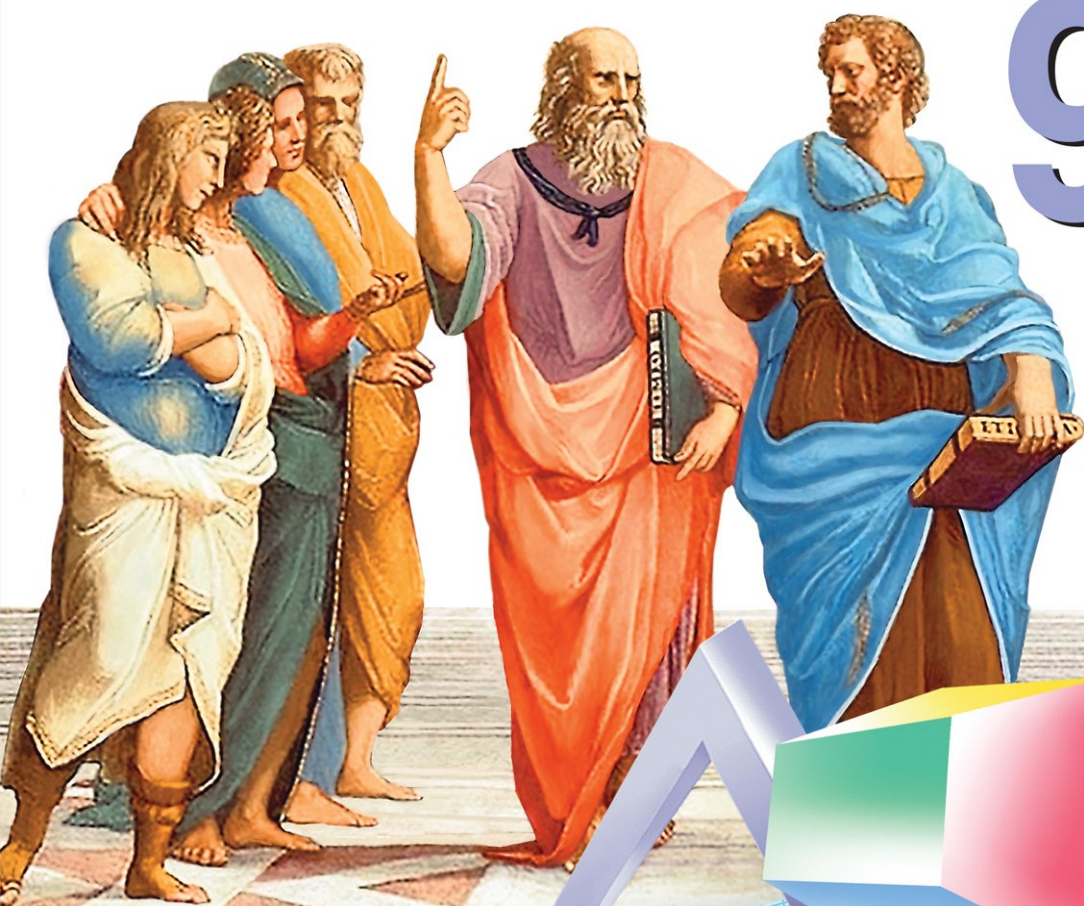




В. В. Казаков О. О. Казакова

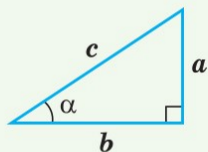
ГЕОМЕТРИЯ

9



Соотношения в прямоугольном треугольнике

Острый угол

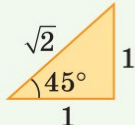
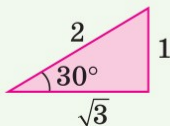


$$\sin \alpha = \frac{a \text{ (против. к.)}}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b \text{ (прилеж. к.)}}{c}$$

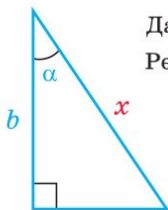
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \text{ (против. к.)}}{b \text{ (прил. к.)}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$



	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Задача



Дано: b, α . Найти: x .

Решение.

$$1. \cos \alpha = \frac{b}{x}$$

$$2. b = x \cdot \cos \alpha$$

$$3. x = \frac{b}{\cos \alpha}$$

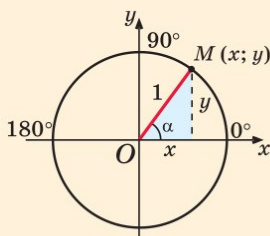
Основное

тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



$$\sin \alpha = y \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\cos \alpha = x \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

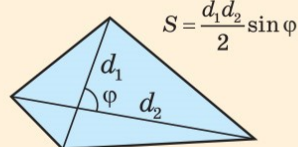
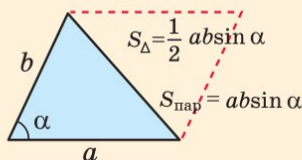
Тупой угол

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

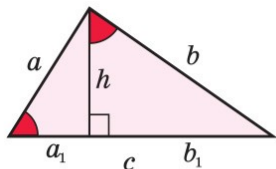
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Среднее геометрическое



$$\frac{a_1}{h} = \frac{h}{b_1}$$

(из левого и правого треугольника)

$$h^2 = a_1 b_1$$

$$\frac{a_1}{a} = \frac{a}{c}$$

(из левого и большого треугольника)

$$a^2 = c a_1$$

$$\frac{b_1}{b} = \frac{b}{c}$$

(из правого и большого треугольника)

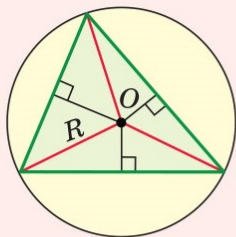
$$b^2 = c b_1$$

1. $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ острого угла.
2. Значения тр. функций для углов $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ$.
3. Решение прямоугольного треугольника.
4. Основное тригонометрическое тождество.
5. Выражение $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.
6. $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ для $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.
7. Изменение $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$.

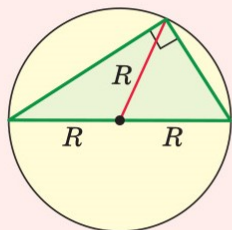
8. Формулы для углов $180^\circ - \alpha$.
9. Значения тр. функций для углов $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$.
10. Формула площади треугольника.
11. Формула площади параллелограмма.
12. Формула площади выпуклого четырехугольника.
13. Среднее геометрическое в прям. треугольнике.

Описанная и вписанная окружности

1 Описанная — серединных $\perp$ -ов

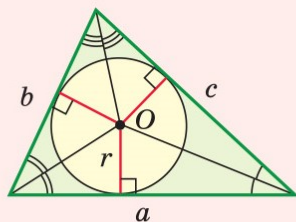


2 Прямоугольный



$$R = \frac{c}{2}$$

3 Вписанная — биссектрис



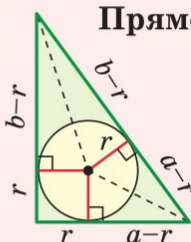
4

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = pr$$

5

Прямоугольный

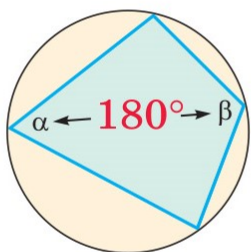
$$c = (a-r) + (b-r)$$



$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

6 Вписанные

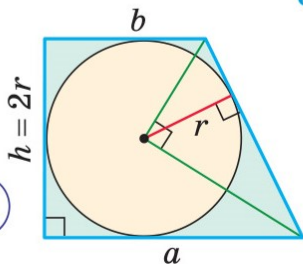
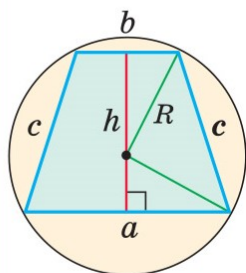
с
в
о
й
с
т
в
о



п
р
и
з
н
а
к

7

10 Вписанная трапеция — равнобедренная трапеция

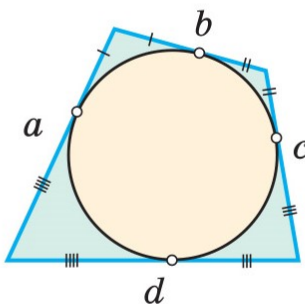


11

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

8 Описанные

с
в
о
й
с
т
в
о



п
р
и
з
н
а
к

9

$$a + c = b + d$$

1. Окружность, описанная около треугольника.
2. Окружность, описанная около прям. треугольника.
3. Окружность, вписанная в треугольник.
4. Формула площади $S = pr$.
5. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник.

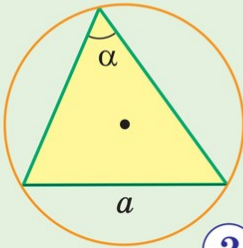
6. Свойство вписанного 4-ка.
7. Признак вписанного 4-ка.
8. Свойство описанного 4-ка.
9. Признак вписанного 4-ка.
10. Свойство вписанной трапеции.
11. Свойство описанной трапеции.

Теорема синусов и теорема косинусов

1 Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Стороны тр-ка пропорциональны ...



$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

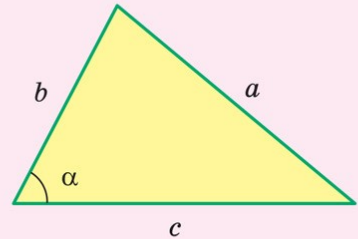
2

$$R = \frac{abc}{4S}$$

3 Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Квадрат любой стороны тр-ка равен ...



4 Нахождение косинуса угла по трем сторонам

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

5

$$b^2 + c^2 > a^2$$

угол α острый

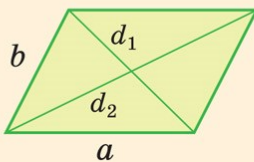
$$b^2 + c^2 = a^2$$

угол α прямой

$$b^2 + c^2 < a^2$$

угол α тупой

6 Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна ...



$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

7 Формула медианы

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

Формула Герона

8

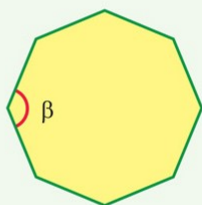
$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

1. Теорема синусов.
2. Формула нахождения R через S .
3. Теорема косинусов.
4. Нахождение косинуса угла треугольника по трем сторонам.
5. Определение вида треугольника по трем сторонам.
6. Теорема о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.
7. Формула медианы треугольника.
8. Формула Герона.

Правильные многоугольники

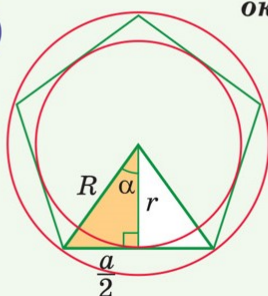
Можно описать и вписать окружности с общим центром

1



$$\beta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

2

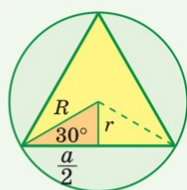


$$\alpha = \frac{180^\circ}{n}$$

$$\frac{a}{2} = R \sin \alpha$$

$$\frac{a}{2} = r \operatorname{tg} \alpha$$

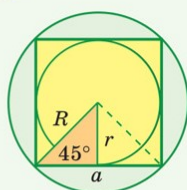
3



$$a = R\sqrt{3}$$

$$r = \frac{R}{2}$$

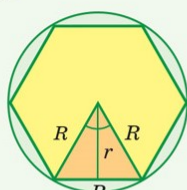
4



$$a = R\sqrt{2}$$

$$r = \frac{a}{2}$$

5



$$a = R$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

6

Длина окружности

$$C = 2\pi R$$

7

Площадь круга

$$S = \pi R^2$$

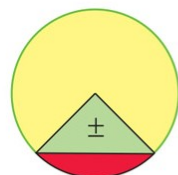
8

$$\frac{l_{\text{дуги}}}{C} = \frac{n^\circ}{360^\circ} = \frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{круга}}}$$

$$\pi \approx 3,14159$$

Это я знаю и помню прекрасно...

9



1. Правильный многоугольник, его внутренний угол.
2. Описанная и вписанная окружности. Формулы, связывающие a и R, r .
3. Правильный треугольник.
4. Правильный четырехугольник.
5. Правильный шестиугольник.
6. Формула длины окружности.
7. Формула площади круга.
8. Длина дуги. Площадь сектора.
9. Площадь сегмента.

В. В. Казаков О. О. Казакова

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 9 класса
учреждений образования, реализующих
образовательные программы общего среднего образования,
с русским языком обучения и воспитания

*Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь*

2-е издание, исправленное и дополненное

Минск «Адукацыя і выхаванне» 2025

Правообладатель Адукацыя і выхаванне

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
К14

В оформлении обложки использован фрагмент фрески
Рафаэля Санти «Афинская школа»

Рецензент

кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики
Белорусского государственного университета
(кандидат физико-математических наук, доцент *Г. О. Кукрак*)

Казаков, В. В.

К14 Геометрия : учебное пособие для 9-го класса учреждений образования, реализующих образовательные программы общего среднего образования, с русским языком обучения и воспитания / В. В. Казаков, О. О. Казакова. — 2-е издание, исправленное и дополненное. — Минск : Адукацыя і выхаванне, 2025. — 232 с. : ил.

ISBN 978-985-03-4055-9.

Предыдущее издание было выпущено в издательстве «Народная асвета» в 2019 году.

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-03-4055-9

© Казаков В. В., 2019
© Казаков В. В., Казакова О. О., 2025, с изменениями
© Оформление. Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Адукацыя і выхаванне”», 2025

ПРЕДИСЛОВИЕ

Ребята, в 9-м классе вы завершите знакомство с *планиметрией* (разделом геометрии, изучающим фигуры на плоскости) и продемонстрируете свои знания на экзамене. Чтобы добиться хорошего результата, вам необходимо будет повторить все, что было изучено в 7-м и 8-м классах, и успешно освоить материал 9-го класса.

Панорама геометрии 9-го класса

В первой главе этого пособия вы познакомитесь с такими понятиями, как *синус*, *косинус*, *тангенс* и *котангенс острого угла*.

Так, синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение катета, противолежащего этому углу, к гипотенузе.

Например, если в прямоугольном треугольнике ACB (рис. 1) острый угол A равен 30° , катет BC , противолежащий этому углу, равен 1, то гипотенуза AB равна 2 и $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Далее, во второй главе, вы узнаете, как найти центр окружности, описанной около треугольника, т. е. проходящей через все его вершины, и окружности, вписанной в треугольник, т. е. касающейся всех его сторон (рис. 2).

