэарэме пра тры перпендыкуляры прамая BC перпендыкулярная нахіленай DH , г. зн. адрэзак DH выражае шуканую адлегласць.



Рыс. 270

Знойдзем спачатку вышыню AH трохвугольніка ABC . Па формуле Герона вызначым плошчу S гэтага трохвугольніка, што дазволіць знайсці і яго вышыню AH :

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(20 + 11 + 13) = 22;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{22(22-20)(22-11)(22-13)} = 66;$$

$$AH = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 66}{20} = 6,6.$$

Трохвугольник DAH — прямокутний з прямим кутом A , за теоремою Піфагора знайдемо DH : $DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \sqrt{36^2 + 6,6^2} = 36,6$.

А д к а з: 36,6.

Приклад 2. Докажем, что если даны точка пространства равноудаленная от сторон многоугольника, то эта точка многоугольника можно окружностью, центр которой совпадает с основой перпендикуляра, опущенного с данной точки на плоскость многоугольника.

До к а з. Пусть точка S равноудаленная от сторон $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ многоугольника $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ и SO — перпендикуляр из точки S на плоскость этого многоугольника. Тогда перпендикуляры $SK_1, SK_2, \dots, SK_{n-1}, SK_n$, опущенные из точки S на стороны многоугольника, равны (рис. 271).

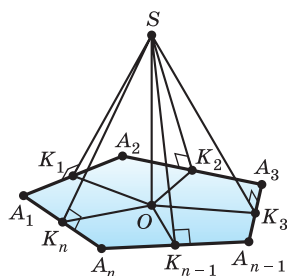


Рис. 271

Возьмем точку O с точками $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}, K_n$. Поскольку отрезки $OK_1, OK_2, \dots, OK_{n-1}, OK_n$ — проекции отрезка $SK_1, SK_2, \dots, SK_{n-1}, SK_n$ на плоскость многоугольника, стороны которого $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ равноудалены перпендикулярными наклонными $SK_1, SK_2, \dots, SK_{n-1}, SK_n$, то эти стороны и равноудалены отрезкам $OK_1, OK_2, \dots, OK_{n-1}, OK_n$ перпендикулярными.

Триangles $SOK_1, SOK_2, \dots, SOK_{n-1}, SOK_n$ — прямоугольные, и все они имеют общий катет SO и равные гипотенузы. Поэтому эти триangles равны, а значит, равны и отрезки $OK_1, OK_2, \dots, OK_{n-1}, OK_n$, что означает равноудаленность точки O от сторон многоугольника. Значит, эту точку многоугольника можно окружить центром O .

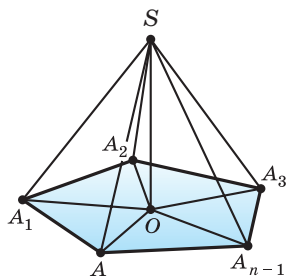


Рис. 272



Приклад 3*. Если даны точка пространства равноудаленная от вершин многоугольника, то эта точка многоугольника можно описать окружностью, центр которой совпадает с основой перпендикуляра, опущенного с данной точки на плоскость многоугольника.

Выкарыстаўшы рысунак 272, правядзіце доказ гэтага сцверджання самастойна.

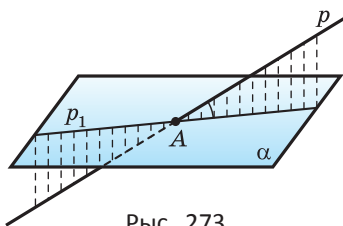


Рис. 273

В) Теперь увидим, что угол между прямой и плоскостью. Пусть есть плоскость α и прямая p , которая ее пересекает и не перпендикулярна α (рис. 273). Основы перпендикуляров, опущенных

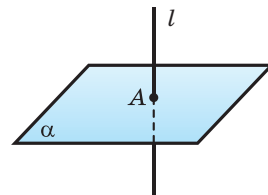
з пунктаў прамой p на плоскасць α , утвараюць прамую p_1 . Гэта прамая называецца *праекцыяй прамой p на плоскасць α* .

Вуглом паміж прамой і плоскасцю, што перасякае гэту прамую і не перпендыкулярная ёй, называецца вугал паміж прамой і яе праекцыяй на гэту плоскасць.



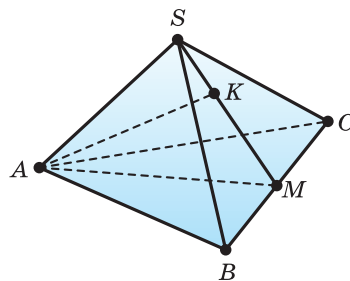
Вугал паміж прамой і плоскасцю — найменшы з вуглоў, якія ўтварае гэта прамая з усімі прамымі плоскасці. Дакажыце сцверджанне самастойна.

Калі прамая l перпендыкулярная плоскасці α , то яе праекцыяй на гэту плоскасць з'яўляецца пункт A перасячэння прамой з плоскасцю (рыс. 274). У гэтым выпадку прамая l утварае з усімі прамымі плоскасці вуглы, роўныя 90° . Гэты вугал і прымаецца ў якасці вугла паміж прамой і перпендыкулярнай ёй плоскасцю.



Рыс. 274

Калі прамая l паралельная плоскасці α , то яе праекцыяй на плоскасць з'яўляецца прамая l_1 , паралельная l . Вугал паміж паралельнымі прамымі лічыцца роўным 0° . Таму вугал паміж паралельнымі прамой і плоскасцю прымаецца роўным 0° .



Рыс. 275

Прыклад 4. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ канты асновы ABC роўныя 6, а бакавыя канты — 5. Знайдзем вугал паміж медыянай AM асновы і плоскасцю SBC .

Рашэнне. Няхай AK — перпендыкуляр, апущаны з пункта A на плоскасць SBC . Паколькі нахіленая AM перпендыкулярная прамой BC , то і яе праекцыя KM перпендыкулярная прамой BC . Значыць, пункт K знаходзіцца на пасярэднім перпендыкуляры да адрэзка BC (рыс. 275).

Шуканы вугал паміж медыянай AM асновы і плоскасцю SBC ёсць вугал AMK . Яго можна знайсці па тэарэме косінусаў, калі ведаць стораны трохвугольніка SAM . Знаходзім: $AM = 3\sqrt{3}$, $SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = 4$, тады

$$\cos SMA = \frac{SM^2 + AM^2 - SA^2}{2SM \cdot AM} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Значыць, $\angle SMA = \arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Адказ: $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$.



При визначенні кута між скрещуваними прямими буває корисною наступна *теорема про три косинуси*.



Кут α між прямою l і площиною λ , кут β між іншою прямою m тією ж площиною і проекцією на неї прямою l і кут γ між прямими l і m зв'язані рівністю $\cos \alpha \cos \beta = \cos \gamma$.

Доказ. Нехай пункт A належить прямій l , B — пункт перетинання прямою l з площиною λ , пряма m лежить у площині λ і проходить через пункт B , C — основа перпендикуляра, опущеного з пункту A на пряму m , O — проекція пункту A на площину λ (рис. 276).

Нехай $AB = a$ і $\angle ABO = \alpha$, $\angle OBC = \beta$, $\angle ABC = \gamma$. Паколькі OC — проекція AC і $AC \perp m$, то $OC \perp m$. Тоді з прямокутних трикутників AOB , OCB і ACB маємо:

$$\begin{aligned} BO &= a \cos \alpha, \\ BC &= BO \cos \beta = a \cos \alpha \cos \beta \text{ і} \\ \cos \gamma &= BC : AB = \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

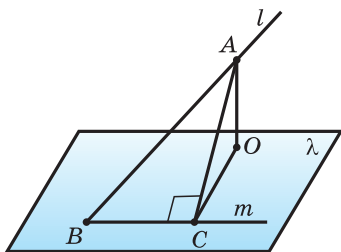


Рис. 276

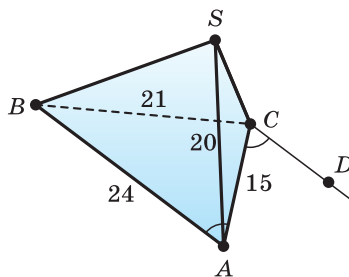


Рис. 277

Приклад 5. У трикутній піраміді $SABC$ кат SA перпендикулярний площині ABC і рівний 20. Знайдемо кут між прямими SC і AB , улічуючи, що $AB = 24$, $BC = 21$ і $AC = 15$.

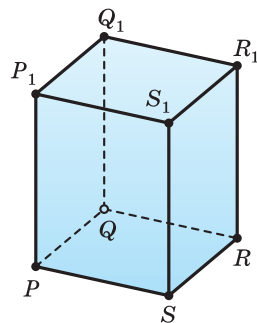
Розв'язання. Використаємо теорему про три косинуси, улічуючи, що кут γ між прямими SC і AB рівний куту між прямою SC і прямою CD , яка проходить через пункт C паралельно AB (рис. 277), і таму $\cos \gamma = \cos \angle SCA \cos \angle ACD = \cos \angle SCA \cos \angle BAC$.

Паколькі $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 25$ і $\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{1}{2}$, то $\cos \angle SCA = \frac{3}{5}$ і $\cos \gamma = 0,3$. Значить, $\gamma = \arccos 0,3$.

Адказ: $\arccos 0,3$.



1. Сфармулюйце тэарэму пра тры перпендыкуляры.
2. Якую ўласцівасць мае многавугольнік, усе стораны якога роўнаадлеглыя ад пэўнага пункта прасторы?
3. Якую ўласцівасць мае многавугольнік, усе вяршыні якога роўнаадлеглыя ад пэўнага пункта прасторы?
4. Што называецца праекцыяй прамой на плоскасць?
5. Што называецца вуглом паміж прамой і плоскасцю?
6. Сувязь паміж якімі вугламі выражае тэарэма пра тры косінусы?
7. Вуглы BAC і ACB трохвугольніка ABC адпаведна роўныя 41° і 49° , а адрэзак AD перпендыкулярны плоскасці гэтага трохвугольніка. Ці праўдзіцца сцверджанне пра тое, што прамыя BC і BD перпендыкулярныя?
8. Пункт X належыць прамой, якая праходзіць праз цэнтр O правільнага трохвугольніка ABC перпендыкулярна яго плоскасці. Ці праўдзіцца сцверджанні пра тое, што:
 - а) адлегласці ад пункта X да вяршынь трохвугольніка роўныя;
 - б) адлегласці ад пункта X да старон трохвугольніка роўныя;
 - в) $\angle AXO = \angle BXO = \angle CXO$;
 - г) $\angle XAO = \angle XBO = \angle XCO$?
9. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (рыс. 278). Назавіце вугал паміж прамой:
 - а) PQ і плоскасцю SS_1R_1 ;
 - б) PR_1 і плоскасцю PQ_1Q ;
 - в) PQ і плоскасцю QQ_1R_1 ;
 - г) PR_1 і плоскасцю QRS ;
 - д) PQ_1 і плоскасцю PQR ;
 - е) PR_1 і плоскасцю QRR_1 .



Рыс. 278



Задача 1. Асновай трохвугольнай піраміды $DFGH$ з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік FHG з гіпатэнузай FG і вуглом HFG у 30° (рыс. 279). Знайдзіце вышыню DK грані FDG , праведзеную з вяршыні D , улічыўшы, што бакавы кант DH перпендыкулярны плоскасці асновы і роўны 4 см, а катэт FH складае 6 см.

Рашэнне. $DH \perp (FGH)$, таму KH — праекцыя нахіленай DK на (FGH) .

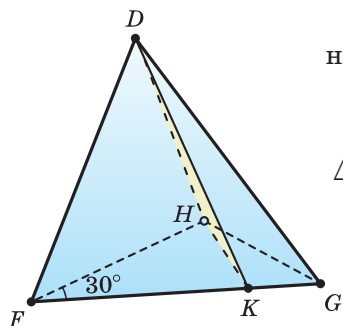


Рис. 279

DK — висота грані FDG , KH — проекція нахиленої DK на (FGH) , тому $KH \perp FG$.

$KH \perp FG$, $FH = 6$ см і $\angle HFK = 30^\circ$, тому

$\triangle FHK$ прямокутний, $KH = \frac{1}{2} FH = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (см).

$\triangle DHK$ — прямокутний, тому

$$DK = \sqrt{DH^2 + KH^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ (см)}.$$

Адказ: 5 см.

Задача 2. Докажіть, що калі промінь KA не лягає у площині неразгорнутого кута LKM і гострі куты AKL і AKM рівні, то проекція променя KA на площину LKM з'являється бісектрисою кута LKM (рис. 280).

Решення. Нехай $AH \perp (LKM)$, $AQ \perp KM$, $AP \perp KL$ і $\angle AKM = \angle AKL$.

$\triangle AQB \cong \triangle APK$ (за гіпотенузою і гострим кутом), тому $AQ = AP$.

$HQ \perp KM$ (HQ — проекція AQ на (LKM) і $AQ \perp KM$).

$HP \perp KL$ (HP — проекція AP на (LKM) і $AP \perp KL$).

$HQ = HP$ (проекції рівних нахилених).

KH — бісектриса кута LKM (точка H рівноадресна до сторін кута LKM).

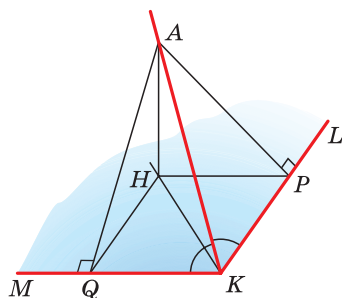


Рис. 280



279. Покажіть взаємне розширення прямих a і b на рисунку:

а) 281, улічуйте, що $ABCD$ — квадрат і $BF \perp ABC$;

б) 282, улічуйте, що $ABCD$ — квадрат і $BG \perp ABC$;

в) 283, улічуйте, що $ABCD$ — ромб і $AE \perp ABC$;

г) 284, улічуйте, що $ABCD$ — квадрат і $BK \perp ABC$.

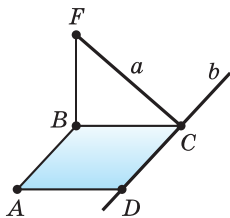


Рис. 281

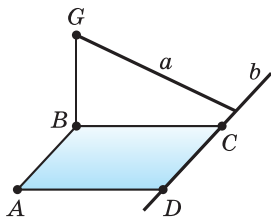


Рис. 282

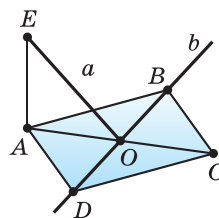


Рис. 283

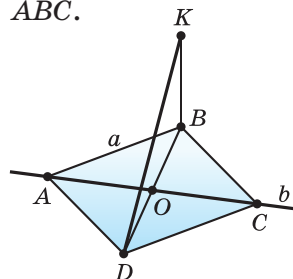
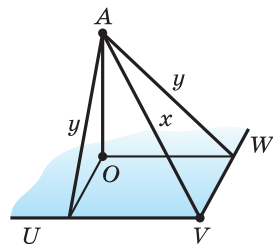


Рис. 284

- 280.** Пункт F ляжыць на прамой, якая праходзіць праз вяршыню B квадрата $ABCD$ перпендыкулярна яго плоскасці. Улічыўшы, што $BF = 8$ дм, $AB = 15$ дм, знайдзіце адлегласць ад пункта F да прамых, якім належаць:
- стораны квадрата;
 - дыяганалі квадрата.
- 281.** Улічыўшы, што пункт K ляжыць на прамой, якая праходзіць праз цэнтр O сіметрыі ромба $ABCD$ перпендыкулярна да яго плоскасці:
- дакажыце роўнасць адлегласцей ад пункта K да ўсіх прамых, якім належаць стораны ромба;
 - знайдзіце гэту адлегласць, улічыўшы, што $OK = 45$ дм, $AC = 60$ дм, $BD = 80$ дм;
-  *в) знайдзіце гэту адлегласць, улічыўшы, што $AC = 2a$, $BD = 2b$, $KO = h$.
- 282.** У раўнабедраным трохвугольніку XYZ з асновай XY бакавая старана роўная 20, а вугал пры аснове складае 30° . З яго вяршыні Y да плоскасці XYZ узведзены перпендыкуляр QY . Улічыўшы, што $QY = 10$, знайдзіце адлегласці:
- ад пункта Q да прамой XZ ;
 - ад пункта Y да плоскасці XQZ .
- 283.** Ёсць прамавугольны трохвугольнік XYZ з гіпатэнузай YZ і катэтам XY , адпаведна роўнымі 13 см і 12 см. Да плоскасці трохвугольніка з цэнтра Q умежанага ў яго круга ўзведзены перпендыкуляр QG даўжынёй 1,5 см. Знайдзіце адлегласці пункта G ад старон трохвугольніка і ад яго вяршынь.
- 284.** Асновай чатырохвугольнай піраміды $QABCD$ з'яўляецца ромб $ABCD$ з вуглом ABC і стараной AB , адпаведна роўнымі 60° і a . Яе бакавы кант AQ перпендыкулярны плоскасці асновы. Знайдзіце гэты кант і адлегласці ад пункта A да плоскасці QDC , улічыўшы, што плошча грані QDC роўная a^2 .
- 285.** Дыяганалі паралелаграма $ABCD$ перасякаюцца ў пункце Q , прамая HQ перпендыкулярная плоскасці гэтага паралелаграма. Знайдзіце вышыні паралелаграма, улічыўшы, што яго стораны роўныя 20 см і 50 см, а адлегласці ад пункта H да старон паралелаграма роўныя 17 см і 25 см.
- 286.** Пункт A , які ляжыць па-за плоскасцю прамога вугла UVW , адлеглы ад яго вяршыні V на x , а ад кожнай са старон — на y (рыс. 285). Знайдзіце адлегласць AO пункта A ад плоскасці прамога вугла.
- 287.** Вяршыня піраміды, у аснове якой ляжыць прамавугольная трапецыя з перыметрам 32,



Рыс. 285

знаходзіцца на адлегласці $\sqrt{17}$ ад кантаў асновы. Знайдзіце поўную паверхню піраміды, улічыўшы, што яе найбольшы і найменшы бакавыя канты роўныя $7\sqrt{2}$ і $3\sqrt{2}$.

- 288*.** З вяршыні M трохвугольніка MNK па-за яго плоскасцю праведзена прмая ML , якая ўтварае са старанамі MN і MK роўныя вострыя вуглы. Вызначце, на якія часткі праекцыя прамой ML на плоскасць трохвугольніка раздзяляе старану NK , улічыўшы, што $MN = 51$ м, $MK = 34$ м і $NK = 30$ м.



- 289.** Ёсць куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайдзіце вугал паміж прамымі:

а) AC і BB_1 ; б) AB_1 і CD_1 ; в) $A_1 D$ і $C_1 A$.

- 290.** З вяршыні B прамавугольніка $ABCD$, у якога $AB = 6$ см і $AD = 6\sqrt{2}$ см, да яго плоскасці ўзведзены перпендыкуляр BQ . Знайдзіце адлегласць ад пункта Q да плоскасці прамавугольніка, улічыўшы, што вугал паміж прамой QD і плоскасцю ABC роўны 30° .

- 291.** Знайдзіце праекцыю на плоскасць нахіленай даўжынёй m , улічыўшы, што нахіленая ўтварае з плоскасцю вугал, роўны:

а) 45° ; б) 60° ; в) 30° .

- 292.** Адрэзак даўжынёй 10 см перасякае плоскасць: канцы яго знаходзяцца на адлегласці 3 см і 2 см ад плоскасці. Знайдзіце вугал паміж гэтым адрэзкам і плоскасцю.

- 293.** Дакажыце, што калі ў правільнай трохвугольнай піраміды старана асновы роўная адлегласці ад вяршыні да плоскасці асновы, то бакавыя канты нахілены да плоскасці асновы пад вугламі ў 60° .

- 294.** Вяршыня правільнай чатырохвугольнай піраміды адлеглая ад плоскасці асновы на h , а яе бакавыя канты ўтвараюць з плоскасцю асновы вуглы ў 60° . Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

- 295.** З пункта, адлеглага ад плоскасці на d , праведзены дзве нахіленыя, якія ўтвараюць паміж сабой вугал φ , а з плоскасцю — вуглы α і β . Знайдзіце адлегласць паміж іх канцамі, улічыўшы, што:

а) $\alpha = \beta = 45^\circ$, $\varphi = 60^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\varphi = 90^\circ$.

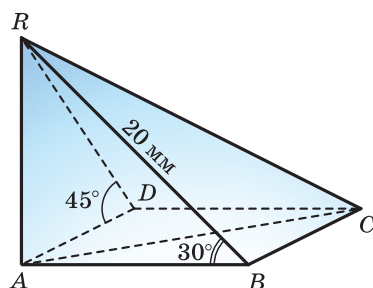
- 296.** З пункта, адлеглага ад плоскасці на d , праведзены дзве нахіленыя, якія ўтвараюць з плоскасцю вуглы α і β , а вугал паміж іх праекцыямі роўны φ . Знайдзіце адлегласць паміж іх канцамі, улічыўшы, што:

а) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\varphi = 150^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\varphi = 90^\circ$.

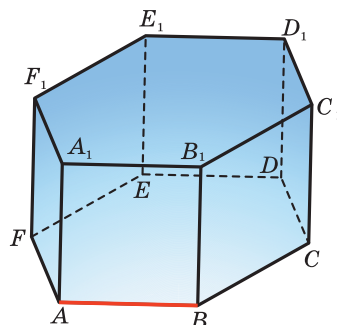
- 297.** З пункта A , адлеглага на d ад плоскасці α , праведзены нахіленыя AB і AC пад вуглом 30° да плоскасці. Іх праекцыі на плоскасць α ўтвараюць вугал у 120° . Знайдзіце даўжыню адрэзка BC .

- 298.** Пункт P адлеглы на a ад кожнай вяршыні квадрата $ABCD$ са стараной a . Знайдзіце вугал, які ўтварае з плоскасцю квадрата прмая AP .

- 299.** Бакавы кант RA чатырохвугольнай піраміды, асновай якой з'яўляецца прамавугольнік $ABCD$, перпендыкулярны плоскасці асновы (рыс. 286). Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка RAC , улічыўшы, што кант RB роўны 20 мм, бакавыя канты RB і RD нахілены да плоскасці асновы пад вугламі 30° і 45° адпаведна.



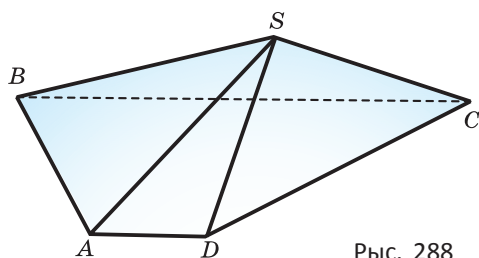
Рыс. 286



Рыс. 287

- 300.** У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ усе канты роўныя a . Знайдзіце вугал паміж прамой AB (рыс. 287) і прамой:
- а) FF_1 ; б) CD ; в) DE ; г) $A_1 B_1$; д) $B_1 E_1$; е) $A_1 C_1$.
- 301.** У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ усе канты роўныя a . Знайдзіце вугал паміж прамой BC_1 і прамой:
- а) $B_1 E$; б) $F_1 C$; в) $B_1 D$; г) AC_1 ; д) $A_1 E$; е) $F_1 D$.
- 302.** У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ бакавы кант у $\sqrt{3}$ разоў большы за кант асновы. Знайдзіце вугал паміж прамымі AB_1 і BD_1 .
- 303.** Праз сярэдзіну K канта AD трохвугольнай піраміды $ABCD$ праведзена плоскасць, паралельная кантам AB і CD . Яна перасякае кант BC у пункце M . Улічыўшы, што $AB = 8$, $CD = 6$, $KM = 5$, знайдзіце вугал паміж прамымі AB і CD .
- 304.** У трохвугольнай пірамідзе адлегласць паміж сярэдзінамі двух скрыжаваных кантаў роўная 13. Знайдзіце вугал паміж другой парай скрыжаваных кантаў, улічыўшы, што іх даўжыні 10 і 24.
- 305*.** Дакажыце, што:
- а) калі адзін катэт раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка належыць плоскасці, а другі ўтварае з ёю вугал у 45° , то гіпатэнуза ўтварае з плоскасцю вугал у 30° ;
- б) калі нахіленая a ўтварае з плоскасцю α вугал у 45° , а прамая b плоскасці — вугал у 45° з праекцыяй нахіленай, то вугал паміж прамымі a і b роўны 60° .





Рыс. 288

306*. Ёсць трохвугольная піраміда, усе канты якой роўныя адзін аднаму. Знайдзіце вугал паміж кантам піраміды і гранню, якой ён не належыць.



307*. З пункта Q да плоскасці α праведзены такія роўныя нахіленыя QA і QB , што вугал паміж імі



роўны 60° , а вугал паміж іх праекцыямі на плоскасць α складае 90° . Знайдзіце вугал, які ўтварае нахіленая QA з плоскасцю α .

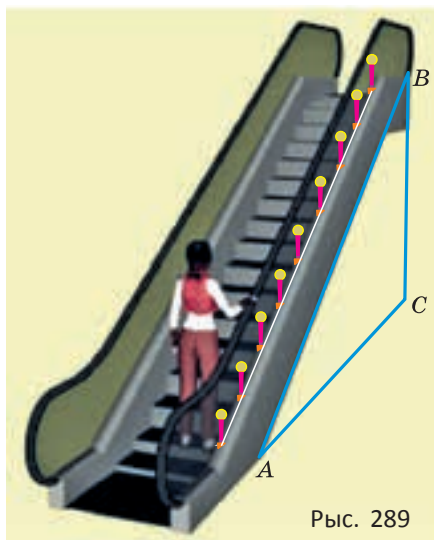
308*. У аснове піраміды $SABCD$ (рыс. 288) ляжыць трапецыя з асновамі AD і BC , $AD = 0,5 AB$, $BC = 2 AB$, $SA = \sqrt{3} AB$. Усе плоскія вуглы пры вяршыні A прамыя. Дакажыце, што сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз прамую AD і сярэдзіну M канта SC , — прамавугольнік, і знайдзіце вугал паміж прамымі AM і CD .



Прасторавае мадэляванне

Вызначым, як можна пры руху на эскалатары ацаніць глыбіню закладання станцыі метро, даўжыню эскалатара (рыс. 289).

Звернем увагу на тое, што пры спуску або пад'ёме па эскалатары мы праязджаем уздоўж шэрагу лямпаў, размешчаных на роўных адлегласцях адна ад адной. Нарматывамі задаецца асветленасць тунэлю, зыходзячы з якой устанаўліваецца і адлегласць паміж суседнімі лямпамі. Таксама ўлічым, што аптымальны вугал нахілу лініі эскалатара да плоскасці зямлі роўны 30° .



Рыс. 289

Будзем разглядаць эскалатар як нахіленую да плоскасці зямлі. Тады глыбіню закладання станцыі можна інтэрпрэтаваць як даўжыню перпендыкуляра да плоскасці зямлі.

Для адказу на пытанне дастаткова разгледзець прамавугольны трохвугольнік ABC , у якім гіпатэнуза AB выяўляе эскалатар, а катэт BC — глыбіню закладання той станцыі метро, на якую вядзе гэты эскалатар.

а) Падлічыце даўжыню эскалатара, улічыўшы, што адлегласць паміж лямпамі роўная a .

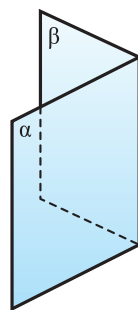
б) Складзіце формулу для знаходжання глыбіні закладання станцыі метро.

§ 10. Перпендикулярність площасцей

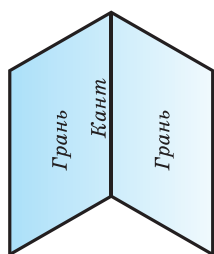
А) Два промені на площасці з агульным пачаткам раздзяляюць гэту площасць на дзве часткі, кожная з якіх называецца *вуглом*.

Аналагічна дзве паўплошасці з агульнай мяжой раздзяляюць прастору на дзве часткі (рыс. 290). Кожную з гэтых частак разам з паўплошасцямі называюць **двухгранным вуглом**. Паўплошасці, што абмяжоўваюць двухгранны вугал, называюць **гранямі** вугла, а агульную прамую — **кантам** двухграннага вугла (рыс. 291).

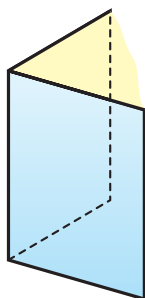
Звычайна разглядаюць меншы з двухгранных вуглоў з дадзенымі гранямі (рыс. 292). Пункты вугла, што не ляжаць на яго гранях, складаюць *унутраны абсяг* двухграннага вугла (рыс. 293).



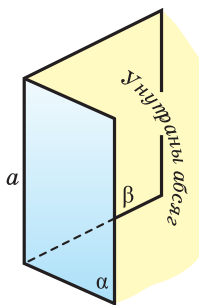
Рыс. 290



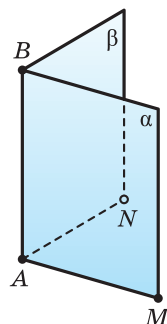
Рыс. 291



Рыс. 292



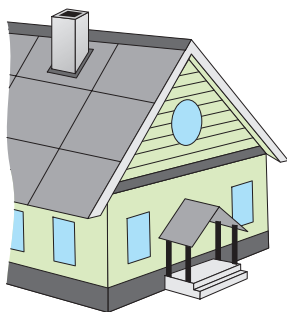
Рыс. 293



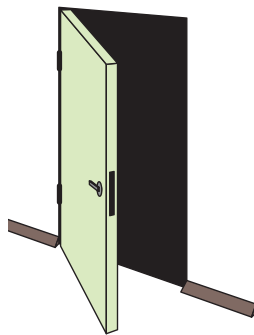
Рыс. 294

Двухгранны вугал звычайна абазначаюць па канце: $\angle a$ (гл. рыс. 293) або $\angle AB$ (рыс. 294). Пры неабходнасці можна далучыць назвы граняў або назвы пунктаў на гранях: $\angle \alpha\beta$ (гл. рыс. 293), або $\angle \alpha AB\beta$ (гл. рыс. 294), або $\angle MABN$ (гл. рыс. 294).

Мадэллю двухграннага вугла можа служыць двухсхільны дах (рыс. 295), сцяна разам з адчыненымі дзвярыма (рыс. 296), напайразгорнутая кніга (рыс. 297).



Рыс. 295

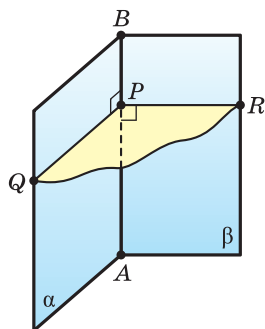


Рыс. 296

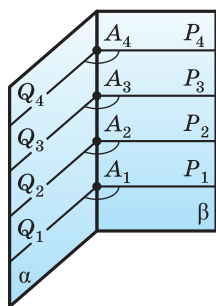


Рыс. 297

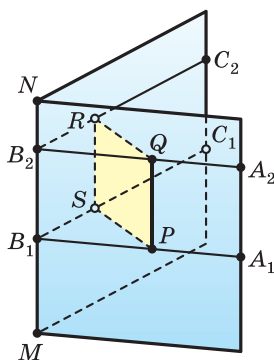
Для вимірювання двугранних вуглоў уведзіцца паняцце лінейнага вугла. Выберам на канце AB двухграннага вугла $\alpha AB\beta$ пункт P , і ў яго гранях α і β з гэтага пункта правядзём прамені PQ і PR , перпендыкулярныя канту AB (рыс. 298). Атрыманы вугал QPR , стораны якога PQ і PR



Рыс. 298



Рыс. 299



Рыс. 300

абмяжоўваюць частку плоскасці PQR , што належыць двухграннаму вуглу $\alpha AB\beta$, называюць **лінейным вуглом** двухграннага вугла. Плоскасць лінейнага вугла перпендыкулярная да канта двухграннага вугла, бо па пабудаванні прамені PQ і PR перпендыкулярныя канту AB .

Зразумела, што двухгранны вугал мае бясконца многа лінейных вуглоў (рыс. 299).