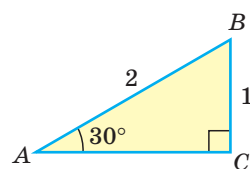


Рис. 1

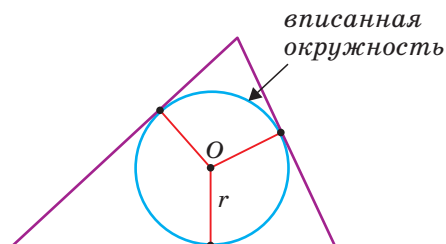
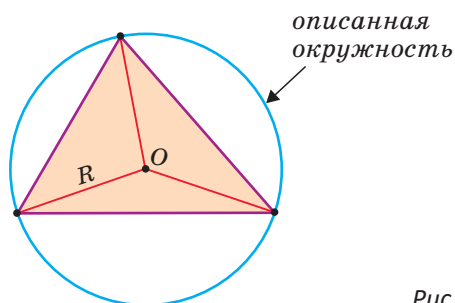


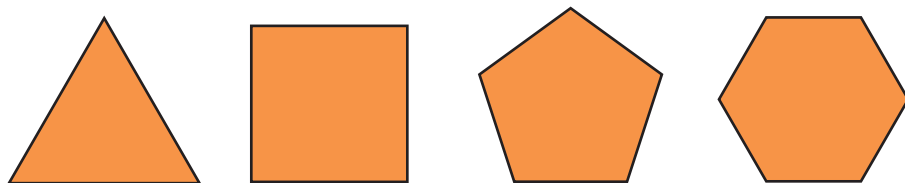
Рис. 2

Третья глава посвящена двум важнейшим теоремам: *теореме синусов* и *теореме косинусов*. Здесь геометрия интегрируется с алгеброй. Мы получаем возможность решать многие геометрические задачи при помощи уравнений. Теоремы синусов и косинусов позволяют установить связь между величинами сторон и углов треугольника. При помощи теоремы косинусов мы выведем знаменитую *формулу Герона* о нахождении площади треугольника по трем сторонам a , b и c :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p — полупериметр треугольника.

В четвертой главе рассматриваются правильные многоугольники. Это такие многоугольники, у которых все стороны равны и все углы равны.



Правильные многоугольники

Рис. 3

Например, равносторонний треугольник является правильным треугольником, а квадрат — правильным четырехугольником (рис. 3).

В этой же главе будут обоснованы известные вам формулы длины окружности и площади круга: $C = 2\pi R$ и $S = \pi R^2$.

Пятая глава «Векторы» содержит материал, знакомый вам из курса физики.

Как работать с учебным пособием

В учебном пособии «Геометрия» для 9-го класса пять глав. В каждой главе несколько параграфов, каждый из которых содержит:

- а) теоретический материал: определения, теоремы и следствия из них;
- б) ключевые задачи;
- в) задачи для самостоятельного решения.

Ключевые задачи являются образцами, где показаны приемы решения и варианты оформления задач. Поэтому они разбираются учителем вместе с классом. Кроме того, в ключевых задачах рассмотрены дополнительные свойства геометрических фигур.

Все свойства, доказанные в ключевых задачах, относятся к теоретической части. При решении других задач можно ссылаться на эти свойства как на известные геометрические факты.

В начале каждой главы приводится *карта главы*, где изображены фигуры, изучаемые в данной главе. В каждом параграфе полужирным шрифтом выделены формулировки теорем и термины, определения которых необходимо знать. Все главы содержат дополнительный материал под рубриками: «Реальная геометрия», «Моделирование», «Геометрия 3D», «Гимнастика ума», с которыми вы уже знакомы.

Внимание!

Задания рубрики «Решаем самостоятельно» дифференцированы по пяти уровням усвоения учебного материала.

Материал, отмеченный знаком , предназначен для изучения математики на повышенном уровне.



На обложке учебного пособия изображен фрагмент картины великого итальянского художника эпохи Возрождения Рафаэля «Афинская школа». В центре фрагмента изображены Платон (ученик Сократа) и Аристотель (ученик Платона и наставник Александра Македонского). При помощи **Интернета** выясните, чем знамениты названные исторические персонажи.

Желаем вам успехов в освоении геометрии в 9-м классе!

Дополнительные материалы к учебному пособию «Геометрия» для 9-го класса можно найти на сайте: <http://eior.by> (Единый информационно-образовательный ресурс). Выберите в меню «9 класс», «Геометрия». В соответствующей теме нажмите кнопку «Дополнительные материалы».



Это нужно знать (7—8-й классы)

7-й класс

1. Признаки равенства треугольников.
2. Свойства и признаки равнобедренного треугольника.
3. Свойства и признаки параллельных прямых.
4. Свойство внешнего угла треугольника.
5. Признаки равенства прямоугольных треугольников.
6. Свойство катета, лежащего против угла в 30° .

8-й класс

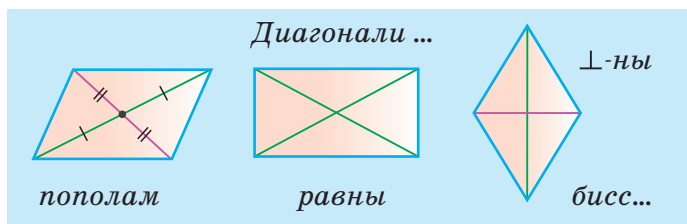
1. Формула суммы углов многоугольника.
2. Свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба.
3. Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника и трапеции.
4. Формулы площади квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника, прямоугольного треугольника, ромба, трапеции.
5. Свойство медиан треугольника.
6. Теорема Пифагора и ей обратная.
7. Признаки подобия треугольников.
8. Свойство площадей подобных треугольников.
9. Свойство касательной к окружности.
10. Свойство касательных, проведенных к окружности из одной точки.
11. Теорема о вписанном и соответствующем ему центральном угле.
12. Свойство вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу.
- Свойство вписанного угла, опирающегося на диаметр.
13. Свойство отрезков пересекающихся хорд.
14. Свойство отрезка касательной и отрезков секущей, проведенных к окружности из одной точки.

Наиболее важные вопросы 8-го класса отражены в следующем опорном конспекте. Для подробного повторения учебного материала 7-го и 8-го классов можно использовать опорные конспекты в конце данного учебного пособия.

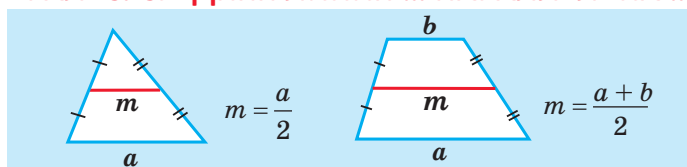
$$180^\circ(n - 2) \text{ — сумма углов } n\text{-угольника}$$

8 кл.

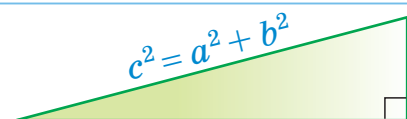
ПАРаллЕЛОГРАММЫ



ФАЛЕС. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ... ПАРАЛЛЕЛЬНА ...



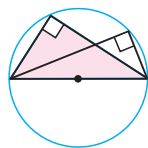
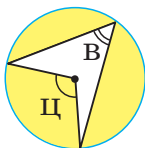
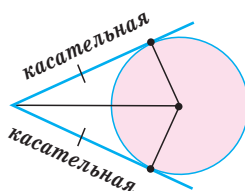
ПИФАГОР



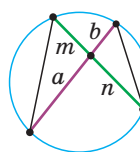
ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ



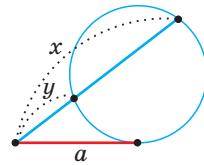
Вписанный угол равен $\frac{1}{2}$ центрального



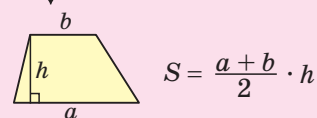
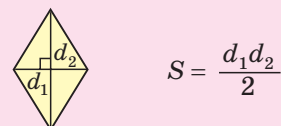
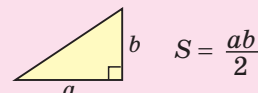
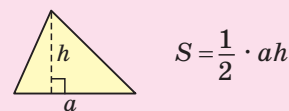
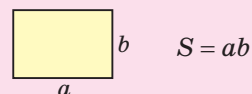
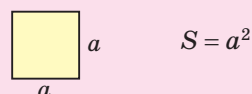
$$ab = mn$$



$$a^2 = xy$$



ПЛОЩАДИ



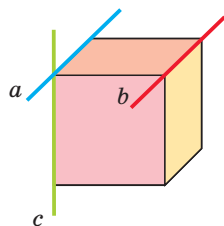
А теперь проверьте умение применять свои знания при решении задач, выполнив следующий тест. Каждая задача в нем оценивается в 10 баллов, общее число баллов равно 100. Правильные ответы можно получить у вашего учителя математики. Попробуйте набрать максимальное число баллов. Успешного выполнения теста!

Тест по геометрии за 8-й класс

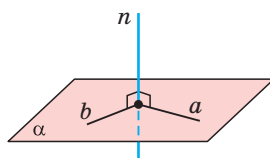
Условия задач	Ответы на выбор
1. Дан параллелограмм $ABCD$, $AC = 12$ см, $BD = 10$ см, $CD = 4$ см, O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Найдите периметр треугольника AOB .	а) 14 см; б) 15 см; в) 18 см; г) 22 см.
2. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , $\angle ACB = 40^\circ$. Найдите $\angle COD$.	а) 40° ; б) 50° ; в) 80° ; г) 60° .
3. Периметр ромба равен 24 см, площадь — 30 см^2 . Найдите высоту ромба.	а) 5 см; б) 4,5 см; в) 6 см; г) 8 см.
4. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 16$ см, $AB = 20$ см. Найдите площадь треугольника ABC .	а) 160 см^2 ; б) 320 см^2 ; в) 48 см^2 ; г) 96 см^2 .
5. Высота трапеции равна 10 см, меньшее основание — 4 см, площадь — 100 см^2 . Найдите большее основание трапеции.	а) 12 см; б) 16 см; в) 20 см; г) 24 см.
6. Дан треугольник ABC , точки K и M принадлежат сторонам AB и BC соответственно, $KM \parallel AC$. Найдите периметр треугольника ABC , если $BK = 4$ см, $AK = KM = 6$ см, $MC = 9$ см.	а) 50 см; б) 40 см; в) 52 см; г) 64 см.
7. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O , $AO = 15$ см, $OC = 5$ см, $BC = 8$ см. Найдите среднюю линию трапеции.	а) 18 см; б) 24 см; в) 32 см; г) 16 см.
8. AB и AC — касательные к окружности, B и C — точки касания, $\angle BAC = 64^\circ$. Точки B и C разбивают окружность на две дуги. Найдите градусную меру большей из них.	а) 128° ; б) 116° ; в) 296° ; г) 244° .
9. В параллелограмме $ABCD$ высота $BH = 12$ см проведена к стороне AD , диагонали $AC = 15$ см, $BD = 13$ см. Найдите площадь параллелограмма, если $AH < AD$.	а) 84 см^2 ; б) 96 см^2 ; в) 72 см^2 ; г) 108 см^2 .
10. Две окружности радиусами $R = 9$ и $r = 4$ с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются друг друга внешним образом, а также общей внешней касательной в точках A и B . Найдите площадь треугольника O_1MO_2 , где M — середина отрезка AB .	а) 6; б) 12; в) 24; г) 10.

Экскурс в стереометрию

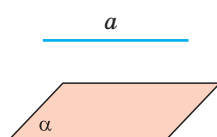
Вспомним, с какими понятиями *стереометрии* (раздела геометрии, изучающего свойства фигур в пространстве) вы познакомились в 7—8-м классах (рис. 4). Считается, что прямая не имеет толщины и бесконечна в обе стороны, плоскость не имеет толщины и бесконечна во все стороны.



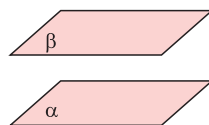
Если дан куб, то прямые a и b параллельны, прямые a и c пересекаются, прямые b и c — скрещиваются.



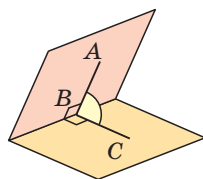
Прямая n называется перпендикулярной плоскости α , если она перпендикулярна любой прямой этой плоскости.



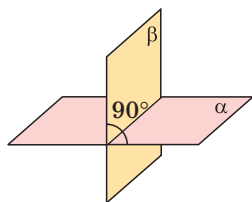
Прямая a называется параллельной плоскости α , если она не пересекает эту плоскость.



Плоскости α и β называются параллельными, если они не пересекаются.



Двугранный угол — это угол между полуплоскостями с общей границей. Он измеряется величиной угла ABC .



Плоскости α и β называются перпендикулярными, если они при пересечении образуют двугранный угол, равный 90° .

Рис. 4

На рисунке 5 изображены восемь пространственных фигур. Укажите эти фигуры: пятиугольная призма, шар, треугольная пирамида, прямоугольный параллелепипед, треугольная призма, цилиндр, четырехугольная пирамида, конус.

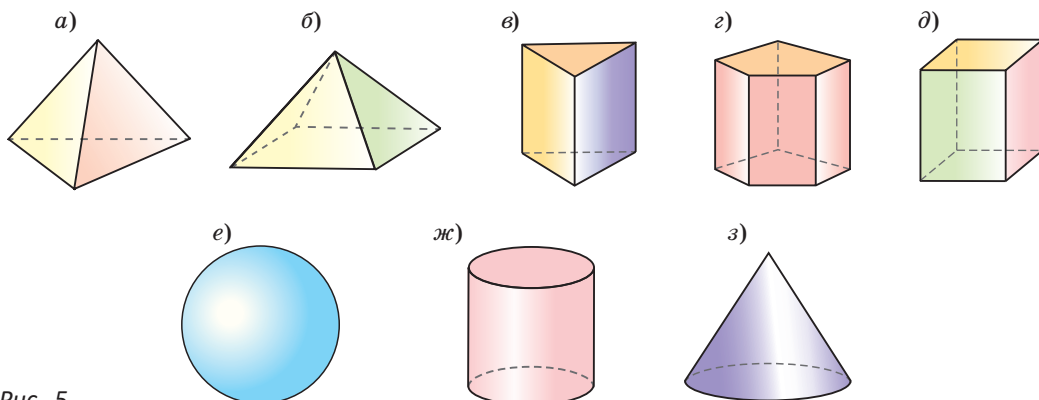


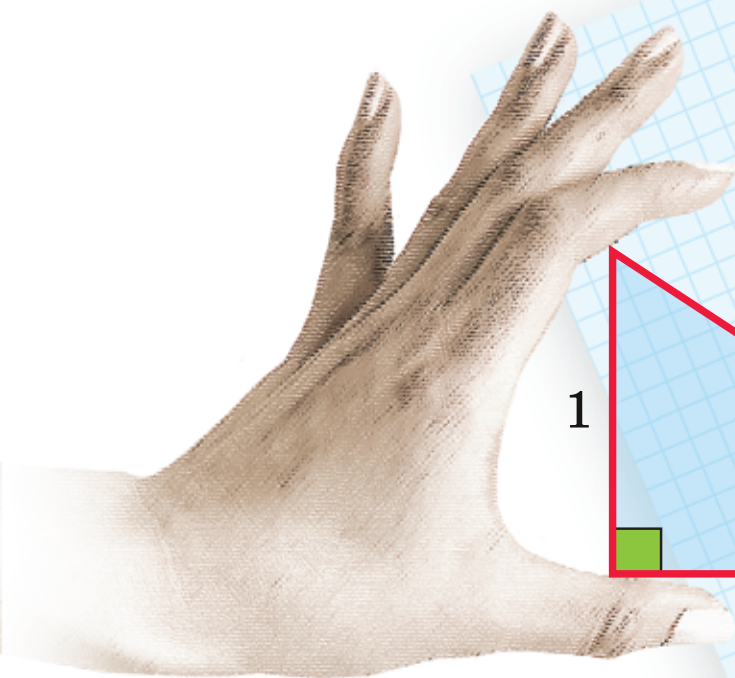
Рис. 5

Глава I

Соотношения в прямоугольном треугольнике

В этой главе вы узнаете:

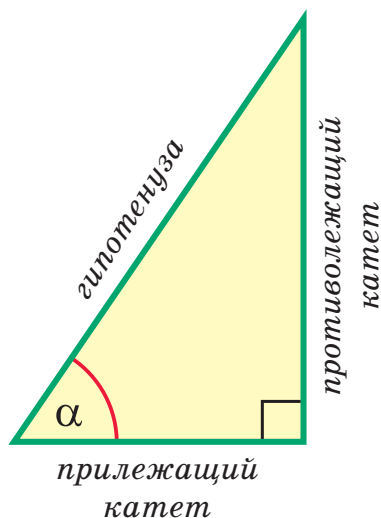
- Что такое синус, косинус, тангенс и котангенс
- Почему синус 30° равен $\frac{1}{2}$
- Как найти среднее геометрическое двух чисел



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

СИНУС КОСИНУС ТАНГЕНС КОТАНГЕНС

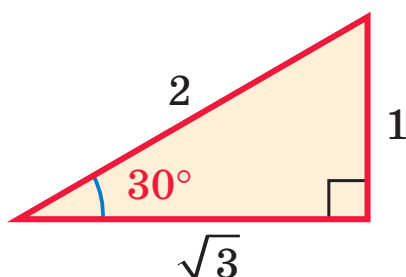


$$\sin \alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}$$



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$$

ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

среднее арифметическое

$$\frac{a+b}{2}$$

среднее геометрическое

$$\sqrt{ab}$$

§ 1. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла

1. Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла

Пусть в прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c , один из острых углов равен α , *противолежащий* этому углу катет равен a , *прилежащий* катет — b (рис. 6). Отношения катетов к гипотенузе $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$, а также отношения катета к катету $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ имеют специальные названия: *синус*, *косинус*, *тангенс* и *котангенс* острого угла — и соответственно обозначаются: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

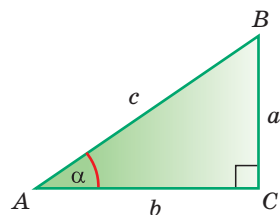


Рис. 6

Определение. **Синусом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение *противолежащего* катета к гипотенузе:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение *прилежащего* катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Определение. **Тангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение *противолежащего* катета к *прилежащему*:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение *прилежащего* катета к *противолежащему*:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Пример. Угол K в $\triangle MNK$ равен 90° (рис. 7).

Тогда:

$$\sin M = \frac{5}{13}, \quad \cos M = \frac{12}{13},$$

$$\operatorname{tg} M = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{ctg} M = \frac{12}{5}.$$

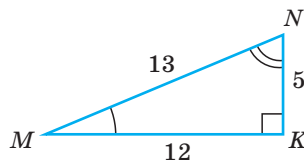


Рис. 7

Для угла N катет MK — противолежащий, а катет NK — прилежащий (см. рис. 7, с. 11). Поэтому согласно определениям получаем:

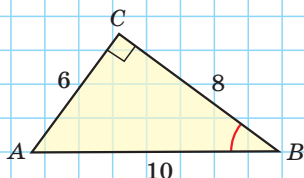
$$\sin N = \frac{MK}{MN} = \frac{12}{13}, \quad \cos N = \frac{NK}{MN} = \frac{5}{13}, \quad \operatorname{tg} N = \frac{MK}{NK} = \frac{12}{5}, \quad \operatorname{ctg} N = \frac{NK}{MK} = \frac{5}{12}.$$

Можно заметить, что синус острого угла α прямоугольного треугольника и косинус другого острого угла этого треугольника, содержащего $90^\circ - \alpha$, равны, т. е. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. Так же $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$. Например, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$, $\operatorname{tg} 40^\circ = \operatorname{ctg} 50^\circ$.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

- а) $\sin B = \dots$
- б) $\cos B = \dots$
- в) $\operatorname{tg} B = \dots$
- г) $\operatorname{ctg} B = \dots$



Тест 2

- а) $\sin \varphi = \dots$
- б) $\cos \varphi = \dots$
- в) $\operatorname{tg} \varphi = \dots$
- г) $\operatorname{ctg} \varphi = \dots$

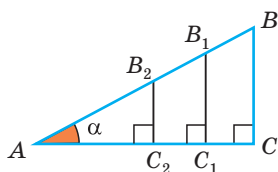
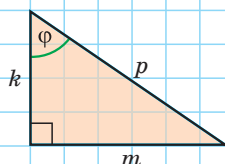


Рис. 8

Значение синуса острого угла, а также косинуса, тангенса и котангенса зависит только от величины угла и не зависит от размеров и расположения прямоугольного треугольника с указанным острым углом. Это следует из того, что прямоугольные треугольники с равным острым углом подобны, а у подобных треугольников соответствующие стороны пропорциональны. Так, в $\triangle ABC$ (рис. 8) $\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2}$.

2. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30° , 45° , 60°

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC , у которого $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 1$ (рис. 9). Так как катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы, то $AB = 2$. По теореме Пифагора

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}. \text{ Тогда:}$$

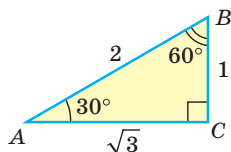


Рис. 9

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Так как $\angle B = 90^\circ - \angle A = 60^\circ$ (см. рис. 9), то

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC , у которого $\angle A = 45^\circ$, $AC = BC = 1$ (рис. 10). По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Тогда:

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AC} = 1,$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{AC}{BC} = 1.$$

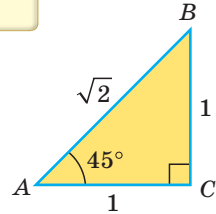


Рис. 10

Составим таблицу значений синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов для углов 30° , 45° и 60° .

	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Нахождение значений тригонометрических функций

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса данного угла можно приближенно находить при помощи специальных тригонометрических таблиц¹ либо калькулятора.

¹ Тригонометрические таблицы находятся на с. 54.

Например, с помощью калькулятора, компьютера или мобильного телефона (смартфона) находим: $\sin 45^\circ = 0,707106\dots$. Приближенное значение тригонометрических функций при решении задач будем брать с округлением до четырех знаков после запятой: $\sin 45^\circ \approx 0,7071$.

Итак, точное значение $\sin 45^\circ$ равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$, а приближенное — 0,7071.

Таблицы и калькулятор также позволяют находить величину острого угла по значению синуса, косинуса или тангенса. Например, найдем острый угол, синус которого равен 0,4175. Выбрав на компьютере вид калькулятора «инженерный», далее «градусы», нужно ввести последовательно $0,4175 + \text{Inv} + \sin^{-1}$. На экране появится ответ: $24,676\dots$. Округлим его до десятых долей градуса и получим $24,7^\circ$. Учитывая, что 1° содержит 60 угловых минут, получим: $0,7^\circ = 0,7 \cdot 60' = 42'$. Искомый угол, синус которого 0,4175, приближенно равен $24^\circ 42'$.

А теперь выполните **Тест 3**.

Тест 3											
Какое равенство неверно:											
а) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$;						б) $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$;					
в) $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$;						г) $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$?					

4. Тригонометрические функции острого угла

Синус, косинус, тангенс и котангенс являются функциями угла, так как каждому острому углу x соответствует единственное значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Они называются *тригонометрическими функциями* и записываются так: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Поскольку в прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы, то для острого угла x справедливо: $0 < \sin x < 1$, $0 < \cos x < 1$, следовательно **синус и косинус острого угла положительны и меньше 1**. Тангенс и котангенс острого угла могут принимать *любое положительное значение*. Например, $\operatorname{tg} 85^\circ \approx 11,4$.



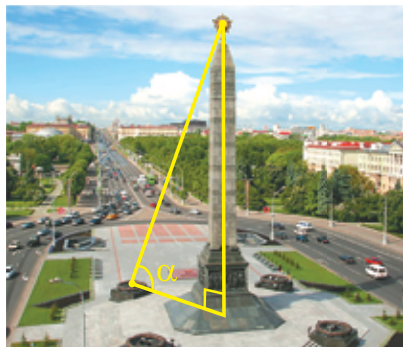
Рис. 11

С увеличением острого угла синус и тангенс возрастают, а косинус и котангенс убывают (рис. 11), то есть если $\beta > \alpha$, то $\sin \beta > \sin \alpha$, $\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha$, но $\cos \beta < \cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \beta < \operatorname{ctg} \alpha$ (см. с. 28, задачу 2). Это гарантирует, что синус (косинус, тангенс и котангенс) острого угла определяют этот угол однозначно.

Моделирование

Орден на вершине монумента на площади Победы в г. Минске освещается прожектором, который находится на расстоянии 10 м от центра основания. Высота монумента 38 м. Определите величину угла, который луч прожектора составляет с поверхностью земли (с прямой, соединяющей прожектор и основание монумента).

Выясните, как называется указанный орден и каковы его размеры. Капсулы с землей из каких городов-героев СССР размещены на площади Победы?



Задания к § 1

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. В прямоугольном треугольнике ABC , где $\angle C = 90^\circ$, катет BC равен 8 см, гипотенуза AB равна 17 см. Найдите косинус угла A (рис. 12).

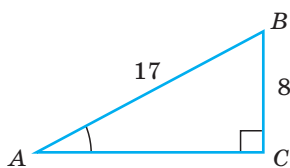


Рис. 12

Решение. По теореме Пифагора найдем катет AC :
 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см). Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к гипотенузе. Тогда
 $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$.

Ответ: $\frac{15}{17}$.

Задача 2. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 20 см, $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$ (рис. 13). Найдите площадь треугольника.

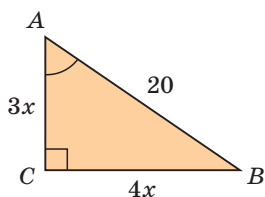


Рис. 13

Решение. Так как $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, то $\frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$. Обозначим $AC = 3x$ см, $BC = 4x$ см. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $(3x)^2 + (4x)^2 = 20^2$, $25x^2 = 400$, $x^2 = 16$, $x = 4$ ($x > 0$). Тогда $AC = 3 \cdot 4 = 12$ (см), $BC = 4 \cdot 4 = 16$ (см), $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$ (см²).
 Ответ: 96 см².

Задача 3. При помощи циркуля и линейки построить угол, синус которого равен $\frac{4}{5}$.

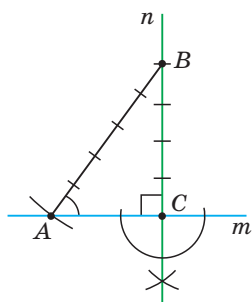


Рис. 14

Решение. Идея решения. Построим прямоугольный треугольник с катетом, равным 4 единицы, и гипотенузой, равной 5 единиц. Синус угла, противолежащего указанному катету, будет равен $\frac{4}{5}$.

Построение. 1) Строим прямой угол C (рис. 14), для чего проводим произвольную прямую m , отмечаем на ней точку C и строим прямую n , проходящую через точку C перпендикулярно прямой m (вспомните по рисунку алгоритм построения).

2) На прямой n от точки C откладываем последовательно четыре равных отрезка. Получаем отрезок BC , который содержит 4 единицы.

3) Строим окружность с центром в точке B радиусом, равным пяти единицам. В пересечении этой окружности и прямой m получаем точку A . Угол BAC — искомый.

Доказательство. Из $\triangle ABC$ находим $\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

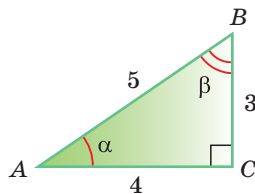


Рис. 15

1. По рисунку 15 найдите:

- | | | | |
|--------------------|--------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| а) $\sin \alpha$; | б) $\cos \alpha$; | в) $\operatorname{tg} \alpha$; | г) $\operatorname{ctg} \alpha$; |
| д) $\sin \beta$; | е) $\cos \beta$; | ж) $\operatorname{tg} \beta$; | з) $\operatorname{ctg} \beta$. |

2. Используя клеточки в тетради, изобразите прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C такой, что $\operatorname{tg} A = \frac{4}{5}$. Определите на глаз величину угла A . Проверьте свое предположение при помощи транспортира.

3. По данным на рисунках 16, а)–в) вычислите соответственно $\sin \alpha$, $\cos \beta$ и $\operatorname{tg} \gamma$.

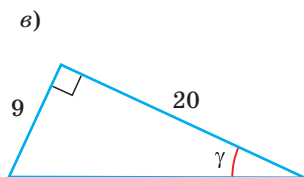
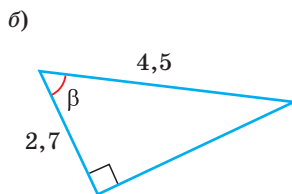
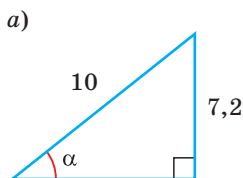


Рис. 16

4. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 25 см, катет AC равен 24 см. Найдите:

а) $\sin A$; б) $\cos A$; в) $\operatorname{tg} B$;
г) $\operatorname{ctg} B$; д) $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{ctg} B$; е) $\sin^2 A + \cos^2 A$.

5. При помощи калькулятора или тригонометрических таблиц найдите, округлив ответ до 0,0001:

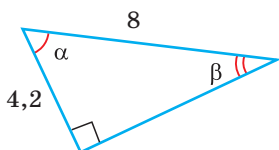
а) $\sin 5^\circ$; б) $\sin 15^\circ$; в) $\cos 40^\circ$;
г) $\cos 72^\circ$; д) $\operatorname{tg} 50^\circ$; е) $\operatorname{tg} 85^\circ$.

6. При помощи калькулятора или тригонометрических таблиц найдите, округлив ответ до 1° , величину острого угла x , если:

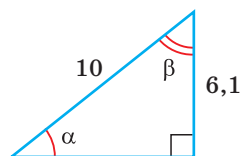
а) $\sin x = 0,4226$; б) $\cos x = 0,6820$; в) $\operatorname{tg} x = 0,5774$.

7. Найдите острые углы α и β треугольников на рисунках 17, а)–в), используя тригонометрические функции и калькулятор (таблицы). Ответы округлите до 1° .