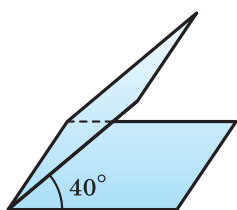
Тэарэма 10. Усе лінейныя вуглы двухграннага вугла роўныя адзін аднаму.

Доказ. Няхай $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ — лінейныя вуглы двухграннага вугла MN (рыс. 300). Дакажам, што $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$.

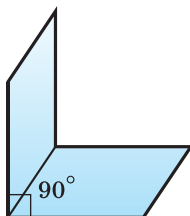
Адкладзём на сторонах вуглоў $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ роўныя адрэзкі B_1P , B_2Q , B_1S , B_2R . Тады атрымаюцца чатырохвугольнікі PQB_2B_1 і SRB_2B_1 , у якіх супрацьлеглыя стораны PB_1 і QB_2 , а таксама SB_1 і RB_2 роўныя па пабудаванні і паралельныя як перпендыкулярны да адной прамой, праведзеныя ў адпаведнай плоскасці. Таму $PQ = B_2B_1 = SR$ і $PQ \parallel B_2B_1 \parallel SR$. А гэта азначае, што чатырохвугольнік $PQRS$ з'яўляецца паралелаграмам, што дазваляе зрабіць вывад пра роўнасць адрэзкаў PS і QR . Атрымалі, што ў трохвугольнікаў PSB_1 і QRB_2 роўныя адпаведныя стораны, таму трохвугольнікі роўныя, а значыць, роўныя і іх вуглы $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$.

Вымярэнне двугранных вуглоў звязана з вымярэннем іх лінейных вуглоў. У залежнасці ад таго, якім — вострым, прамым, тупым, разгорнутым — з'яўляецца лінейны вугал двухграннага вугла, адрозніваюць *вострыя, прамыя, тупыя, разгорнутыя двугранныя вуглы*. Двугранны вугал, адлюстраваны на рысунку 301, — востры, на рысунку 302 — прамы, на рысунку 303 — тупы.

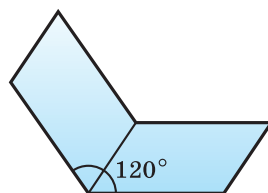
Дзве перасякальныя плоскасці раздзяляюць прастору на чатыры двугранныя вуглы з агульным кантам (рыс. 304). Калі адзін з іх роўны α ,



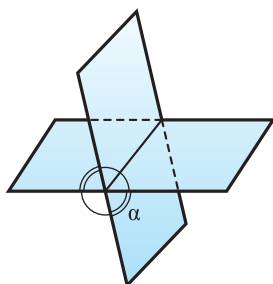
Рыс. 301



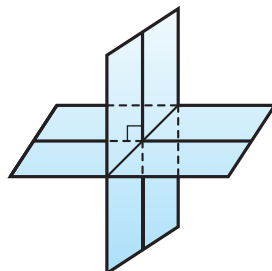
Рыс. 302



Рыс. 303



Рыс. 304



Рыс. 305

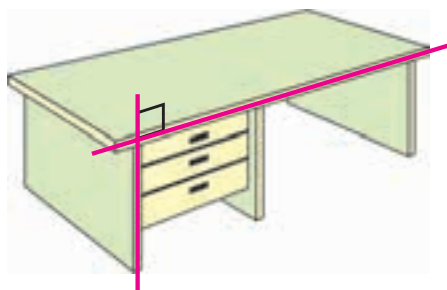
то яшчэ адзін з іх таксама роўны α , а два астатнія — $180^\circ - \alpha$. Сярод гэтых вуглоў ёсць такія, які не перавышае 90° , яго велічыню і прымаюць за велічыню вугла паміж перасякальнымі плоскасцямі.

Калі адзін з двухгранных вуглоў, што ўзнікаюць пры перасячэнні двух плоскасцей, прамы, то тры астатнія таксама прамыя (рыс. 305).

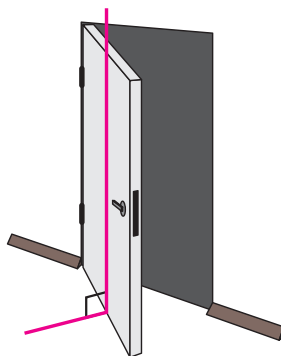
Б) Плоскасці, пры перасячэнні якіх утвараюцца прамыя двухгранныя вуглы, называюцца **перпендыкулярнымі плоскасцямі**.

Для абазначэння перпендыкулярнасці плоскасцей, як і для абазначэння перпендыкулярнасці прамых, выкарыстоўваюць знак $\perp$.

Мадэлямі перпендыкулярных плоскасцей могуць служыць сталёныца і бакавіна стала (рыс. 306), падлога пакоя і дзверы ў яго (рыс. 307).



Рыс. 306



Рыс. 307

Т е о р е м а 11. Калі одна з двох площин проходить праз пряму, перпендикулярную другой площині, то такі площини перпендикулярні.

Доказ. Няхай праз пряму a , яка перпендикулярна площині α і пересікає яе ў пункце M , проходить площина β (рис. 308). Дакажам, што $\alpha \perp \beta$.

Площини α і β пересікаюцца па пэўнай прамой MP , яка перпендикулярна прамой a , бо па ўмове прамая a і площина α перпендикулярныя.

У площині α правядзём прамую MN , перпендикулярную прамой MP . Атрыманы вугал NMQ , дзе Q — пункт прамой a , ёсць лінейны вугал двухграннага вугла $\alpha MP\beta$. Паколькі па ўмове $a \perp \alpha$, то вугал NMQ — прамы, і, значыць, площини α і β перпендикулярныя.

Тэарэма 11 выражае *прымету перпендикулярнасці площин*.

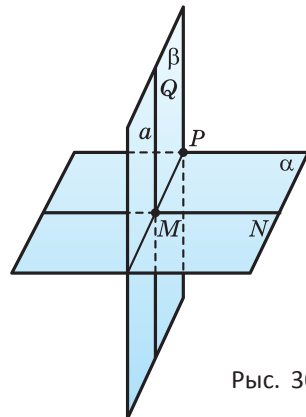


Рис. 308

Вынік. Площина, перпендикулярная лініі перасячэння двох дадзеных площин, перпендикулярна да кожнай з іх (рис. 309).

Дакажам цяпер сцверджанне, адваротнае сцверджанню тэарэмы 11.

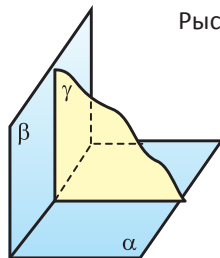


Рис. 309

Т е о р е м а 12. Калі праз пункт адной з перпендикулярных площин правесці прамую, перпендикулярную другой площині, то гэтая прамая належыць першай площині.

Доказ. Няхай дзве перпендикулярныя площини α і β перасікаюцца па прамой MN , і праз пункт K площині α праведзена прамая a , перпендикулярная площині β . Дакажам, што гэтая прамая належыць площині α .

Праз пункт K у площині α правядзём прамую b , перпендикулярную MN , і праз пункт L іх перасячэння ў площині β — прамую c , таксама перпендикулярную MN (рис. 310). Вугал паміж прамымі b і c прамы як лінейны вугал прамога двухграннага вугла. Атрымалі, што прамая b праходзіць праз пункт K і перпендикулярна площині β , бо яна перпендикулярна перасякальным прамым MN і c гэтай площині. А паколькі праз гэты пункт да дадзенай площині можна правесці толькі адну перпендикулярную прамую, то прамыя b і a супадаюць. Значыць, прамая a належыць площині α .

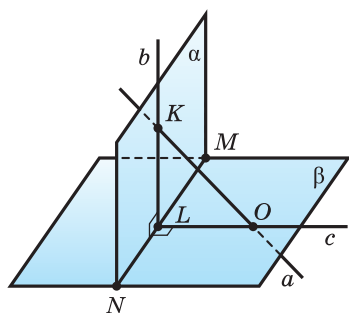


Рис. 310

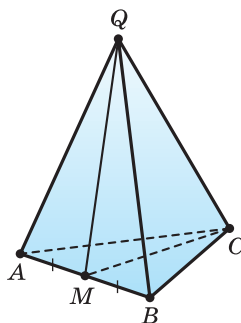


Рис. 311

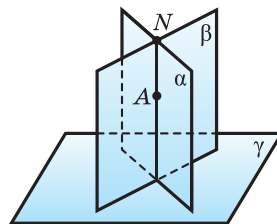


Рис. 312

Приклад 1. Точка M — середина ребра AB у основі правильної піраміди $QABC$ (рис. 311). Докажемо, що площина QCM перпендикулярна площині основи ABC .

Розв'язок. Прямая AB є основою прямокутних трикутників AQB і ACB . Тому вона перпендикулярна медіанам QM і CM цих трикутників і разом з цим площині QCM . З теорії 12 випливає, що площина ABC , яка проходить через перпендикуляр AB до площини QCM , їй перпендикулярна.

Висновок. Коли дві перпендикулярні площини перпендикулярні третій площині, то їх лінія перетину перпендикулярна цій самій площині (рис. 312).

Приклад 2. У правильній трикутній піраміді $QABC$ плоский кут AQB у вершині дорівнює α . Знайдемо величину двогранного кута при вершині.

Розв'язок. Нехай N — середина ребра AC , AK — перпендикуляр до ребра BQ , проведений з точки A (рис. 313).

З рівності трикутників ABQ і CBQ випливає, що $CK \perp BQ$. Тому кут AKC — лінійний кут двогранного кута BQ .

З прямокутних трикутників AKQ і ANQ отримуємо: $AK = AQ \sin \alpha$, $AN = AQ \sin \frac{\alpha}{2}$. З прямокутного трикутника AKN знаходимо, що

$$\sin \left(\frac{\angle AKC}{2} \right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Тому } \angle AKC = 2 \arcsin \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{А отже: } 2 \arcsin \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

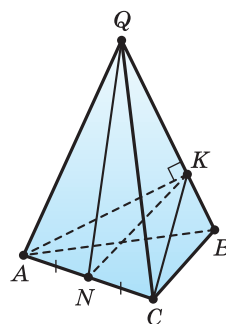
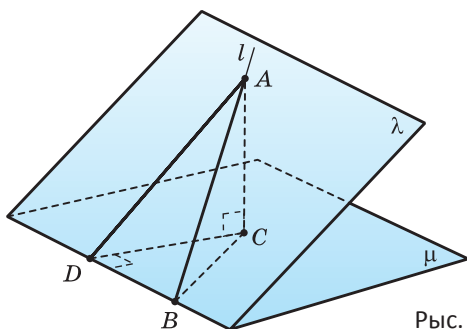


Рис. 313

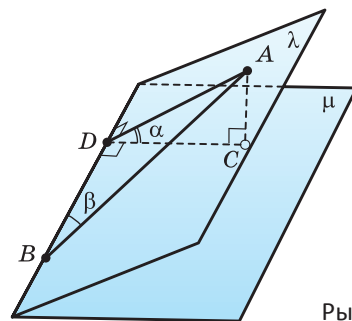


В) При вилічэннях бывае карыснай наступная *тэарэма пра тры сінусы*.

Тэарэма 13. Лінейны вугал α двухграннага вугла, вугал β паміж кантамі гэтага двухграннага вугла і прамой, што ляжыць у адной з яго граняў, і вугал γ паміж гэтай прамой і плоскасцю іншай грані звязаны роўнасцю $\sin \alpha \sin \beta = \sin \gamma$.



Рыс. 314

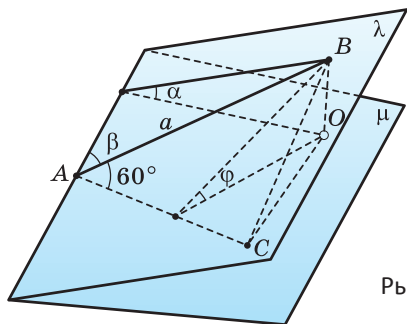


Рыс. 315

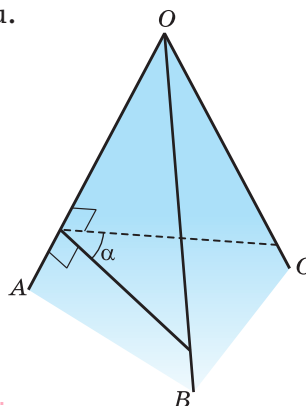
Доказ. Няхай прамая l ляжыць у плоскасці λ , пункт A належыць прамой l , B — пункт перасячэння прамой l з кантамі двухграннага вугла $\lambda\mu$, C — аснова перпендыкуляра, апущанага з пункта A на грань μ , D — аснова перпендыкуляра, апущанага з пункта A на кант вугла (рыс. 314). Няхай $AB = a$ і $\angle ADC = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, $\angle ABC = \gamma$. Паколькі DC — праекцыя AD і $AD \perp BD$, то $DC \perp BD$. Тады з прамавугольных трохвугольнікаў ADB , ACD і ACB будзем мець: $AD = a \sin \beta$, $AC = AD \sin \alpha = a \sin \beta \sin \alpha$ і $\sin \gamma = AC : AB = \sin \alpha \sin \beta$.

Вынік 1. Калі пункт A ляжыць у грані λ двухграннага вугла велічынёй α , то адлегласць ад яго да плоскасці другой грані μ вугла роўная $AB \sin \alpha \sin \beta$, дзе B — пункт на канце двухграннага вугла, а β — вугал паміж прамой AB і кантамі двухграннага вугла (рыс. 315).

Прыклад 3. Стораны AB і AC правільнага трохвугольніка ABC ляжаць адпаведна ў гранях λ і μ вострага двухграннага вугла велічынёй α . Старана AB утварае вугал β з кантамі двухграннага вугла. Знайдзем велічыню вугла паміж плоскасцю ABC і плоскасцю μ .



Рыс. 316



Рыс. 317

Р а ш є н н є. Няхай шуканы вугал роўны φ , старана трохвугольніка мае даўжыню a . Тады адлегласць BO ад пункта A да плоскасці μ можна знайсці двума спосабамі (рыс. 316): $BO = a \sin \alpha \sin \beta$ і $BO = a \sin \varphi \sin 60^\circ$.

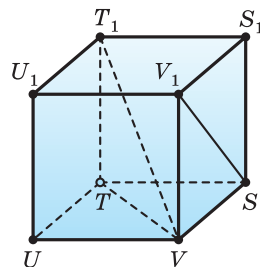
Таму
$$\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \alpha \sin \beta \text{ і } \varphi = \arcsin \left(\frac{2 \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{3}} \right).$$

А д к а з:
$$\arcsin \left(\frac{2 \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{3}} \right).$$

Вынік 2. Няхай прамені OA , OB і OC ёсць грані двухгранных вуглоў велічыней α , β і γ адпаведна. Тады $\frac{\sin \alpha}{\sin BOC} = \frac{\sin \beta}{\sin AOC} = \frac{\sin \gamma}{\sin AOB}$ (рыс. 317).



1. Што называюць вуглом? Што называюць двухгранным вуглом?
2. Што называюць гранню двухграннага вугла; кантам двухграннага вугла? Як абазначаюць двухгранны вугал?
3. Як пабудоваць лінейны вугал двухграннага вугла? Якую ўласцівасць маюць лінейныя вуглы двухграннага вугла?
4. Які двухгранны вугал называюць вострым; прамым; тупым; разгорнутым?
5. Якія плоскасці называюцца перпендыкулярнымі?
6. Сфармулюйце прымету перпендыкулярнасці плоскасцей.
7. Сфармулюйце ўласцівасць плоскасці, перпендыкулярнай да лініі перасячэння дзвюх плоскасцей.
8. Сфармулюйце ўласцівасць прамой, праведзенай праз пункт адной з перпендыкулярных плоскасцей перпендыкулярна другой плоскасці.
9. Сфармулюйце ўласцівасць лініі перасячэння дзвюх плоскасцей, якія перпендыкулярныя трэцяй.
10. Сфармулюйце тэарэму пра тры сінусы.
11. Вынік 2 называюць яшчэ тэарэмай сінусаў для трохграннага вугла. Патлумачце чаму.
12. Колькі двухгранных вуглоў мае:
 - а) трохвугольная піраміда; б) паралелепіпед?
13. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Назавіце лінейны вугал двухграннага вугла:
 - а) DD_1 ; б) $A_1 B_1$.
14. Улічыўшы, што $STUV S_1 T_1 U_1 V_1$ — куб (рыс. 318), вызначце:
 - а) ці з'яўляецца вугал TVT_1 лінейным вуглом двухграннага вугла $T_1 SVT$;
 - б) ці з'яўляецца вугал $T_1 ST$ лінейным вуглом двухграннага вугла $T_1 SVT$;
 - в) велічыню двухграннага вугла $V_1 UTS$.



Рыс. 318



Задача 1. Площині правильних трикутника KMD і чотирикутника $KMNP$ перпендикулярні (рис. 319). Знайдіть DN , улічуйте, що $KM = a$.

Решение. $(KDM) \perp (KMN)$ і $MN \perp MK$, тому за теоремою 12 $MN \perp (KDM)$.

$MN \perp MD$, тому $\triangle DMN$ — прямокутний.

$MD = a$, бо $\triangle KDM$ — правильний і $KM = a$.

$MN = a$, бо чотирикутник $KMNP$ — правильний і $KM = a$.

Тоді за теоремою Піфагора

$$DN = \sqrt{MD^2 + MN^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Відповідь: $a\sqrt{2}$.

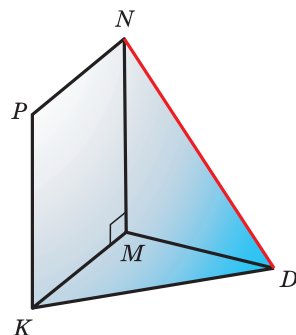


Рис. 319

Задача 2. З пункту M і N кінця двохгранного кута різного його граней узведені перпендикуляри MK і NL (рис. 320). Визначте величину двохгранного кута, улічуйте, що $MN = 48$ см, $MK = 16$ см, $NL = 10$ см і відстань між пунктами K і L рівна 50 см.

Решение. Нехай $NL \parallel MA$ і $NM \parallel LA$. Тоді $MNLA$ — паралелограм і $MA = NL = 10$ см, $AL = MN = 48$ см.

$MA \parallel NL$ і $NL \perp MN$, тому $MA \perp MN$.

$\angle KMA$ — лінійний кут двохгранного кута $KMNL$ ($MK \perp MN$ і $MA \perp MN$).

$MN \perp MK$ і $MN \perp MA$, тому $MN \perp (KMA)$.

$AL \parallel MN$ і $MN \perp (KMA)$, тому $AL \perp (KMA)$.

$AL \perp (KMA)$ і $AK \subset (KMA)$, тому $AL \perp AK$.

$AL \perp AK$, тому $\triangle KAL$ — прямокутний.

Тоді за теоремою Піфагора

$$AK = \sqrt{KL^2 - AL^2} = \sqrt{50^2 - 48^2} = 14 \text{ (см)}.$$

З трикутника MKA :

$$\cos \angle KMA = \frac{MK^2 + MA^2 - AK^2}{2MK \cdot MA} = \frac{16^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 16 \cdot 10} = \frac{1}{2}.$$

Тому $\angle KMA = 60^\circ$.

Відповідь: 60° .

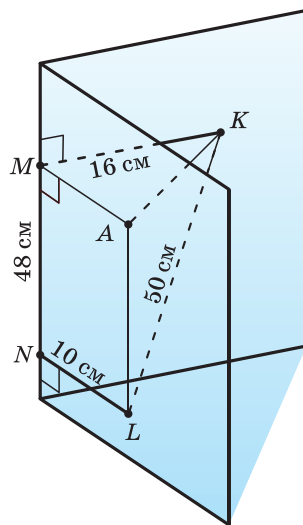


Рис. 320



309. Їсть прамы паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 321). Назавіце яго:
а) прамыя двухгранныя вуглы;
б) перпендыкулярныя грані.

310. Улічыўшы, што пункт T ёсть сярэдзіна канта QR трохвугольнай піраміды $OPQR$, у якой асновай з'яўляецца правільны трохвугольнік PQR , а бакавыя канты роўныя адзін аднаму, вызначце, ці з'яўляецца вугал:

- а) PRO лінейным вуглом двухграннага вугла $PRQO$;
б) PTO лінейным вуглом двухграннага вугла $PRQO$.

311. Ці праўдзіца сцверджанне, што калі двухгранны вугал $\alpha AB \beta$ разбіць на два двухгранныя вуглы $\alpha AB \gamma$ і $\gamma AB \beta$ (рис. 322), то лінейны вугал двухграннага вугла $\alpha AB \beta$ роўны суме лінейных вуглоў двухгранных вуглоў $\alpha AB \gamma$ і $\gamma AB \beta$?

312. З вяршыні X трохвугольніка XYZ , старана YZ якога ляжыць у плоскасці β , праведзена вышыня XA і перпендыкуляр XP да плоскасці β (рис. 323). Дакажыце, што вугал XAP — лінейны вугал двухграннага вугла $XYZP$.

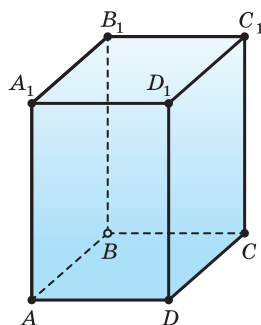


Рис. 321

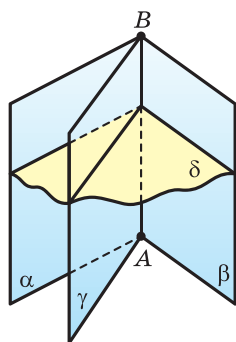


Рис. 322

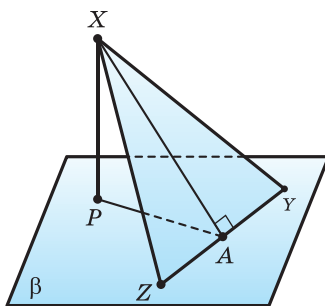


Рис. 323

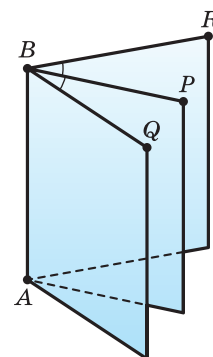


Рис. 324

313. На рисунку 324 двухгранныя вуглы $RABP$ і $PABQ$ роўныя. Дакажыце, што кожны пункт плоскасці ABP роўнаадлеглы ад плоскасцей ABR і ABQ .
314. Їсть два двухгранныя вуглы, у якіх адна грань агульная, а дзве іншыя грані разам складаюць плоскасць. Дакажыце, што сума гэтых двухгранных вуглоў роўная 180° .
315. Усе канты трохвугольнай піраміды $ABCD$ роўныя адзін аднаму, а пункт M ёсть сярэдзіна канта AC . Дакажыце, што вугал DMB з'яўляецца лінейным вуглом двухграннага вугла $BACD$.

- 316.** Два пункти адной грані двухграннага вугла адлеглы ад яго канта на 51 см і 34 см, а першы з іх адлеглы ад другой грані на 15 см. Знайдзіце адлегласць да гэтай грані ад другога пункта.
- 317.** На адной грані двухграннага вугла выбраны пункт X , адлеглы на 36 см ад канта вугла і на 24 см ад другой яго грані. На другой грані гэтага вугла выбраны пункт Y , адлеглы ад першай грані на 18 см. Знайдзіце адлегласць пункта Y ад канта вугла.
- 318.** Плошасць прамавугольнага трохвугольніка ABC нахілена да плошасці α пад вуглом у 45° (рыс. 325). Знайдзіце адлегласць вяршыні прамога вугла C ад плошасці α , улічыўшы, што $\angle ABC = 60^\circ$, $BC = a$.

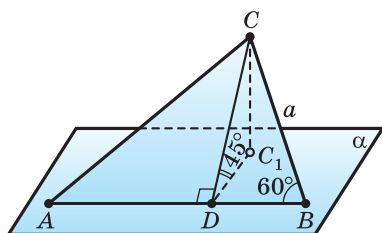


Рис. 325

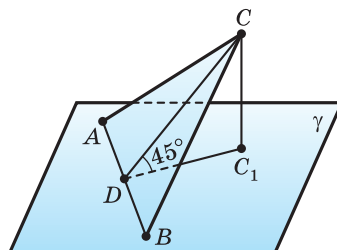


Рис. 326

- 319.** Праз гіпатэнузу AB раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка ABC пад вуглом у 45° да яго плошасці праведзена плошасць γ , адлеглая ад вяршыні прамога вугла C на l (рыс. 326). Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC .
- 320.** Большы катэт прамавугольнага трохвугольніка з вострым вуглом і гіпатэнузай, адпаведна роўнымі 30° і c , ляжыць у плошасці γ , якая з плошасцю трохвугольніка складае вугал у 60° . Знайдзіце:
а) адлегласць ад вяршыні большага вострага вугла трохвугольніка да плошасці γ ;
б) вугал паміж гіпатэнузай і плошасцю γ .
- 321.** Знайдзіце адлегласць ад вяршыні прамога вугла прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі, роўнымі 7 см і 24 см, да плошасці, якая праходзіць праз гіпатэнузу і складае з плошасцю трохвугольніка вугал у 30° .
- 322.** Асновай прамой прызмы з'яўляецца трохвугольнік MNK , у якім $MN = NK = 25$ см, $MK = 14$ см. Праз старану MK праведзена плошасць пад вуглом 30° да плошасці асновы, якая перасякае супрацьлеглы бакавы кант у пункце L . Знайдзіце:
а) адрэзак NL бакавога канта;
б) плошчу атрыманага сячэння.
- 323.** Праз старану CE трохвугольніка CDE , у якога $CD = 9$ м, $DE = 6$ м і $CE = 5$ м, праходзіць плошасць ρ , якая складае з плошасцю

трохвугольніка вугал у 45° . Знайдзіце адлегласць да плоскасці ρ ад вяршыні D .

324. Кант CD трохвугольнай піраміды $ABCD$ перпендыкулярны плоскасці ABC , $AB = BC = AC = 6$ і $BD = 3\sqrt{7}$. Знайдзіце двухгранныя вуглы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

325. Знайдзіце двухгранны вугал $ABCD$ трохвугольнай піраміды $ABCD$, улічыўшы, што вуглы DAB , DAC і ACB прамыя, $AC = CB = 5$ і $DB = 5\sqrt{5}$.

326*. Праекцыяй прамавугольніка $ABCD$ на плоскасць ω з'яўляецца квадрат ABC_1D_1 . Знайдзіце вугал паміж плоскасцю ω і плоскасцю прамавугольніка $ABCD$, улічыўшы, што $AB : BC = 1 : 2$.



327*. Паралельныя прамыя AB і CD ляжаць у розных гранях двухграннага вугла, роўнага 60° , а іх пункты A і D адлеглыя ад канта гэтага вугла адпаведна на 16 см і 13 см. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі AB і CD .



328. З пунктаў A і B канта двухграннага вугла, роўнага 120° , у розных яго гранях узведзены перпендыкуляры AC і BD да канта. Знайдзіце адрэзак CD , улічыўшы, што $AB = AC = BD = a$.

329. Бакавыя канты трохвугольнай піраміды ўзаемна перпендыкулярныя, а іх даўжыня роўная l . Знайдзіце косінус вугла, утворанага плоскасцю бакавой грані з плоскасцю асновы.

330. З пунктаў C і D канта двухграннага вугла, роўнага 120° , у розных яго гранях узведзены перпендыкуляры CK і DL . Знайдзіце даўжыню адрэзка KL , улічыўшы, што $CK = 3$ см, $DL = 5$ см, $CD = 24$ см.

331. У розных гранях двухграннага вугла з пунктаў M і N яго канта да гэтага канта ўзведзены перпендыкуляры MA і NB . Вызначце адлегласць AB , улічыўшы, што:

- а) двухгранны вугал прамы, $MN = 36$ см, $MA = 18$ см і $NB = 12$ см;
- б) двухгранны вугал роўны 120° , $MN = 12$, $MA = 8$, $NB = 4$;
- в) двухгранны вугал роўны 120° , $MN = MA = NB = x$.

332. Старана IJ трохвугольніка IJK , у якога $IJ = JK = 9$ см, $IK = 12$ см, ляжыць у плоскасці ρ , а праекцыі дзвюх іншых старон трохвугольніка на гэту плоскасць адносяцца як $1 : 2$. Вызначце велічыню двухграннага вугла, што ўтвораны плоскасцямі ρ і IJK .

333. Знайдзіце двухгранны вугал, утвораны дзвюма бакавымі гранямі чатырохвугольнай піраміды, асновай якой з'яўляецца квадрат са стараной $20\sqrt{3}$ см, а бакавыя канты роўныя 30 см кожны.

334*. Правільныя трохвугольнікі ABC і DBC размешчаны так, што вяршыня D праектуецца ў цэнтр трохвугольніка ABC . Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі гэтых трохвугольнікаў.



335*. Адрэзак EL , які злучае вяршыню E трохвугольніка CDE з вяршыняй L трохвугольніка CDL , перпендыкулярны плоскасці гэтага трохвугольніка. Дакажыце, што плошча трохвугольніка CDE роўная $S \cdot \cos \varphi$, дзе S — плошча трохвугольніка CDL , φ — вугал паміж плоскасцямі CDL і CDE .



336*. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты роўныя. Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай піраміды.



337*. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a , а ўсе бакавыя канты — b . Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай піраміды.



338*. У чатырохвугольнай пірамідзе ўсе канты роўныя. Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай піраміды.



339*. У чатырохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a , а ўсе бакавыя канты — b . Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай піраміды.



340. Ці праўдзіца сцверджанне пра тое, што праз дадзены пункт можна правесці плоскасць, перпендыкулярную дадзенай плоскасці? Колькі існуе такіх плоскасцей?

341. Ці праўдзіца сцверджанне пра тое, што плоскасць лінейнага вугла двухграннага вугла перпендыкулярная кожнай яго грані?

342. Прамая a не перпендыкулярная да плоскасці α . Дакажыце, што існуе плоскасць, якая змяшчае прамую a і перпендыкулярная плоскасці α .

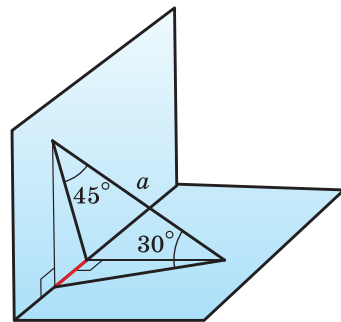
343. Агульная старана AB трохвугольнікаў ABC і ABD роўная 10 см. Плоскасці гэтых трохвугольнікаў узаемна перпендыкулярны. Знайдзіце CD , улічыўшы, што трохвугольнікі:

а) роўнастароннія;

б) прамавугольныя раўнабедраныя з гіпатэнузай AB .

344. Адрэзак даўжынёй a з канцамі на дзвюх перпендыкулярных плоскасцях утварае з адной з іх вугал у 45° , а з другой — вугал у 30° (рыс. 327). Знайдзіце частку лініі перасячэння плоскасцей, заключаную паміж перпендыкулярамі, апущанымі на яе з канцоў адрэзка.

345. Ёсць піраміда, у аснове якой ляжыць правільны шасцівугольнік са старонай 12 дм, а ўсе бакавыя канты роўныя 24 дм. Праз сярэдзіны дзвюх сумежных старон асновы праведзена плоскасць, перпендыкулярная да асновы. Знайдзіце плошчу сячэння.



Рыс. 327



Прасторавае мадэляванне

Асобным відам паралельнага праектавання, што прымяняецца ў геаметрыі для адлюстравання прасторавых фігур, з'яўляецца артаганальнае праектаванне.

Артаганальнай праекцыяй пункта на плоскасць α называецца пункт перасячэння з гэтай плоскасцю прамой, што праходзіць праз дадзены пункт перпендыкулярна плоскасці α .

Артаганальнай праекцыяй фігуры на плоскасць называецца мноства артаганальных праекцый усіх пунктаў гэтай фігуры на плоскасць.

а) Знайдзіце плошчу артаганальнай праекцыі трохвугольніка з плошчай S на плоскасць α , улічыўшы, што адна з яго старон ляжыць у плоскасці α , а вугал нахілу плоскасці трохвугольніка да плоскасці α роўны β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) (рыс. 328).