а)



б)



в)

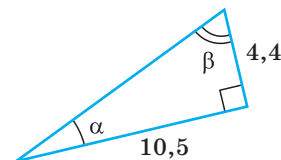


Рис. 17

8. Дан равнобедренный треугольник ABC (рис. 18), $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, BH — высота. Вычислите:

а) синус угла BAC ;
б) косинус угла ACB ;
в) тангенс угла CBH ;
г) высоту AK и синус угла ABK .

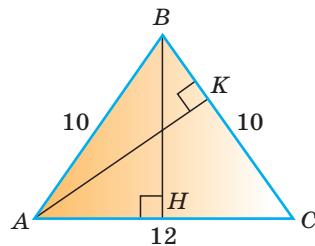


Рис. 18

9. Найдите синус меньшего острого угла между диагональю прямоугольника и его стороной, если периметр прямоугольника равен 34 см, а одна из сторон — 12 см.

10. Заполните пропуски в равенствах, перенеся их в тетрадь:

а) $\sin 60^\circ = \dots$; б) $\operatorname{tg} 30^\circ = \dots$;
в) $\sin \dots = \frac{1}{2}$; г) $\cos \dots = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
д) $\sin 45^\circ = \dots$; е) $\operatorname{ctg} \dots = \sqrt{3}$;
ж) $\dots 45^\circ = 1$; з) $\cos \dots = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. Угол α — острый. Найдите:

- а) угол α , $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{1}{2}$;
 б) угол α , $\cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 в) угол α , $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$;
 г) угол α , $\cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = 0,5$.

12. Найдите косинус острого угла равнобедренной трапеции со сторонами, равными 5 см, 11 см, 6 см, 6 см, и укажите градусную меру этого угла.

13. По данным на рисунках 19, а)–в) найдите длину отрезка x , используя определение синуса или косинуса острого угла прямоугольного треугольника.

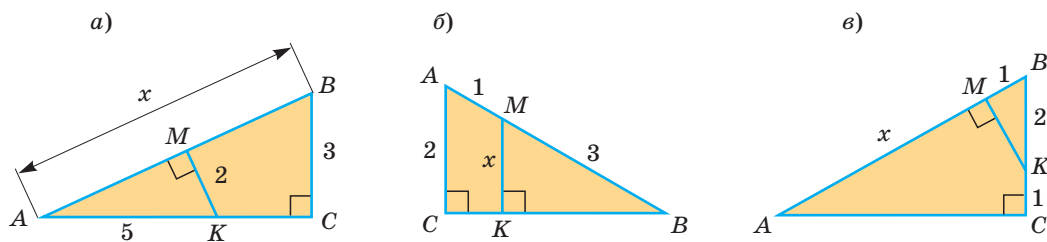


Рис. 19

14. Основание равнобедренного треугольника равно 8 см, тангенс угла при основании равен 2. Найдите площадь треугольника.

15. Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{2}{5}$, один из катетов на 6 см больше другого. Найдите площадь треугольника.

16. Окружность с центром O касается катета AC и проходит через вершину B прямоугольного треугольника ABC с катетами $BC = 6$, $AC = 8$; точка O лежит на гипотенузе AB (рис. 20). Найдите радиус этой окружности, используя определение синуса острого угла.

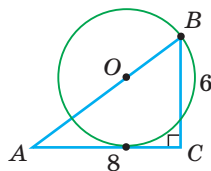


Рис. 20

17. Какие из следующих чисел не могут быть значениями синуса острого угла: 2 ; $\frac{15}{17}$; $-\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$; $0,75$; $\sqrt{3} - 1$?

18. При помощи циркуля и линейки постройте угол α , если известно, что:
 а) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; б) $\cos \alpha = 0,6$.

19. Докажите, что если α и β — острые углы одного прямоугольного треугольника, то:

- а) $\sin \alpha + \sin \beta < 2$; б) $\sin \alpha + \sin \beta > 1$.

20. а) Периметр равнобедренного треугольника равен 64 см, косинус угла при основании равен 0,6. Найдите площадь треугольника.
 б) Основание равнобедренного треугольника равно 10 см, синус противолежащего основанию острого угла равен $\frac{3}{5}$. Найдите площадь треугольника.

21. В остроугольном треугольнике ABC (рис. 21) проведены высоты AA_1 и CC_1 , $\angle B = 60^\circ$, $A_1C_1 = 4$, $S_{A_1BC_1} = 9$.

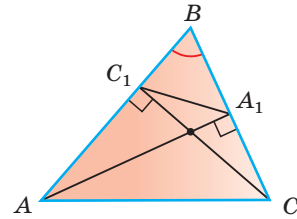


Рис. 21

- а) Докажите, что треугольник A_1BC_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия, равным $\cos B$.
 б) Найдите длину стороны AC .
 в) Найдите S_{ABC} .

Реальная геометрия

На рисунке 22 изображен дорожный знак «Крутой подъем 12 %». Он означает, что через каждые 100 м, отсчитываемых по горизонтали, высота положения точки увеличивается на 12 м.

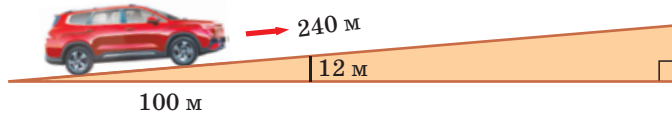


Рис. 22

Задание 1. Определите величину угла подъема при таком знаке, используя понятие тангенса угла.

Задание 2. Вычислите, используя тригонометрические функции, на какую высоту относительно первоначального положения поднимется автомобиль, если он проедет по дороге 240 м в гору. Проверьте полученный результат, решив эту же задачу, используя подобие треугольников.

Интересно знать. В 2017 г. состоялось торжественное открытие завода «БЕЛДЖИ» по сборке легковых автомобилей. Предприятие размещается между Борисовом и Жодино. В 2023 г. СЗАО «БЕЛДЖИ» подтвердило звание лауреата Премии Правительства и получило престижную награду за достижения в области качества.



Задание 3. Используя дополнительные источники информации, выясните первоначальную мощность завода (количество выпускаемых автомобилей в год).

§ 2. Решение прямоугольного треугольника

1. Алгоритм решения прямоугольного треугольника

Под решением *прямоугольного треугольника* понимают нахождение его неизвестных сторон и углов по некоторым элементам, определяющим этот треугольник. Рассмотрим три задачи:

- 1) нахождение катета по гипотенузе и острому углу;
- 2) нахождение катета по другому катету и острому углу;
- 3) нахождение гипотенузы по катету и острому углу.

Задача 1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 6, острый угол равен 32° (рис. 23). Найти катет, прилежащий к данному углу. Ответ округлить до 0,1.

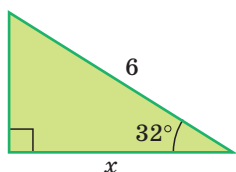


Рис. 23

Решение. Примем длину искомого катета за x .

$$\left(\text{Известно: } \cos \alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}} \right)$$

$$\cos 32^\circ = \frac{x}{6}, \quad x = 6 \cdot \cos 32^\circ, \quad x \approx 6 \cdot 0,8480 \approx 5,1.$$

(шаг 1)

(шаг 2)

(шаг 3)

Ответ: 5,1.

Задача 2. Катет прямоугольного треугольника равен 2,5, а прилежащий к нему угол равен 68° (рис. 24). Найти другой катет. Ответ округлить до 0,1.

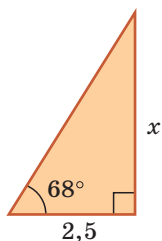


Рис. 24

Решение. Примем длину неизвестного катета за x .

$$\left(\text{Известно: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}} \right)$$

$$\operatorname{tg} 68^\circ = \frac{x}{2,5}, \quad x = 2,5 \cdot \operatorname{tg} 68^\circ, \quad x \approx 2,5 \cdot 2,4751 \approx 6,2.$$

(шаг 1)

(шаг 2)

(шаг 3)

Ответ: 6,2.

Задача 3. Катет прямоугольного треугольника равен 4,2, противолежащий ему угол равен 29° (рис. 25). Найти гипотенузу треугольника. Ответ округлить до 0,1.

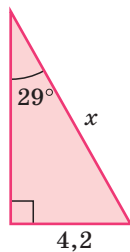


Рис. 25

Решение. Примем длину гипотенузы за x .

$$\left(\text{Известно: } \sin \alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}} \right)$$

$$\sin 29^\circ = \frac{4,2}{x}, \quad x \cdot \sin 29^\circ = 4,2,$$

$$x = \frac{4,2}{\sin 29^\circ} \approx \frac{4,2}{0,4848} \approx 8,7.$$

Ответ: 8,7.

А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

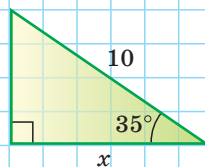
Катет x равен:

а) $10 \sin 35^\circ$;

б) $\frac{10}{\cos 35^\circ}$;

в) $10 \cos 35^\circ$;

г) $10 \operatorname{ctg} 35^\circ$.



2. Правила решения прямоугольного треугольника

Преобразуем формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса и запишем результаты для треугольника на рисунке 26:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad a = c \cdot \sin \alpha, \quad c = \frac{a}{\sin \alpha};$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad b = c \cdot \cos \alpha, \quad c = \frac{b}{\cos \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad b = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad a = \frac{b}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

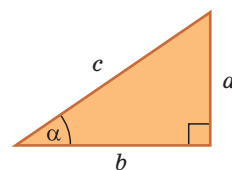


Рис. 26

Удобно пользоваться следующими правилами:

Катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего или на косинус прилежащего угла (рис. 27, а).

Гипотенуза равна катету, деленному на синус противолежащего или на косинус прилежащего угла (рис. 27, б).

Катет равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего к первому катету угла (рис. 27, в).

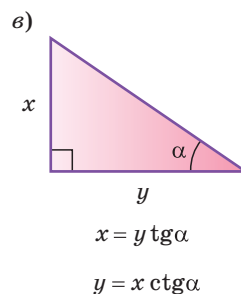
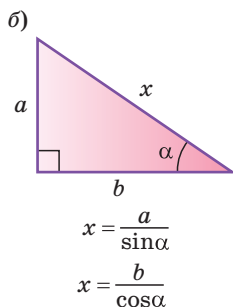
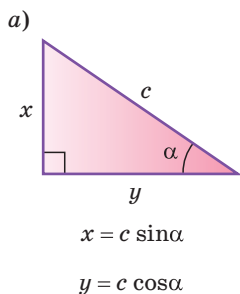


Рис. 27

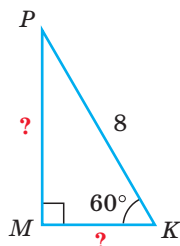


Рис. 28

Пример.

В $\triangle MPK$ известно: $\angle M = 90^\circ$, $\angle K = 60^\circ$, $PK = 8$ (рис. 28).

$$MP = PK \cdot \sin K = 8 \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

$$MK = PK \cdot \cos K = 8 \cdot \cos 60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Полезно запомнить!

Если в прямоугольном треугольнике с углом 30° (или 60°) дан *меньший катет* a , то *большой катет* $b = a\sqrt{3}$ (рис. 29, а). А если дан *большой катет* b , то *меньший катет* $a = \frac{b}{\sqrt{3}}$ (рис. 29, б).

Если в прямоугольном треугольнике с углом 45° дан *катет* a , то *гипотенуза* $c = a\sqrt{2}$ (рис. 30, а), а если дана *гипотенуза* c , то *катет* $a = \frac{c}{\sqrt{2}}$ (рис. 30, б).

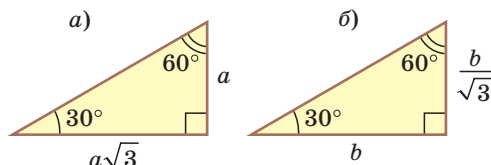


Рис. 29

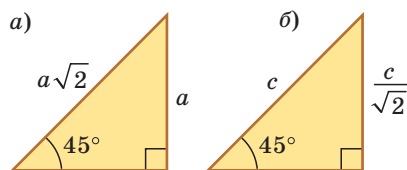


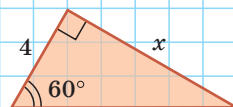
Рис. 30

А теперь выполните **Тест 2**.

Тест 2

Длина стороны x равна:

- а) 8; б) $4\sqrt{3}$; в) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; г) 6.



Задания к § 2

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. В прямоугольном треугольнике ABC известно: $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $\angle A = \alpha$, CH — высота, проведенная к гипотенузе (рис. 31). Найти проекцию HB катета BC на гипотенузу.

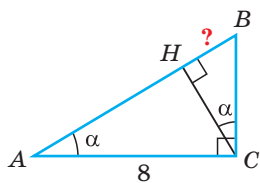


Рис. 31

Решение. Заметим, что $\angle BCH = \angle A = \alpha$, так как эти углы дополняют $\angle B$ до 90° . Из $\triangle ABC$ $\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \alpha$, $BC = AC \operatorname{tg} \alpha = 8 \operatorname{tg} \alpha$. Из $\triangle BHC$ $\frac{HB}{BC} = \sin \alpha$, $HB = BC \sin \alpha = 8 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha$.
 Ответ: $8 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha$.

Задача 2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно 7, боковая сторона AB равна 10, $\sin A = 0,8$. Найти площадь трапеции.

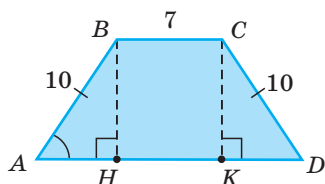


Рис. 32

Решение. Площадь трапеции находится по формуле $S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Найдем большее основание и высоту трапеции. Проведем в трапеции высоты BH и CK (рис. 32). Так как $HBCK$ — прямоугольник (все углы прямые), то $HK = BC = 7$. Из равенства прямоугольных треугольников AHB и DKC (по катету и гипотенузе) $AH = KD$. Из прямоугольного треугольника AHB находим: $BH = AB \cdot \sin A = 10 \cdot 0,8 = 8$, откуда $AH = 6$ (пифагорова тройка 6, 8, 10). Тогда $AD = 2AH + HK = 2 \cdot 6 + 7 = 19$, $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = \frac{7 + 19}{2} \cdot 8 = 104$.
 Ответ: 104.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

22. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 33) $AB = c$, $\angle A = \alpha$. Найдите:

- а) угол B ; б) катет BC ; в) катет AC .

23. Дан прямоугольный треугольник ABC , $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $\angle B = \beta$. Найдите:

- а) катет BC ; б) гипотенузу AB ; в) S_{ABC} .

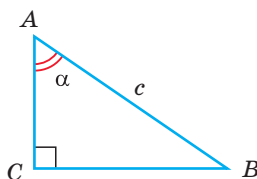


Рис. 33

24. Найдите сторону прямоугольного треугольника, которая обозначена буквой x на рисунках 34, а)–в). Ответы округлите до 0,1. При расчетах используйте калькулятор или тригонометрические таблицы.

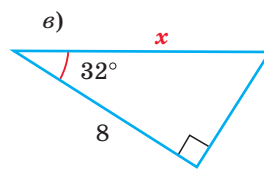
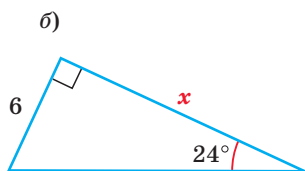
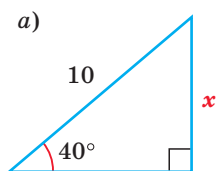


Рис. 34

25. Найдите неизвестные стороны треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), если:

- а) $AB = 10$, $\sin B = \frac{3}{5}$;
- б) $AB = 8$, $\cos B = 0,75$;
- в) $BC = 4$, $\sin A = \frac{2}{3}$;
- г) $AC = 1,5$, $\operatorname{tg} A = 2$.

26. По данным на рисунках 35, а)–г) найдите сторону x и площадь S :

- а) прямоугольника;
- б) равнобедренного прямоугольного треугольника;
- в) квадрата;
- г) равностороннего треугольника.

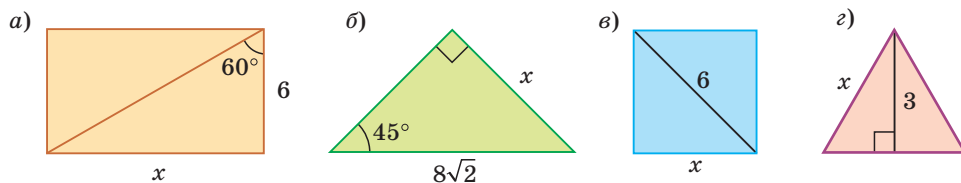


Рис. 35

27. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 15 см, синус острого угла при вершине равен 0,8. Вычислите площадь треугольника.

28. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $BC = 4$ см и $AD = 10$ см. Известно, что $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$. Найдите площадь трапеции.

29. Дан параллелограмм $ABCD$. Его высота BK проведена к стороне AD , $AK : KD = 1 : 2$, $BC = 24$ см. Найдите площадь параллелограмма, если $\cos C = \frac{4}{5}$.

30. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, высота CH равна 12, медиана CM равна 15. Найдите синус меньшего острого угла треугольника ABC .

31. а) Боковая сторона равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равна a , угол при основании равен α (рис. 36). Найдите площадь треугольника ABC .

б) Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$) и углом α при большем основании (рис. 37). Найдите площадь трапеции.

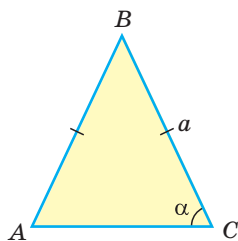


Рис. 36

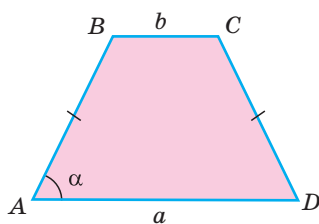


Рис. 37

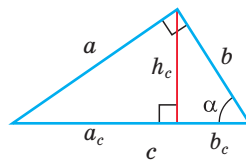


Рис. 38

- 32.** В треугольнике ABC высота BH и медиана BM делят $\angle ABC$ на три равных угла. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- 33.** В прямоугольном треугольнике известны гипотенуза c и острый угол α (рис. 38). Найдите: катет a , катет b , высоту h_c , проекции a_c и b_c катетов a и b на гипотенузу.

Моделирование

Определите, можно ли разместить под лестницей длиной 6 м, составляющей с полом угол в 50° (рис. 39), ящик с размерами $2 \times 2 \times 3$ (м). Рассмотрите разные варианты расположения ящика (ящик можно класть набок).

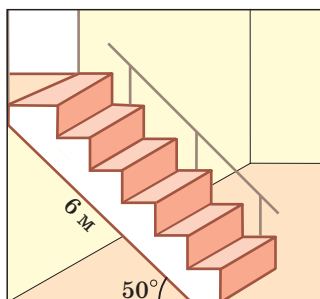
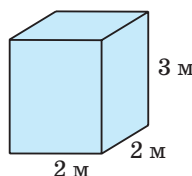


Рис. 39



Гимнастика ума

По данным на рисунке 40 найдите:

- $\operatorname{tg} C$;
- $\sin A$;
- $\operatorname{ctg} B$.

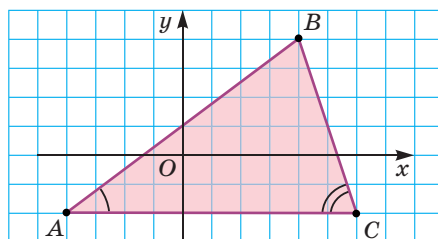


Рис. 40



При помощи **Интернета** выясните, что означает термин «тригонометрия», когда он возник. В каких сферах деятельности используется тригонометрия?

§ 3. Тригонометрические формулы

Зная, что $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$, где a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника, можно получить формулы, связывающие значения тригонометрических функций острого угла.

1. Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Доказательство. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$.

$$\text{Тогда } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Так, для угла 30° получим: $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$. Это верно, так как $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

Следствие.

Так как синус и косинус острого угла α положительны, то

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \text{ и } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

2. Выражение тангенса и котангенса через синус и косинус

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Доказательство. а) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$, б) $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$.

Следствие. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$.

3. Основная задача

Дано: $\sin \beta = \frac{5}{13}$, β — острый угол.

Найти: $\cos \beta$, $\operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{ctg} \beta$.

Решение. Способ 1. Используем основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \beta = 1$, $\cos^2 \beta = 1 - \frac{25}{169}$, $\cos^2 \beta = \frac{144}{169}$, $\cos \beta = \pm \sqrt{\frac{144}{169}} = \pm \frac{12}{13}$. Так как косинус острого угла больше нуля, то $\cos \beta = \frac{12}{13}$; откуда $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{12}{5}$.

Способ 2. Изобразим прямоугольный треугольник с катетом 5 и гипотенузой 13 (рис. 41). Синус угла, противолежащего данному катету, равен $\frac{5}{13}$. Поэтому этот угол равен β . По теореме Пифагора другой катет равен $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Тогда $\cos \beta = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{12}{5}$.

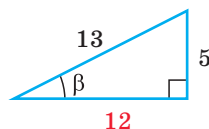


Рис. 41

Способ 3. Пусть катет, противолежащий углу β , равен $5x$, тогда гипотенуза равна $13x$. По теореме Пифагора прилежащий катет равен $\sqrt{(13x)^2 - (5x)^2} = \sqrt{144x^2} = 12x$. Отсюда $\cos \beta = \frac{12x}{13x} = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{12}{5}$.

Ответ: $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{12}{5}$.

А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

Пусть α — острый угол. Если $\cos \alpha = 0,8$, то $\sin \alpha$ равен:

- а) 0,8; б) 0,6; в) 0,2; г) 1,6.



Задания к § 3

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 42) сторона $BC = 50$ см, высота $BK = 30$ см, $\cos A = \frac{8}{17}$. Найти периметр параллелограмма.

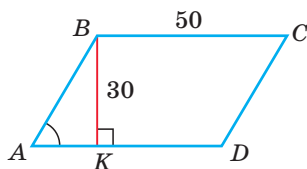


Рис. 42

Решение. Из треугольника ABK находим: $\sin A = \frac{BK}{AB}$, $AB = \frac{BK}{\sin A}$. Из основного тригонометрического тождества следует: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $\sin^2 A + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1$, $\sin^2 A = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$, $\sin A = \frac{15}{17}$ (синус острого угла положителен).

Тогда $AB = \frac{BK}{\sin A} = \frac{30}{\frac{15}{17}} = 34$ (см),

$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2 \cdot (34 + 50) = 168$ (см).

Ответ: 168 см.

Задача 2. Доказать, что при увеличении угла от 0° до 90° :

- а) синус угла увеличивается от 0 до 1, а косинус — уменьшается от 1 до 0;
 б) тангенс угла увеличивается от 0 до бесконечности.

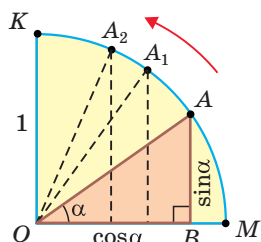


Рис. 43

Решение. а) Рассмотрим прямоугольные треугольники с гипотенузой, равной 1. Для этого опишем радиусом OM , равным 1, четверть окружности — дугу MK (рис. 43). Пусть $\angle AOM = \alpha$. Опустим из точки A перпендикуляр AB на OM . Тогда $\sin \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB$, $\cos \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{1} = OB$. При повороте радиуса OM вокруг центра O против часовой стрелки, начиная от OM и заканчивая OK , угол α будет увеличиваться от 0° до 90° (образуя указанные на чертеже

углы: $\angle MOA$, $\angle MOA_1$, $\angle MOA_2$ и т. д.). Величина катета AB , противолежащего углу α , будет увеличиваться от 0 до 1. А величина катета OB , наоборот, будет уменьшаться от 1 до 0. Таким образом, при увеличении угла от 0° до 90° его синус увеличивается от 0 до 1, а косинус уменьшается от 1 до 0.

Из формулы $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ также следует (учитывая положительность синуса и косинуса острого угла), что с увеличением синуса от 0 до 1 косинус уменьшается от 1 до 0.

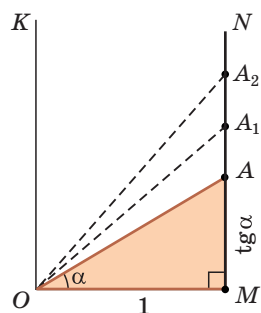


Рис. 44

б) Для определения изменения тангенса угла удобно рассматривать треугольники, у которых прилежащий катет не изменяется и остается равным 1, а противолежащий катет изменяется. Рассмотрим прямоугольный треугольник AOM , у которого отрезок $OM = 1$, $\angle AOM = \alpha$ (рис. 44). По определению $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AM}{OM} = \frac{AM}{1} = AM$. Угол α станем изменять, перемещая точку A по прямой MN , начиная от точки M и проходя через точки A , A_1 , A_2 и т. д. При этом угол α и его тангенс начнут возрастать. Таким образом, когда угол α при движении точки A вверх будет стремиться

к углу KOM , равному 90° , то тангенс этого угла будет неограниченно возрастать.

К такому же выводу можно прийти, рассматривая формулу $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

При увеличении угла α от 0° до 90° числитель дроби будет увеличиваться от 0 до 1, а знаменатель — уменьшаться от 1 до 0, значит, вся дробь будет увеличиваться от 0 до бесконечности. Таким образом, при увеличении угла от 0° до 90° его тангенс увеличивается от 0 до бесконечности.

**РЕШАЕМ
САМОСТОЯТЕЛЬНО**

34. Дан острый угол α .

а) Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

б) Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.

в) Найдите $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

г) Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$.

35. а) Найдите $\operatorname{ctg} \alpha$, если α — острый угол и $\sin \alpha = 0,8$.

б) Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если α — острый угол и $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

36. Заполните пропуски в формулах, переписав их в тетрадь:

а) $\sin^2 \beta + \dots = 1$; б) $\cos^2 \alpha = 1 - \dots$;

в) $\dots = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; г) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\dots}{\dots}$.

37. Найдите:

а) синус, тангенс и котангенс острого угла, косинус которого равен $0,6$;

б) косинус, тангенс и котангенс острого угла, синус которого равен $\frac{7}{25}$.

38. В окружности радиусом, равным 6 см, проведены диаметр AB и хорда AC . Найдите длину хорды BC , если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

 **39.** Сравните величины острых углов α и β , если:

а) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$; $\sin \beta = \frac{1}{4}$;

б) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$; $\cos \beta = \frac{2}{5}$.

 **40.** Выясните, что больше: $\sin \alpha$ или $\operatorname{tg} \alpha$, где α — острый угол.

 **41.** Докажите, что для острого угла α справедливо тождество $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.

 **42.** Выведите для острого угла α формулы $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ и $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, разделив почленно обе части основного тригонометрического тождества на $\sin^2 \alpha$ и на $\cos^2 \alpha$.

 **43.** Найдите синус острого угла α , если его котангенс равен $1\frac{1}{3}$.

Реальная геометрия

На рисунке 45 показаны размеры железнодорожной насыпи, поперечное сечение которой имеет форму равнобедренной трапеции. Найдите по указанным размерам примерную высоту h насыпи. Ответ округлите до 0,1 м.

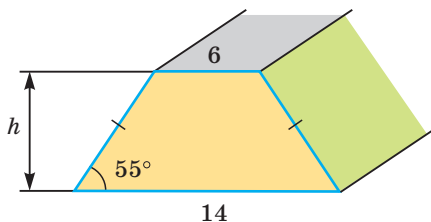


Рис. 45



Рис. 46

Интересно знать. Детская железная дорога имени К. С. Заслонова в Минске (рис. 46) — единственная детская железная дорога в Беларуси. На ней работают три станции: «Заслоново», «Пионерская» и «Сосновый Бор». Длина главного пути составляет 3790 м. Ежегодно 9 мая юные железнодорожники работают в форме военных лет. В этот день на станции «Сосновый бор» гостей ждет праздничная концертная программа.

Геометрия 3D

Задача. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит квадрат, диагональ которого $AC = 4\sqrt{6}$ см. Диагональ CD_1 боковой грани составляет с ребром основания DC угол 60° (рис. 47). Найдите объем параллелепипеда.

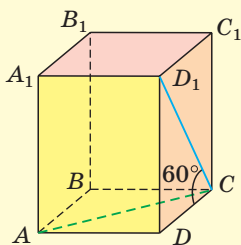


Рис. 47

Решение. Объем прямоугольного параллелепипеда находится по формуле $V = abc$, где a , b и c — его измерения. Так как $ABCD$ — квадрат, то $AD = DC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{3}$ (см). Из прямоугольного треугольника D_1DC находим $D_1D = DC \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = DC \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$ (см). Искомый объем $V = AD \cdot DC \cdot DD_1 = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12 = 576$ (см³).
Ответ: 576 см³.

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда найдите самостоятельно.



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника.
2. Значения тригонометрических функций углов 30° , 45° , 60° .
3. Формулы, связывающие тригонометрические функции одного угла.

Умеем

1. Решать прямоугольный треугольник.
2. Зная $\sin \alpha$, где α — острый угол, находить $\cos \alpha$ и выполнять обратное действие.
3. Зная $\sin \alpha$ или $\cos \alpha$, где α — острый угол, находить $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.
4. Доказывать основное тригонометрическое тождество.

§ 4. Синус, косинус, тангенс и котангенс тупого угла

1. Определение значений $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ для любого угла α от 0° до 180°

Ранее мы дали определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла через отношение сторон прямоугольного треугольника. Сделаем теперь это для углов от 0° до 180° .

Рассмотрим полуокружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис. 48). От положительной полуоси Ox в верхнюю полуплоскость отложим острый угол α , сторона которого пересекает полуокружность в точке $M(x; y)$. Из прямоугольного треугольника OMN , где $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, получаем:

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y, \quad \cos \alpha = \frac{x}{1} = x, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x},$$

$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$, то есть синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла α выражаются через координаты x и y точки $M(x; y)$. Таким образом определяются значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ для $\angle MOM_1 = \alpha$ из промежутка $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Синусом угла α называется ордината y , косинусом — абсцисса x , тангенсом — отношение ординаты к абсциссе $\frac{y}{x}$, а котангенсом — отношение абсциссы к ординате $\frac{x}{y}$ точки M единичной полуокружности.