б) Рашыце папярэднюю задачу, улічыўшы, што трохвугольнік не мае з плоскасцю α агульных пунктаў і адна са старон трохвугольніка паралельная плоскасці α (рыс. 329).



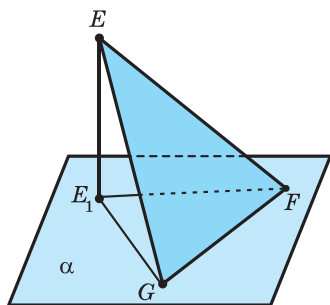
в*) Знайдзіце плошчу артаганальнай праекцыі многавугольніка з плошчай S на плоскасць α , улічыўшы, што вугал нахілу плоскасці многавугольніка да плоскасці α роўны β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$).



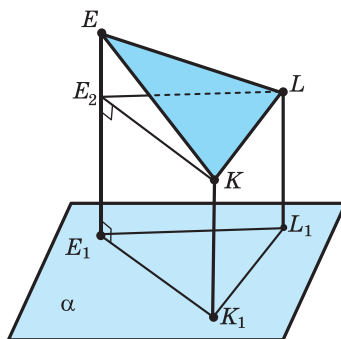
г*) Выкарыстаўшы вынікі рашэння задач а–в, дакажыце *прасторавую тэарэму Піфагора*: «Калі ўсе плоскія вуглы пры адной вяршыні тэтраэдра прамыя, то квадрат плошчы грані, супрацьлеглай гэтай вяршыні, роўны суме квадратаў плошчаў астатніх граняў» (рыс. 330).

Калі AJK — трохвугольная піраміда, $AJ \perp IJ$, $AJ \perp JK$ і $JI \perp KJ$,

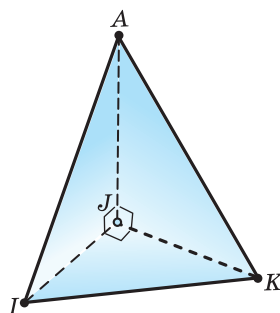
$$\text{то } S_{AIK}^2 = S_{AIJ}^2 + S_{AKJ}^2 + S_{IJK}^2.$$



Рыс. 328



Рыс. 329



Рыс. 330

Дадатковыя заданні да раздзела 3

- 346.** Ёсць трохвугольная піраміда $SABC$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. На кантах SC , SB , CB пазначаны іх сярэдзіны U , V , Y адпаведна, а на канце SA — адвольны пункт X . Вызначце:
- ці перпендыкулярныя прамыя UV і YX ;
 - вугал паміж прамымі UV і AY .
- 347.** Адрэзкі AE і CF — вышыні трохвугольніка ABC , а адрэзак DK — перпендыкуляр да плоскасці ABC . Дакажыце, што прамыя KD і AC перпендыкулярныя.
- 348.** Канты BC і AD трохвугольнай піраміды $ABCD$ перпендыкулярныя. Дакажыце, што кант AD перпендыкулярны адной з сярэдніх ліній грані ABC .
- 349.** Два роўныя кругі маюць адзіны агульны пункт A , праз які праходзяць дыяметры AB і AC гэтых кругоў, прычым гэтыя дыяметры не ляжаць на адной прамой. Вызначце, ці перпендыкулярная плоскасці ABC лінія перасячэння плоскасцей, у якіх ляжаць гэтыя кругі. Ці зменіцца вынік, калі кругі не будуць роўнымі?
- 350.** У якім выпадку праз адну з дзвюх скрыжаваных прамых можна правесці плоскасць, перпендыкулярную другой прамой?
- 351.** Пункты A , B , C , D з'яўляюцца сярэдзінамі кантаў TZ , XY , YZ , Y_1Z_1 прамавугольнага паралелепіпеда $TXYZT_1X_1Y_1Z_1$, у аснове якога ляжыць квадрат. Вызначце:
- ці перпендыкулярная прамая YA плоскасці сячэння XX_1DC ;
 - ці перпендыкулярная прамая TB плоскасці XX_1D ;
 - вугал паміж прамымі AY і XD .
- 352.** Ёсць прамавугольны трохвугольнік ABC , адзін катэт якога і прылеглы да яго востры вугал роўныя m і β . З вяршыні прамога вугла C узведзены перпендыкуляр CD , роўны n . Знайдзіце адлегласць ад пункта D да прамой AB .
- 353.** Канцы A і B адрэзкаў AA_1 і BB_1 належаць плоскасці α , а самі адрэзкі ёй перпендыкулярныя і размешчаны па адзін бок ад плоскасці. Знайдзіце вуглы чатырохвугольніка AA_1B_1B , улічыўшы, што:
- $AA_1 = BB_1$;
 - $A_1B_1 = 2 AB$;
 - $A_1B_1 : AB = 3 : 2$.
- 354.** Вымярэнні AB , BC і CC_1 прамавугольнага паралелепіпеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ роўныя a , b і c адпаведна. Знайдзіце вугал паміж прамымі:
- AC і BB_1 ;
 - A_1D і C_1A .

355. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ усе канты роўныя a . Знайдзіце вугал паміж прамой AB і прамой:
- а) $B_1 C_1$; в) $A_1 D_1$; д) $F_1 E_1$;
б) $B_1 D_1$; г) $C_1 D_1$; е) $D_1 F_1$.
356. З вяршыні A трохвугольніка ABC узведзены перпендыкуляр AM , і пункт M злучаны з сярэдзінай D стараны BC . Дакажыце, што:
- а) прамыя MD і BC перпендыкулярныя, улічыўшы, што стараны AB і AC роўныя;
б) стараны AB і AC роўныя, улічыўшы, што прамыя MD і BC перпендыкулярныя.
357. Катэт AB прамавугольнага трохвугольніка ABC ляжыць у плоскасці γ . Дакажыце, што плоскасць, якая праходзіць праз другі катэт і яго праекцыю на плоскасць γ , перпендыкулярная прамой AB .
358. Дакажыце, што вугал паміж прамой і плоскасцю ёсць найменшы з вуглоў, якія ўтварае гэта прамая з усімі прамымі плоскасці, што праходзяць праз пункт перасячэння прамой з плоскасцю.
359. Катэт AB прамавугольнага трохвугольніка ABC ляжыць у плоскасці α . Дакажыце, што плоскасць, якая праходзіць праз другі катэт і яго праекцыю на плоскасць α , перпендыкулярная прамой AB .
360. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ усе канты роўныя a . Знайдзіце адлегласці паміж прамой AB і прамой:
- а) CD ; в) $A_1 B_1$; д) FC ;
б) DE ; г) $D_1 E_1$; е) $F_1 C_1$.
361. Асновай прамавугольнага паралелепіпеда з'яўляецца прамавугольнік з вымярэннямі 5 см і 12 см, а дыяганаль паралелепіпеда роўная 13 см. Знайдзіце трэцяе вымярэнне паралелепіпеда.
362. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ усе канты роўныя a . Знайдзіце адлегласці паміж прамой AB і прамой:
- а) $B_1 C_1$; в) $A_1 D_1$; д) $F_1 E_1$;
б) $B_1 D_1$; г) $C_1 D_1$; е) $D_1 F_1$.
363. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $QABC$ плоскі вугал AQB пры вяршыні роўны 30° . Знайдзіце двухгранны вугал пры бакавым канце.
364. Плоскасці квадрата $KMNP$ і ромба $KMDF$ перпендыкулярныя. Знайдзіце FN , улічыўшы, што старана ромба і вугал KMD адпаведна роўныя a і 60° .
365. Ёсць піраміда, у аснове якой ляжыць правільны шасцівугольнік са стараной 6 см, а ўсе бакавыя канты роўныя 12 см. Праз сярэдзіны дзвюх сумежных старон асновы праведзена плоскасць, перпендыкулярная да яе. Знайдзіце плошчу сячэння.

Праверце свае веды

1. Праекцыяй прамой на плоскасць можа быць:
 - а) пункт;
 - б) прамая;
 - в) адрэзак.
2. Ёсць трохвугольная піраміда $SABC$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. На кантах SC , SB , CB пазначаны сярэдзіны U , V , Y адпаведна, а на канце SA — адвольны пункт X . Вызначце, ці перпендыкулярныя прамыя SA і UV .
3. Ёсць трохвугольная піраміда $SABC$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. На кантах SC , SB , CB пазначаны сярэдзіны U , V , Y адпаведна, а на канце SA — адвольны пункт X . Вызначце вугал паміж прамымі UV і AY .
4. Вымярэнні AB , BC і CC_1 прамавугольнага паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ роўныя a , b і c адпаведна. Знайдзіце вугал паміж прамымі AB_1 і CD_1 .
5. З цэнтра O акружнасці, умежанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай BC і бакавой старонай AB , адпаведна роўнымі 18 см і 15 см, узведзены перпендыкуляр OX , роўны 6 см. Знайдзіце адлегласці пункта X ад старон трохвугольніка.
6. На плоскасці δ праведзены дзве паралельныя прамыя MN і KL , адлеглыя адна ад адной на a , а па-за плоскасцю δ выбраны пункт C , адлеглы ад MN на b і ад KL на c . Знайдзіце адлегласць ад пункта C да плоскасці δ , улічыўшы, што $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$.
7. З вяршыні большага вугла трохвугольніка са старанамі 20 см, 34 см і 42 см узведзены перпендыкуляр да плоскасці гэтага трохвугольніка даўжынёй 30 см. Знайдзіце адлегласць ад яго канцоў да большай стараны трохвугольніка.
8. Асновай піраміды служыць трохвугольнік са старанамі 13 см, 14 см, 15 см. Бакавы кант насупраць сярэдняй па велічыні стараны асновы перпендыкулярны плоскасці асновы і роўны 16 см. Знайдзіце велічыні двухгранных вуглоў пры аснове гэтай піраміды.
9. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a , а ўсе бакавыя канты — b . Знайдзіце адлегласць паміж бакавым кантам і кантам асновы, які не ляжыць з ім у адной плоскасці.
10. Перпендыкуляры, апущаныя з пунктаў C і D , узятых у розных перпендыкулярных плоскасцях, на лінію іх перасячэння, адпаведна роўныя c і d , а адлегласць паміж іх асновамі роўная l . Знайдзіце адрэзак CD і яго праекцыі на кожную з плоскасцей.



«...Розум заключаецца не толькі ў ведах,
а і ва ўменні прымяняць веда ў справе...»
(Арыстоцель).

РАЗДЗЕЛ



4

КААРДЫНАТЫ І ВЕКТАРЫ Ў ПРАСТОРЫ

У гэтым раздзеле вы даведаецеся:

- ▶ пра каардынаты ў прасторы;
- ▶ пра вектары і дзеянні над імі;
- ▶ пра выкарыстанне вектараў і каардынат.

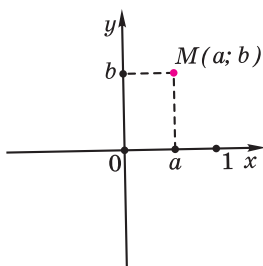


Правообладатель Адукацыя і выхаванне

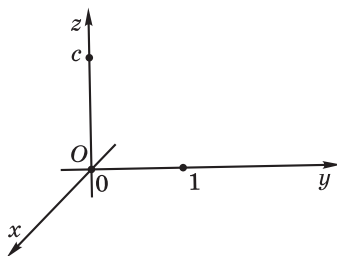
§ 11. Каардынаты ў прасторы

А) Сістэма каардынат на плоскасці дазваляе ўстанавіць узаемна адназначную адпаведнасць паміж пунктамі плоскасці і ўпарадкаванымі парамі лікаў (рыс. 331). Каардынаты вы шырока выкарыстоўвалі для графічнага выяўлення залежнасцей, пры рашэнні сістэм ураўненняў, а таксама ў геаметрыі, каб геаметрычную задачу звесці да задачы алгебраічнай.

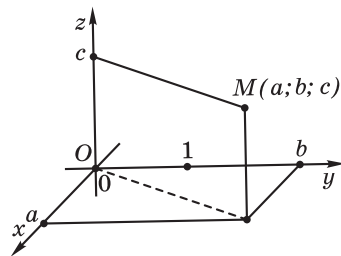
Каб увесці дэкартаву сістэму каардынат у прасторы, выберам пункт O , які будзе лічыцца пачаткам сістэмы каардынат, і тры папарна перпендыкулярныя прамыя. Кожную з гэтых прамых зробім воссю, г. зн. на іх адзначым роўныя адзінкавыя адрэзкі OA , OB , OC . Першую вось называюць воссю абсцыс і абазначаюць Ox , другую вось — воссю ардынаты і абазначаюць Oy , а трэцюю вось называюць воссю аплікат і абазначаюць Oz (рыс. 332). Цяпер кожнаму пункту M прасторы можна паставіць у адпаведнасць упарадкаваную тройку лікаў $(x; y; z)$ — каардынаты гэтага пункта. Тут x — каардыната на восі Ox пункта перасячэння з гэтай воссю плоскасці, якая праходзіць праз пункт M перпендыкулярна восі Ox , y — каардыната на восі Oy пункта перасячэння з гэтай воссю плоскасці, якая праходзіць праз пункт M перпендыкулярна восі Oy , і z — каардыната пункта перасячэння з воссю Oz плоскасці, якая праходзіць праз пункт M перпендыкулярна восі Oz . Запіс $M(a; b; c)$ азначае, што пункт M мае каардынаты $(a; b; c)$. Зразумела, што кожнай упарадкаванай тройцы лікаў $(a; b; c)$ у прасторы адпавядае пэўны пункт (рыс. 333).



Рыс. 331



Рыс. 332



Рыс. 333

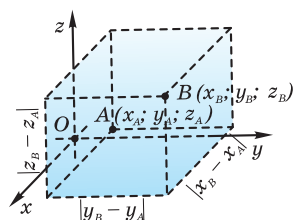
Б) Вы ведаеце, што па каардынатах канцоў $A(x_A; y_A)$ і $B(x_B; y_B)$ адрэзка AB на плоскасці можна вызначыць яго даўжыню:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Аналагічная формула выражае даўжыню адрэзка AB прасторы праз каардынаты яго канцоў $A(x_A; y_A; z_A)$ і $B(x_B; y_B; z_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Каб даказаць гэту формулу, разгледзім плоскасці, якія праходзяць праз пункты A і B перпендыкулярна каардынатым восям. Атрымаем, што адрэзак AB ёсць па сутнасці дыяганаль прамавугольнага паралелепіпеда, канты якога паралельныя каардынатым восям і маюць даўжыні $|x_B - x_A|$, $|y_B - y_A|$ і $|z_B - z_A|$ (рыс. 334) (калі ж якія-небудзь з праведзеных плоскасцей супадуць, то паралелепіпед пераўтворацца ў прамавугольнік або ў адрэзак).



Рыс. 334

Раней вы даказвалі, што каардынаты сярэдзіны адрэзка ёсць сярэднія арыфметычныя адпаведных каардынат яго канцоў. Гэта сцверджанне застаецца праўдзівым і ў выпадку прасторы (гл. прыклад 2 у § 6): калі $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ і пункт $C(x_C; y_C; z_C)$ — сярэдзіна адрэзка AB , то:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Прыклад 1. На восі ардынаты знайдзем пункт, роўнаадлеглы ад пунктаў $P(7; -1; 5)$ і $K(-1; 4; -3)$.

Рашэнне. Няхай M — шуканы пункт. Тады $M(0; y; 0)$ і, паколькі $MP = MK$, то

$$\sqrt{(7-0)^2 + (-1-y)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (4-y)^2 + (-3-0)^2},$$

або $74 + (1 + y)^2 = 10 + (4 - y)^2$. Адсюль $y = -4,9$.

Адказ: $M(0; -4,9; 0)$.

Прыклад 2. Знайдзем умову, што задае геаметрычнае месца пунктаў, якія роўнаадлеглыя ад пачатку каардынат і ад пункта $A(a; b; c)$.

Рашэнне. Паводле геаметрычных меркаванняў шуканае мноства складаецца з усіх тых пунктаў, якія размешчаны на пасярэдніх перпендыкулярах да адрэзка OA . Такія пункты запаўняюць плоскасць, якая праходзіць праз сярэдзіну адрэзка OA і перпендыкулярная да яго. Знайдзем умову, якую праўдзяць каардынаты $(x; y; z)$ адвольнага пункта M гэтай плоскасці. Умова $OM = AM$ азначае, што

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2, \text{ або}$$

$$2(ax + by + cz) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Адказ. Шуканае геаметрычнае месца пунктаў ёсць плоскасць, якая задаецца ўраўненнем $ax + by + cz = 0,5(a^2 + b^2 + c^2)$.

Прыклад 3. Знайдзем умову, якую праўдзяць каардынаты пунктаў плоскасці α , што праходзіць праз пункт $A(3; 1; -2)$ перпендыкулярна прамой AB , дзе $B(2; 3; 4)$.

Рашэнне. Няхай $M(x; y; z)$ — адвольны пункт плоскасці α . Тады з прамавугольнага трохвугольніка ABM па тэарэме Піфагора маем: $BM^2 = AB^2 + AM^2$.

$$\text{Паколькі } BM^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2,$$

$$AB^2 = (2-3)^2 + (3-1)^2 + (4+2)^2 = 41, \quad AM^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2,$$

$$\text{то } (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 + 41,$$

$$\text{або } x - 2y - 6z - 13 = 0.$$

$$\text{Адказ: } x - 2y - 6z - 13 = 0.$$

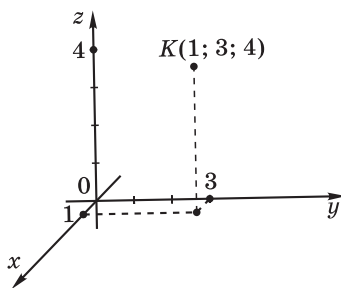


1. Як задаюць прамавугольную дэкартаву сістэму каардынат на плоскасці; у прасторы?
2. Як абазначаюць каардынатныя восі дэкартавай сістэмы каардынат у прасторы? Як іх называюць?
3. Як у выбранай дэкартавай сістэме каардынат знайсці абсцысу пэўнага пункта прасторы; ардынату; аплікату?
4. Як знайсці пункт прасторы, які ў выбранай дэкартавай сістэме каардынат мае каардынаты $(a; b; c)$?
5. Дзе размяшчаецца пункт $M(a; 0; 0)$, пункт $K(0; b; 0)$, пункт $P(0; 0; c)$?
6. Дзе размяшчаецца пункт $A(a; b; 0)$, пункт $B(0; b; c)$, пункт $C(a; 0; c)$?
7. Як знайсці адлегласць паміж пунктамі, калі вядомыя іх каардынаты?
8. Як знайсці каардынаты сярэдзіны адрэзка, калі вядомыя каардынаты яго канцоў?



- 366.** Куб з кантамі a размешчаны так, што тры яго канты знаходзяцца на воях каардынат. Знайдзіце каардынаты яго вяршынь, улічыўшы, што:
- а) яны ўсе неадмоўныя;
 - б) яны ўсе недадатныя;
 - в) абсцысы і ардынаты неадмоўныя, а аплікаты недадатныя;
 - г) абсцысы і ардынаты недадатныя, а аплікаты неадмоўныя;
 - д) абсцысы і аплікаты неадмоўныя, а ардынаты недадатныя;
 - е) абсцысы і аплікаты недадатныя, а ардынаты неадмоўныя;
 - ж) ардынаты і аплікаты неадмоўныя, а абсцысы недадатныя;
 - з) ардынаты і аплікаты недадатныя, а абсцысы неадмоўныя.

367. На рисунку 335 пададзена дэкартава сістэма каардынат у прасторы і паказаны пункт $K(1; 3; 4)$. У спытку зрабіце падобную выяву дэкартавай сістэмы каардынат у прасторы і пакажыце пункт:



Рыс. 335

- а) $A(3; 1; 2)$; в) $C(1; -1; 2)$;
б) $B(-1; 2; 1)$; г) $M(-1; 3; -2)$.
368. У прасторы адзначаны пункты $A(-2; 4; 3)$ і $B(a; b; c)$. Знайдзіце каардынаты праекцыі гэтых пунктаў:
- а) на вось абсцыс; г) на плоскасць xOy ;
б) на вось ардынат; д) на плоскасць yOz .
в) на вось аплікат; е) на плоскасць xOz .
369. У прасторы адзначаны пункты $A(2; -1; 3)$, $B(3; 1; -5)$ і $C(4; 3; 1)$. Знайдзіце каардынаты такога пункта D , што паралелаграмам з'яўляецца чатырохвугольнік:
- а) $ABCD$; б) $ABDC$; в) $ADBC$.
370. Вызначце, ці з'яўляецца паралелаграмам чатырохвугольнік $ABCD$, калі:
- а) $A(-1; 3; -4)$, $B(-2; 3; 4)$, $C(-5; 3; -2)$, $D(-4; 3; -10)$;
б) $A(1; -2; -3)$, $B(-3; 2; 1)$, $C(-5; 4; 3)$, $D(-1; 3; -1)$;
в) $A(-1; 2; -3)$, $B(-2; 3; -4)$, $C(5; -2; -2)$, $D(4; -1; -3)$.
371. Вызначце, ці з'яўляецца прамавугольнікам чатырохвугольнік $ABCD$, калі:
- а) $A(-3; -1; 10)$, $B(-10; -8; -2)$, $C(7; -1; -14)$, $D(2; 6; 14)$;
б) $A(-3; -1; 10)$, $B(2; 6; 14)$, $C(7; -1; -14)$, $D(2; -8; -16)$;
в) $A(7; -1; 14)$, $B(-10; -3; -10)$, $C(-3; -1; 10)$, $D(14; -5; 6)$.
372. Вызначце, ці з'яўляецца ромбам чатырохвугольнік $ABCD$, калі:
- а) $A(4; 2; 1)$, $B(3; 6; 7)$, $C(0; 2; 5)$, $D(5; 6; 4)$;
б) $A(-1; 2; 0)$, $B(0; 2; 5)$, $C(5; 6; 4)$, $D(4; 2; 1)$;
в) $A(6; 5; 4)$, $B(-2; 3; -4)$, $C(4; 2; 1)$, $D(2; 1; 0)$.
373. Вызначце, ці з'яўляецца квадратам чатырохвугольнік $ABCD$, калі:
- а) $A(4; 1; 3)$, $B(3; 2; 5)$, $C(6; 5; 5)$, $D(7; 4; 3)$;
б) $A(6; -1; 4)$, $B(5; 1; 5)$, $C(-2; -1; -2)$, $D(-1; -11; 7)$;
в) $A(-50; -1; 40)$, $B(-13; -11; -19)$, $C(54; -1; -38)$, $D(17; 9; 21)$.
374. У прасторы адзначаны пункты $A(2; -1; 3)$ і $B(a; b; c)$. Знайдзіце каардынаты пунктаў, сіметрычных дадзеным адносна:
- а) пачатку сістэмы каардынат; д) восі аплікат;
б) пункта $M(-1; 3; -2)$; е) плоскасці xOy ;
в) восі абсцыс; ж) плоскасці xOz ;
г) восі ардынат; з) плоскасці yOz .

- 375.** Знайдзіце адлегласць ад пункта $A(3; -1; 4)$:
- | | |
|----------------------------------|-------------------------|
| а) да пачатку сістэмы каардынат; | д) да восі аплікат; |
| б) да пункта $M(-1; -4; -8)$; | е) да плоскасці xOy ; |
| в) да восі абсцыс; | ж) да плоскасці xOz ; |
| г) да восі ардынат; | з) да плоскасці yOz . |
- 376.** Знайдзіце пункт, роўнаадлеглы ад пунктаў $A(3; -2; 5)$ і $B(-1; 4; -3)$, які размешчаны:
- а) на восі абсцыс; б) на восі аплікат.
- 377.** Знайдзіце пункт, роўнаадлеглы ад пунктаў $A(2; -3; 3)$ і $B(-2; 3; 3)$, які размешчаны:
- а) на восі абсцыс; б) на восі ардынат.
- 378.** Знайдзіце пункт, адлегласць ад якога да пункта $M(-2; 3; 5)$ удвая меншая за адлегласць да пункта $K(4; -10; -4)$, улічыўшы, што ён размешчаны:
- а) на восі абсцыс; б) на восі ардынат; в) на восі аплікат.
- 379.** Прамая праходзіць праз пачатак сістэмы каардынат і пункт $C(4; -3; 12)$. Знайдзіце вуглы, што ўтварае гэтая прамая:
- | | |
|---------------------|------------------------|
| а) з воссю абсцыс; | г) з плоскасцю xOy ; |
| б) з воссю ардынат; | д) з плоскасцю xOz . |
| в) з воссю аплікат; | е) з плоскасцю yOz . |
- 380.** Прамая праходзіць праз пункты $B(8; -3; 7)$ і $C(5; 1; 7)$. Знайдзіце вуглы, што ўтварае гэтая прамая:
- | | |
|---------------------|------------------------|
| а) з воссю абсцыс; | г) з плоскасцю xOy ; |
| б) з воссю ардынат; | д) з плоскасцю xOz . |
| в) з воссю аплікат; | е) з плоскасцю yOz . |
- 381.** Знайдзіце ўмову, якую праўдзяць каардынаты пунктаў плоскасці, што праходзіць праз пункт $B(2; 3; -2)$ перпендыкулярна:
- | | |
|------------------|--------------------------------------|
| а) восі абсцыс; | в) восі аплікат; |
| б) восі ардынат; | г) прамой AB , дзе $A(4; 1; -2)$. |

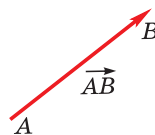
§ 12. Вектар. Дзеянні над вектарамі

А) З вектарамі вы сустрэліся ў курсе фізікі дзявятага класа пры знаёстве з вектарнымі велічынямі. Фізічная велічыня з'яўляецца вектарнай, калі яна характарызуецца не толькі лікавым значэннем, а і кірункам. Такія велічыні, як сіла, скорасць і іншыя, выяўляюць накіраванымі адрэзкамі. Даўжыня накіраванага адрэзка (стрэлкі) характарызуе лікавае значэнне вектарнай велічыні (яе модуль).

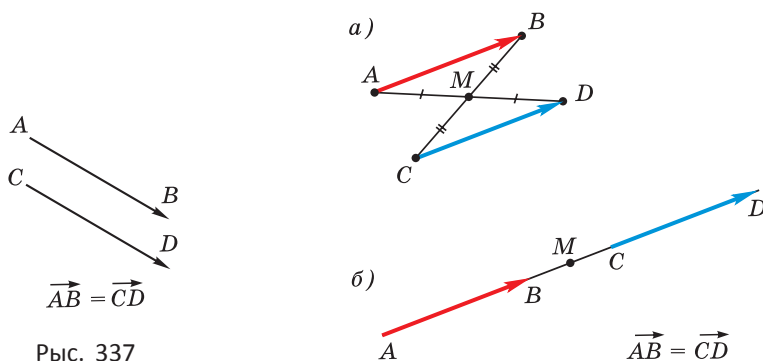
Асаблівасцю паняцця *вектар* з'яўляецца тое, што ўсе асноўныя азначэнні і ўласцівасці, звязаныя з гэтым паняццем, фармулююцца амаль аднолькава як у планіметрыі, так і ў стэрэаметрыі.

Вектар у геаметрыі выяўляецца накіраваным адрэзкам (рыс. 336), пачатак якога лічыцца пачаткам вектара, а канец — канцом вектара. Адлегласць паміж пачаткам накіраванага адрэзка і яго канцом лічыцца **даўжынёй вектара**.

Накіраваныя адрэзкі $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ выражаюць адзін вектар, калі яны аднолькава накіраваны і маюць аднолькавую даўжыню (рыс. 337). У такім выпадку гавораць, што вектары $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ роўныя, і пішуць $\overline{AB} = \overline{CD}$. Вектары $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ роўныя тады і толькі тады, калі супадаюць сярэдзіны адрэзкаў AD і BC (рыс. 338).



Рыс. 336



Рыс. 337

Рыс. 338

Гэта нагадвае сітуацыю з дробамі: пэўны лік можа выражацца рознымі дробамі, напрыклад, дробы $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{29}{58}$ выражаюць адзін і той жа лік. Дробы $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ роўныя тады і толькі тады, калі $ad = bc$.

Калі вектар $\vec{a}$ выяўляецца накіраваным адрэзкам $\overline{AB}$, то кажуць, што гэты вектар *адкладзены ад пункта A*. Вектар можна, і пры гэтым адназначна, адкласці ад любога пункта.

Вектар, які выяўляецца накіраваным адрэзкам $\overline{AA}$, называюць нулявым: $\overline{AA} = 0$. Вектары, што выяўляюцца накіраванымі адрэзкамі $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$, называюць супрацьлеглымі і пішуць $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

Калі ненулявыя вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ адкладзены ад аднаго пункта: $\vec{a} = \overline{AB}$, $\vec{b} = \overline{AC}$, то вугал BAC называецца **вуглом паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$** .

Ненулявыя вектары $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ называюць **калінеарнымі**, калі прамыя AB і CD паралельныя або супадаюць. Нулявы вектар лічыцца калінеарным з любым вектарам.

Вектори можна складати і множити на лік. Кожні два вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, можна аддати з їх заміною родинним йому вектором з тим, щоб кінець першого напряманого відрізка збігався з початком другого:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK},$$

і тоді сума векторів виражається напряманим відрізком $\overrightarrow{AK}$ (рис. 339).

Складання векторів має перемінливість, г. зн. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, сполучальність, г. зн. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$, а також, рівняння $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ завжди має одне рішення, яке називають різницею векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$: $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$ (рис. 340).

Здобутком вектора $\vec{a}$ на лік k з'являється такий вектор $k\vec{a}$, що, перше, вектори $k\vec{a}$ і $\vec{a}$ однаково напрямані при $k > 0$ і супротивно напрямані при $k < 0$, і, друге, довжини векторів $k\vec{a}$ і $\vec{a}$ зв'язані рівністю $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$ (рис. 341). Вектори $\vec{a}$ і $k\vec{a}$ з'являються колінеарними. При цьому виконується рівність $(m \cdot n)\vec{a} = m(n\vec{a})$. Коли $k = 0$, то результатом $k\vec{a}$ з'являється нульовий вектор.

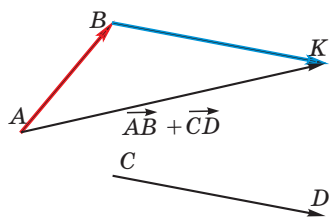


Рис. 339

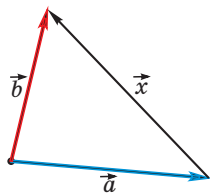


Рис. 340

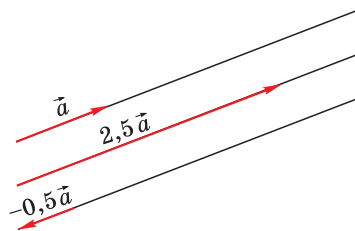


Рис. 341

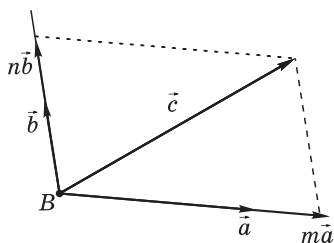
З означенням множення вектора на лік зв'язуються дві властивості — $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ і $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$.

Б) Коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то аддати з їх можна виразити через другі: або $\vec{a} = n\vec{b}$, або $\vec{b} = m\vec{a}$ при певних ліках m і n .

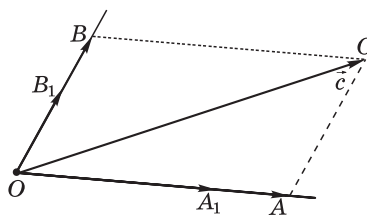
Для будь-яких двох векторів існує площина, якої вони паралельні. Вектори, паралельні одній площині, називають **компланарними**. Коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то будь-який вектор $\vec{c}$, компланарний з ними, можна однозначно виразити через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ (рис. 342).

Виконується і обернене твердження: коли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ зв'язані рівністю $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, то вони компланарні.

Справді, коли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виражені напряманими відрізками з одним початком $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ (рис. 343), то $m\vec{a} + n\vec{b} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$, тому точки O , A , A_1 , B , B_1 і C знаходяться в площині OAB .