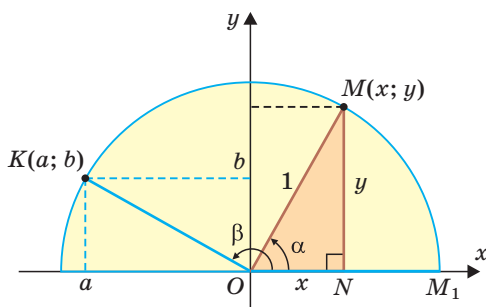


Рис. 48

Например, для тупого $\angle KOM_1 = \beta$ (см. рис. 48), где $K(a; b)$, получим:

$$\sin \beta = b, \cos \beta = a, \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}, \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}.$$

Для любого положения точки $M(x; y)$ на единичной полуокружности верно равенство $x^2 + y^2 = 1$ (докажите самостоятельно). Поэтому для углов α , где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, верно основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Также верны тождества: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

2. Нахождение синуса, косинуса, тангенса и котангенса тупых углов

Пусть $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = \alpha$, откуда $\angle A_1OB = 180^\circ - \alpha$ (рис. 49). Так как $\triangle OAB = \triangle OA_1B_1$ по гипотенузе и острому углу, то $A_1B_1 = AB$, $OB_1 = OB$.

Точки A и A_1 имеют координаты: $A(a; b)$ и $A_1(-a; b)$. Тогда $\sin \alpha = b$, $\cos \alpha = a$, $\sin(180^\circ - \alpha) = b$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -a$, то есть для углов от 0° до 180° справедливы равенства:

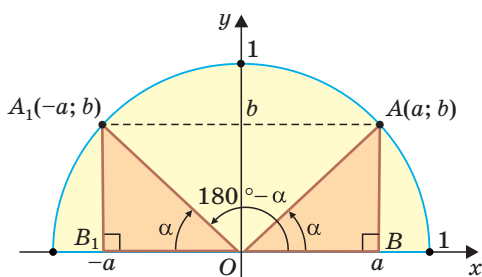


Рис. 49

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Можно пользоваться следующим правилом:

Синус тупого угла равен синусу смежного с ним острого угла.

Косинус тупого угла равен косинусу смежного с ним острого угла, взятому со знаком «минус».

Пример 1. $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Разделив почленно равенство $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ на равенство $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, а затем наоборот, получим равенства:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Можно пользоваться следующим правилом:

Тангенс (котангенс) тупого угла равен тангенсу (котангенсу) смежного с ним острого угла, взятому со знаком «минус».

Пример 2. $\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 135^\circ = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$.

Указанные формулы и правила позволяют находить значения тригонометрических функций тупого угла через значения тригонометрических функций острого угла, который дополняет данный тупой угол до 180° : синусы углов, дополняющих друг друга до 180° , равны между собой, а косинусы, тангенсы и котангенсы — противоположны. Так как синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла положительные, то синус тупого угла положительный, а косинус, тангенс и котангенс — отрицательные.

А теперь выполните **Тест 1**.

3. Значения тригонометрических функций для углов 0° , 90° , 180°

Если луч OM совпадет с лучом OM_1 (рис. 50), то будем считать, что $\alpha = 0^\circ$. Тогда:

а) $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$; значение $\operatorname{ctg} 0^\circ = \frac{1}{0}$ не определено, так как деление на ноль невозможно;

б) $\angle M_2OM_1 = 90^\circ$, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{0}{1} = 0$; значение $\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{1}{0}$ не определено, так как деление на ноль невозможно;

в) $\angle M_3OM_1 = 180^\circ$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0$; значение $\operatorname{ctg} 180^\circ = \frac{-1}{0}$ не определено, так как деление на ноль невозможно.

Поскольку проекции радиуса, равного 1, на оси координат меньше либо равны 1, то для углов $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ справедливы неравенства: $0 \leq \sin \alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

А теперь выполните **Тест 2**.

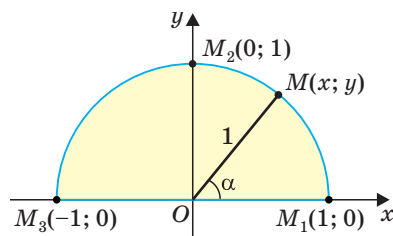


Рис. 50

Тест 1

Вычислите:

$$\cos 120^\circ + \sin 150^\circ.$$

а) 0;

б) 1;

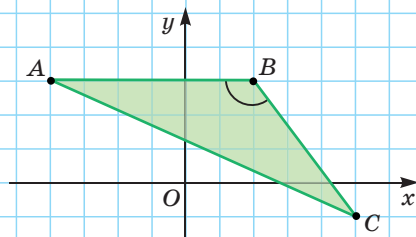
в) -1;

г) $\sqrt{3}$.

Тест 2

По данным на рисунке найдите косинус угла B.

а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $-\frac{3}{5}$; г) $\frac{4}{3}$.



Гимнастика ума

Если максимально расставить пальцы руки, то углы между мизинцем и остальными пальцами будут составлять примерно 30° , 45° , 60° , 90° (рис. 51).

Интересно, что если пальцы пронумеровать цифрами от 0 до 4, как на рисунке, то для нахождения синуса углов 0° , 30° , 45° , 60° и 90° можно использовать формулу $\sin \alpha = \frac{\sqrt{n}}{2}$, где α — данный угол, а n — номер пальца. Проверьте самостоятельно работу этой формулы.

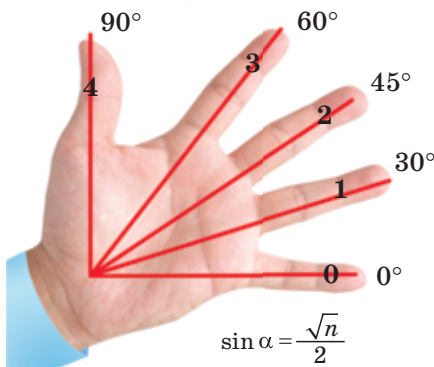


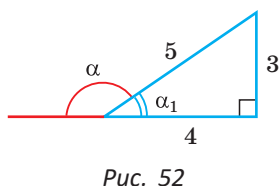
Рис. 51

**Задания к § 4****РЕШАЕМ ВМЕСТЕ**
ключевые задачи

Задача. Найдите $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и α — тупой угол.

Решение. *Способ 1.* Так как $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. Поскольку угол α — тупой, то его косинус отрицательный. Поэтому

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}. \text{ Тогда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}.$$



Способ 2. Синус острого угла α_1 , смежного с данным тупым углом α , равен также $\frac{3}{5}$. Построим прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 (рис. 52).

В нем $\sin \alpha_1 = \frac{3}{5}$, а $\cos \alpha_1 = \frac{4}{5}$. Так как косинусы смежных углов противоположны, то $\cos \alpha = -\cos \alpha_1 = -\frac{4}{5}$.

Аналогично, $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{3}{4}$.

Ответ: $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$.

**РЕШАЕМ**
САМОСТОЯТЕЛЬНО

44. Точки $M_1, M_2, \dots, M_8$ получаются при повороте радиуса OM единичной полуокружности вокруг точки O против часовой стрелки соответственно на углы $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ (рис. 53).

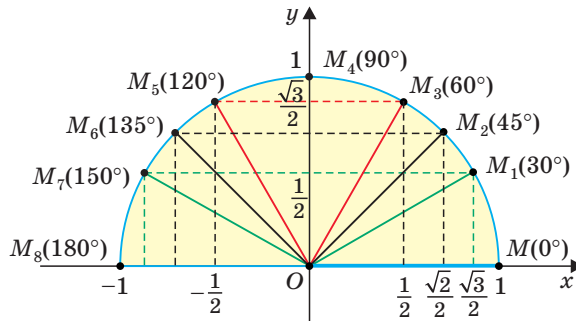


Рис. 53

- а) Используя рисунок, найдите координаты точек M , M_1 , M_2 , ..., M_8 .
 б) По координатам соответствующих точек найдите $\sin 135^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\operatorname{tg} 150^\circ$.



- в) Найдите $\sin 0^\circ$, $\cos 0^\circ$, $\sin 90^\circ$, $\cos 90^\circ$.

45. При помощи формул $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ или правил нахождения значений тригонометрических функций тупого угла найдите:

- а) $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\operatorname{tg} 120^\circ$, $\operatorname{ctg} 120^\circ$;
 б) $\sin 135^\circ$, $\cos 135^\circ$, $\operatorname{tg} 135^\circ$, $\operatorname{ctg} 135^\circ$;
 в) $\sin 150^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\operatorname{tg} 150^\circ$, $\operatorname{ctg} 150^\circ$.

46. Известно, что угол α тупой. Найдите $\cos \alpha$, если:

- а) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin \alpha = 0,6$; в) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

47. Известно, что $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Найдите $\sin \alpha$, если:

- а) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$; в) $\cos \alpha = -0,2$.

48. а) В треугольнике ABC (рис. 54) стороны $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $\sin \angle ABC = \frac{3}{4}$. Найдите высоту AH и S_{ABC} .

- б) В параллелограмме $ABCD$ (рис. 55) стороны $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $\cos \angle ABC = -0,6$. Найдите высоту CK и S_{ABCD} .

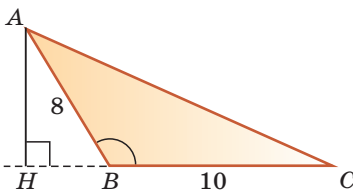


Рис. 54

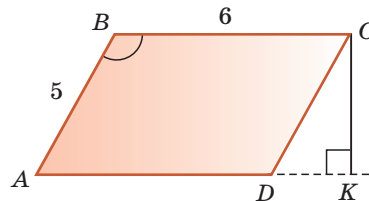


Рис. 55

49. Используя калькулятор (таблицы) и тригонометрические формулы (правила), найдите, округлив ответ до 0,0001:

- а) $\sin 100^\circ$; б) $\cos 175^\circ$; в) $\operatorname{tg} 115^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 140^\circ$.

50. а) Косинус одного из смежных углов равен $-0,3$. Найдите косинус другого угла.

б) Синус тупого угла параллелограмма равен $0,8$. Найдите тангенс острого угла параллелограмма.

51. Найдите $\sin \alpha + \cos \alpha$, если угол α равен:

- а) 0° ; б) 90° ; в) 180° .

52. Используя единичную полуокружность, докажите, что:

а) при увеличении угла от 0° до 90° его синус увеличивается от 0 до 1, косинус уменьшается от 1 до 0;

б) при увеличении угла от 90° до 180° его синус уменьшается от 1 до 0, косинус уменьшается от 0 до -1 .

53. Докажите, что для углов треугольника ABC верно равенство:

- а) $\sin A = \sin(B + C)$; б) $\cos A = -\cos(B + C)$.

Гимнастика ума

1. Найдите значение выражения $\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \dots \cdot \cos 180^\circ$.

2. Найдите значение выражения $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$.

§ 5. Формулы площади треугольника и площади параллелограмма

Тригонометрические функции позволяют получить формулы для вычисления площади треугольника и площади параллелограмма. Сформулируем их в виде двух теорем.

Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, т. е. $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$ — острый, $AK = h$ — высота (рис. 56, а).

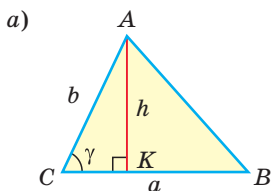
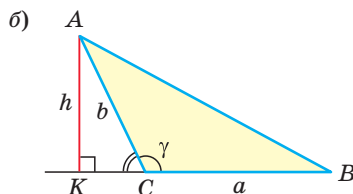


Рис. 56



Из прямоугольного треугольника AKC $\sin \gamma = \frac{h}{b}$, $h = b \sin \gamma$. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b \sin \gamma$.

Если угол γ тупой (рис. 56, б), то $\angle ACK = 180^\circ - \gamma$ — острый. Из прямоугольного треугольника AKC следует, что $h = b \sin(180^\circ - \gamma)$. Так как $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b \sin \gamma$.

Если $\gamma = 90^\circ$, то $\triangle ABC$ — прямоугольный с катетами a и b . Учитывая, что $\sin 90^\circ = 1$, получим: $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab \sin 90^\circ = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

Теорема доказана.

Теорема. Площадь параллелограмма равна произведению двух его соседних сторон на синус угла между ними, т. е. $S_{\text{пар}} = ab \sin \alpha$.

Используя рисунок 57, докажите эту теорему самостоятельно.

Замечание. Если $\alpha = 90^\circ$, то параллелограмм является прямоугольником. Его площадь $S = ab \sin 90^\circ = ab$, так как $\sin 90^\circ = 1$. Таким образом, формула площади прямоугольника $S = ab$ — частный случай формулы площади параллелограмма $S = ab \sin \alpha$.

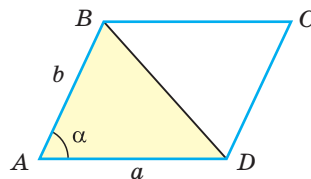


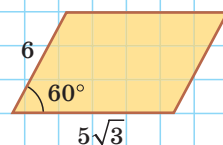
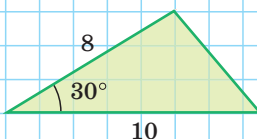
Рис. 57

А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

Найдите сумму площадей треугольника и параллелограмма, изображенных на рисунке.

а) 65; б) 85; в) $45\sqrt{3}$; г) 107,5.



Известно, что слово «синус» в переводе с латинского имеет множество значений: изгиб, дуга, пазуха, бухта, впадина, залив, хорда, забота и нежная любовь. При помощи **Интернета** выясните:

- какое из значений подходит к математическому понятию «синус»;
- какие из значений относятся к медицине и что врачи называют синуситом.



Задания к § 5

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. Дан параллелограмм $ABCD$, площадь которого равна 40 см^2 , а периметр — 36 см . Найти стороны параллелограмма, если его угол D равен 150° (рис. 58).

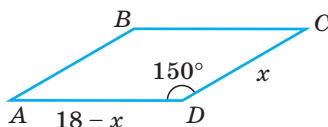


Рис. 58

Решение. Полупериметр параллелограмма равен 18 см . Если $CD = x \text{ см}$, то $AD = (18 - x) \text{ см}$.

Тогда

$$S_{ABCD} = CD \cdot AD \cdot \sin D = x(18 - x) \cdot \sin 150^\circ \text{ см}^2.$$

Так как $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}x(18 - x) \text{ см}^2$.