Рыс. 342



Рыс. 343

Тэарэма 1. Калі вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некампланарныя, то для любога вектара $\vec{d}$ існуе такая адзіная ўпарадкаваная тройка рэчаісных лікаў (m, n, k) , што $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + k\vec{c}$.

Доказ. Спачатку дакажам існаванне патрэбных лікаў. Выразім вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ накіраванымі адрэзкамі з агульным пачаткам $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$. Праз пункт D правядзём прамую l паралельна OC , і няхай D_1 — пункт перасячэння прамой l з плоскасцю OAB (рыс. 344). Тады $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{D_1D}$. Паколькі вектар $\overrightarrow{OC}$ ненулявы і вектары $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{D_1D}$ калінеарныя, то існуе такі лік k , што $\overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{OC}$. А паколькі вектары $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OD_1}$ кампланарныя, а вектары $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ некалінеарныя, то існуюць такія лікі m і n , што $\overrightarrow{OD_1} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$. Таму

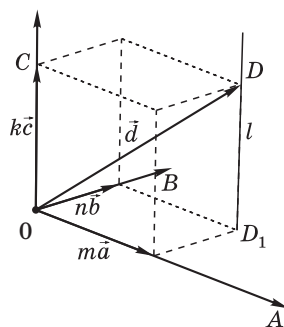
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{D_1D} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}.$$

Цяпер дакажам адзінасць выяўлення. Дапусцім, што існуе дзве розныя ўпарадкаваныя тройкі лікаў (m, n, k) і (m_1, n_1, k_1) , пры якіх $\overrightarrow{OD} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OD} = m_1\overrightarrow{OA} + n_1\overrightarrow{OB} + k_1\overrightarrow{OC}$. Тады

$$m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} = m_1\overrightarrow{OA} + n_1\overrightarrow{OB} + k_1\overrightarrow{OC} \text{ і}$$

$$(m_1 - m)\overrightarrow{OA} + (n_1 - n)\overrightarrow{OB} + (k_1 - k)\overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Калі тройкі лікаў (m, n, k) і (m_1, n_1, k_1) розныя, то лікі на адпаведных месцах не могуць усе супадаць. Няхай, напрыклад, $k \neq k_1$. У гэтым выпадку з апошняй роўнасці можна выразіць вектар $\overrightarrow{OC}$: $\overrightarrow{OC} = \frac{m - m_1}{k_1 - k}\overrightarrow{OA} + \frac{n - n_1}{k_1 - k}\overrightarrow{OB}$. Апошняя роўнасць азначае, што вектары $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ і $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ кампланарныя. Атрыманая супярэчнасць з умовай азначае, што зробленае дапушчэнне пра існаванне дзвюх розных троек лікаў непраўдзівае.



Рыс. 344

Висновок 1. З чотирьох будь-яких векторів простору адмін можна виразити три інші.

Сапраді, калі сярод заданих чотирьох векторів простору є три некомпланарні, то чотвертий вектор можна виразити з трьох виражень. Далі, калі сярод заданих чотирьох векторів простору будь-які три компланарні, то можна знайти сярод їх два неколінеарні, або будь-які два вектори колінеарні. У першому випадку з трьох виражень два неколінеарні вектори можна виразити трьома і да гэтаго виразу дадати чотвертий, помножени на нуль. У другому випадку адмін з векторів можна виразити з трьох і потім дадати да гэтаго виразу два астатні вектори, помножени на нуль.

Таким чином, цяпер ви ведаєте, што з двох колінеарних векторів адмін можна виразити з трьох компланарних векторів адмін можна виразити з двох інших, а з чотирьох будь-яких векторів адмін можна виразити з трьох інших.

Приклад 1. На кранштейні, што складається з підкосіни CB і розтяжки AB , підвішаний груз. Кранштейн примічений да вертикальній стіні AC , розтяжка займає горизонтальне становище (рис. 345). Знайдемо сили, які діють на підкосіну і розтяжку, калі кут між імі роўны α , а вага грузу роўная P .

Решення. Сила тягару виражається вектором $\overrightarrow{BF}$, накірваним уніз па вертикалі. Визначимо суму векторів, які колінеарні векторам $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CB}$. Для гэтаго побудуємо паралелограм $BQFG$ з діагоналлю BF , сторони якого розміщені на прямих AB і CB (рис. 346).

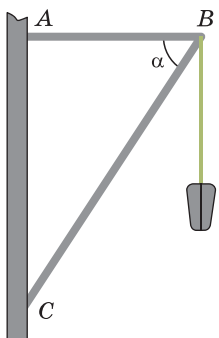


Рис. 345

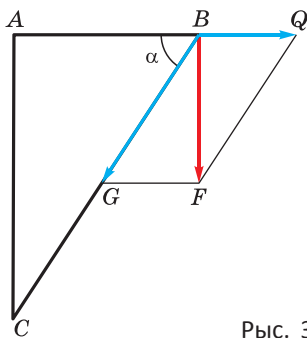


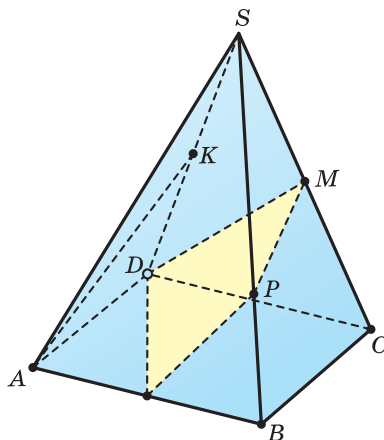
Рис. 346

Покладімо кути BGF і ABC з'являються внутрішніми накреслими при паралельних прямих GF і AB і сякухай BG , то в прямокутному трикутнику BFG кут BGF роўны α і катет BF роўны P . Таму

$$FG = BF \operatorname{ctg} \alpha \text{ і } BG = \frac{BF}{\sin \alpha}.$$

Висновок. Під дією грузу підкосіна стискається з силою $\frac{P}{\sin \alpha}$, а розтяжка розтягується з силою $P \operatorname{ctg} \alpha$.

Прыклад 2. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ пункты K і M — сярэдзіны кантаў SD і SC адпаведна. Плоскасць, што праходзіць праз пункты D і M паралельна прамой AK , перасякае прамую SB у пункце P (рыс. 347). Знойдзем адносіну $SP : PB$.



Рыс. 347

Рашэнне. Паколькі $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$, то вектары $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ і $\overrightarrow{SD}$ цалкам вызначаюць піраміду. Паколькі вектары $\overrightarrow{SP}$ і $\overrightarrow{SB}$ калінеарныя, то вектар $\overrightarrow{SP}$ можна выразіць праз $\overrightarrow{SB}$: $\overrightarrow{SB} : \overrightarrow{SP} = a \overrightarrow{SB}$ пры пэўным ліку a . Вектар $\overrightarrow{SP}$ можна выразіць праз вектары $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ і $\overrightarrow{SD}$, выкарыстаўшы тое, што пункт P знаходзіцца ў плоскасці, якая праходзіць праз пункты D і M паралельна прамой AK . Вектар $\overrightarrow{MP}$ кампланарны з вектарамі $\overrightarrow{DM}$ і $\overrightarrow{AK}$, таму $\overrightarrow{MP} = x \overrightarrow{DM} + y \overrightarrow{AK}$ пры пэўных множніках x і y . Выразім вектары $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{DM}$ і $\overrightarrow{AK}$ праз вектары $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ і $\overrightarrow{SD}$.

Маем:

$$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SC}, \quad \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD},$$

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{SK} - \overrightarrow{SA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SD} - (\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SC}) = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{SD}.$$

Таму

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MP} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{SC} + x \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD} \right) + y \left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{SD} \right) = \\ &= -y \overrightarrow{SB} + \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + y \right) \overrightarrow{SC} - \left(x + \frac{y}{2} \right) \overrightarrow{SD}. \end{aligned}$$

Улічым цяпер тое, што праз некампланарныя вектары $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ і $\overrightarrow{SD}$ кожны вектар прасторы, у тым ліку і вектар $\overrightarrow{SP}$, выражаецца адзіным спосабам. Таму павінны адначасова выконвацца ўмовы: $a = -y$, $\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + y = 0$, $x + \frac{y}{2} = 0$. Адсюль атрымліваем, што $a = \frac{2}{3}$. А паколькі $SP : SB = 2 : 3$, то $SP : PB = 2 : 1$.

Адказ: 2 : 1.

В) Няхай у прасторы выбрана дэкартава сістэма каардынат $Oxyz$. З кожным пунктам M прасторы можна звязаць вектар $\overrightarrow{OM}$. Гэта адпаведнасць паміж пунктамі прасторы і вектарамі з'яўляецца ўзаемна адназначнай: розным пунктам адпавядаюць розныя вектары з пачаткам O і

канцамі ў гэтых пунктах, і розным вектарам адпавядаюць розныя пункты прасторы.

Будзем гаварыць, што вектар $\vec{a}$ мае каардынаты (m, n, k) у дэкартавай сістэме каардынат $Oxyz$, калі $\vec{a} = \vec{OA}$ і пункт A мае каардынаты (m, n, k) . Гэта будзем запісваць: $\vec{a}(m, n, k)$.

Тэарэма 2. Калі $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, то $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Доказ. Няхай зададзена дэкартава сістэма каардынат $Oxyz$ і $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$. Няхай таксама $\vec{AB} = \vec{OM}$ і $M(x_M; y_M; z_M)$. Трэба даказаць, што $x_M = x_B - x_A$, $y_M = y_B - y_A$ і $z_M = z_B - z_A$.

Паколькі $\vec{AB} = \vec{OM}$, то сярэдзіны адрэзкаў AM і BO супадаюць. Сярэдзіна адрэзка AM мае каардынаты $\left(\frac{x_A + x_M}{2}; \frac{y_A + y_M}{2}; \frac{z_A + z_M}{2}\right)$, а сярэдзіна адрэзка BO — каардынаты $\left(\frac{x_B + 0}{2}; \frac{y_B + 0}{2}; \frac{z_B + 0}{2}\right)$. Атрымліваем:

$$x_A + x_M = x_B, y_A + y_M = y_B, z_A + z_M = z_B.$$

Адсюль:

$$x_M = x_B - x_A, y_M = y_B - y_A \text{ і } z_M = z_B - z_A.$$

Тэарэма 3. Калі $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$, $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$, то $\vec{a} + \vec{b}(x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)$, $k\vec{a}(kx_a; ky_a; kz_a)$.

Доказ. Няхай зададзена дэкартава сістэма каардынат $Oxyz$ і $\vec{a} = \vec{OA}(x_a; y_a; z_a)$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \vec{OC}(x_c; y_c; z_c)$ (рыс. 348). Паколькі $\vec{b} = \vec{OC} - \vec{OA}$, то $\vec{b} = \vec{AC}$.

Па тэарэме 2 атрымліваем:

$$x_b = x_c - x_a, y_b = y_c - y_a \text{ і } z_b = z_c - z_a.$$

Таму

$$x_c = x_a + x_b, y_c = y_a + y_b \text{ і } z_c = z_a + z_b.$$

Значыць, вектар $\vec{a} + \vec{b}$ мае каардынаты $(x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)$.

Дакажам другое сцверджанне тэарэмы 3. Няхай напачатку $k > 0$ і $k\vec{a} = \vec{OA_1}(x_1; y_1; z_1)$. Параўнаем аднайменныя, напрыклад, першыя каардынаты вектараў $\vec{a}$ і $k\vec{a}$. Для гэтага праз пункты A і A_1 правядзём плоскасці, паралельныя плоскасці yOz (рыс. 349), якія перасякаюць вось Ox у пунктах P і P_1 . З падобнасці трохвугольнікаў OAP і OA_1P_1 вынікае, што $x_1 = kx_a$. Аналагічна атрымліваецца, што $y_1 = ky_a$ і $z_1 = kz_a$.

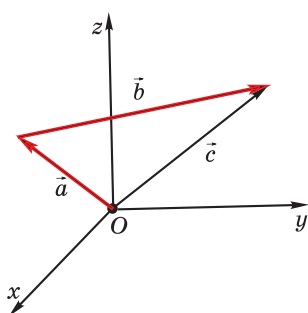


Рис. 348

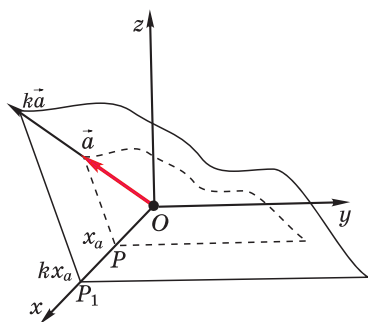


Рис. 349

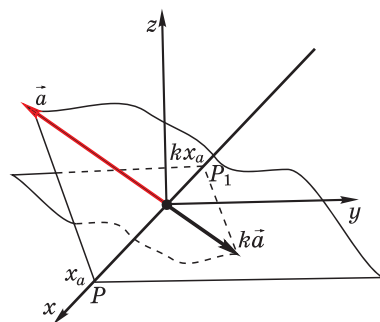


Рис. 350

Калі ж $k < 0$, то тыя самыя разважанні праводзяцца для рысунка 350. Вектары $\vec{i}(1; 0; 0)$, $\vec{j}(0; 1; 0)$, $\vec{k}(0; 0; 1)$ называюць *адзінкавымі каардынатымі вектарамі*.

Вынік 2. Калі $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$, то $\vec{a} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}$.

Прыклад 3. Ёсць паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Пункты M і N — сярэдзіны адрэзкаў CC_1 і $A_1 C_1$ адпаведна (рыс. 351). Выразім:

а) вектары $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BN}$ праз вектары $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AA_1}$;

б) вектары $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AA_1}$ праз вектары $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BN}$.

Р а ш э н н е. а) Маем:

$$\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DD_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1};$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AA_1};$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1 N} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{A_1 C_1} = \\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{A_1 D_1}) = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

б) Будзем разглядаць атрыманыя роўнасці $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AM}$, $-\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BN}$ як сістэму ўмоў, з якой трэба знайсці $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AA_1}$. З першай умовы выразім $\overrightarrow{AA_1}$ і выключым $\overrightarrow{AA_1}$ з дзвюх іншых:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1}, \quad \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{AM}, \quad \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BN}.$$

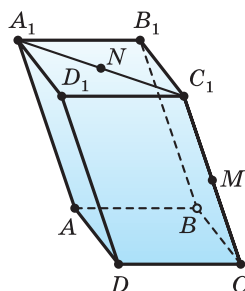


Рис. 351

Цяпер з апошньої роїнасті виразім $\overrightarrow{AD}$ і виключим $\overrightarrow{AD}$ з папярэдняй:

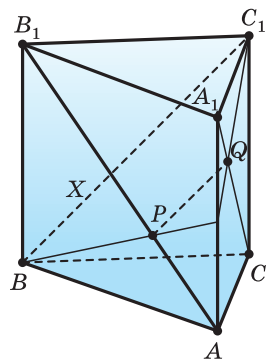
$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD_1}, \quad \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN} - \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{AM}.$$

$$\begin{aligned} \text{Далей можна паступова выразіць } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \text{ і } \overrightarrow{AA_1} \text{ праз вектары} \\ \overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AM} \text{ і } \overrightarrow{BN}: \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AM} + \\ + 6\overrightarrow{BN} - 5\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{BN} + 4\overrightarrow{CD_1}. \end{aligned}$$

Прыклад 4. Праз дыяганаль BC_1 грані трохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ праведзена плоскасць так, што яна перасякае дыяганалі AB_1 і CA_1 граняў у пунктах P і Q адпаведна (рыс. 352). Знойдзем адносіну $PQ : BC_1$, улічыўшы, што $PQ \parallel BC_1$.

Рашэнне. Вектары $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AA_1}$ некампланарныя, таму праз іх можна выразіць вектары $\overrightarrow{BC_1}$ і $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{BC_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}.$$



Рыс. 352

Улічым, што $\overrightarrow{QC}$ і $\overrightarrow{CA_1}$ калінеарныя. Значыць, існуе такі лік p , што $\overrightarrow{QC} = p \cdot \overrightarrow{CA_1}$. Аналагічна, існуе такі лік q , што $\overrightarrow{PA} = q \cdot \overrightarrow{AB_1}$. Акрамя таго,

$$\overrightarrow{CA_1} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} \text{ і } \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}.$$

Значыць,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{QC} = q \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) + \overrightarrow{AC} - p \cdot (-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}) = \\ &= q \cdot \overrightarrow{AB} + (p+1) \cdot \overrightarrow{AC} + (q-p) \cdot \overrightarrow{AA_1}. \end{aligned}$$

З умовы вынікае, што вектары $\overrightarrow{PQ}$ і $\overrightarrow{BC_1}$ калінеарныя. Таму

$$\overrightarrow{PQ} = k \overrightarrow{BC_1} = k \cdot (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}) \text{ пры пэўным } k.$$

$$\text{А паколькі } q \cdot \overrightarrow{AB} + (p+1) \cdot \overrightarrow{AC} + (q-p) \cdot \overrightarrow{AA_1} = k \cdot (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1})$$

і ўлічыўшы адназначнасць раскладання вектара па трох некампланарных вектарах, атрымліваем, што $q = -k$, $p+1 = k$, $q-p = k$. Адсюль знаходзім $k = \frac{1}{3}$.

Адказ: $PQ : BC_1 = 1 : 3$.

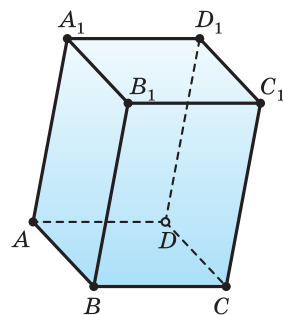


1. Што сабой уяўляе вектар? Якія вектары лічацца роўнымі?
2. Якія вектары лічацца супрацьлеглымі? Які вектар называюць нулявым?
3. Як абазначаецца складанне вектараў?
4. Якія ўласцівасці мае дзеянне складання вектараў?
5. Што называецца рознасцю вектараў?
6. Як абазначаецца дзеянне множання вектара на лік?
7. Якія ўласцівасці мае дзеянне множання вектара на лік?
8. Якія вектары называюцца калінеарнымі?
9. Якую ўласцівасць маюць калінеарныя вектары?
10. Якія вектары называюцца кампланарнымі?
11. Якую ўласцівасць маюць кампланарныя вектары?
12. Якую ўласцівасць маюць некампланарныя вектары?
13. Як абазначаюцца каардынаты вектара?
14. Як знайсці каардынаты вектара, выражанага накіраваным адрэзкам?
15. Як знайсці каардынаты сумы вектараў?
16. Як знайсці каардынаты здабытку вектара на лік?
17. Якая ёсць сувязь паміж каардынатамі вектара і адзінкавымі каардынатнымі вектарамі?



- 382.** Ёсць паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рыс. 353). Укажыце вектары з канцамі ў вяршынях паралелепіпеда, якія роўныя вектарам:

- а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{D_1C}$;
- б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1}$,
 $\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{D_1C} + \overrightarrow{BA_1}$;
- в) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{CC_1}$,
 $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{D_1C} - \overrightarrow{AD}$.



Рыс. 353

- 383.** Перанясіце рысунак 354 у сшытак.
- а) Адкладзіце ад пункта M вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$, знайдзіце даўжыні гэтых вектараў і вугал паміж імі;
 - б) ад пункта K адкладзіце вектары $\vec{c}$ і $-\vec{d}$, знайдзіце даўжыні гэтых вектараў і вугал паміж імі;

- в) побудуйте вектор $\vec{a} + \vec{b}$, знайдіть його довжину і кут між сумою і кожним складником;
 г) побудуйте вектор $\vec{c} - \vec{d}$ і знайдіть його довжину.

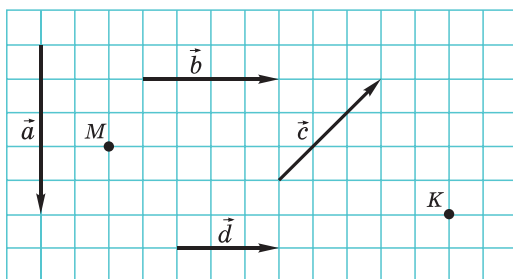


Рис. 354

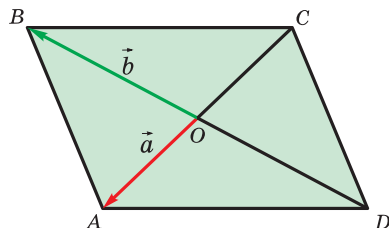


Рис. 355

384. Нарисуйте паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Улічуйте, що $\overline{BC} = \vec{a}$, $\overline{B_1 A} = \vec{b}$, $\overline{C_1 D_1} = \vec{c}$, покажіть на рисунку вектор:

- а) $\vec{a} + \vec{b}$; в) $\vec{b} - \vec{a}$; д) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
 б) $\vec{b} + \vec{c}$; г) $\vec{c} - \vec{b}$;

385. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O . $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$ (рис. 355). Проз вектори $\vec{c}$ і $\vec{b}$ виразіть вектор:

- а) $\overline{CO}$; в) $\overline{BD}$; д) $\overline{AB}$;
 б) $\overline{CA}$; г) $\overline{BC}$; е) $\overline{CD}$.

386. У трикутнику ABC точки M і K — середини відрізків AB і BC (рис. 356). Виразіть:

- а) вектори $\overline{AK}$ і $\overline{AC}$ проз вектори $\overline{BM}$ і $\overline{BK}$;
 б) вектори $\overline{BM}$ і $\overline{BK}$ проз вектори $\overline{AK}$ і $\overline{AC}$.

387. Єсть трикутний призми $ABCA_1 B_1 C_1$ (рис. 357). Покажіть вектор з кінцями в вершинах призми, які рівні вектору $\vec{x}$, калі:

- а) $\overline{AA_1} - \vec{x} + \overline{B_1 C} = \overline{BA}$; в) $\overline{BC_1} + \vec{x} = \overline{AB_1} = \overline{BA} - \vec{x} + \overline{CA_1}$.
 б) $\overline{BC_1} + \vec{x} + \overline{AB_1} = \overline{BA}$;

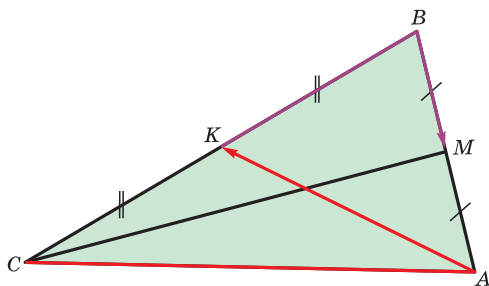


Рис. 356

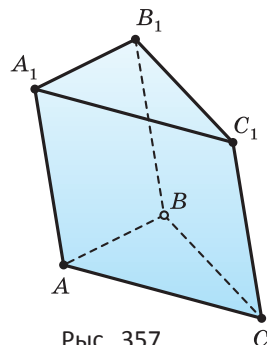


Рис. 357

388. Асновай піраміды $SABCD$ з'яўляецца паралелаграм. Ці праўда, што:

а) $\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD}$; б) $\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{DA}$?

389. Дакажыце, што для любых чатырох пунктаў A, B, C, D прасторы выконваецца роўнасць $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

390. Асновай піраміды $SABCD$ з'яўляецца трапецыя, пункт O — сярэдзіна яе сярэдняй лініі. Дакажыце, што $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4 \cdot \overrightarrow{SO}$.

391. Пункты M, N, P, Q — сярэдзіны кантаў пры аснове чатырохвугольнай піраміды $SABCD$. Дакажыце, што

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{SQ}.$$

392. У прасторы выбраны пункты A, B, C, D , пункты M і N — сярэдзіны адрэзкаў AB і CD . Дакажыце, што $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2 \cdot \overrightarrow{MN}$.

393. Нарысуйце два накіраваныя адрэзкі $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$. Пабудуйце вектар:

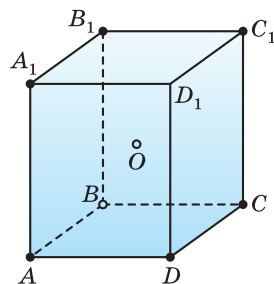
а) $-2 \overrightarrow{AB}$; в) $\frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{CD}$; д) $\frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \cdot k \cdot \overrightarrow{CD}$.

б) $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CD}$; г) $\frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{CD}$;

394. Дыяганалі куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рыс. 358) перасякаюцца ў пункце O . Знайдзіце лік k , улічыўшы, што праўдзіцца роўнасць:

а) $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{D_1 B} = k \cdot \overrightarrow{BO}$.

б) $\overrightarrow{C_1 O} = k \cdot \overrightarrow{AC_1}$;



Рыс. 358

395. Дакажыце, што рознасць вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўная вектару $\vec{a} + (-\vec{b})$.

396. Спрасціце выраз:

а) $\vec{a} - 2(\vec{b} - \vec{a}) + 3(2\vec{b} - \vec{a})$; б) $-(\vec{p} + \vec{q}) + 5(\vec{r} - 2\vec{p} + 3\vec{q}) - 7(-\vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r})$.

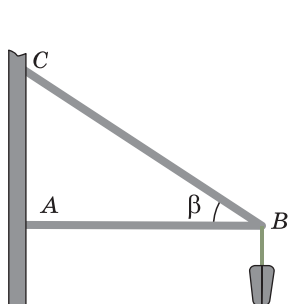
397. Вядома, што пункты A, B, C і D не ляжаць на адной прамой і $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{CD}$. Ці могуць прамыя AC і BD быць скрыжаванымі? Пры якім значэнні k прамыя AC і BD :

а) паралельныя; б) перасякаюцца?

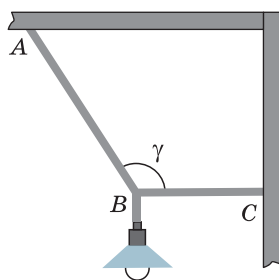
398. У прасторы выбраны пункты A і B . Дакажыце, што для любых пунктаў P і Q вектары $k \cdot \overrightarrow{PA} + (1-k) \cdot \overrightarrow{PB}$ і $\overrightarrow{PQ} + k \cdot \overrightarrow{QA} + (1-k) \cdot \overrightarrow{QB}$ супадаюць.

399. У прасторы выбраны пункты A, B і C . Дакажыце, што калі M — пункт перасячэння медыян трохвугольніка ABC , то для любога пункта P прасторы выконваецца роўнасць $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$.

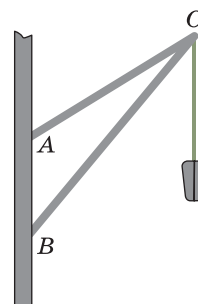
- 400.** На кранштэйне, што складаецца з падкосіны AB і расцяжкі CB , падвешаны груз. Кранштэйн прымацаваны да вертыкальнай сцяны AC , падкосіна займае гарызантальнае становішча (рыс. 359). Знайдзіце сілы, якія дзейнічаюць на падкосіну і расцяжку, калі вугал паміж імі роўны β , а вага грузу роўная P .
- 401.** Электрычны ліхтар падвешаны на дроце AB і ўтрымліваецца гарызантальнай расцяжкай BC (рыс. 360). Знайдзіце сілы, якія дзейнічаюць на дрот і расцяжку, калі вугал паміж імі роўны γ , а вага ліхтара роўная P .
- 402.** Знайдзіце сілы, якія дзейнічаюць на падкосіну і расцяжку, прымацаваныя да вертыкальнай сцяны (рыс. 361), калі падвешаны ў пункце C груз ваżyць P , $AB = 1,5$ м, $AC = 3$ м, $BC = 4$ м.



Рыс. 359

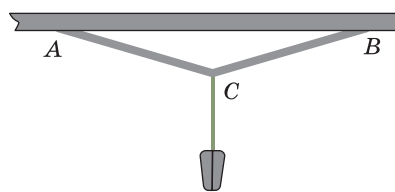


Рыс. 360



Рыс. 361

- 403.** Да гарызантальнай паверхні прымацаваны шнур даўжынёй 5 м, які вытрымлівае нагрузку ў 0,2 т. Вызначце, ці ўтрымаецца на гэтым шнур прымацаваны ў яго сярэдзіне груз вагой 0,05 т (рыс. 362), калі адлегласць AB паміж пунктамі мацавання роўная 4,8 м.

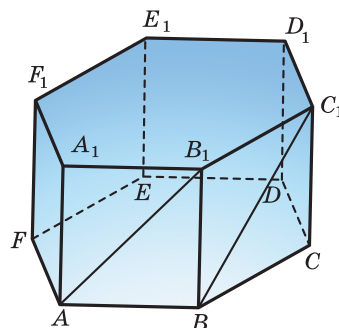


Рыс. 362

- 404.** Сярод вектараў $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ёсць некалінеарныя. Дакажыце, што калі $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, то $|\vec{m}| < |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

- 405.** Ёсць правільная шасцівугольная прызма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (рыс. 363). Укажыце вектар, калінеарны з вектарам:

- а) $\vec{AB}$; г) $\vec{AC_1}$;
 б) $\vec{A_1 A}$; д) $\vec{BD}$;
 в) $\vec{A_1 D_1}$; е) $\vec{A_1 B} + \vec{BE}$.



Рыс. 363

406. Вядома, што вектары $\vec{a}$ і $\vec{c}$, а таксама $\vec{b}$ і $\vec{c}$ калінеарныя. Ці можна сцвярджаць, што вектары $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ калінеарныя? Дакажыце, што:
- вектары $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{c}$ калінеарныя;
 - вектары $\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{c}$ калінеарныя;
 - вектары $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{c}$ калінеарныя;
 - вектары $-\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{c}$ калінеарныя.

407. Вядома, што вектары $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ калінеарныя. Дакажыце, што вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ таксама калінеарныя.

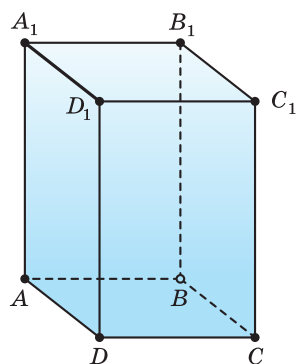
408. Вядома, што вектары $\vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{a} - 2\vec{b}$ калінеарныя. Дакажыце, што вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ таксама калінеарныя.

409. У трохвугольнай пірамідзе кожная вяршыня злучана з пунктам перасячэння медыян супрацьлеглай грані. Дакажыце, што гэтыя чатыры адрэзкі праходзяць праз адзін пункт і дзеляцца ім у адносіне 3 : 1, калі лічыць ад вяршыні.

410. Ёсць трохвугольная піраміда $ABCD$. Знайдзіце ўсе такія пункты M прасторы, што $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$.

411. Ёсць паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рыс. 364). Устаноўце, ці кампланарная тройка вектараў:

- $\vec{AB}, \vec{A_1 D_1}, \vec{CD_1}$;
- $\vec{AB}, \vec{A_1 D_1}, \vec{C_1 D_1}$;
- $\vec{DB}, \vec{B_1 C_1}, \vec{A_1 D_1}$;
- $\vec{BA_1}, \vec{B_1 C_1}, \vec{AD}$.



Рыс. 364

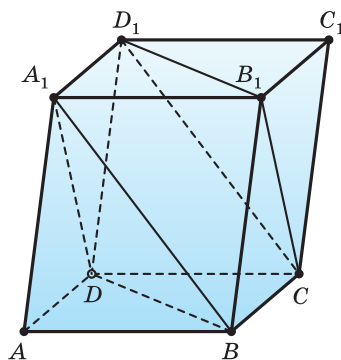
412. Сярэдзіны кантаў AB і CD трохвугольнай піраміды $ABCD$ — пункты P і Q адпаведна. Дакажыце, што $2 \cdot \vec{PQ} = \vec{AC} + \vec{BD}$. Ці кампланарныя вектары $\vec{AC}, \vec{BD}$ і $\vec{PQ}$?

413. У грані ABC трохвугольнай піраміды $ABCD$ праведзена медыяна AM . Выразіце вектар $\vec{DK}$ праз вектары $\vec{DA}, \vec{DB}$ і $\vec{DC}$, улічыўшы, што K — такі пункт медыяны AM , што $AK : KM = 3 : 2$.

414. У грані ABC трохвугольнай піраміды $ABCD$ медыяны перасякаюцца ў пункце M . Дакажыце, што даўжыня адрэзка DM меншая за трэцюю долю сумы даўжынь кантаў AD, BD і CD .

415. Дакажыце, што дыяганаль AC_1 паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рыс. 365):

- праходзіць праз пункты перасячэння медыян трохвугольнікаў $A_1 BD$ і $B_1 CD_1$;
- плоскасці $A_1 BD$ і $B_1 CD_1$ раздзяляюць адрэзак AC_1 на тры роўныя часткі.



Рыс. 365

416. На бакавих кантах трохкутної призми $ABCA_1B_1C_1$ вибрані пункти P, Q, R . Медіанами трохкутника PQR пересякаюцца в пункце M , а медіанами трохкутника ABC — у пункце N (рис. 366). Дакажыце, што $MN \parallel AA_1$.

417. У правільнай чатырохкутній пірамідзе $SABCD$ пункт K на канце SC выбраны так, што $SK : SC = 1 : 3$. Плоскасць, што праходзіць праз пункты K і D паралельна прамой AS , перасякае прамую AB у пункце P . Знайдзіце адносіну $AP : PB$.

418. У прасторы выбраны пункты $A, B, C, A_1, B_1, C_1, M, K$. Вядома, што $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA_1}$, $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MB_1}$, $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MC_1}$. Дакажыце, што стораны трохкутника ABC паралельныя і роўныя старанам трохкутника $A_1B_1C_1$.

419. У прасторы выбраны пункты A, B, C, D . Дакажыце, што:

а) адрэзкі, якія злучаюць сярэдзіны адрэзкаў AB і CD , AC і BD , AD і BC , праходзяць праз адзін пункт M і дзеляцца ім папалам;

б) для любога пункта K прасторы выконваецца роўнасць $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD})$.

420. Цэнтр куба з кантам a размешчаны ў пачатку сістэмы каардынат, а яго канты паралельныя каардынатным восям (рис. 367). Знайдзіце каардынаты вектараў:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{DA}$;

б) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{D_1B}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$;

в) $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1D}$.

421. Паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ мае вымярэнні $AB = a$, $AC = b$ і $AA_1 = c$. Пункт A з'яўляецца пачаткам сістэмы каардынат, канты размешчаны на каардынатных восях (рис. 368). Знайдзіце каардынаты вектараў:

а) $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{DB_1}$;

б) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{D_1B}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$;

в) $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1D}$.

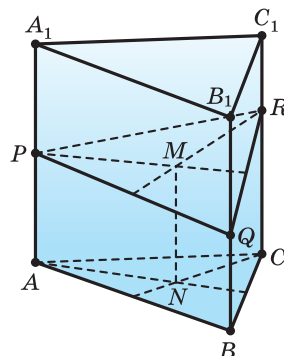


Рис. 366

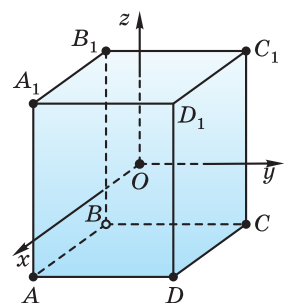


Рис. 367

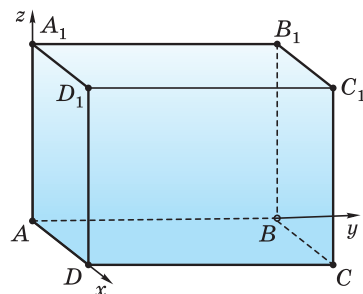


Рис. 368

- 422.** Тры пункты ў прасторы, зададзеныя сваімі каардынатамі: $M(2; -3; -1)$, $P(0; 1; 3)$, $K(4; 3; -3)$, з'яўляюцца вяршынямі паралелаграма. Знайдзіце каардынаты яго чацвёртай вяршыні.
- 423.** Чатыры пункты ў прасторы зададзены сваімі каардынатамі: $A(2; 3; 1)$, $B(0; 1; 3)$, $C(-1; 3; 0)$, $D(3; 1; 2)$. Знайдзіце каардынаты вектараў:
а) $\overline{AB}$, $\overline{CD}$; $\overline{AB} + \overline{CD}$; б) $\overline{BC}$, $\overline{DA}$, $\overline{AB} + 2 \cdot \overline{BC} + 3 \cdot \overline{CD} + 4 \cdot \overline{DA}$.
- 424.** Чатыры пункты ў прасторы зададзены сваімі каардынатамі: $A(-2; 1; -1)$, $B(2; 0; -3)$, $C(1; -3; 0)$, $D(2; 3; -1)$. Знайдзіце каардынаты вектараў:
а) $\overline{AB}$, $\overline{CD}$; $\overline{AB} - \overline{CD}$; б) $\overline{BC}$, $\overline{DA}$, $2 \cdot \overline{AB} + 3 \cdot \overline{BC} + 2 \cdot \overline{CD} + 3 \cdot \overline{DA}$.
- 425.** Чатыры вяршыні прызмы $ABCA_1B_1C_1$ размешчаны ў пунктах $A(2; 0; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $A_1(4; 3; 6)$, $C_1(3; 2; -3)$. Знайдзіце каардынаты пунктаў C і B_1 .
- 426.** У паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вядомы каардынаты чатырох вяршынь. Знайдзіце каардынаты астатніх чатырох вяршынь, улічыўшы, што:
а) $A(1; 3; -1)$, $B(4; 3; 2)$, $C(3; 1; 2)$, $B_1(3; 2; 5)$;
б) $A(-2; 3; -1)$, $C(4; 1; 5)$, $B_1(4; 3; 2)$, $D_1(2; 5; 6)$.
- 427.** Чатыры вяршыні прызмы $ABCA_1B_1C_1$ размешчаны ў пунктах $A(2; 0; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $A_1(4; 3; 6)$, $C_1(3; 2; -3)$. Знайдзіце каардынаты пунктаў C і B_1 .
- 428.** Пры якіх значэннях x і y будуць калінеарнымі вектары:
а) $\vec{a}(2; 6; x)$ і $\vec{b}(y; 3; -1)$;
б) $\vec{c}(1; 0; x)$ і $\vec{d}(y; 3; -1)$;
в) $\vec{m}(1; 3; x)$ і $\vec{n}(2; 6; y)$?
- 429.** Вызначце, ці ляжаць на адной прамой пункты:
а) $A(1; -2; 2)$, $B(4; 1; 2)$, $C(3; 0; 4)$;
б) $M(1; 2; -3)$, $K(3; 3; -1)$, $P(5; 4; 1)$.
- 430.** Ёсць вектар $\vec{a}(1; -1; 2)$. Вектар $\overline{AB}$ яму калінеарны. Знайдзіце каардынаты:
а) пункта B , які ляжыць у плоскасці xOy , улічыўшы, што $A(3; 1; 2)$;
б) пункта A , які ляжыць у плоскасці xOy , улічыўшы, што $B(2; -1; 1)$.
- 431.** Устаноўце, ці з'яўляюцца кампланарнымі вектары:
а) $\vec{a}(2; 6; 3)$, $\vec{b}(1; 3; -1)$ і $\vec{c}(0; 0; 2)$;
б) $\vec{m}(1; 3; 0)$, $\vec{n}(2; 6; 5)$ і $\vec{k}(2; 3; -1)$.
- 432.** Вызначце, пры якім значэнні m вектары $\vec{a}(1; -1; 2)$, $\vec{b}(0; 3; -1)$ і $\vec{c}(2; m; -1)$ будуць кампланарнымі.

два вектары перпендыкулярныя тады і толькі тады, калі іх скалярны здабытак роўны нулю.

Тэарэма 1. Скалярны здабытак вектараў $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ і $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$ выражаецца праз іх каардынаты ў дэкартавай сістэме роўнасцю $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Доказ. Паколькі $\vec{a} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}$, $\vec{b} = x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}$, то

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}) \cdot (x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}) = \\ &= x_a x_b \vec{i} \cdot \vec{i} + x_a x_b \vec{i} \cdot \vec{j} + x_a x_b \vec{i} \cdot \vec{k} + y_a y_b \vec{j} \cdot \vec{i} + y_a y_b \vec{j} \cdot \vec{j} + y_a y_b \vec{j} \cdot \vec{k} + \\ &\quad + z_a x_b \vec{k} \cdot \vec{i} + z_a y_b \vec{k} \cdot \vec{j} + z_a z_b \vec{k} \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Знаходзім далей:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Аналагічна,

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

$$\text{Таму } \vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b.$$

Прыклад 1. Знайдзем даўжыню вектара $\vec{a}(2; 1; -2)$.

Маем: $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) = 9$. Таму $|\vec{a}| = 3$.

Прыклад 2. Знайдзем вугал α паміж вектарамі $\vec{a}(4; 1; -3)$ і $\vec{b}(2; -5; 1)$.

Маем: $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) + (-3) \cdot 1 = 0$. Таму:

$$\cos \alpha = 0 \text{ і } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Прыклад 3. Знайдзем даўжыню вектара $\vec{a}$, роўнага $\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$, калі вядома, што вектары $\vec{m}$ і $\vec{n}$ перпендыкулярныя вектару $\vec{p}$, паміж сабой утвараюць вугал 60° і $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $|\vec{p}| = 3$.

$$\begin{aligned} \text{Маем: } |\vec{a}|^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}) \cdot (\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}) = \\ &= \vec{m} \cdot (\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}) + 2\vec{n} \cdot (\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}) - 3\vec{p} \cdot (\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}) = \\ &= \vec{m} \cdot \vec{m} + 2\vec{m} \cdot \vec{n} - 3\vec{m} \cdot \vec{p} + 2\vec{n} \cdot \vec{m} + 2 \cdot 2\vec{n} \cdot \vec{n} - 3 \cdot 2\vec{n} \cdot \vec{p} - 3\vec{p} \cdot \vec{m} - \\ &\quad - 3 \cdot 2\vec{p} \cdot \vec{n} + 3 \cdot 3\vec{p} \cdot \vec{p}. \end{aligned}$$

Паколькі

$$\begin{aligned} \vec{m} \cdot \vec{m} &= |\vec{m}|^2 = 4, \quad \vec{m} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 1 \cos 60^\circ = 1, \quad \vec{m} \cdot \vec{p} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{n} &= |\vec{n}|^2 = 1, \quad \vec{n} \cdot \vec{p} = 0, \quad \vec{p} \cdot \vec{p} = |\vec{p}|^2 = 9, \text{ то } |\vec{a}|^2 = 93. \end{aligned}$$

$$\text{Таму } |\vec{a}| = \sqrt{93}.$$

Б) Вы ведаеце, што плоскасць у прасторы можна задаць трыма пунктамі, якія не ляжаць на адной прамой. Паколькі існуе адзіная плоскасць, што праходзіць праз дадзены пункт перпендыкулярна дадзенай прамой, то плоскасць можна задаваць таксама ўказаннем аднаго з яе пунктаў і вектара, ёй перпендыкулярнага.

Тэарэма 2. Калі плоскасць праходзіць праз пункт $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендыкулярна ненулявому вектару $\vec{N}(a; b; c)$, то каардынаты $(x; y; z)$ любога іншага пункта M гэтай плоскасці праўдзяць ураўненне $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Доказ. Калі $M(x; y; z)$ — адвольны пункт плоскасці, якая праходзіць праз пункт $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендыкулярна вектару $\vec{N}(a; b; c)$, то вектары $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{N}$ перпендыкулярныя, а таму іх скалярны здабытак роўны нулю:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

З'яўляецца праўдзівым і адваротнае сцверджанне.

Тэарэма 3. Ураўненню $ax + by + cz + d = 0$, у якім каэфіцыенты a, b, c не роўныя нулю адначасова, задавальняе любы пункт пэўнай плоскасці. Гэтай плоскасці перпендыкулярны вектар $\vec{N}(a; b; c)$.

Доказ. Калі ёсць ураўненне $ax + by + cz + d = 0$ і лікі a, b, c не роўныя нулю адначасова, то можна знайсці ўпарадкаваную тройку лікаў $(x_0; y_0; z_0)$, якая праўдзіць гэта ўраўненне. Напрыклад, калі $a \neq 0$, то можна, узяўшы $y = y_0$ і $z = z_0$, знайсці значэнне зменнай x так, каб тройка лікаў $(x_0; y_0; z_0)$ праўдзіла ўраўненне $ax + by_0 + cz_0 + d = 0$.

Паколькі $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$, то ўмовы $ax + by + cz + d = 0$ і $ax + by + cz + d - (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0$ раўназначныя. Атрымалі, што зыходнае ўраўненне раўназначнае ўраўненню $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, якое праўдзяць каардынаты $(x; y; z)$ любога пункта M , размешчанага на прамой, што праходзіць праз пункт $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендыкулярна вектару $\vec{N}(a; b; c)$, г. зн. любога пункта плоскасці, што праходзіць праз пункт $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендыкулярна вектару $\vec{N}(a; b; c)$.

Прыклад 4. Знайдзем ураўненне плоскасці ABC , якая праходзіць праз пункты $A(2; 1; 3)$, $B(4; 1; 2)$ і $C(5; 2; 1)$.

Знайдзем каардынаты вектараў $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}(4 - 2; 1 - 1; 2 - 3)$, $\overrightarrow{AC}(5 - 2; 2 - 1; 1 - 3)$. Паколькі каардынаты $(2; 0; -1)$ і $(3; 1; -2)$ гэтых вектараў непарацыянальныя, то самі вектары некалінеарныя, і, значыць, пункты A, B і C не ляжаць на адной прамой, яны задаюць адзіную плоскасць.

Каб запісаць ураўненне плоскасці ABC , выкарыстаўшы тэарэму 2, знойдзем вектар $\vec{N}(a; b; c)$, перпендыкулярны гэтай плоскасці. Паколькі $\vec{N} \perp \vec{AB}$ і $\vec{N} \perp \vec{AC}$, то $2a + 0b + (-1)c = 0$ і $3a + b + (-2)c = 0$. З гэтых умоў атрымліваем: $c = 2a$, $b = a$. Такім чынам, у якасці шуканага вектара $\vec{N}$ можна ўзяць вектар з каардынатамі $(1; 1; 2)$.

Цяпер можна запісаць ураўненне плоскасці, якая праходзіць праз пункт A перпендыкулярна знойдзенаму вектару $\vec{N}$:

$$1(x - 2) + 1(y - 1) + 2(z - 3) = 0, \text{ або } x + y + 2z = 9.$$

В) Тэарэма 4. Калі плоскасць мае ўраўненне $ax + by + cz + d = 0$, то адлегласць да яе ад пункта $M_0(x_0; y_0; z_0)$ роўная $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Доказ. Няхай з пункта M_0 на дадзеную плоскасць апущаны перпендыкуляр M_0M_1 , аснова якога — пункт M_1 — мае каардынаты $(x_1; y_1; z_1)$. Тады вектар $\vec{M_0M_1}(x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$ калінеарны з вектарам $\vec{N}(a; b; c)$. Паколькі вугал паміж гэтымі вектарамі роўны 0° або 180° , то $\vec{M_0M_1} \cdot \vec{N} = |\vec{M_0M_1}| \cdot |\vec{N}| \cdot (\pm 1)$, адкуль

$$|\vec{M_0M_1}| = (\pm 1) \cdot \frac{\vec{M_0M_1} \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{|\vec{M_0M_1} \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|}.$$

Знаходзім

$$\begin{aligned} \vec{M_0M_1} \cdot \vec{N} &= a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = \\ &= ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0) = -(d + ax_0 + by_0 + cz_0), \end{aligned}$$

паколькі каардынаты пункта M_1 задавальняюць ураўненню плоскасці. Далей: $|\vec{N}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. А паколькі шуканая адлегласць роўная даўжыні вектара $\vec{M_0M_1}$, то патрэбнае сцверджанне абгрунтавана.

Прыклад 5. Знойдзем адлегласць ад пункта $A(2; -1; -3)$ да плоскасці, якая зададзена ўраўненнем $x + 2y + 2z - 9 = 0$.

Рашэнне. Выкарыстаўшы тэарэму 4, атрымліваем:

$$l = \frac{|2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{1 + 2^2 + 2^2}} = 5.$$

Адказ: 5.



1. Як выражаецца скалярны здабытак вектараў?
2. Якія ўласцівасці мае скалярнае множанне вектараў?
3. Як знайсці скалярны здабытак вектараў, выкарыстаўшы іх дэкартавы каардынаты?
4. Для рашэння якіх задач зручна выкарыстоўваць скалярнае множанне вектараў?
5. Якой умове задавальняюць каардынаты любога пункта пэўнай плоскасці?
6. Якім ураўненнем задаецца плоскасць, што праходзіць праз дадзены пункт прасторы перпендыкулярна ўказанаму вектару?
7. Як можна знайсці ўраўненне плоскасці, што праходзіць праз тры дадзеныя пункты прасторы?
8. Што называецца адлегласцю ад пункта да плоскасці?
9. Як знайсці адлегласць ад пункта з вядомымі каардынатамі да плоскасці, зададзенай сваім ураўненнем?



- 437.** Знайдзіце скалярны здабытак вектараў:
- а) $\vec{a}(4; -1; -2)$ і $\vec{b}(0; 3; -1)$; в) $\vec{m}(2; 1; 2)$ і $\vec{n}(-1; 2; 0)$;
 б) $\vec{c}(3; 0; -1)$ і $\vec{d}(2; 3; 1)$; г) $\vec{p}(-3; -1; 2)$ і $\vec{q}(3; 1; -2)$.
- 438.** Знайдзіце даўжыню вектара:
- а) $\vec{a}(4; -1; -2)$; г) $\vec{d}(2; 3; 1)$; ж) $\vec{p}(-3; -1; 2)$;
 б) $\vec{b}(0; 3; -1)$; д) $\vec{m}(2; 1; 2)$; з) $\vec{q}(3; 1; -2)$.
 в) $\vec{c}(3; 0; -1)$; е) $\vec{n}(-1; 2; 0)$;
- 439.** Знайдзіце вугал паміж вектарамі:
- а) $\vec{a}(4; -1; -2)$ і $\vec{b}(0; 3; -1)$; в) $\vec{m}(2; 1; 2)$ і $\vec{n}(-1; 2; 0)$;
 б) $\vec{c}(3; 0; -1)$ і $\vec{d}(2; 3; 1)$; г) $\vec{p}(-3; -1; 2)$ і $\vec{q}(3; 1; -2)$.
- 440.** Ёсць вектары $\vec{a}(4; -1; -2)$, $\vec{b}(0; 3; -1)$ і $\vec{c}(3; 0; -1)$. Параўнайце значэнні:
- а) $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ і $|\vec{a} + \vec{b}|$; в) $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $2|\vec{c}|$;
 б) $|\vec{a}| - |\vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$; г) $|\vec{c} + \vec{b}| + |\vec{c} - \vec{b}|$ і $|\vec{c}| + |\vec{b}|$.

- 441.** Вызначце, які вугал — востры, прамы або тупы — утварае з каардынатымі восьмі вектар:
- а) $\vec{a} = 5\vec{j} - 3\vec{k}$; б) $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$; в) $\vec{c} = -3\vec{k}$.
- 442.** Знайдзіце перыметр і большы вугал прасторавага трохвугольніка ABC , калі:
- а) $A(3; 9; -5)$, $B(10; 2; -5)$, $C(3; 2; 2)$;
 б) $A(-1; 5; -5)$, $B(-1; 5; -3)$, $C(0; 4; -3)$;
 в) $A(6; 2; -4)$, $B(4; 4; -6)$, $C(4; 0; -2)$;
 г) $A(7; -4; 3)$, $B(-3; 2; 5)$, $C(2; 0; -5)$.
- 443.** Дакажыце, што плошчу прасторавага трохвугольніка можна знайсці па формуле $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$. Як выкарыстаць гэты факт для таго, каб знайсці адлегласць ад пункта C да прамой AB ?
- 444.** Вяршыні A , B і C трохвугольнай піраміды $ABCD$ ляжаць на каардынатых восьях, а вяршыня D мае каардынаты $(3; 2; 1)$. Знайдзіце каардынаты вяршынь A , B і C , улічыўшы, што ўсе плоскія вуглы піраміды пры вяршыні D прамыя.
- 445.** Вызначце, пры якіх значэннях a трохвугольнік ABC з'яўляецца раўнабедраным, улічыўшы, што:
- а) $A(3; 2; -1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(a; 0; 1)$;
 б) $A(2; 1; a)$, $B(3; a; 5)$, $C(-1; a; 3)$.
- 446.** Вызначце, пры якіх значэннях a чатырохвугольнік $ABCD$ з'яўляецца трапецыяй, улічыўшы, што:
- а) $A(4; 0; 4)$, $B(0; 0; 0)$, $C(a; 4; 0)$, $D(4; 4; -1)$;
 б) $A(2; 3; a)$, $B(3; a; 5)$, $C(1; a; -2)$, $D(-2; 1; -5)$.
- 447.** Знайдзіце вугал паміж прамымі AB і CD , улічыўшы, што:
- а) $A(-2; 3; 4)$, $B(-1; 4; 2)$, $C(-3; 6; 2)$, $D(-3; 7; 1)$;
 б) $A(-1; 5; 8)$, $B(-2; 6; 8)$, $C(-11; 7; -5)$, $D(-9; 7; -7)$;
 в) $A(0; 1; 2)$, $B(2; 0; 1)$, $C(-4; -2; 0)$, $D(0; -4; -2)$;
 г) $A(15; -8; 7)$, $B(15; -7; 6)$, $C(12; -7; -11)$, $D(10; -9; -13)$.
- 448.** У паралелепіпэдзе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ канты AB , AD і AA_1 роўныя адпаведна 10, 16 і 21, $\angle BAD = \angle A_1 AB = 60^\circ$, $\angle DAA_1 = 90^\circ$. Знайдзіце:
- а) $\vec{BA} \cdot \vec{C_1 D_1}$; е) $A_1 B$;
 б) $\vec{BC_1} \cdot \vec{AD_1}$; ж) $A_1 C$;
 в) $\vec{AC_1} \cdot \vec{A_1 C}$; з) AC_1 ;
 г) $\vec{BC_1} \cdot \vec{B_1 C}$; і) BD_1 ;
 д) BD ; к) $B_1 D$.
- 449.** У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ бакавыя канты роўныя, $\angle ASB = 60^\circ$, $\angle ASC = 30^\circ$, $\angle BSC = 45^\circ$. Знайдзіце вугал паміж вектарамі:
- а) $\vec{SC}$ і $\vec{BA}$; б) $\vec{AC}$ і $\vec{SB}$; в) $\vec{BC}$ і $\vec{AS}$.

- 450.** Дакажыце, што для любых чатырох пунктаў A, B, C, D прасторы выконваецца роўнасць $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$.
- 451.** Вяршыні A, D і A_1 правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ маюць каардынаты $(1; 0; 0)$, $(-1; 0; 0)$ і $(1; 0; 2)$ адпаведна. Улічыўшы, што ардыната пункта B дадатная, знайдзіце:
- а) каардынаты пунктаў B, C, E_1, F_1 ;
 - б) ураўненне плоскасці ADA_1 ;
 - в) ураўненне плоскасці ABA_1 ;
 - г) ураўненне плоскасці ACE_1 ;
 - д) ураўненне плоскасці ACD_1 ;
 - е) ураўненне плоскасці ACF_1 ;
 - ж) адлегласць ад B да плоскасці ADA_1 ;
 - з) адлегласць ад C да плоскасці ABA_1 ;
 - і) адлегласць ад B_1 да плоскасці ADA_1 ;
 - к) адлегласць ад B_1 да плоскасці ACE_1 ;
 - л) адлегласць ад B_1 да плоскасці ACD_1 ;
 - м) адлегласць ад E_1 да плоскасці ACF_1 .

§ 14. Прымяненне вектараў і каардынат

А) У шэрагу задач умова змяшчае звесткі пра паралельнасць пэўных прамых або пункты перасячэння, адносіны даўжынь паралельных адрэзкаў. Для рашэння такіх задач можа быць карысным прымяненне вектараў, як гэта было пры рашэнні прыкладу 4 з параграфу 12. Пры рашэнні такіх задач дастаткова выкарыстоўваць дзеянні складання вектараў і множання вектара на лік. Разгледзім яшчэ адзін прыклад.

Прыклад 1. Няхай $A_1 B_1 C_1 D_1$ і $A_2 B_2 C_2 D_2$ — паралелаграмы ў прасторы, K, L, M, N — сярэдзіны адрэзкаў $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2, D_1 D_2$ адпаведна. Дакажам, што сярэдзіны адрэзкаў KM і LN супадаюць.

Рашэнне. Выберам у прасторы пункт O . Тады становішча кожнага пункта цалкам характарызуецца адпаведным вектарам. З умовы вынікае, што $\overline{A_1 B_1} = \overline{D_1 C_1}$ і $\overline{A_2 B_2} = \overline{D_2 C_2}$. Пункты K, L, M, N вызначаюцца вектарамі $\overline{OK}, \overline{OL}, \overline{OM}, \overline{ON} : \overline{OK} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OA_1} + \overline{OA_2}), \quad \overline{OL} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OB_1} + \overline{OB_2}),$
 $\overline{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OC_1} + \overline{OC_2}), \quad \overline{ON} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OD_1} + \overline{OD_2}).$

Каб даказаць, што сярэдзіны адрэзкаў KM і LN супадаюць, дакажам, што $\overline{KL} = \overline{NM}$. Знаходзім:

$$\overline{KL} = \overline{OL} - \overline{OK} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OB_1} + \overline{OB_2} - \overline{OA_1} - \overline{OA_2}),$$

$$\overline{NM} = \overline{OM} - \overline{ON} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OC_1} + \overline{OC_2} - \overline{OD_1} - \overline{OD_2}).$$

А паколькі

$\overline{OB_1} - \overline{OA_1} = \overline{A_1B_1} = \overline{D_1C_1} = \overline{OC_1} - \overline{OD_1}$ і $\overline{OB_2} - \overline{OA_2} = \overline{A_2B_2} = \overline{D_2C_2} = \overline{OC_2} - \overline{OD_2}$, то выразы ў дзвюх апошніх дужках прымаюць аднолькавыя значэнні. Патрэбнае сцверджанне даказана.

Б) Пры рашэнні іншых задач мэтазгодна карыстацца скалярным множаннем вектараў. Такімі з'яўляюцца задачы, у якіх неабходна выкарыстоўваць або вызначаць пэўныя адлегласці ці вуглы.

Прыклад 2. Знойдзем вугал паміж скрыжаванымі дыяганалямі суседніх бакавых граняў правільнай шасцівугольнай прызмы, у якой бакавыя грані — квадраты.

Рашэнне. Няхай трэба знайсці вугал паміж прамымі AB_1 і BC_1 (рыс. 370). Шуканы вугал можа супадаць з вуглом паміж вектарамі, паралельнымі дадзеным прамым, або дапаўняць яго да 180° . Таму косінус шуканага вугла супадае з модулем косінуса вугла паміж вектарамі

$$\overline{AB_1} \text{ і } \overline{BC_1}: \cos \alpha = \frac{|\overline{AB_1} \cdot \overline{BC_1}|}{|\overline{AB_1}| \cdot |\overline{BC_1}|}.$$

Выразім вектары $\overline{AB_1}$ і $\overline{BC_1}$ праз некампланарныя вектары

$\overline{BA}$, $\overline{BC}$ і $\overline{BB_1}$: $\overline{AB_1} = \overline{BB_1} - \overline{BA}$, $\overline{BC_1} = \overline{BC} + \overline{BB_1}$. Прымем даўжыню канта прызмы за a і знойдзем скалярны здабытак вектараў:

$$\begin{aligned} \overline{AB_1} \cdot \overline{BC_1} &= (\overline{BB_1} - \overline{BA}) \cdot (\overline{BC} + \overline{BB_1}) = \overline{BB_1} \cdot \overline{BC} + \overline{BB_1} \cdot \overline{BB_1} - \overline{BA} \cdot \overline{BC} - \overline{BA} \cdot \overline{BB_1} = \\ &= a^2 \cos 90^\circ + a^2 \cos 0^\circ - a^2 \cos 120^\circ - a^2 \cos 90^\circ = 1,5 a^2. \end{aligned}$$

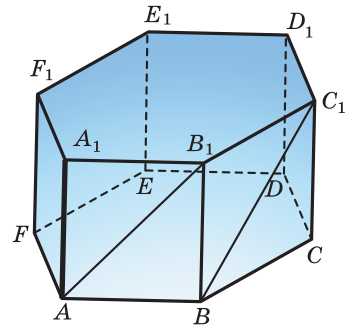
А паколькі $|\overline{AB_1}| = AB_1 = BC_1 = |\overline{BC_1}| = a\sqrt{2}$, то

$$\cos \alpha = \frac{3}{4} \text{ і } \alpha = \arccos \frac{3}{4}.$$

Адказ: $\arccos \frac{3}{4}$.

Скалярны здабытак вектараў можна выкарыстаць і для знаходжання вугла паміж плоскасцямі. Як пры вызначэнні вугла паміж прамымі, так і пры вызначэнні вугла α паміж плоскасцямі можна выкарыстаць вектары $\overline{N_1}$ і $\overline{N_2}$, толькі перпендыкулярныя разглядаемым плоскасцям:

$$\cos \alpha = \frac{|\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}|}{|\overline{N_1}| \cdot |\overline{N_2}|}.$$

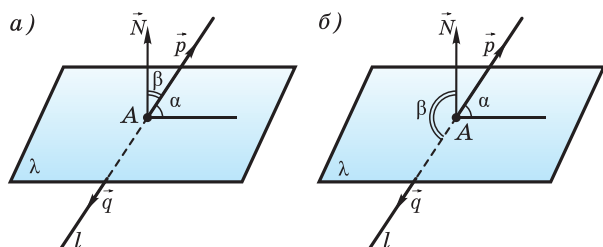


Рыс. 370

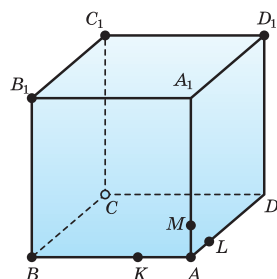
$$|\vec{N}_2| = \sqrt{\vec{N}_2 \cdot \vec{N}_2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{26}}.$$

Адказ: $\arccos \frac{4}{\sqrt{26}}.$

Для знаходжання вугла паміж прамой і плоскасцю таксама можна выкарыстаць вектары, адзін з якіх паралельны прамой, а другі перпендыкулярны плоскасці. Вугал β паміж гэтымі вектарамі звязаны з вуглом α паміж прамой і плоскасцю роўнасцю $\sin \alpha = |\cos \beta|$ (рыс. 372).



Рыс. 372



Рыс. 373

Прыклад 4. На кантах AB , AD і AA_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ адзначаны пункты K , L і M так, што $AK : KB = 1 : 2$, $AL : LD = 1 : 3$, $AM : MA_1 = 1 : 4$ (рыс. 373). Знайдзем вугал α паміж прамой AC_1 і плоскасцю KLM .

Рашэнне. Прымем пункт A за пачатак сістэмы каардынат, каардынатыныя восі накіруем па кантах куба, узяўшы канты за адзінкавыя адрэзкі. Тады вызначацца каардынаты патрэбных пунктаў: $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A_1(0; 0; 1)$, $C_1(1; 1; 1)$, $K\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$, $L\left(0; \frac{1}{4}; 0\right)$ і $M\left(0; 0; \frac{1}{5}\right)$.

Па тэарэме 3 з параграфа 13 ураўненне плоскасці KLM мае выгляд $ax + by + cz + d = 0$, а паколькі каардынаты пунктаў K , L і M задавальняюць ураўненню $3x + 4y + 5z - 1 = 0$, то гэта ўраўненне і ёсць ураўненне плоскасці KLM , а вектар $\vec{N}(3; 4; 5)$ гэтай плоскасці перпендыкулярны. Прамой AC_1 паралельны вектар $\vec{AC}_1(1; 1; 1)$. Знаходзім:

$$\vec{N} \cdot \vec{AC}_1 = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 12, \quad |\vec{N}| = \sqrt{\vec{N} \cdot \vec{N}} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2},$$

$$|\vec{AC}_1| = \sqrt{\vec{AC}_1 \cdot \vec{AC}_1} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \quad \sin \alpha = \frac{12}{5\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \text{і} \quad \alpha = \arcsin \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Адказ: $\arcsin \frac{2\sqrt{6}}{5}.$

В) У папярэднім параграфі абмяркоўвалася выкарыстанне каардынат для вылічэння адлегласці ад пункта да прамой. Разгледзім рашэнне яшчэ дзвюх задач на знаходжанне адлегласцей: ад пункта да прамой і адлегласці паміж скрыжаванымі прамымі.