По условию $S_{ABCD} = 40 \text{ см}^2$. Составим и решим уравнение: $\frac{1}{2}x(18 - x) = 40$, $x^2 - 18x + 80 = 0$. По теореме Виета (обратной) $x_1 = 8$, $x_2 = 10$ — корни. Если $CD = 8 \text{ см}$, то $AD = 10 \text{ см}$, если $CD = 10 \text{ см}$, то $AD = 8 \text{ см}$.

Ответ: 8 см , 10 см .

Задача 2. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними, т. е. $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$.

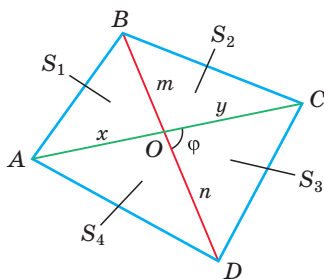


Рис. 59

Доказательство. Пусть диагонали $AC = d_1$ и $BD = d_2$ четырехугольника $ABCD$ (рис. 59) пересекаются в точке O , $\angle COD = \varphi$, $S_1 = S_{AOB}$, $S_2 = S_{BOC}$, $S_3 = S_{COD}$, $S_4 = S_{AOD}$. Докажем, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$.

Обозначим $AO = x$, $OC = y$, $BO = m$, $OD = n$. Заметим, что $\angle AOB = \angle COD$, $\angle BOC = \angle AOD$ как вертикальные, $\angle BOC = 180^\circ - \angle COD$ по свойству смежных углов. Поэтому $\sin \angle AOB = \sin \angle COD = \sin \varphi$, $\sin \angle BOC = \sin \angle AOD = \sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$. По формуле площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ получим:

$$S_1 = \frac{1}{2}xm \sin \angle AOB = \frac{1}{2}xm \sin \varphi, \quad S_2 = \frac{1}{2}ym \sin \angle BOC = \frac{1}{2}ym \sin \varphi,$$

$$S_3 = \frac{1}{2}yn \sin \angle COD = \frac{1}{2}yn \sin \varphi, \quad S_4 = \frac{1}{2}xn \sin \angle AOD = \frac{1}{2}xn \sin \varphi.$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2}xm \sin \varphi + \frac{1}{2}ym \sin \varphi + \frac{1}{2}yn \sin \varphi + \frac{1}{2}xn \sin \varphi = \\ &= \frac{1}{2}(m(x + y) + n(x + y)) \sin \varphi = \frac{1}{2}(x + y)(m + n) \sin \varphi = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

54. Используя формулы $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ и $S_{\text{пар}} = ab \sin \alpha$, найдите площади треугольников и параллелограмма, изображенных на рисунке 60.

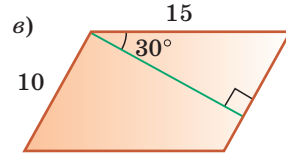
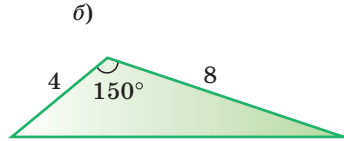
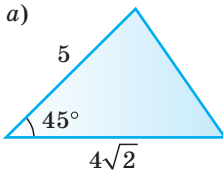


Рис. 60

55. Найдите площадь треугольника ABC , если:
- $AB = 6,5$ см, $BC = 8\sqrt{3}$ см, $\angle B = 120^\circ$;
 - $AC = 16$ см, $BC = 10\sqrt{2}$ см, $\angle A + \angle B = 135^\circ$.
56. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если:
- $AB = 4,2$ см, $AD = 6$ см, $\sin C = \frac{2}{3}$;
 - $P_{ABCD} = 48$ см, $BC = 13$ см, $\cos B = -\frac{12}{13}$.
57. а) Площадь параллелограмма равна $18\sqrt{3}$ см², одна из его сторон на 5 см больше другой, а один из углов равен 60° . Найдите периметр параллелограмма.
 б) Стороны параллелограмма относятся как 3 : 5, площадь равна 30 см², а тупой угол параллелограмма равен 150° . Найдите периметр параллелограмма.
58. а) Найдите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной $6\sqrt{2}$ см, и углом при основании, равным 75° .
 б) Площадь равнобедренного треугольника равна 16 см², угол при основании равен 15° . Найдите длину боковой стороны треугольника.
59. Выведите формулу площади равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, используя формулу $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.
60. У ромба $ABCD$ $AB = a$, $\angle A = \alpha$. Докажите, что $S_{ABCD} = a^2 \sin \alpha$.
61. а) Площадь равнобедренной трапеции равна $36\sqrt{3}$ см², угол между диагональю и основанием равен 30° . Найдите длину диагонали трапеции.
 б) Найдите площадь равнобедренной трапеции с диагональю, равной 12 см, и углом между диагональю и стороной основания, равным 15° .

62. а) Две стороны треугольника имеют длины a и b . Найдите наибольшее возможное значение, которое может принимать площадь треугольника.
- б) Диагонали выпуклого четырехугольника равны d_1 и d_2 . Найдите наибольшее возможное значение, которое может принимать площадь четырехугольника.
63. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Используя формулу $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, докажите, что $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$.

§ 6. Среднее пропорциональное (среднее геометрическое) в прямоугольном треугольнике

Если для положительных чисел a , b и c выполняется пропорция $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то число b называется *средним пропорциональным чисел a и c* (между числами a и c). Из указанной пропорции $b^2 = ac$, откуда $b = \sqrt{ac}$. В такой форме записи число b еще называют *средним геометрическим чисел a и c* .

Пример. Число 4 является средним пропорциональным, или средним геометрическим чисел 2 и 8, так как $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, или $4 = \sqrt{2 \cdot 8}$.

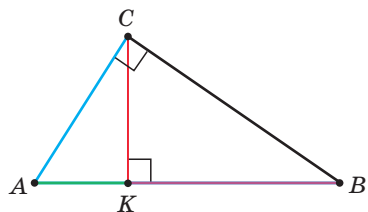


Рис. 61

В прямоугольном треугольнике ABC , где $\angle C = 90^\circ$, проведем высоту CK (рис. 61). Отрезок AK является проекцией катета AC на гипотенузу, а отрезок BK — проекцией катета BC на гипотенузу. Катеты, гипотенуза, высота и проекции катетов на гипотенузу связаны отношениями, которые мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема (о среднем пропорциональном в прямоугольном треугольнике).

а) Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу, т. е. $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$ (см. рис. 61).

б) Катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу, т. е. $AC = \sqrt{AB \cdot AK}$, $BC = \sqrt{AB \cdot KB}$.

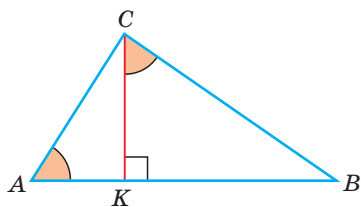


Рис. 62

Доказательство. а) Заметим, что если $\angle ACB = 90^\circ$, $CK \perp AB$, то $\angle BCK = \angle A$ (эти углы дополняют $\angle B$ до 90°) (рис. 62). Из $\triangle ACK$ $\operatorname{tg} A = \frac{CK}{AK}$, из $\triangle BCK$ $\operatorname{tg} \angle BCK = \frac{BK}{CK}$. Отсюда

$$\frac{BK}{CK} = \frac{CK}{AK}, CK^2 = AK \cdot BK, CK = \sqrt{AK \cdot BK}.$$

б) Из $\triangle ACK$ $\cos A = \frac{AK}{AC}$, из $\triangle ABC$ $\cos A = \frac{AC}{AB}$, откуда $\frac{AK}{AC} = \frac{AC}{AB}$, $AC^2 = AB \cdot AK$, $AC = \sqrt{AB \cdot AK}$.

Аналогично доказывается, что $BC = \sqrt{AB \cdot KB}$. Теорема доказана.

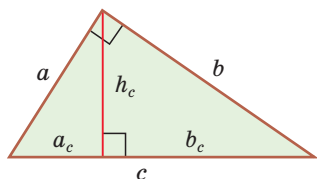


Рис. 63

Обозначив катеты a и b , гипотенузу c , высоту h_c , проекции катетов на гипотенузу a_c и b_c (рис. 63), получим следующие формулы:

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c, \text{ или } h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c},$$

$$a^2 = c \cdot a_c, \text{ или } a = \sqrt{c \cdot a_c},$$

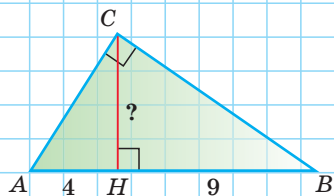
$$b^2 = c \cdot b_c, \text{ или } b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

Найдите высоту CH прямоугольного треугольника ABC .

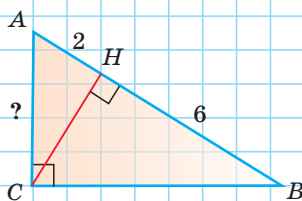
- а) 36;
- б) 6;
- в) 5;
- г) 13.



Тест 2

Найдите катет AC прямоугольного треугольника ABC .

- а) 8;
- б) 12;
- в) 4;
- г) 6.



Задания к § 6

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. Найти площадь прямоугольного треугольника, если проекции катетов на гипотенузу равны 2 см и 8 см.

Решение. Пусть CH — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AH = 2$ см — проекция катета AC на гипотенузу, $HB = 8$ см —

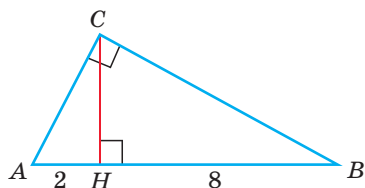


Рис. 64

проекция катета CB на гипотенузу (рис. 64). Так как высота CH есть среднее геометрическое между проекциями катетов на гипотенузу, то $CH = \sqrt{AH \cdot HB} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$ (см), $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$ (см²).

Ответ: 20 см².

Задача 2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK , $BC = 3\sqrt{5}$ см, $AK = 12$ см (рис. 65). Найдите гипотенузу AB .

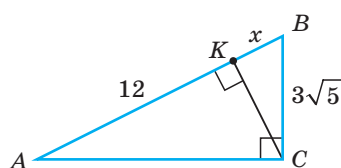


Рис. 65

Решение. Пусть $KB = x$ см, тогда $AB = (x + 12)$ см. Катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу. Поэтому $BC^2 = AB \cdot KB$, т. е. $(3\sqrt{5})^2 = (x + 12) \cdot x$, откуда $x^2 + 12x - 45 = 0$. По теореме Виета (обратной) $x_1 = -15$, $x_2 = 3$. По смыслу задачи $x > 0$. Значит, $KB = 3$ см, $AB = 15$ см.

Ответ: 15 см.

Задача 3. При помощи циркуля и линейки построить отрезок, равный среднему геометрическому отрезков m и n .

Решение. Пусть даны отрезки m и n . Необходимо построить отрезок $x = \sqrt{mn}$.

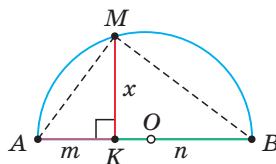
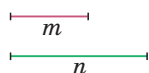


Рис. 66

Построение.

- 1) На произвольной прямой откладываем данные отрезки: $AK = m$, $KB = n$.
 - 2) На отрезке AB как на диаметре строим полуокружность, для чего находим середину O отрезка AB , откуда OA — радиус данной окружности.
 - 3) Из точки K восстанавливаем перпендикуляр к прямой AB до пересечения с полуокружностью в точке M (рис. 66).
- Отрезок $MK = x$ — среднее пропорциональное отрезков $AK = m$ и $KB = n$.

Доказательство. $\angle AMB$ — прямой как вписанный угол, опирающийся на диаметр. В прямоугольном треугольнике AMB высота MK является средним пропорциональным проекций катетов AM и MB на гипотенузу AB : $MK = \sqrt{AK \cdot KB}$, т. е. $x = \sqrt{mn}$.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

64. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. По данным на рисунках 67, а)–в) найдите длину отрезка x .

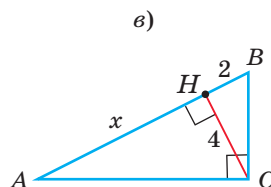
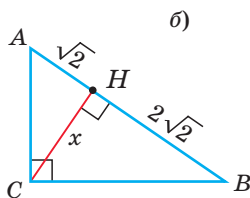
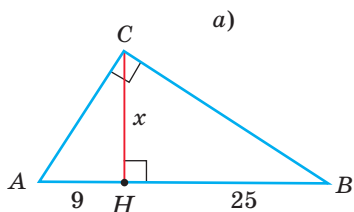


Рис. 67

65. Дан прямоугольный треугольник ABC , CH — высота, опущенная на гипотенузу. Найдите длину отрезка x (рис. 68, а)–в).

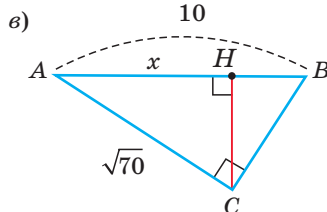
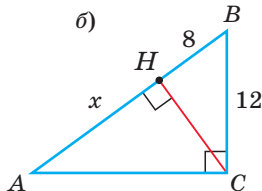
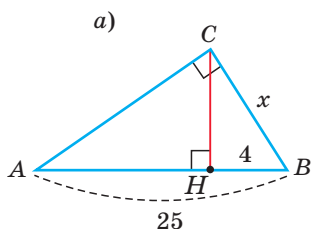


Рис. 68

66. В прямоугольном треугольнике ABC катет BC равен 8 см, а проекция катета AC на гипотенузу AB равна 12 см. Найдите длину гипотенузы.

67. AB — диаметр окружности (рис. 69). Найдите длину перпендикуляра MK .

68. Дан прямоугольник $ABCD$. Перпендикуляр BK , опущенный на диагональ AC , делит ее на отрезки, равные 2 см и 6 см. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

69. Найдите площадь прямоугольного треугольника, у которого высота делит гипотенузу на отрезки, равные 1,2 см и 4,8 см.

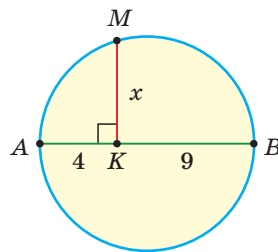


Рис. 69

70. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен проекции катета BC на гипотенузу AB . Найдите $\cos A$.

71. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CH , катет AC равен 4 см, $BH - AH = 4$ см. Найдите величину угла A .

Повторение

В 8-м классе мы доказали следующую теорему:

Теорема (о касательной и секущей). Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной, соединяющего данную точку и точку касания, равен произведению отрезков секущей, соединяющих данную точку и точки пересечения секущей с окружностью, т. е. $a^2 = bc$ (рис. 70).

Как видим, отрезок a является средним пропорциональным между отрезками b и c секущей. Глядя на рисунок 70, вспомните идею доказательства теоремы.

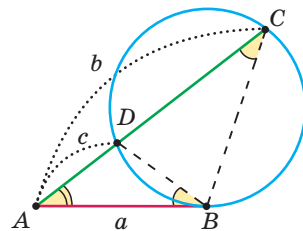


Рис. 70

Задача. Найдите AC (см. рис. 70), если $AB = 4$ см, $AD = 2$ см.