Приклад 5. У правильній шестигонній піраміді $QABCDEF$ усі ребра основи мають довжину 3, яні удвічі коротші за висоту. На ребрах QA і QC відзначені точки K і L так, що $QK:KA = 1:2$, $QL:LC = 2:1$. Знайдемо відстань d від точки E до прямої KL .

Розв'язок. Нехай O — центр основи $ABCDEF$. Паколькі $OA = OB = AB = 3$, $AQ = 6$ і $OQ \perp OA$, то з прямокутного трикутника AOQ знаходимо:

$$OQ = \sqrt{AQ^2 - AO^2} = 3\sqrt{3}.$$

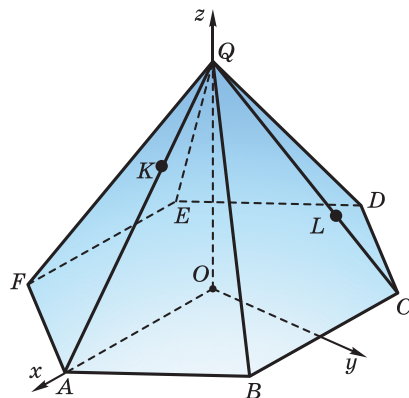


Рис. 374

Використаємо прямокутну декартову систему координат, початок якої знаходиться в центрі O основи $ABCDEF$, осі абсцис і апсисат проходять через точки A і Q відповідно і точка B має невідомі координати (рис. 374). Точки A , Q і B мають координати $(3; 0; 0)$,

$(0; 0; 3\sqrt{3})$ і $\left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ відповідно. Тоді точки E , K і L будуть мати

координати $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $(1; 0; 2\sqrt{3})$ і $(-1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$ відповідно. Знайдемо

координати векторів $\overrightarrow{KL}$ і $\overrightarrow{KE}$ за координатами їх кінцевих точок:

$$\overrightarrow{KL}(-2; \sqrt{3}; -\sqrt{3}), \quad \overrightarrow{KE}\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}; -2\sqrt{3}\right).$$

Шукана відстань є довжиною перпендикуляра, опущеного з точки E на пряму KL і рівна висоті в трикутнику KLE , проведеному з точки E . Для її знаходження можна використати формулу

$$d = \frac{2S_{KLE}}{KL}. \text{ Паколькі } 2S_{KLE} = KL \cdot KE \cdot \sin LKE, \quad KL = |\overrightarrow{KL}| = \sqrt{\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KL}},$$

$$KE = |\overrightarrow{KE}| = \sqrt{\overrightarrow{KE} \cdot \overrightarrow{KE}} \quad \text{і} \quad \sin LKE = \sqrt{1 - \cos^2 LKE} = \sqrt{1 - \left(\frac{\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KE}}{|\overrightarrow{KL}| \cdot |\overrightarrow{KE}|}\right)^2}, \text{ то}$$

$$2S_{KLE} = \sqrt{KL^2 \cdot KE^2 - (\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KE})^2}.$$

$$\text{Цяпер знаходимо: } KL^2 = (-2)^2 + (\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 = 10,$$

$$KE^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (-2\sqrt{3})^2 = 25,$$

$$\overline{KL} \cdot \overline{KE} = (-2) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3}) \cdot (-2\sqrt{3}) = \frac{13}{2},$$

$$2S_{KLE} = \sqrt{10 \cdot 25 - \left(\frac{13}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{831}}{2}, \quad d = \frac{2S_{KLE}}{KL} = \frac{\sqrt{831}}{2 \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{8310}}{20}.$$

Адказ: $\frac{\sqrt{8310}}{20}$.

Прыклад 6. Вымярэнні AB , BC і AA_1 прамавугольнага паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ роўныя 5, 4 і 4 адпаведна. Пункты K і P на кантах AB і AA_1 выбраны так, што $AK : KB = 4 : 1$, $AP : PA_1 = 3 : 1$ (рыс. 375). Знойдзем адлегласць d паміж прамымі BP і KD_1 .

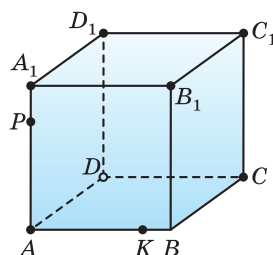
Рашэнне. Адлегласць паміж скрыжаванымі прамымі BP і KD_1 можна знайсці як адлегласць ад якога-небудзь пункта прамой KD_1 да плоскасці β , што праходзіць праз BP паралельна KD_1 .

Прымем пункт A за пачатак сістэмы каардынат, каардынатныя восі накіруем па кантах паралелепіпеда так, каб пункты A , B і D мелі каардынаты $(0; 0; 0)$, $(0; 5; 0)$, $(4; 0; 0)$ адпаведна. Тады $D_1(4; 0; 4)$, $K(0; 4; 0)$, $P(0; 0; 3)$. Каб запісаць ураўненне плоскасці β , знойдзем каардынаты вектара $\vec{N}$, перпендыкулярнага як вектару $\overline{BP}$, так і вектару $\overline{KD_1}$. Паколькі $\overline{BP}(0; 5; -3)$, $\overline{KD_1}(4; -4; 4)$, то каардынаты $(a; b; c)$ вектара $\vec{N}$ павінны праўдзіць роўнасці $5b - 3c = 0$ і $4a - 4b + 4c = 0$. Можна ўзяць $\vec{N}(-2; 3; 5)$.

Цяпер запішам ураўненне плоскасці β , выкарыстаўшы каардынаты пункта P : $-2(x - 0) + 3(y - 0) + 5(z - 3) = 0$. Для знаходжання адлегласці d выкарыстаем тэарэму 4 з параграфа 13:

$$d = \frac{|-2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 0 - 15|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 5^2}} = \frac{3}{\sqrt{38}}.$$

Адказ: $\frac{3}{\sqrt{38}}$.



Рыс. 375



1. Патлумачце, пры рашэнні якіх задач можна выкарыстоўваць дзеянні складання вектараў і множання вектара на лік.
2. Патлумачце, як можна знаходзіць вугал паміж двюма прамымі.
3. Патлумачце, як можна знаходзіць вугал паміж двюма плоскасцямі.
4. Патлумачце, як можна знаходзіць вугал паміж прамой і плоскасцю.

5. Патлумачце, як можна знаходзіць адлегласць ад пункта да прамой.
6. Патлумачце, як можна знаходзіць адлегласць паміж двума паралельнымі прамымі.
7. Патлумачце, як можна знаходзіць адлегласць ад пункта да плоскасці.
8. Патлумачце, як можна знаходзіць адлегласць паміж двума скрываючымі прамымі.



452. У трохвугольнай прызме $ABCA_1B_1C_1$ медыяны асноў перасякаюцца ў пунктах M і M_1 . Вызначце, у якой адносіне адрэзак MM_1 раздзяляеца плоскасцю ABC_1 .
453. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ медыяны асновы перасякаюцца ў пункце M , пункт Q на канце SC такі, што $SQ : QC = k$. Вызначце, у якой адносіне адрэзак SM раздзяляеца плоскасцю ABQ , улічыўшы, што:

а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = 0,5$.

454. У аснове піраміды $SABCD$ ляжыць паралелаграм $ABCD$, пункты P і Q — сярэдзіны кантаў AB і SC адпаведна (рыс. 376). Вызначце, у якой адносіне адрэзак PQ раздзяляеца плоскасцю SBD .

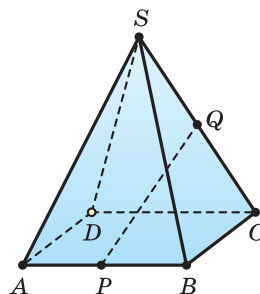


Рис. 376

455. Плоскасць праходзіць праз дыяганаль BF асновы правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ паралельна дыяганалі AD_1 . Знайдзіце адносіну, у якой гэтая плоскасць раздзяляе бакавыя канты прызмы.
456. У паралелепіпедзе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на прамых BA_1 і CB_1 адзначаны пункты M і P так, што прамая MP паралельная AC_1 . Знайдзіце адносіну $MP : AC_1$.
457. Ёсць паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На прамых BA_1 і CB_1 адзначаны пункты M і P так, што $\overline{BM} = k \cdot \overline{BA_1}$ і $\overline{CP} = k \cdot \overline{CB_1}$. Дакажыце, што прамая MP паралельная адной з граняў паралелепіпеда.
458. Пункты M і K — сярэдзіны старон AB і CD прасторавага чатырохвугольніка $ABCD$. Дакажыце, што $\overline{MP} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{BC} + \overline{AD})$.
459. На кантах AB і CD трохвугольнай піраміды $ABCD$ выбраны пункты P і Q так, што $AP : PB = CQ : QD = 2$. Дакажыце, што прамыя AC , BD і PQ паралельныя адной плоскасці.

- 460.** На кантах AB і CD трохвугольнай піраміды $ABCD$ выбраны пункты P і Q так, што $AP : PB = CQ : QD = k$. Выразіце вектар $\overrightarrow{PQ}$ праз вектары $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$.
- 461.** Дакажыце, што тры прамыя, якія праходзяць праз сярэдзіны супрацьлеглых кантаў трохвугольнай піраміды, перасякаюцца ў адным пункце.
- 462.** Для пунктаў A, B, C, D і M прасторы выконваецца роўнасць $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$. Дакажыце, што тры прамыя, якія праходзяць праз сярэдзіны адрэзкаў AB і CD , AC і BD , AD і BC , праходзяць праз пункт M .
- 463.** У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ медыяны асновы ABC перасякаюцца ў пункце M , на кантах SA, SB, SC выбраны пункты A_1, B_1, C_1 . Плоскасць $A_1B_1C_1$ перасякае адрэзак SM у пункце M_1 . Дакажыце, што $\frac{SA}{SA_1} + \frac{SB}{SB_1} + \frac{SC}{SC_1} = 3 \cdot \frac{SM}{SM_1}$.
- 464.** Пункты M і K — сярэдзіны старон AB і CD прасторавага чатырхвугольніка $ABCD$. Плоскасць, якая праходзіць праз пункты M і K , перасякае адрэзкі BC і AD у пунктах N і L адпаведна. Дакажыце, што:
- $BN : ND = AL : LD$;
 - адрэзак NL раздзяляецца прамой MK папалам.
- 465.** У прасторы зададзены пункты A, B, C, D , пункты K, L, M, N выбраны так, што $\overrightarrow{AK} : \overrightarrow{KB} = a$, $\overrightarrow{BL} : \overrightarrow{LC} = b$, $\overrightarrow{CM} : \overrightarrow{MD} = c$, $\overrightarrow{DN} : \overrightarrow{NA} = d$. Дакажыце, што пункты K, L, M, N ляжаць у адной плоскасці тады і толькі тады, калі $abcd = 1$.
- 466.** Прамая l перасякае плоскасці граняў ABC, ABD, ACD і BCD трохвугольнай піраміды $ABCD$ у пунктах D_1, C_1, B_1 і A_1 адпаведна. Дакажыце, што сярэдзіны адрэзкаў AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 ляжаць у адной плоскасці.
- 467.** Праз сярэдзіну вышыні правільнай трохвугольнай піраміды праходзіць плоскасць, паралельная бакавой грані. У якой адносіне яна раздзяляе іншыя канты?
- 468.** У аснове прамой трохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ ляжыць раўнабедраны трохвугольнік з прамым вуглом C . Пункт M — сярэдзіна канта AB , $AM = AA_1$. Знайдзіце вугал паміж прамымі:
- A_1C і MB_1 ;
 - AC_1 і MB_1 .
- 469.** Праз сярэдзіну K канта AD трохвугольнай піраміды $ABCD$ праведзена плоскасць, паралельная кантам AB і CD . Яна перасякае кант BC у пункце M . Ведаючы, што $AB = 8, CD = 6, KM = 5$, знайдзіце вугал паміж прамымі AB і CD .

470. У правильній трикутній призмі бакави кут удвічі менше за кут основи. Знайдіть кут між скриваними діагоналями сусідніх граней.

471. У основі трикутній піраміди $ABCD$ лежить рівнобедрений трикутник ABC з прямим кутом C . Відомо, що $AC = BD$ і кут BD перпендикулярний площині основи (рис. 377). Знайдіть кут між прямою BD і прямою, що проходить через середини ребер AD і BC .

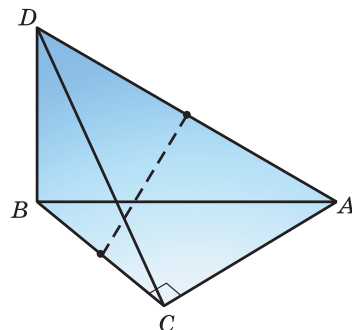


Рис. 377

472. У правильній трикутній призмі бакави кут удвічі більший за кут основи. Знайдіть кут між скриваними діагоналями сусідніх граней.

473. Точка M — середина ребра SA піраміди $SABCD$, у основі якої лежить квадрат $ABCD$. Ребер SB перпендикулярний площині основи, $SB : BC = \sqrt{11}$. Знайдіть кут між прямими CM і AD .

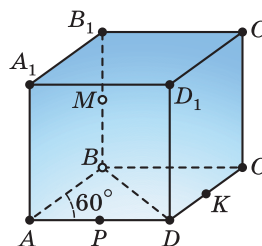


Рис. 378

474. Точки M , K і P на ребрах AA_1 , BC і C_1D_1 правильної чотирикутної призми $ABCA_1B_1C_1D_1$ вибрані так, що $AM = MA_1 = AD$, $BK = KC$, $C_1P = PD_1$. Знайдіть косинус кута між прямими:

- а) BM і C_1K ; в) CM і PK ;
б) AP і MC_1 ; г) D_1K і MC_1 .

475. Діагоналі основи прямокутного паралелепіпеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ перетинаються під кутом 60° , його висота AA_1 рівна меншому ребру BC основи $ABCD$. Точки M , P і K — середини ребер AA_1 , C_1D_1 і BC відповідно. Знайдіть косинус кута між прямими:

- а) A_1K і MC_1 ; в) CP і MK ;
б) DM і A_1K ; г) BP і MC_1 .

476. У основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1D_1$ лежить ромб $ABCD$ з кутом A у 60° , менша діагональ якого рівна баковому ребру. Точки K , M , і P — середини ребер CD , BB_1 і AD відповідно (рис. 378). Знайдіть косинус кута між прямими:

- а) AC_1 і MK ; в) MP і A_1C ;
б) PC_1 і A_1K ; г) DM і AK .

477. Рівнобедренна трапеція $ABCD$, у якій $AB = BC = CD = 0,5AD$, з'являється основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1D_1$. Улічуйте, що

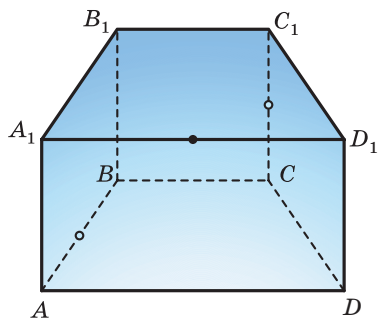


Рис. 379

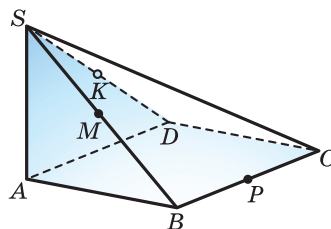


Рис. 380

пункты M , P і K — середіни кантаў AB , CC_1 і A_1D_1 адпаведна і $BC = CC_1$ (рис. 379), знайдзіце косінус вугла паміж прамымі:

а) CK і MP ; б) PK і MD ; в) AP і BK ; г) DP і MK .

- 478.** Бакавы кант SA піраміды $SABCD$ перпендыкулярны яе аснове і роўны старане квадрата $ABCD$. Пункты M , P і K — середіны кантаў SB , BC і SD адпаведна (рис. 380).

Знайдзіце вугал паміж прамымі:

а) PM і BK ; в) SP і CK ;
б) CM і KP ; г) DP і BK .

- 479.** У аснове піраміды $SABCD$ ляжыць прамавугольнік, дыяганалі якога перасякаюцца пад вуглом 60° , вышыня SA піраміды роўная большаму канту AB асновы $ABCD$. Пункты P , K і M — середіны кантаў SA , BC і CD адпаведна (рис. 381). Знайдзіце вугал паміж прамымі:

а) AB і KP ; в) CP і AD ;
б) PM і SK ; г) MK і BP .

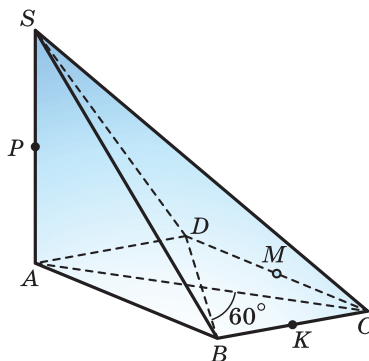


Рис. 381

- 480.** У аснове піраміды $SABCD$ ляжыць ромб з вуглом C у 120° , кант SC перпендыкулярны плоскасці асновы, $SC = CD$. Пункт M — середзіна канта SA , пункт K на канце SD дзеліць яго ў адносіне $2 : 1$, калі лічыць ад вяршыні S (рис. 382). Знайдзіце вугал паміж прамымі:

а) MD і CK ; в) KB і MC ;
б) CM і SK ; г) CP і AD .

- 481.** У аснове прамоў прызмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ ляжыць раўнабедрная трапецыя з асновамі AD і BC , $AD = 2BC = 2AB = AA_1$. Знайдзіце вугал паміж прамымі:

а) AB і DB_1 ; б) CD_1 і DB_1 .

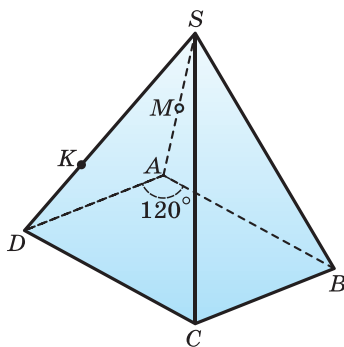


Рис. 382

482. Дві правильні трикутні піраміди $KABC$ і $MABC$ лежать на різних боках від їх спільної основи ABC . Усі плоскі кути при вершинах K і M прямі (рис. 383).

а) Докажіть, що кут між площинами AKB і AMB дорівнює куту між прямими CK і CM .

б) Знайдіть кут між прямими AK і BM .

483. У трикутній піраміді $SABC$ кути BSC , ASC і ASB дорівнюють α , β і γ відповідно. Виразіть:

а) косинус кута між прямою SA і бісектрисою кута BSC ;

б) косинус кута між бісектрисами кутів BSC і ASC .

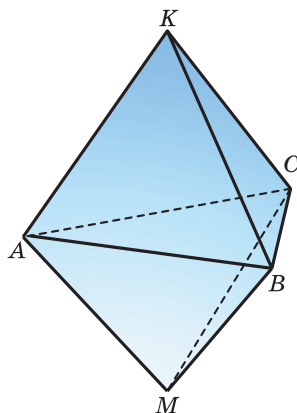


Рис. 383

484. У правильній шестигонній призмі $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ усі ребра дорівнюють a . Знайдіть кут між прямою BC_1 (рис. 384) і прямою:

а) $E_1 C$;

в) $A_1 F$;

д) BF_1 ;

б) $F_1 E$;

г) $A_1 C$;

е) $A_1 D$.

485. У правильній шестигонній призмі $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ усі ребра основи дорівнюють 1, бокові ребра — 2. Знайдіть кут між прямою AE_1 (рис. 385) і прямою:

а) $B_1 D$;

в) $A_1 C$;

д) $F_1 C$;

б) $A_1 D_1$;

г) $A_1 D$;

е) DB_1 .

486. У правильній шестигонній призмі $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ усі ребра основи дорівнюють 1, бокові ребра — 2. Знайдіть відстань між прямою BC_1 (рис. 386) і прямою:

а) $B_1 E$;

в) $B_1 D$;

д) $A_1 E$;

б) $F_1 C$;

г) $A_1 C$;

е) $F_1 D$.

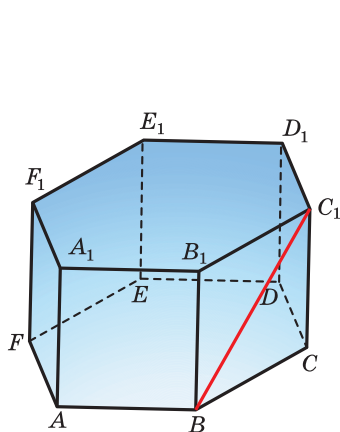


Рис. 384

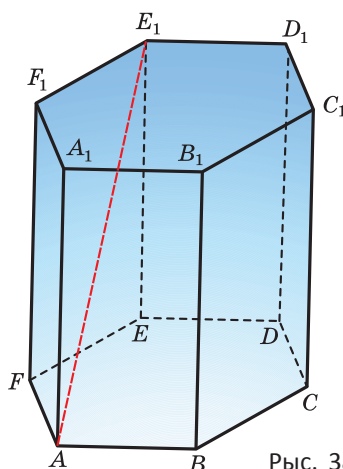


Рис. 385

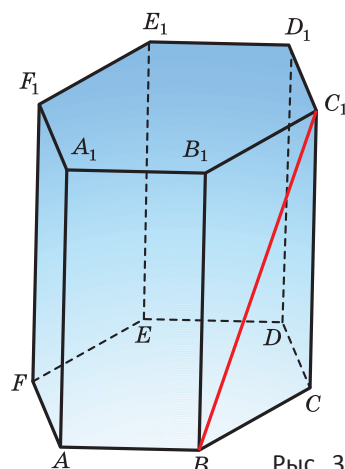


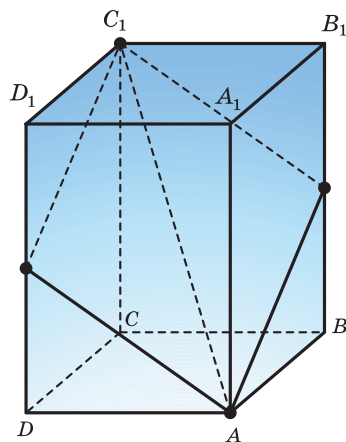
Рис. 386

487. У правільнай шасцівугольнай прызме ўсе канты асновы роўныя 1, бакавыя канты — 2. Знайдзіце адлегласць паміж прамой AE_1 (гл. рыс. 385) і прамой:

- а) B_1D ; в) A_1C ; д) F_1C ;
 б) A_1D_1 ; г) A_1D ; е) F_1B .

488. У правільнай трохвугольнай прызме $ABCA_1B_1C_1$ кант асновы складае $\frac{2}{3}$ бакавога канта. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі ABC і A_1BC_1 .

489. Праз дыяганаль AC_1 правільнай чатырохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ праходзіць плоскасць α , паралельная прамой BD . Ведаючы, што $AB : AA_1 = 1 : \sqrt{2}$ (рыс. 387), знайдзіце вугал паміж плоскасцю α і плоскасцю ABC .



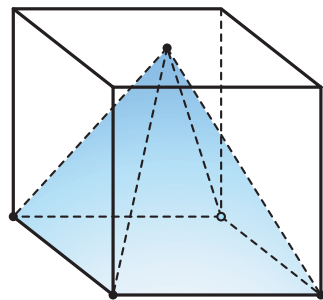
Рыс. 387

490. Усе канты піраміды $ABCD$ роўныя, K і M — сярэдзіны кантаў BD і CD адпаведна. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі:

- а) AKC і ABD ;
 б) ABC і ABD ;
 в) ABC і AKM .

491. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ усе канты роўныя, M — сярэдзіна бакавога канта SA . Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі:

- а) ABS і CDS ; г) ABS і ADS ;
 б) ABC і ADS ; д) ABC і BCM ;
 в) ABC і BDM ; е) ABS і BDM .



Рыс. 388

492. Аснова піраміды супадае з адной гранню куба, а яе вяршыня — з цэнтрам супрацьлеглай грані (рыс. 388). Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі:

- а) супрацьлеглых бакавых граняў піраміды;
 б) асновы і бакавой грані піраміды;
 в) суседніх бакавых граняў піраміды.

493. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ на сярэдзіне канта SA адзначаны пункт M . Ведаючы, што трохвугольнік SBD з'яўляецца правільным, знайдзіце вугал паміж плоскасцямі:

- а) ABS і CDS ; в) SAB і BDM ;
 б) ABC і BDM ; г) SBC і BDM .

494. У правильній чотирикутній призмі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ кант основи роўны 2, бакавы кант роўны 3, пункт K на канце AA_1 адзначаючы так, што $AK : KA_1 = 1 : 2$. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі:
 а) ABC і BKC_1 ; б) $AA_1 C_1$ і BKC_1 ; в) ABC і BKD_1 .
495. У правильнай шасцікутній призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ дыяганаль AC основи ўтварае большую за бакавы кант. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі:
 а) ACA_1 і $B_1 CE_1$; б) ABC і $B_1 CE_1$; в) ADE_1 і $A_1 FD$.
496. У трохкутній пірамідзе $SABC$ пункт M — сярэдзіна канта SA , пункт K — сярэдзіна канта SB , Q — пункт перасячэння медыян основи ABC .
 а) Знайдзіце адносіну, у якой плоскасць MKC раздзяляе адрэзак SQ (рыс. 389).
 б) Прыняўшы, што піраміда правільная і $AB : SA = 2 : 3$, знайдзіце вугал паміж плоскасцямі MKC і ABC .
497. У кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ знайдзіце вугал паміж:
 а) прамой AA_1 і плоскасцю $BC_1 D$;
 б) прамой AC_1 і плоскасцю BDD_1 ;
 в) прамой AB і плоскасцю $BC_1 A_1$;
 г) прамой AA_1 і плоскасцю $BC_1 D$.
498. У правильнай трохкутній призме $ABCA_1 B_1 C_1$ пункт M — сярэдзіна канта BC , $AA_1 : AB = 1 : \sqrt{2}$. Знайдзіце вугал паміж:
 а) прамой MC_1 і плоскасцю ABB_1 ;
 б) прамой AB і плоскасцю $A_1 MC_1$.
499. У правильнай чатырыкутній призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пункты K, P, M — сярэдзіны кантаў AD, AB і $A_1 B_1$ адпаведна. Калі вядома, што $AA_1 : AB = \sqrt{6} : 1$, знайдзіце вугал паміж:
 а) прамой DD_1 і плоскасцю KPM ;
 б) прамой AC_1 і плоскасцю KPM .
500. У правильнай шасцікутній пірамідзе $SABCDEF$ пункт M — сярэдзіна канта SA , $MA = AB$. Знайдзіце вугал паміж:
 а) прамой BM і плоскасцю SDM ;
 б) прамой AC і плоскасцю BDM .
501. Усе канты правильнай шасцікутній прызмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ роўныя, пункт M — сярэдзіна канта BB_1 . Знайдзіце вугал паміж:
 а) прамой AA_1 і плоскасцю BCE_1 ;
 б) прамой BC_1 і плоскасцю AFF_1 ;

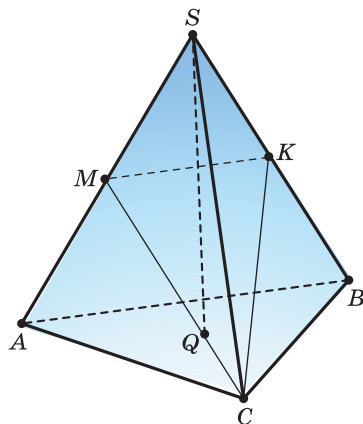


Рис. 389

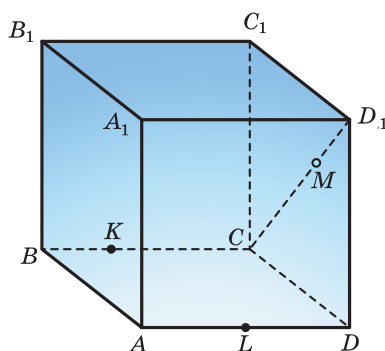
- в) прамой BD_1 і плоскасцю ABB_1 ;
- г) прамой BE_1 і плоскасцю ABB_1 ;
- д) прамой AM і плоскасцю AE_1D ;
- е) прамой DM і плоскасцю CEF_1 ;
- ж) прамой EM і плоскасцю CDF_1 ;
- з) прамой DM і плоскасцю AFC_1 .

502. Усе канты правільнай чатырохвугольнай піраміды $SABCD$ роўныя, пункт K — сярэдзіна канта SD . Знайдзіце вугал паміж:

- а) прамой AK і плоскасцю ABC ;
- б) прамой BK і плоскасцю BSC ;
- в) прамой BK і плоскасцю ASD ;
- г) прамой SA і плоскасцю SCD .

503. На кантах BC , AD і дыяганалі грані CD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ адзначаны пункты K , L і M так, што $BK : KC = 1 : 2$, $AL : LD = 1 : 1$, $CM : MD_1 = 2 : 1$. Кант куба роўны 3 (рыс. 390). Знайдзіце адлегласць d ад пункта:

- а) A_1 да прамой KM ;
- б) M да прамой A_1K ;
- в) L да прамой BM ;
- г) K да прамой AM ;
- д) L да прамой AM ;
- е) K да прамой LM .



Рыс. 390

504. У аснове прамой чатырохвугольнай прызмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ляжыць ромб, $\angle BCD = 60^\circ$, $AB = 2$, $AA_1 = AC$, пункты K , P , M — сярэдзіны кантаў AD , AB і $A_1 B_1$ адпаведна. Знайдзіце адлегласць d ад пункта:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| а) A да прамой PC_1 ; | д) M да прамой $D_1 P$; |
| б) A да прамой KB_1 ; | е) K да прамой $B_1 P$; |
| в) C да прамой KM ; | ж) P да прамой MD_1 ; |
| г) D да прамой MP ; | з) K да прамой $A_1 C$. |

505. Усе канты правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ роўныя a , пункт M — сярэдзіна канта AA_1 . Знайдзіце адлегласць ад пункта:

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| а) A да прамой BC_1 ; | д) M да прамой BE_1 ; |
| б) A_1 да прамой BF_1 ; | е) M да прамой BF_1 ; |
| в) D_1 да прамой AE_1 ; | ж) M да прамой FD_1 ; |
| г) D да прамой AE_1 ; | з) M да прамой $F_1 C$. |

- 506.** Усе канты правільнай чатырохвугольнай піраміды $SABCD$ роўныя a , пункты K і M — сярэдзіны кантаў CD і SD адпаведна. Знайдзіце адлегласць ад пункта:
- а) A да прамой BM ; в) K да прамой BM ;
 б) A да прамой CM ; г) A да прамой MK .
- 507.** У правільнай шасцівугольнай пірамідзе $SABCDEF$ пункт M — сярэдзіна канта SA , $MA = AB = a$. Знайдзіце адлегласць ад пункта:
- а) M да прамой BC ; д) F да прамой BM ;
 б) M да прамой BD ; е) F да прамой CM ;
 в) M да прамой CD ; ж) E да прамой BM ;
 г) C да прамой ME ; з) E да прамой CM .
- 508.** Усе канты асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды $SABCD$ роўныя a , бакавыя канты роўныя $2a$, пункты K і M — сярэдзіны кантаў BC і SD адпаведна. Знайдзіце адлегласць ад пункта:
- а) A да плоскасці SCD ; в) K да плоскасці BMA ;
 б) A да плоскасці BCM ; г) C да плоскасці AMK .
- 509.** У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ усе плоскія вуглы пры вяршыні S прамыя, канты SA , SB і SC роўныя a , b і c адпаведна. Знайдзіце:
- а) вышыню піраміды, праведзеную з вяршыні S ;
 б) даўжыню адрэзка SK , дзе K — пункт плоскасці ABC , роўнаадлеглы ад трох іншых граняў піраміды.
- 510.** У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ усе плоскія вуглы пры вяршыні S прамыя, канты SA , SB і SC роўныя a , b і c адпаведна. Знайдзіце:
- а) радыус апісанага каля піраміды шара;
 б) радыус умежанага ў піраміду шара.
- 511.** У правільнай шасцівугольнай пірамідзе $SABCDEF$ пункты M і K — сярэдзіны кантаў SA і SC адпаведна, $MA = AB = a$. Знайдзіце адлегласць ад пункта:
- а) M да плоскасці BEK ; д) M да плоскасці BDK ;
 б) M да плоскасці ACK ; е) A да плоскасці BKF ;
 в) E да плоскасці BMK ; ж) F да плоскасці BMK ;
 г) B да плоскасці KMD ; з) M да плоскасці ABK .
- 512.** У аснове прамой чатырохвугольнай прызмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ляжыць ромб, $\angle BCD = 60^\circ$, $AB = 2$, $AA_1 = AC$, пункты K , P , M — сярэдзіны кантаў AD , AB і $A_1 B_1$ адпаведна. Знайдзіце адлегласць ад пункта:
- а) A да прамой PC_1 ; д) M да прамой $D_1 P$;
 б) A да прамой KB_1 ; е) K да прамой $B_1 P$;
 в) C да прамой KM ; ж) P да прамой MD_1 ;
 г) D да прамой MP ; з) K да прамой $A_1 C$.

- 513.** Усе канты правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ роўныя a , пункт M — сярэдзіна канта AA_1 . Знайдзіце адлегласць ад пункта:
- а) A да плоскасці BCE_1 ; д) M да плоскасці BCE_1 ;
б) A_1 да плоскасці BCF_1 ; е) M да плоскасці BCF_1 ;
в) D_1 да плоскасці ACE_1 ; ж) M да плоскасці ACE_1 ;
г) F да плоскасці ACE_1 ; з) M да плоскасці AFC_1 .
- 514.** У пірамідзе $ABCD$ усе канты роўныя a , пункты M , K і P — сярэдзіны кантаў AB , AC і BD адпаведна. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі:
- а) AC і BD ; в) AB і KP ; д) AK і CM ;
б) MP і AC ; г) BC і MD ; е) AP і CM .
- 515.** У правільнай пірамідзе $SABCD$ усе канты роўныя a , пункты K і M — сярэдзіны кантаў AB і SD адпаведна. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі:
- а) AC і SB ; в) AD і KM ; д) MK і CB ;
б) BC і SA ; г) SB і MC ; е) AM і CK .
- 516.** У аснове прамой чатырохвугольнай прызмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ляжыць ромб, $\angle BCD = 60^\circ$, $AB = 2$, $AA_1 = AC$, пункты K , P , M — сярэдзіны кантаў AD , AB і $A_1 B_1$ адпаведна. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі:
- а) AC і MB_1 ; в) KM і CD ; д) MD_1 і $C_1 K$;
б) BC і PC_1 ; г) KP і MC ; е) $C_1 P$ і DM .
- 517.** Усе канты правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ роўныя a , пункты K , P , M — сярэдзіны кантаў AF , DE і BB_1 адпаведна. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі:
- а) AC і MP ; в) KM і CD ; д) MD_1 і KP ;
б) BC і PC_1 ; г) KP і MC ; е) $C_1 P$ і DM .

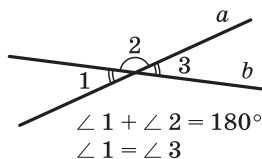
ДАВЕДАЧНЫ МАТЭРЫЯЛ

Дзве прамыя

Дзве прамыя a і b могуць быць паралельнымі (рыс. 382) або перасякальнымі (рыс. 383).



Рыс. 382

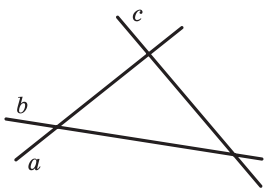


Рыс. 383

Перасякальныя прамыя раздзяляюць плоскасць на чатыры вуглы, пары якіх маюць спецыяльныя назвы. Вуглы 1 і 2, якія маюць агульную старану, называюць *сумеснымі*, а вуглы 1 і 3, стораны кожнага з якіх з'яўляюцца працягамі старон другога вугла, — *вертыкальнымі*. Сумесныя вуглы разам складаюць 180° , а вертыкальныя вуглы роўныя адзін аднаму.

Тры прамыя

Сярод трох прамых a , b , c можа не быць паралельных прамых (рыс. 384) або такія прамыя могуць быць. Калі паралельныя прамыя a і b ёсць, то трэцяя прамая c можа быць паралельнай ім (рыс. 385) або перасякаць іх (рыс. 386).



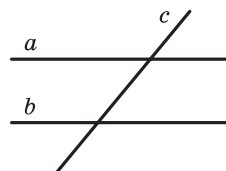
Рыс. 384



Калі $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

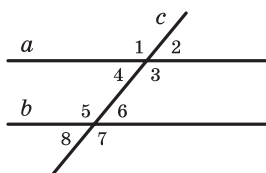
Калі $a \parallel b$ і $a \parallel c$, то $b \parallel c$.

Рыс. 385

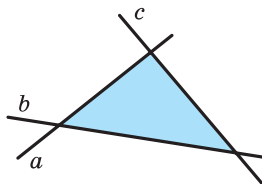


Рыс. 386

Калі дзве прамыя a і b перасечаны трэцяй прамой, то ўтвараюцца 8 вуглоў (рыс. 387). Вуглы 1 і 5, 2 і 6, 3 і 7, 4 і 8 называюцца *адпаведнымі*, вуглы 3 і 5, 4 і 6 — *унутранымі накрывлеглымі*, вуглы 3 і 6, 4 і 5 — *унутранымі аднабаковымі*.



Рыс. 387



Рыс. 388

Уласцівасці паралельных прамых: калі прамыя a і b паралельныя, то пры перасячэнні іх трэцяй прамой адпаведныя вуглы роўныя, унутраныя накрывжлеглыя вуглы роўныя, а ўнутраныя аднабаковыя разам складаюць 180° .

Прыметы паралельных прамых: прамыя a і b паралельныя, калі пры перасячэнні іх трэцяй прамой адпаведныя вуглы роўныя, унутраныя накрывжлеглыя вуглы роўныя, а ўнутраныя аднабаковыя разам складаюць 180° .

Тры папарна перасякальныя прамыя абмяжоўваюць на плоскасці трохвугольнік (рыс. 388).

Трохвугольнік

Уласцівасці трохвугольніка (рыс. 389):

- сума ўнутраных вуглоў роўная 180° :

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ;$$

- кожная старана трохвугольніка меншая за суму дзвюх іншых яго старон і большая за іх рознасць:

$$b - c < a < b + c;$$

$$a - c < b < a + c;$$

$$a - b < c < a + b;$$

- большаму вуглу адпавядае большая супрацьлеглая старана: калі

$$\angle A > \angle C, \text{ то } a > c;$$

- большай старане адпавядае большы супрацьлеглы вугал:

$$\text{калі } a > c, \text{ то } \angle A > \angle C;$$

- тэарэма косінусаў:** квадрат стараны роўны суме квадратаў дзвюх іншых старон без падвоенага здабытку гэтых старон і косінуса вугла паміж імі:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

- тэарэма сінусаў:** стараны прапарцыянальныя сінусам супрацьлеглых вуглоў;

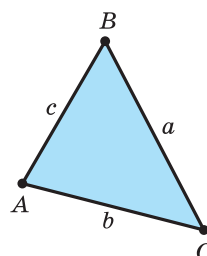
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Акрамя старон і вуглоў трохвугольнік мае іншыя элементы.

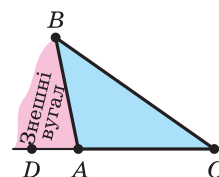
Знешні вугал трохвугольніка — вугал, сумежны з яго ўнутраным вуглом (рыс. 390).

Знешні вугал трохвугольніка роўны суме двух яго ўнутраных вуглоў, не сумежных з ім:

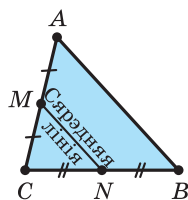
$$\angle BAD = \angle B + \angle C.$$



Рыс. 389



Рыс. 390



Рыс. 391

Сярэдняя лінія трохвугольніка — адрэзак, што злучае сярэдзіны дзвюх яго старон (рыс. 391).

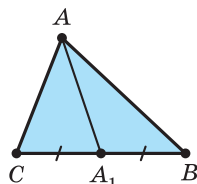
Сярэдняя лінія трохвугольніка паралельная трэцяй старане (аснове) і роўная яе палавіне:

$$MN \parallel AB, MN = \frac{1}{2}AB.$$

Медыяна трохвугольніка — адрэзак, што злучае вяршыню трохвугольніка з сярэдзінай супрацьлеглай стараны (рыс. 392).

Медыяны трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, які адсякае ад кожнай з іх трэцюю долю, калі лічыць ад стараны (рыс. 393):

$$A_1G = \frac{1}{3} AA_1, B_1G = \frac{1}{3} BB_1, C_1G = \frac{1}{3} CC_1.$$

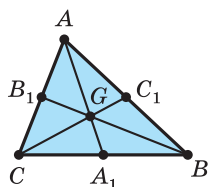


Рыс. 392

Бісектрыса трохвугольніка — адрэзак бісектрысы вугла трохвугольніка, заключаны паміж яго вяршыняй і супрацьлеглай стараной (рыс. 394).

Бісектрыса трохвугольніка дзеліць супрацьлеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам:

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}.$$



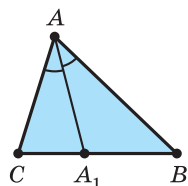
Рыс. 393

Бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце (рыс. 395).

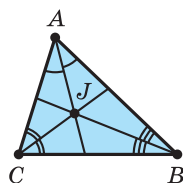
Вышыня трохвугольніка — перпендыкуляр, апущаны з вяршыні трохвугольніка на прамую, што праходзіць праз супрацьлеглую яго старану (рыс. 396).

Прамая, што праходзіць праз вышыні трохвугольніка, перасякаюцца ў адным пункце (рыс. 397).

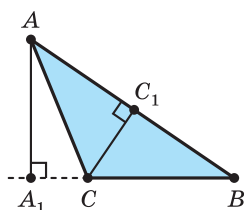
Плошча трохвугольніка роўная палавіне здабытку стараны і праведзенай да яе вышыні, або здабытку



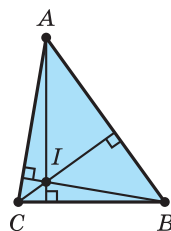
Рыс. 394



Рыс. 395

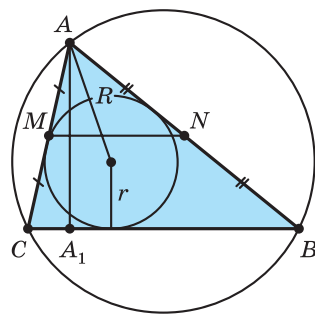


Рыс. 396



Рыс. 397

вышыні трохвугольніка і перпендыкулярнай ёй сярэдняй лініі, або палавіне здабытку дзвюх яго старон і сінуса вугла паміж імі, або квадратаму кораню са здабытку паўперыметра і трох рознасцей паўперыметра з кожнай стараной, або здабытку паўперыметра і радыуса ўмежанай акружнасці, або здабытку трох старон трохвугольніка, падзеленаму на пачацвяроны радыус апісанай акружнасці (рыс. 398):



Рыс. 398

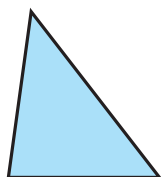
$$p = \frac{1}{2} (AB + BC + CA);$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AA_1 = AA_1 \cdot MN = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC =$$

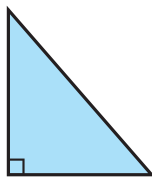
$$= \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} = pr = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}.$$

Прамавугольны трохвугольнік

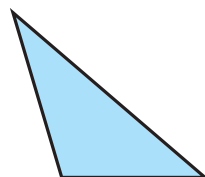
Два вуглы трохвугольніка абавязкова вострыя, а трэці — большы — яго вугал можа быць і вострым (рыс. 399), і прамым (рыс. 400), і тупым (рыс. 401). У адпаведнасці з гэтым трохвугольнікі падзяляюць на *востравугольныя*, *прамавугольныя*, *тупавугольныя*.



Рыс. 399



Рыс. 400



Рыс. 401

Уласцівасці *прамавугольнага трохвугольніка* (рыс. 402).

- Вострыя вуглы разам складаюць 90° :

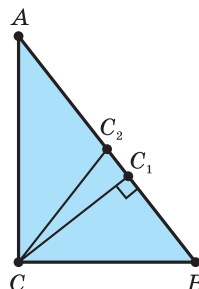
$$\angle A + \angle B = 90^\circ;$$

- *тэарэма Піфагора*: квадрат гіпатэнузы роўны суме квадратаў катэтаў:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2;$$

- калі катэт ляжыць насупраць вугла ў 30° , то ён роўны палавіне гіпатэнузы;

- калі катэт роўны палавіне гіпатэнузы, то ён ляжыць насупраць вугла ў 30° ;



Рыс. 402

• медыяна, праведзеная да гіпатэнузы, роўная палавіне гэтай гіпатэнузы і з'яўляецца радыусам апісанай акружнасці:

$$CC_2 = AC_2 = BC_2;$$

• вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, з'яўляецца сярэднім геаметрычным адрэзкаў, на якія яна раздзяляе гіпатэнузу, а катэт ёсць сярэдняе геаметрычнае гіпатэнузы і праекцыі гэтага катэта на гіпатэнузу:

$$CC_1 = \sqrt{AC_1 \cdot BC_1},$$

$$AC = \sqrt{AB \cdot AC_1},$$

$$BC = \sqrt{AB \cdot BC_1};$$

• сінус вострага вугла роўны адносіне супрацьлеглага катэта да гіпатэнузы; косінус вострага вугла роўны адносіне прылеглага катэта да гіпатэнузы; тангенс вострага вугла роўны адносіне супрацьлеглага катэта да прылеглага; катангенс вострага вугла роўны адносіне прылеглага катэта да супрацьлеглага:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}; \cos A = \frac{AC}{AB};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}; \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Прыметы прамавугольнага трохвугольніка. Трохвугольнік з'яўляецца прамавугольным, калі:

- сума двух якіх-небудзь яго вуглоў роўная 90° ;
- квадрат большай яго стараны роўны суме квадратаў дзвюх іншых старон;
- адна з яго медыян роўная палавіне стараны, да якой праведзена.

Раўнабедраны трохвугольнік

Калі трохвугольнік мае дзве роўныя стараны, яго называюць *раўнабедраным* (рыс. 403). Раўнабедраны трохвугольнік з трыма роўнымі старанамі называюць *роўнастароннім* (рыс. 404).

Уласцівасці раўнабедранага трохвугольніка (рыс. 405):

- вуглы пры аснове роўныя:

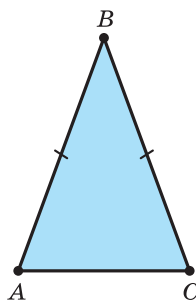
$$\angle A = \angle C;$$

- медыяна, бісектрыса, вышыня, праведзеныя да асновы, супадаюць:

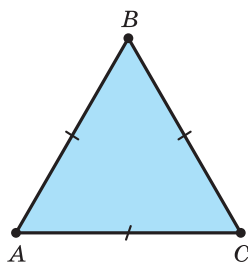
калі BB_1 — медыяна, то BB_1 — бісектрыса і вышыня;

калі BB_1 — бісектрыса, то BB_1 — медыяна і вышыня;

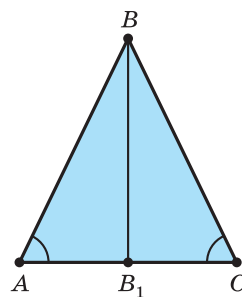
калі BB_1 — вышыня, то BB_1 — бісектрыса і медыяна.



Рыс. 403



Рыс. 404



Рыс. 405

Прыметы раўнабедранага трохвугольніка. Трохвугольнік з'яўляецца раўнабедраным, калі:

- дзве яго стараны роўныя;
- два яго вуглы роўныя;
- медыяна і вышыня, або медыяна і бісектрыса, або вышыня і бісектрыса, праведзеныя з адной вяршыні, супадаюць.

Роўнасць фігур

Роўныя фігуры — фігуры, якія супадаюць пры накладанні.

Прыметы роўнасці трохвугольнікаў. Трохвугольнікі з'яўляюцца роўнымі, калі яны маюць роўныя:

- вугал і прылеглыя да яго стараны;
- старану і прылеглыя да яе вуглы;
- тры стараны.

Прыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў. Прамавугольныя трохвугольнікі з'яўляюцца роўнымі, калі ў іх адпаведна роўныя:

- катэты;
- катэт і прылеглы да яго востры вугал;
- гіпатэнузу і востры вугал;
- гіпатэнузу і катэт.

Падобнасць фігур

Тэарэма Фалеса. Калі на адной старане вугла адкладзі роўныя адрэзкі і праз іх канцы правесці паралельныя прамыя, якія перасякаюць другую старану вугла, то гэтыя прамыя на другой старане высякаюць таксама роўныя адрэзкі.

Падобныя трохвугольнікі — трохвугольнікі, вуглы якіх папарна роўныя, а адпаведныя стараны прапарцыянальныя.

Прыметы падобнасці трохвугольнікаў. Трэхвугольнікі з'яўляюцца падобнымі, калі ў іх:

- ёсць па роўным вугле, а прылеглыя да іх стораны прапарцыянальныя;
- ёсць па два роўныя вуглы;
- усе тры стараны прапарцыянальныя.

Адносіна любых адпаведных лінейных элементаў падобных трохвугольнікаў роўная каэфіцыенту падобнасці. Адносіна перыметраў падобных многавугольнікаў роўная каэфіцыенту падобнасці. Адносіна плошчаў падобных многавугольнікаў роўная квадрату каэфіцыента падобнасці. Адносіна аб'ёмаў падобных фігур-цел роўная кубу каэфіцыента падобнасці.

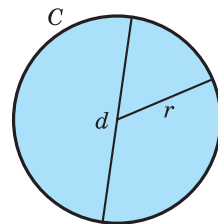
Акружнасць і круг

Адносіна даўжыні C акружнасці да яе дыяметра d ёсць адна і тая для любой акружнасці (рыс. 406). Гэта адносіна выражае лік, які абазначаецца π .

$$\pi = \frac{C}{d} = 3,141592\dots$$

Даўжыні C акружнасці, плошча S адпаведнага круга і іх радыус r звязаны формуламі:

$$C = 2\pi r; S = \pi r^2; S = \frac{C}{2} r.$$



Рыс. 406

Акружнасць і вугал

Вугал, вяршыня якога знаходзіцца ў цэнтры круга, называецца *цэнтральным вуглом*.

Вугал, вяршыня якога належыць акружнасці, а стораны маюць з акружнасцю агульныя пункты, называецца *ўмежаным (упісаным) вуглом* (рыс. 407).

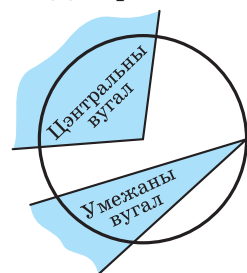
Умежаны вугал вымяраецца палавінай дугі, на якую ён абাপіраецца.

Умежаны вугал, які абাপіраецца на дыяметр, з'яўляецца прамым.

Умежаныя вуглы, што абাপіраюцца на адну дугу, роўныя.

Вугал з вяршыняй унутры круга вымяраецца паўсумай дуг, адна з якіх заключана паміж сторонамі дадзенага вугла, а другая — паміж сторонамі вугла, вертыкальнага дадзенаму.

Вугал, вяршыня якога знаходзіцца па-за кругам, а стораны перасякаюць акружнасць, вымяраецца паўрознасцю дуг, якія гэты вугал высякае з акружнасці.



Рыс. 407

Акружнасць і прамая

Сякучая — прамая, якая мае з акружнасцю два агульныя пункты.

Датычная — прамая, якая мае з акружнасцю адзін агульны пункт (рыс. 408).

Уласцівасць датычнай: датычная перпендыкулярная да радыуса, праведзенага ў пункт дотыку.

Прымета датычнай. Прамая з'яўляецца датычнай, калі яна праходзіць праз пункт акружнасці і перпендыкулярная да радыуса, праведзенага ў гэты пункт.

Вугал паміж датычнай і сякучай, праведзенай праз пункт дотыку, вымяраецца палавінай дугі, якую гэты вугал заключае.

Адрэзкі дзвюх датычных, праведзеных праз адзін пункт, заключаныя паміж гэтым пунктам і пунктамі дотыку, роўныя аднаму.

Здабыткі адрэзкаў перасякальных хорд роўныя (і роўныя $r^2 - a^2$, дзе r — радыус круга, a — адлегласць ад цэнтра да пункта перасячэння).

Калі сякучая і датычная праходзяць праз дадзены пункт па-за кругам, то здабытак адрэзкаў сякучай, што злучаюць гэты пункт з пунктамі перасячэння сякучай з акружнасцю, роўны квадрату адрэзка датычнай з канцамі ў дадзеным пункце і пункце дотыку.

Калі сякучая праходзіць праз пункт па-за кругам, то здабытак адрэзкаў, што злучаюць гэты пункт з пунктамі перасячэння сякучай з акружнасцю, ёсць велічыня пастаянная (роўная $a^2 - r^2$, дзе r — радыус круга, a — адлегласць ад цэнтра да выбранага пункта).

Акружнасць і трохвугольнік

Акружнасць, умежаная ў многавугольнік, — акружнасць, якая датыкаецца да ўсіх старон многавугольніка.

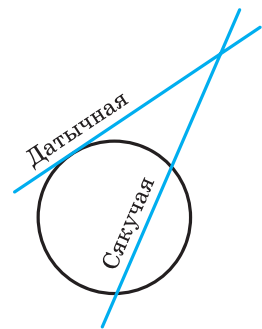
Акружнасць, апісаная каля многавугольніка, — акружнасць, якая праходзіць праз усе вяршыні многавугольніка.

Цэнтр умежанай акружнасці супадае з пунктам перасячэння бісектрыс трохвугольніка.

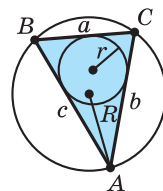
Цэнтр апісанай акружнасці супадае з пунктам перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да старон трохвугольніка (рыс. 409).

Радыусы r і R умежанай і апісанай акружнасцей звязаны з іншымі элементамі трохвугольніка формуламі:

$$r = \frac{S}{p}; R = \frac{abc}{4S}; \frac{a}{\sin A} = 2R.$$



Рыс. 408



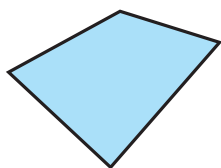
Рыс. 409

Чатырохвугольнік

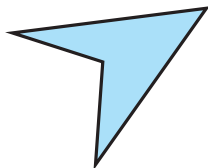
Плоская замкнёная чатырохзвёная ломаная вылучае з плоскасці *чатырохвугольнік*. Чатырохвугольнік на рысунку 410 — *выпуклы*, а на рысунку 411 — *нявыпуклы*. Звычайна разглядаюць выпуклыя чатырохвугольнікі.

Уласцівасці чатырохвугольніка:

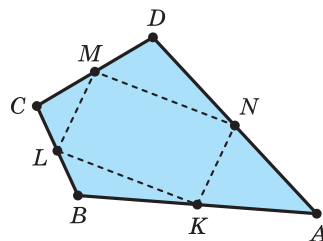
- сума ўнутраных вуглоў роўная 360° ;
- сярэдзіны старон чатырохвугольніка з'яўляюцца вяршынямі паралелаграма (рыс. 412);
- плошча чатырохвугольніка роўная палавіне здабытку яго дыяганалей і сінуса вугла паміж імі.



Рыс. 410



Рыс. 411



Рыс. 412

Трапецыя

Трапецыя — чатырохвугольнік, у якога дзве стараны паралельныя, а дзве іншыя стараны — непаралельныя (рыс. 413).

Уласцівасці трапецыі (рыс. 414):

- сума вуглоў, прылеглых да бакавой стараны, роўная 180° :

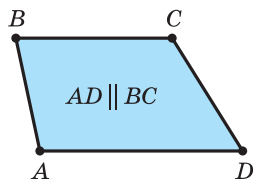
$$\angle A + \angle B = 180^\circ; \angle C + \angle D = 180^\circ;$$

- сярэдняя лінія трапецыі паралельная яе асновам і роўная іх паўсуме:

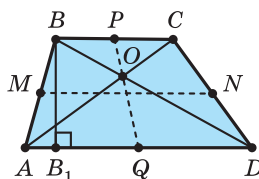
$$MN \parallel AD, MN \parallel BC, MN = \frac{1}{2}(AD + BC);$$

- плошча трапецыі роўная здабытку яе сярэдняй лініі і вышыні:

$$S_{ABCD} = BB_1 \cdot MN;$$



Рыс. 413



Рыс. 414

• з трохвугольнікаў, на якія дыяганалі раздзяляюць трапецыю, трохвугольнікі, прылеглыя да яе асноў, — падобныя, а трохвугольнікі, прылеглыя да бакавых старон, — роўнавялікія:

$$\Delta AOD \sim \Delta BOC; S_{AOB} = S_{DOC}.$$

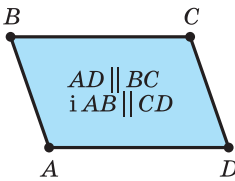
Паралелаграм

Паралелаграм — чатырохвугольнік, у якога дзве пары паралельных старон (рыс. 415).

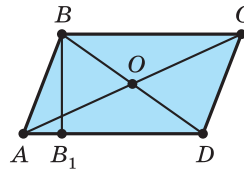
Уласцівасці паралелаграма (рыс. 416):

• сума вуглоў, прылеглых да любой яго стараны, роўная 180° :

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B &= 180^\circ \text{ і } \angle B + \angle C = 180^\circ \\ \text{і } \angle C + \angle D &= 180^\circ \text{ і } \angle D + \angle A = 180^\circ; \end{aligned}$$



Рыс. 415



Рыс. 416

• яго супрацьлеглыя стараны паралельныя і роўныя:

$$AD \parallel BC \text{ і } AB \parallel CD; AD = BC \text{ і } AB = CD;$$

• яго супрацьлеглыя вуглы роўныя:

$$\angle A = \angle C \text{ і } \angle B = \angle D;$$

• пункт перасячэння дыяганалей дзеліць іх папалам:

$$AO = CO; BO = DO;$$

• пункт перасячэння дыяганалей ёсць цэнтр сіметрыі паралелаграма;

• плошча роўная здабытку стараны і праведзенай да яе вышыні:

$$S_{ABCD} = AD \cdot BB_1.$$

Прыметы паралелаграма. Чатырохвугольнік з'яўляецца паралелаграмам, калі:

• сумы вуглоў, прылеглых да якіх-небудзь дзвюх сумежных старон, роўныя 180° кожная:

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B &= 180^\circ \text{ і } \angle B + \angle C = 180^\circ, \text{ або } \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ і } \\ \angle C + \angle D &= 180^\circ, \text{ або } \angle C + \angle D = 180^\circ \text{ і } \angle D + \angle A = 180^\circ, \text{ або } \\ \angle D + \angle A &= 180^\circ \text{ і } \angle A + \angle B = 180^\circ; \end{aligned}$$

• яго супрацьлеглыя стараны роўныя:

$$AD = BC \text{ і } AB = CD;$$

- ён мае пару супрацьлеглых паралельных і роўных старон:

$$AD \parallel BC \text{ і } AD = BC \text{ або } AB = CD \text{ і } AB \parallel CD;$$

- яго супрацьлеглыя вуглы роўныя:

$$\angle A = \angle C \text{ і } \angle B = \angle D;$$

- яго дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца папалам:

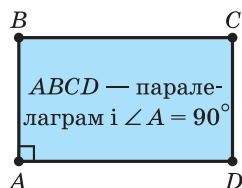
$$AO = CO; BO = DO.$$

Прамавугольнік

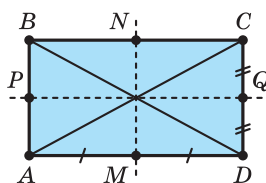
Прамавугольнік — паралелаграм, у якога ёсць прамы вугал (рыс. 417).

Уласцівасці прамавугольніка (рыс. 418):

- усе яго вуглы роўныя адзін аднаму і прамыя:



Рыс. 417



Рыс. 418

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ;$$

- яго дыяганалі роўныя:

$$AC = BD;$$

- пасярэднія перпендыкуляры да яго старон з'яўляюцца восьмі сіметрыі;

- яго плошча роўная здабытку сумежных старон:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD.$$

Прыметы прамавугольніка. Паралелаграм з'яўляецца прамавугольнікам, калі:

- яго дыяганалі роўныя:

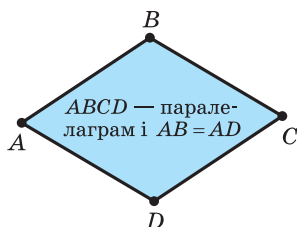
$$AC = BD;$$

- пасярэдні перпендыкуляр да якой-небудзь стараны паралелаграма з'яўляецца яго восью сіметрыі; MN — вось сіметрыі або PQ — вось сіметрыі.

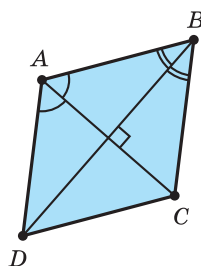
Ромб

Ромб — паралелаграм, у якога ёсць роўныя сумежныя стараны (рыс. 419).

Уласцівасці ромба (рыс. 420):



Рыс. 419



Рыс. 420

- усе яго стораны роўныя адна адной:

$$AB = BC = CD = DA;$$

- яго дыяганалі перпендыкулярныя:

$$AC \perp BD;$$

- яго дыяганалі дзеляць вуглы папалам:

$$\angle ABD = \angle CBD \text{ і } \angle BCA = \angle DCA;$$

- прамыя, якім належаць яго дыяганалі, з'яўляюцца восьямі сіметрыі;

- яго плошча роўная палавіне здабытку дыяганалей:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Прыметы ромба. Паралелаграм з'яўляецца ромбам, калі:

- ён мае пару роўных сумежных старон:

$$AB = BC \text{ або } BC = CD \text{ або } CD = DA \text{ або } DA = AB;$$

- яго дыяганалі перпендыкулярныя:

$$AC \perp BD;$$

- яго дыяганалі дзеляць вуглы папалам:

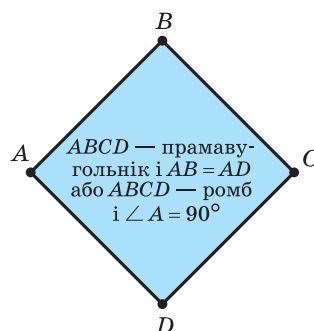
$$\angle ABD = \angle CBD \text{ і } \angle BCA = \angle DCA;$$

- прамыя, якім належаць яго дыяганалі, з'яўляюцца восьямі сіметрыі.

Квадрат

Квадрат — прамавугольнік, у якога ёсць роўныя сумежныя стораны, або ромб, у якога ёсць прамы вугал (рыс. 421).

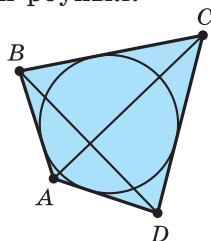
Паколькі квадрат з'яўляецца і прамавугольнікам і ромбам, то ён валодае ўсімі ўласцівасцямі прамавугольніка і ўсімі ўласцівасцямі ромба.



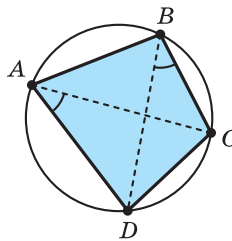
Рыс. 421

Акружнасць і чатырохвугольнік

Уласцівасць апісанага чатырохвугольніка (рыс. 422): сумы супрацьлеглых старон роўныя.



Рыс. 422



Рыс. 423

Прымета апісанага чатырохвугольніка. Чатырохвугольнік з'яўляецца апісаным каля акружнасці, калі ў яго роўныя сумы супрацьлеглых старон.

Уласцівасць ўмежанага чатырохвугольніка (рыс. 423):

а) сума супрацьлеглых вуглоў роўная 180° :

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ;$$

б) здабытак дыяганалей роўны суме здабыткаў супрацьлеглых старон:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Прыметы ўмежанага чатырохвугольніка. Чатырохвугольнік з'яўляецца ўмежаным у акружнасць, калі:

а) сума супрацьлеглых вуглоў роўная 180° :

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ;$$

б) вуглы, кожны з якіх утвораны стараной і дыяганаллю і якія абпіраюцца на адну старану, роўныя:

$$\angle ACB = \angle ADB, \text{ або } \angle BAC = \angle BDC, \text{ або}$$

$$\angle CAD = \angle CBD, \text{ або } \angle ACD = \angle ABD.$$

Абазначэнні геаметрычных фігур, геаметрычных велічынь, дачыненняў паміж імі і аперацый над фігурамі

$\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$ — геаметрычная фігура;

$\emptyset$ — пустое мноства;

$A, B, C, D, \dots, X, Y, Z, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \dots Z_1, Z_2, Z_3, \dots, A_n \dots$ — пункты прасторы;

$a, b, c, d, \dots, x, y, z, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots z_1, z_2, z_3, \dots, a_n \dots$ — прамыя прасторы;

$\omega(A, r)$ — акружнасць з цэнтрам у пункце A і з радыусам r ;

(AB) — прамая, што праходзіць праз пункты A і B ;

$[AB]$ — прамень з пачаткам у пункце A , што праходзіць праз пункт B ;

$\overline{AB}$ — адрэзак з канцамі ў пунктах A і B ;

(ABC) — плоскасць, якая праходзіць праз пункты A, B, C ;

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \chi, \psi, \omega$ — плоскасці прасторы;

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \chi, \psi, \omega$ — велічыня плоскага вугла;

- $\angle ABC$ — вугал з вяршыняй у пункце B ;
 $\triangle ABC$ — трохвугольнік ABC ;
 $\cup AB$ — дуга AB ;
 $|AB|$ — адлегласць ад пункта A да пункта B ; даўжыня адрэзка AB ;
 $|Aa|$ — адлегласць ад пункта A да прамой a ;
 $|A\alpha|$ — адлегласць ад пункта A да плоскасці α ;
 $|ab|$ — адлегласць паміж прамымі a і b ;
 $|\alpha\beta|$ — адлегласць паміж плоскасцямі α і β ;
 $^\circ$ — градус;
 $'$ — мінута;
 $''$ — секунда ($\angle ABC = 45^\circ 15' 30''$);
 ∞ — бясконцасць;
 P_{ABCD} — перыметр чатырохвугольніка $ABCD$;
 p_{ABC} — паўперыметр трохвугольніка ABC ;
 S_{ABC} — плошча трохвугольніка ABC ;
 $S_{\text{бак}}$ — плошча бакавой паверхні фігуры;
 $S_{\text{поўн}}$ — плошча поўнай паверхні фігуры;
 $A = B$ — пункт A супадае з пунктам B ;
 $a = b$ — прамая a супадае з прамой b ;
 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ — трохвугольнік ABC роўны трохвугольніку $A_1B_1C_1$;
 $|AB| = |AC|$ — адлегласць ад пункта A да пункта B роўная адлегласці ад пункта A да пункта C ;
 $\alpha \cap \beta = a$ — плоскасці α і β перасякаюцца па прамой a ;
 $a \cap b = \emptyset$ — прамыя a і b не перасякаюцца;
 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ — трохвугольнік ABC падобны трохвугольніку $A_1B_1C_1$;
 $a \parallel b$ — прамая a паралельная прамой b ;
 $a \nparallel b$ — прамая a не паралельная прамой b ;
 $\alpha \parallel b$ — плоскасць α паралельная прамой b ;
 $\alpha \parallel \beta$ — плоскасць α паралельная плоскасці β ;
 $a \perp b$ — прамая a перпендыкулярная прамой b ;
 $a \nperp b$ — прамая a не перпендыкулярная прамой b ;
 $\alpha \perp b$ — плоскасць α перпендыкулярная прамой b ;
 $\alpha \perp \beta$ — плоскасць α перпендыкулярная плоскасці β ;
 $a \dashv b$ — прамая a скрыжаваная з прамой b ;
 $C \in b$ — пункт C належыць прамой b ;
 $C \notin b$ — пункт C не належыць прамой b ;
 $C \in \alpha$ — пункт C належыць плоскасці α ;
 $a \subset \alpha$ — прамая a ляжыць у плоскасці α ;
 $a \not\subset \alpha$ — прамая a не ляжыць у плоскасці α ;
 $\triangle ABC \subset \alpha$ — трохвугольнік ABC ляжыць у плоскасці α ;
 $\text{Пр}_\alpha AB$ — праекцыя прамой AB на плоскасць α ;
 $\Phi_1 \cap \Phi_2$ — перасячэнне (агульная частка) фігур Φ_1 і Φ_2 ;
 $\Phi_1 \cup \Phi_2$ — аб'яднанне фігур Φ_1 і Φ_2 .

Адказы

Раздзел 1

6. 198 см^2 ; $18(11+\sqrt{3}) \text{ см}^2$. 7. а) 150; $12,5(12+\sqrt{3})$; б) 1200; 1400; в) 3456; $108(32+9\sqrt{3})$. 8. $7,5(10+\sqrt{3}) \text{ см}^2$; 9. 416 м^2 ; 656 м^2 . 10. 1320 см^2 . 11. а) 13 см; б) $195\sqrt{3} \text{ см}^2$; в) $270\sqrt{3} \text{ см}^2$. 12. а) $3\sqrt{34} \text{ см}$; б) 540 см^2 ; в) 864 см^2 . 13. $37,5\sqrt{3} \text{ см}^2$. 14. а) 13 см; 12 см; б) 360 см^2 ; в) $30(12+5\sqrt{3}) \text{ см}^2$. 15. а) $2\sqrt{217} \text{ см}$; $16\sqrt{3} \text{ см}$; б) $1248\sqrt{3} \text{ см}^2$; в) $2400\sqrt{3} \text{ см}^2$. 16. а) $2\sqrt{58} \text{ см}$; $2\sqrt{65} \text{ см}$; б) 296 см^2 ; в) 392 см^2 . 17. а) $\sqrt{142-45\sqrt{3}} \text{ см}$; $\sqrt{142+45\sqrt{3}} \text{ см}$; б) 192 см^2 ; в) 282 см^2 . 18. а) 5 м; $\sqrt{89} \text{ м}$; б) $8(5+\sqrt{34}) \text{ м}^2$; в) $8(11+\sqrt{34}) \text{ м}^2$. 19. а) $8\sqrt{3} \text{ см}$; $8\sqrt{6} \text{ см}$; $8\sqrt{6} \text{ см}$; б) $192(1+\sqrt{2}) \text{ см}^2$; в) $192(2+\sqrt{2}) \text{ см}^2$. 20. $2,4\sqrt{34} \text{ см}$, $3\sqrt{17} \text{ см}$. 23. 1 або 3. 51. $\sqrt{10} \text{ см}$. 52. 960 см^2 . 53. 4 см. 57. 72 дм^2 . 58. $576(1+\sqrt{3}) \text{ см}^2$. 59. 11 мм і 60 мм. 60. 4640 см^2 або 8448 см^2 . 61. 4 см. 64. в) $\frac{\sqrt{3}}{8} \text{ м}^2$. 65. $\frac{a}{9}(2\sqrt{5}-\sqrt{2})$. 66. $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. 67. $\frac{a}{2}(2\sqrt{3}+1)$, $\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$. 69. $l\sqrt{2a^2-\frac{l^2}{4}}$. 73. 72 см^2 . 74. $\frac{k\sqrt{k^2+l^2}}{4}$. 75. $\frac{a}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$. 76. $20\sqrt{3} \text{ мм}$, $10\sqrt{21} \text{ мм}$, $10\sqrt{21} \text{ мм}$. 83. $\frac{S\sqrt{7}}{2(\sqrt{3}+6)}$. 84. $1,25a^2\sqrt{3}$. 85. 10 мм , $\frac{20\sqrt{6}}{3} \text{ мм}$, $\frac{20\sqrt{6}}{3} \text{ мм}$. 86. $2S(\sqrt{6}+2\sqrt{2})$. 90. $2R^2\sqrt{3}$. 91. $3l^2$. 92. $2\sqrt{3} \text{ м}^2$. 93. $\frac{1}{2a\sqrt{2}}\sqrt{a^4+4S^2}$. 94. $2a^2\left(2\sqrt{\frac{\cos \gamma}{1-\cos \gamma}}+1\right)$. 95. $\frac{3c}{8}\sqrt{8h^2+c^2}$. 96. $\frac{4}{3}(\sqrt{13}+\sqrt{10}) \text{ м}$. 97. 480 см^2 . 98. $2\sqrt{2(4Q^2-a^4)}$.

Раздзел 2

103. б) 200 см. 104. $3+2\sqrt{2} \text{ м}$. 105. 40 м або 8 м. 106. 12 см. 107. 36 см. 108. 24 см. 109. а) 7 см; б) 30 см. 110. 50 см. 111. 40 мм. 113. б) 12 см. 114. $\frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ см}$. 115. $\frac{9m^2\sqrt{3}}{8}$. 121. а) 40° ; б) 45° ; в) 90° .

122. а) 58° ; б) 47° . 123. а) 90° ; б) 64° . 126. У 5 разоў. 132. б) 1600 см^2 .
 133. $\frac{\sqrt{S}}{4}$. 134. б) 5 см. 135. 3. 136. $\frac{1}{3}m$. 137. $4S$. 146. 96 см. 147. $8\frac{1}{3}$ см.
 148. 10 см. 149. 16 см. 150. 24 см; 36 см. 151. 25 см. 152. 1620 см^2 .
 153. $\frac{\sqrt{S\sqrt{15}}}{4}$. 160. а) 18 см; 15 см; б) 54 см; 72 см. 162. б) $4 : 9$. 163. в) 6 см^2 .
 172. б) 4 см. 173. 8 см^2 . 181. $\frac{q}{16}$. 182. 64 см^2 . 183. б) 140 см. 184. 46 см.
 185. 109 см. 186. 6 S. 187. 72 см. 188. $\frac{4}{3}S$. 189. $\frac{1}{9}S$; $\frac{4}{9}S$. 190. $1 : 3$.
 191. 0,16 q. 192. $\frac{9m}{64}\sqrt{4n^2 - m^2}$. 193. 32 см^2 . 210. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. 211. 38 см.

Раздзел 3

217. 40 см. 218. 7,8 м. 219. 18 см. 220. $4\sqrt{65}$ см або $4\sqrt{17}$ см; 32 см;
 20 см. 221. $\sqrt{d^2 + \frac{a^2}{2}}$. 222. 6,5 см. 223. а) 13 см; б) 30 см; в) $\sqrt{q^2 - p^2 + r^2}$;
 г) $\sqrt{l^2 - k^2 + 2m^2}$. 224. 12 см. 225. а) 2,4; б) $\frac{\sqrt{455}}{12}$; в) 0. 226. 36 см.
 227. 15 см. 231. $400(2 + \sqrt{5}) \text{ мм}^2$. 232. 296 см^2 . 233. $36\sqrt{5}$. 239. а) 1250;
 б) $2500\sqrt{2}$; в) 2500; г) 5000. 240. $9\sqrt{2} \text{ см}^2$. 241. 15 см. 242. 23 см.
 243. 60 см, 36 см. 244. 20 см, 24 см. 245. 12 см. 247. а) 4; 1; б) 4; 1;
 в) $2 + \sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $2 + \sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $2 + \sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. 249. а) $\frac{d}{\cos \beta}$, $d \operatorname{tg} \beta$;
 б) $m \cos \beta$, $m \sin \beta$. 250. а) 2 см; б) $4\sqrt{2}$ см. 251. $\sqrt{2}$ м. 252. а) 1;
 б) $\sqrt{1 + 2\cos \beta}$. 253. 6 см, 15 см. 254. а) 41 см, 55 см; б) 40 см, 80 см.
 255. 3 см; 7,5 см. 256. 270 см^2 . 261. а) a; б) a; в) a; г) a; д) a; е) a.
 262. 60 см. 263. 120 см. 264. 4 см, $4\sqrt{10}$ см. 265. а) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; б) $a\sqrt{3}$;
 в) $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$; г) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; д) $a\sqrt{3}$; е) $\frac{3a}{\sqrt{5}}$. 266. а) a; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{a}{\sqrt{6}}$. 267. $12,5\sqrt{337} \text{ см}^2$.
 268. 56. 269. 10 см, 6 см. 270. $\frac{mp}{p+q}$ або $\frac{mq}{p+q}$. 271. а) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$; б) $\frac{\sqrt{94}}{8}$;
 в) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. 272. $\frac{abc}{\sqrt{a^2(b^2 + c^2) + 4b^2c^2}}$, $\frac{abc}{\sqrt{b^2(a^2 + c^2) + 4a^2c^2}}$, $\frac{abc}{\sqrt{c^2(a^2 + b^2) + 4a^2b^2}}$.

273. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 274. а) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. 275. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
276. $\frac{a}{4b}\sqrt{4b^2 - a^2}$. 278. 12,5 см, 25 см. 280. а) 17 дм; б) $\sqrt{176,5}$ дм.
281. б) 51 дм; в) $\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} + h^2}$. 282. а) 20; б) $5\sqrt{3}$. 283. 2,5 см, $\frac{\sqrt{41}}{2}$ см, $\frac{\sqrt{61}}{2}$ см, 2,5 $\sqrt{17}$ см. 284. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$; $\frac{a\sqrt{39}}{8}$. 285. 40 см, 16 см. 286. $\sqrt{2y^2 - x^2}$.
287. $16(3 + \sqrt{17})$. 288. 18 м і 12 м. 290. 6 см. 291. а) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{m}{2}$; в) $\frac{m\sqrt{3}}{2}$.
292. 30° . 294. $\frac{2h^2\sqrt{7}}{3}$. 295. а) $d\sqrt{2}$; б) $d\sqrt{6}$. 296. а) $d\sqrt{7}$; б) $2d$. 297. $3d$.
298. 45° . 299. $5\sqrt{5}$ мм. 300. а) $\arccos \frac{|b^2 - c^2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$; б) $\arccos \frac{|a^2 - c^2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$;
в) $\arccos \frac{|a^2 - b^2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. 301. а) 90° ; б) 90° ; в) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{8}$; г) $\arccos \frac{5\sqrt{2}}{8}$;
д) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{8}$; е) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{8}$. 306. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$. 307. 45° . 316. 10 см. 317. 27 см.
318. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. 319. $2l^2$. 320. а) $\frac{c\sqrt{3}}{4}$; б) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$. 321. 3,36 см. 322. а) $8\sqrt{3}$ см;
б) $112\sqrt{3}$ см². 323. 4 м. 324. 90° , 45° , 60° . 325. 60° . 326. 60° . 327. $\sqrt{217}$ см.
328. $2a$. 329. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 330. 25 см. 331. а) 42 см; б) 16; в) $2x$. 332. 60° . 333. 120° .
334. $\arccos \frac{1}{3}$. 336. $\arccos \frac{1}{3}$. 337. $\arccos \frac{a}{\sqrt{3(4b^2 - a^2)}}$; $\arccos \frac{2b^2 - a^2}{4b^2 - a^2}$.
338. $\arccos \left(-\frac{1}{3}\right)$; $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. 339. $\arccos \frac{a}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$; $\arccos \frac{a^2}{a^2 - 4b^2}$.
343. а) $5\sqrt{6}$; б) $5\sqrt{2}$. 344. $\frac{a}{2}$. 345. 27 дм². 352. $\sqrt{m^2 \sin^2 \beta + n^2}$. 354. а) 90° .
355. а) 60° ; б) 90° ; в) 60° ; г) 60° ; д) 60° ; е) 30° . 360. а) 0; б) $a\sqrt{3}$; в) a ;
г) $2a$; д) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; е) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. 361. 13 см. 364. $10\sqrt{2}$.

Раздзел 4

366. а) $(0; 0; 0)$, $(a; 0; 0)$, $(0; a; 0)$, $(a; a; 0)$, $(0; 0; a)$, $(a; 0; a)$, $(0; a; a)$, $(a; a; a)$; в) $(0; 0; 0)$, $(a; 0; 0)$, $(0; a; 0)$, $(a; a; 0)$, $(0; 0; -a)$, $(a; 0; -a)$, $(0; a; -a)$, $(a; a; -a)$. 368. а) $(-2; 0; 0)$, $(a; 0; 0)$; г) $(-2; 4; 0)$, $(a; b; 0)$. 369. а) $D(3; 1; 10)$; б) $D(5; 5; -6)$; в) $D(1; -3; -4)$. 374. а) $(-2; 1; -3)$, $(-a; -b; c)$; б) $(-4; 7; -7)$, $(-a - 4; -b + 6; c - 4)$; в) $(2; 1; -3)$, $(a; -b; -c)$; е) $(2; -1; -3)$, $(a; b; c)$. 375. а) $\sqrt{26}$; б) 13; в) $4\sqrt{5}$; г) $\sqrt{65}$; д) 5; е) 4; ж) 1; з) 3. 376. а) $(1,5; 0; 0)$; б) $(0; 0; 0,75)$. 377. а) $(0; 0; 0)$; б) любы пункт восі аплікат. 378. а) $(-4 \pm \sqrt{30}; 0; 0)$; б) $(0; 1 \pm \sqrt{22}; 0)$; в) $\left(0; 0; \frac{5 \pm 4\sqrt{10}}{3}\right)$. 379. а) $\arccos \frac{4}{13}$; б) $\arccos \frac{3}{13}$; в) $\arccos \frac{12}{13}$; г) $\arcsin \frac{12}{13}$; д) $\arcsin \frac{3}{13}$; е) $\arcsin \frac{4}{13}$. 380. а) $\arccos \frac{3}{5}$; б) $\arccos \frac{4}{5}$; в) 90° ; г) 0° ; д) $\arcsin \frac{4}{5}$; е) $\arcsin \frac{3}{5}$. 381. а) $x = 2$; б) $y = 3$; в) $z = -2$; г) $x - y + 1 = 0$. 398. а) $k = -1$; б) $k = -0,5$; в) $k = -2$. 400. а) $4\vec{b}$; б) $-4\vec{p} - 2\vec{r}$. 401. а) Пры $k = 1$; б) пры $k \neq 1$. 413. $\overline{DK} = 0,4 \cdot \overline{DA} + 0,3 \cdot \overline{DB} + 0,3 \cdot \overline{DC}$. 422. $(6; -1; -7)$, або $(-2; -5; 5)$, або $(6; -1; 7)$. 423. а) $(-2; -2; 2)$, $(4; -2; 2)$, $(2; -4; 4)$; б) $(-2; 2; -3)$, $(1; -2; 1)$, $(0; 0; -2)$. 425. $C(1; -1; 8)$, $B_1(2; 4; 8)$. 426. а) $D(0; 1; -1)$, $A_1(0; 2; 2)$, $C_1(2; 0; 5)$, $D_1(-1; 0; 2)$; б) $A_1(0; 5; 1)$, $C_1(6; 3; 7)$, $B(2; 1; 0)$, $D(0; 3; 4)$. 428. а) Пры $x = -2$, $y = 1$; б) ні пры якіх; в) пры $y = 2x$. 429. а) Не; б) так. 430. а) $B(2; 2; 0)$; б) $A(1,5; -0,5; 0)$. 431. а) Так; б) не. 432. $m = 13$. 433. а) $(2; 1; 3)$; б) $(-1; 8; 0)$; в) $(5; -8; -3)$; г) $(-3; 2; 3)$. 436. а) $(-a; -a\sqrt{3}; -a)$; б) $(-a; a\sqrt{3}; -a)$; в) $\left(-\frac{3a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; a\right)$; г) $(-2a; 0; a)$; д) $\left(-\frac{3a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$; е) $\left(-\frac{3a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; -a\right)$. 437. а) -1 ; б) 5; в) 0; г) -14 . 438. а) $\sqrt{21}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{10}$; г) $\sqrt{14}$; д) 3; е) $\sqrt{5}$; ж) $\sqrt{14}$; з) $\sqrt{14}$. 439. а) $\arccos \frac{-1}{\sqrt{210}}$; б) $\arccos \frac{\sqrt{35}}{14}$; в) 90° ; г) $\arccos \frac{-1}{\sqrt{70}}$. 442. а) $21\sqrt{2}$;

- 60°; б) $\sqrt{6}+2+\sqrt{2}$; 90°; в) $4(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; $\arccos\frac{-1}{3}$; г) $\sqrt{140}+\sqrt{129}+\sqrt{105}$;
 $\arccos\frac{47}{3\sqrt{1505}}$. 444. $A\left(\frac{7}{3}; 0; 0\right)$, $B\left(0; \frac{7}{2}; 0\right)$; $C(0; 0; 7)$. 445. а) -5 ; $1\pm 2\sqrt{2}$;
 б) 2 ; $\frac{6\pm\sqrt{22}}{3}$; $\frac{4\pm 3\sqrt{2}}{2}$. 446. а) Пры $a = 3$; б) пры $a = 4$. 447. а) $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$;
 б) 60°; в) 0°; г) 45°. 448. а) 100; б) 697; в) 75; г) -245 ; д) 16; е) $\sqrt{331}$; ж) $\sqrt{747}$;
 з) $\sqrt{1167}$; и) $\sqrt{427}$; к) $\sqrt{847}$. 449. а) $\arccos\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$;
 в) $\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. 451. а) $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $E_1\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 2\right)$,
 $F_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 2\right)$; б) $y = 0$; в) $y = \sqrt{3} - \sqrt{3}x$; г) $2x + 2\sqrt{3}y + 3z - 2 = 0$;
 д) $x + \sqrt{3}y + z - 1 = 0$; е) $2x + 2\sqrt{3}y + 3z - 2 = 0$; ж) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; и) 0; к) 1,4;
 л) $0,6\sqrt{5}$; м) 0,4. 452. 1 : 2. 453. а) 3 : 1; б) 6 : 1; в) 3 : 2. 454. 1 : 1.
 455. 2 : 1. 456. 1 : 2. 460. $\frac{1}{k+1}\overline{AC} + \frac{k}{k+1}\overline{BD}$. 467. 1 : 5. 468. а) 30°;
 б) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$. 469. 90°. 470. $\arccos\frac{1}{5}$. 471. 45°. 472. $\arccos\frac{7}{5}$. 473. 60°.
 474. а) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; в) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$; г) $\frac{\sqrt{7}}{7}$. 475. а) $\frac{16}{17}$; б) $\frac{3}{\sqrt{34}}$; в) $\frac{4\sqrt{2}}{7}$;
 г) $\frac{4}{\sqrt{187}}$. 476. а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{13}{14}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{1}{\sqrt{35}}$. 477. а) $\frac{\sqrt{74}}{37}$; б) $\frac{\sqrt{65}}{26}$; в) $\frac{1}{\sqrt{26}}$;
 г) $\frac{\sqrt{5}}{20}$. 478. а) 30°; б) $\arccos\frac{\sqrt{30}}{10}$; в) $\arccos\frac{7\sqrt{6}}{18}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{30}}{6}$. 479. а) 30°;
 б) $\arccos\frac{\sqrt{130}}{65}$; в) $\arccos\frac{2}{\sqrt{19}}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$. 480. а) 90°; б) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$;
 в) $\arccos\frac{2\sqrt{14}}{35}$; г) $\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 481. а) 90°; б) $\arccos\frac{-\sqrt{35}}{70}$. 482. б) $\arccos\frac{2}{3}$.
 483. а) $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2(\cos\alpha + 1)}$; б) $\frac{1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{4(\cos\alpha + 1)(\cos\beta + 1)}$. 484. а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) 90°;

- в) $\arccos \frac{1}{4}$; г) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{8}$; д) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$; е) $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$. 485. а) 60° ;
- б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$; в) $\arccos \frac{1}{8}$; г) $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$; д) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{10}$; е) 60° . 486. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- б) $\frac{\sqrt{30}}{10}$; в) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; г) $\frac{\sqrt{93}}{31}$; д) $\frac{4\sqrt{93}}{31}$; е) $\frac{\sqrt{93}}{31}$. 487. а) 1; б) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; в) $\frac{\sqrt{21}}{7}$;
- г) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; д) $\frac{3\sqrt{57}}{19}$; е) $\frac{\sqrt{13}}{13}$. 488. 60° . 489. 45° . 490. а) $\arccos \frac{1}{3}$; б) $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$;
- в) $\arccos \frac{5}{\sqrt{33}}$. 491. а) $\arccos \frac{2}{3}$; б) $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) 45° ; г) $\arccos \frac{1}{3}$;
- д) $\arccos \frac{\sqrt{11}}{4}$; е) 90° . 492. а) $\arccos \frac{3}{5}$; б) $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$; в) $\arccos \frac{1}{5}$.
493. а) $\arccos \frac{21}{23}$; б) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$; в) 90° ; г) $\arccos \frac{5}{\sqrt{69}}$. 494. а) $\arccos \frac{\sqrt{14}}{7}$;
- б) $\arccos \frac{2}{\sqrt{7}}$; в) $\arccos \frac{2}{3}$. 495. а) 90° ; б) $\arccos \frac{3}{\sqrt{13}}$; в) $\arccos \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.
496. а) $3 : 2$; б) $\arccos \frac{5}{4\sqrt{3}}$. 497. а) $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$;
- г) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$. 498. а) $\arccos \frac{\sqrt{6}}{4}$; б) $\arccos \frac{\sqrt{33}}{11}$. 499. а) 0° ; б) 60° . 500. а) 45° ;
- б) $\arccos \frac{\sqrt{21}}{7}$. 501. а) 60° ; б) $\arcsin \frac{2}{3}$; в) 60° ; г) $\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$; д) $\arcsin \sqrt{\frac{3}{35}}$;
- е) $\arcsin \sqrt{\frac{3}{13}}$; ж) $\arcsin \frac{3}{2\sqrt{51}}$; з) $\arcsin \sqrt{\frac{3}{13}}$. 502. а) $\arccos \sqrt{\frac{5}{6}}$; б) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$;
- в) $\arcsin \sqrt{\frac{2}{15}}$; г) $\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$. 503. а) $\frac{\sqrt{438}}{3}$; б) $\frac{8\sqrt{38}}{19}$; в) $\frac{9}{\sqrt{17}}$; г) $\frac{\sqrt{91}}{7}$;
- д) $\frac{3\sqrt{42}}{7}$; е) $\frac{2\sqrt{1798}}{29}$. 504. а) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; б) 1; в) $\sqrt{\frac{323}{54}}$; г) 2; д) $\sqrt{3}$; е) $\frac{\sqrt{1339}}{26}$;
- ж) $2\sqrt{3}$; з) $\frac{\sqrt{1342}}{22}$. 505. а) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; б) 0,5; в) 0,5; г) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; д) $0,8\sqrt{5}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
- ж) 0,5; з) $0,8\sqrt{5}$. 506. а) $\frac{a\sqrt{55}}{10}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{a\sqrt{95}}{20}$; г) $\frac{a\sqrt{11}}{4}$. 507. а) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$;
- б) $\frac{a\sqrt{7}}{4}$; в) $\frac{a\sqrt{39}}{4}$; г) $\frac{a\sqrt{210}}{10}$; д) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; е) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; ж) $\frac{a\sqrt{10}}{2}$; з) $\frac{a\sqrt{210}}{5}$.

508. а) $a\sqrt{\frac{14}{15}}$; б) $a\sqrt{\frac{14}{23}}$; в) $a\sqrt{\frac{7}{46}}$; г) $a\sqrt{\frac{14}{25}}$. 509. а) $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$;
 б) $\frac{abc\sqrt{3}}{ab+ac+bc}$. 510. а) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; б) $\frac{abc\sqrt{3}}{ab+ac+bc+\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$.
 511. а) $\frac{a\sqrt{6}}{8}$; б) $\frac{3a\sqrt{21}}{28}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{8}$; г) $\frac{a\sqrt{15}}{5}$; д) $\frac{a\sqrt{7}}{7}$; е) $\frac{3a}{\sqrt{7}}$; ж) $\frac{4a}{\sqrt{7}}$;
 з) $\frac{5a\sqrt{159}}{53}$. 512. а) $\sqrt{3}$; б) 2; в) $4\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{58}}{2}$; д) $\frac{11\sqrt{39}}{13}$; е) $0,8\sqrt{15}$;
 ж) $\frac{\sqrt{663}}{13}$; з) $\frac{2\sqrt{6783}}{19}$. 513. а) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$; г) $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$; д) 0;
 е) 0; ж) $\frac{a\sqrt{13}}{26}$; з) $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. 514. а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{13a\sqrt{6}}{72}$; в) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; г) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; д) 0;
 е) $\frac{a\sqrt{70}}{35}$. 515. а) $\frac{a}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; г) $\frac{a}{2}$; д) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; е) $\frac{3a\sqrt{22}}{22}$. 516. а) $2\sqrt{3}$;
 б) $\frac{6\sqrt{17}}{17}$; в) $\frac{2\sqrt{51}}{17}$; г) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\frac{2\sqrt{51}}{17}$. 517. а) $\frac{5a\sqrt{53}}{106}$; б) $\frac{3a\sqrt{55}}{110}$;
 в) $\frac{3a\sqrt{21}}{14}$; г) $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$; д) $\frac{5a\sqrt{3}}{8}$; е) $\frac{a\sqrt{23}}{92}$.

Змест

Прадмова	3
----------------	---

Раздзел 1. Уводзіны ў стэрэаметрыю

§ 1. Прасторавыя фігуры	6
§ 2. Прамыя і плоскасці	22
§ 3. Пабудаванне сячэнняў мнагаграннікаў	37

Раздзел 2. Паралельнасць прамых і плоскасцей

§ 4. Узаемнае размяшчэнне прамых у прасторы	50
§ 5. Узаемнае размяшчэнне прамой і плоскасці ў прасторы	62
§ 6. Узаемнае размяшчэнне плоскасцей у прасторы	70

Раздзел 3. Перпендыкулярнасць прамых і плоскасцей

§ 7. Перпендыкулярнасць прамой і плоскасці	86
§ 8. Адлегласці	97
§ 9. Вугал паміж прамой і плоскасцю	108
§ 10. Перпендыкулярнасць плоскасцей	119

Раздзел 4. Каардынаты і вектары ў прасторы

§ 11. Каардынаты ў прасторы	136
§ 12. Вектар. Дзеянні над вектарамі	140
§ 13. Скалярны здабытак вектараў	156
§ 14. Прымяненне вектараў і каардынат	162
Даведачны матэрыял	178
Адказы	192

(Назва ўстановы адукацыі)

Навучальны год	Імя і прозвішча вучня	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака вучню за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Вучэбнае выданне

Латоцін Леанід Аляксандравіч
Чабатарэўскі Барыс Дзмітрыевіч
Гарбунова Ірына Уладзіміраўна

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для 10 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання
(базавы і павышаны ўзроўні)

Рэдактары	<i>А. У. Бельская, Л. В. Саламаха</i>
Мастакі	<i>К. У. Максімава, К. Ю. Сарока</i>
Мастацкія рэдактары	<i>І. М. Кузьмянкова, К. У. Максімава</i>
Тэхнічны рэдактар	<i>І. М. Кузьмянкова</i>
Камп'ютарны набор	<i>А. У. Бельскай, І. М. Кузьмянковай</i>
Камп'ютарная вёрстка	<i>І. М. Кузьмянковай</i>
Карэктар	<i>А. У. Бельская</i>

Падпісана да друку 14.02.2020. Фармат 70 × 100^{1/16}.

Папера афсетная. Друк афсетны.

Ум. друк. арк. 16,25. Ул.-выд. арк. 13,0. Тыраж 11 265 экз. Заказ .

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства

«Выдавецтва «Адукацыя і выхаванне»».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца,
вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/19 ад 02.08.2013.

Вул. Будзённага, 21, 220070, г. Мінск.

Адкрытае акцыянернае таварыства «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца,
вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 2/3 ад 10.09.2018.

Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, г. Мінск.