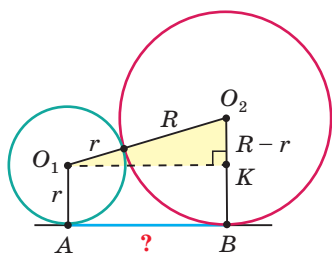


Рис. 71

Также в 8-м классе была рассмотрена ключевая задача о нахождении отрезка общей касательной двух касающихся внешне образом окружностей с радиусами, равными R и r (рис. 71). Был получен ответ: $AB = 2\sqrt{Rr}$, т. е. искомый отрезок AB — это удвоенное среднее геометрическое радиусов окружностей. Восстановите по рисунку 71 решение этой задачи.

Задача. Найдите длину отрезка AB (см. рис. 71), если $R = 18$ см, $r = 8$ см.

Реальная геометрия

Ребята из 9-го класса нашли высоту своей школы следующим образом. Они измерили угол, под которым видна кромка крыши школы (рис. 72), и расстояние от места измерения до фундамента школы. Угол оказался равным 67° , а расстояние — 5 м. Далее они применили алгоритм решения прямоугольного треугольника. Учтя, что рост школьника, который измерял угол, равен 180 см, ребята нашли примерную высоту школы — 13,6 м. Проверьте, не ошиблись ли ребята в вычислениях. Попробуйте найти подобным образом высоту своей школы.

Прибор, при помощи которого определяют углы на местности, называется **эклиметр**. Такой прибор можно изготовить самостоятельно. Для этого потребуется транспортир, нить с грузом и заостренная палка. Заостренную палку втыкают в землю так, чтобы нить с грузом располагалась вертикально. Поворачивая транспортир, наблюдатель смотрит вдоль прямой AB (рис. 73). По отклонению нити от веса на транспортире определяют измеряемый угол. Объясните, как определить искомый угол α .

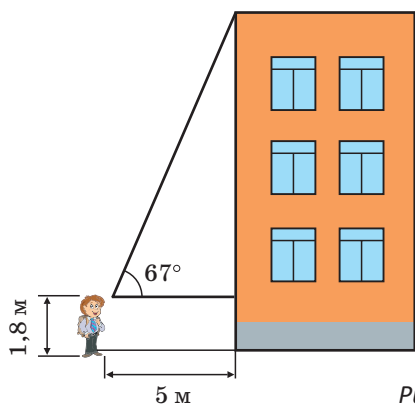


Рис. 72

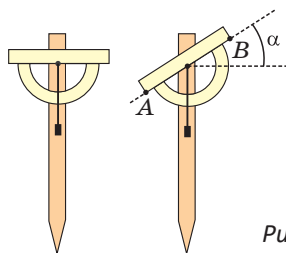


Рис. 73

Геометрия 3D

Напомним, что в основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат и все ее боковые ребра равны.

На фото изображен знак нулевого километра Беларуси, установленный в Минске на Октябрьской площади. На рисунке изображена его геометрическая модель — правильная четырехугольная пирамида. Длина ребра основания равна 120 см, боковое ребро равно 100 см (рис. 74). Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

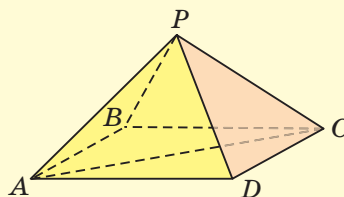


Рис. 74



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Формулы $\sin(180^\circ - \alpha) = \dots$, $\cos(180^\circ - \alpha) = \dots$.
2. Как связаны синус и косинус тупого угла с синусом и косинусом смежного с ним острого угла.
3. Формулы площади треугольника и площади параллелограмма, связанные с синусом угла.
4. Теорему о среднем пропорциональном (среднем геометрическом) в прямоугольном треугольнике.

Умеем

1. Находить синус, косинус, тангенс и котангенс углов 120° , 135° , 150° .
2. Выводить формулы площади треугольника и площади параллелограмма, связанные с синусом угла.
3. Доказывать теорему о среднем пропорциональном в прямоугольном треугольнике.

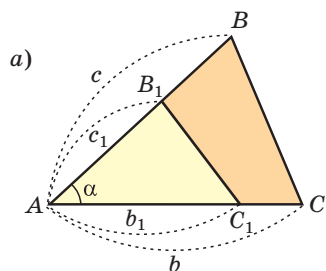


§ 7. Креативная геометрия

1. Теорема о площадях треугольников с общим (равным) углом

Площади треугольников, имеющих общий угол (или равный угол), относятся как произведения сторон, заключающих этот угол (рис. 75, а, б),

$$\text{т. е. } \frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AC_1 \cdot AB_1}{AC \cdot AB} = \frac{b_1c_1}{bc}.$$



Доказательство.
$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}b_1c_1 \sin \alpha}{\frac{1}{2}bc \sin \alpha} = \frac{b_1c_1}{bc}.$$

Следствие.

Верно:
$$S_{AB_1C_1} = \frac{b_1}{b} \cdot \frac{c_1}{c} \cdot S_{ABC}.$$

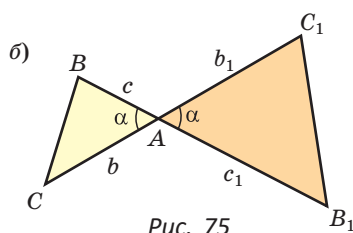


Рис. 75

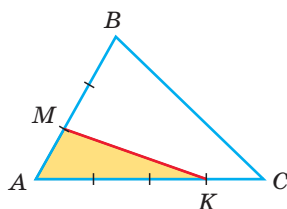


Рис. 76

Задача 1. Площадь треугольника ABC равна 16, $AK : KC = 3 : 1$, $AM : MB = 1 : 2$ (рис. 76). Найдите S_{AMK} .

Решение. *Способ 1.* По следствию из теоремы о площадях треугольников с общим углом получаем:
$$S_{AMK} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AK}{AC} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4.$$

Способ 2.
$$S_{AMK} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AK \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} AB\right) \cdot \left(\frac{3}{4} AC\right) \cdot \sin A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A\right) = \frac{1}{4} S_{ABC} = 4.$$

Ответ: 4.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 72.** Докажите, что если два треугольника имеют по углу, сумма которых равна 180° , то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы, то есть если $\angle C_1AB_1 + \angle CAB = 180^\circ$ (рис. 77), то
$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{b_1c_1}{bc}.$$

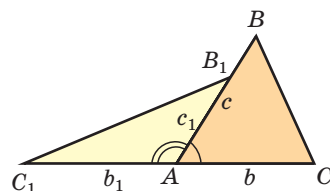


Рис. 77

- 73.** В треугольнике ABC на стороне AB взята точка M, на стороне BC — точка K так, что $AM : MB = 2 : 3$, $BK : KC = 4 : 5$. Найдите площадь треугольника BMK, если $S_{ABC} = 90$.
- 74.** Дан параллелограмм ABCD, площадь которого равна 120. На стороне AB взята точка M, на стороне AD — точка K так, что $AM = \frac{1}{2} AB$, $AK = \frac{2}{5} AD$. Найдите площадь четырехугольника MBDK.

75. Используя теорему о площадях треугольников с равным углом, докажите, что в трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), где O — точка пересечения диагоналей, $S_{ABO} = S_{DCO}$.

76. Используя данные рисунка 78, докажите, что:

- а) $S_{ABC} = S_{AMK}$; б) $S_{MBD} = S_{CKD}$.

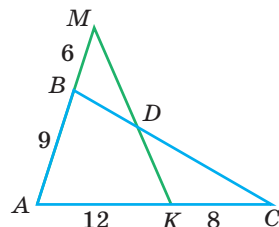


Рис. 78

2. Теорема Менелая

Если дан треугольник ABC и прямая l пересекает стороны BC , AB и продолжение стороны AC в точках A_1 , C_1 и B_1 соответственно (рис. 79), то $\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1$.

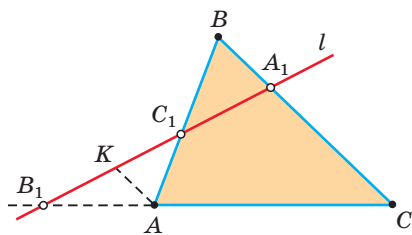


Рис. 79

Доказательство. Проведем отрезок $AK \parallel BC$, $K \in l$. Так как $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle KAC_1$ и $\triangle B_1KA \sim \triangle B_1A_1C$ (по двум углам), то $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{A_1B}{KA}$ и $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{KA}{CA_1}$. Перемножив почленно указанные равенства, получим $\frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{A_1B}{CA_1}$, откуда $\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1$.

Замечание. При составлении произведения трех отношений теоремы Менелая можно начинать с любой из шести точек (трех вершин треугольника и трех точек пересечения прямой l с прямыми, содержащими стороны треугольника) и двигаться по контуру либо по часовой, либо против часовой стрелки. При этом вершины треугольника и точки пересечения должны чередоваться.

Задача 2. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и K такие, что $AM : MB = 2 : 1$, $AK : KC = 3 : 2$. Отрезки CM и BK пересекаются в точке O . Найти $BO : OK$.

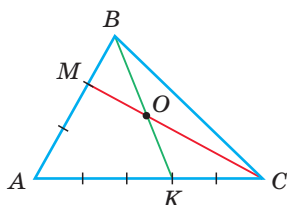


Рис. 80

Решение. *Способ 1* (теорема Менелая). Рассмотрим $\triangle ABK$ (рис. 80). Прямая MC пересекает две его стороны AB и BK соответственно в точках M и O и продолжение третьей стороны AK в точке C . По теореме Менелая $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BO}{OK} \cdot \frac{KC}{CA} = 1$, откуда $\frac{2}{1} \cdot \frac{BO}{OK} \cdot \frac{2}{5} = 1$, $\frac{BO}{OK} = \frac{5}{4}$.

Способ 2 (теорема Фалеса обобщенная). Проведем $KE \parallel CM$ (рис. 81). По теореме Фалеса $\frac{AE}{EM} = \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$. Тогда AE — три части, EM — две части, AM —

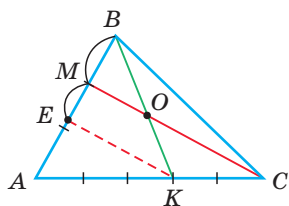


Рис. 81

пять частей, откуда $EM = \frac{2}{5}AM = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}AB = \frac{4}{15}AB$.

Но $MB = \frac{1}{3}AB$. Отсюда $\frac{MB}{EM} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{4}{15}AB} = \frac{5}{4}$. Для $\angle KBE$

по теореме Фалеса $\frac{BO}{OK} = \frac{BM}{ME} = \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{5}{4}$.

Задача 3. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), площадь которого равна 80. Точка K делит высоту BH в отношении $1 : 3$, считая от основания. Прямая AK пересекает сторону BC в точке M . Найдите площадь четырехугольника $HKMC$ (рис. 82).

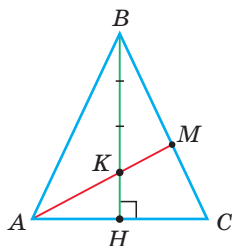


Рис. 82

Решение. 1) $S_{HBC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 40$ (BH — высота и медиана треугольника ABC).

2) Применим теорему Менелая к треугольнику HBC . Прямая AM пересекает его стороны BH и BC соответственно в точках K и M и продолжение стороны HC в точке A . Тогда $\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BK}{KH} \cdot \frac{HA}{AC} = 1$,

$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1$, $\frac{CM}{MB} = \frac{2}{3}$. Откуда $\frac{BM}{BC} = \frac{3}{5}$.

3) $S_{BMK} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BK}{BH} \cdot S_{HBC} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot 40 = 18$.

4) $S_{HKMC} = S_{HBC} - S_{BMK} = 40 - 18 = 22$.

Ответ: 22.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

77. Докажите при помощи теоремы Менелая, что медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины.
78. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и K такие, что $AM : MB = 3 : 1$, $AK : KC = 2 : 3$. Отрезки BK и CM пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника OCK , если площадь треугольника ABC равна 70.
79. В треугольнике ABC проведены отрезки AM и CK , которые пересекаются в точке O ($M \in BC$, $K \in AB$). Найдите S_{ABC} , если $S_{AOK} = 2$, $S_{MOC} = 3$, $S_{AOC} = 4$.

Задача 4. На сторонах AB и AD прямоугольника взяты соответственно точки K и M такие, что $AK = KB$, $AM : MD = 2 : 1$. Отрезки DK и BM

пересекаются в точке E (рис. 83). Найти площадь треугольника KBE , если площадь прямоугольника равна 240.

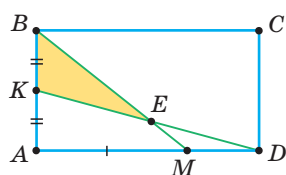


Рис. 83

Решение. $S_{ABCD} = AD \cdot AB$, $S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot AB =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AD \cdot AB = \frac{1}{3} AD \cdot AB = \frac{1}{3} S_{ABCD} = 80.$

Применим теорему Менелая к треугольнику ABM , где прямая KD пересекает стороны AB и BM и продолжение стороны AM . Получим: $\frac{ME}{EB} \cdot \frac{BK}{KA} \cdot \frac{AD}{DM} = 1$,

$$\frac{ME}{EB} \cdot 1 \cdot \frac{3}{1} = 1, \quad \frac{ME}{EB} = \frac{1}{3}. \quad \text{Тогда } \frac{BE}{BM} = \frac{3}{4}, \quad \frac{BK}{BA} = \frac{1}{2}.$$

Применим свойство площадей треугольников, имеющих общий угол:

$$S_{KBE} = \frac{BE}{BM} \cdot \frac{BK}{BA} \cdot S_{ABM} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 80 = 30.$$

Ответ: 30.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

80. В треугольнике ABC $AK : KC = 3 : 2$, $AM : MB = 1 : 2$, $O = BK \cap CM$ (рис. 84). Найдите отношение:

- а) $\frac{KO}{OB}$; б) $\frac{MO}{OC}$; в) $\frac{S_{KOC}}{S_{MOB}}.$

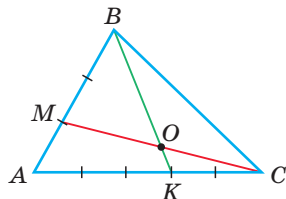


Рис. 84

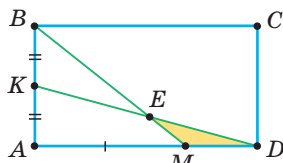


Рис. 85

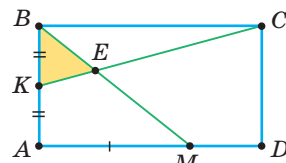


Рис. 86

81. $ABCD$ — прямоугольник, $AK = KB$, $AM = 2MD$, $S_{ABCD} = 240$ (рис. 85). Найдите S_{MED} .

82. $ABCD$ — прямоугольник, $AK = KB$, $AM = 2MD$ (рис. 86). Найдите $\frac{S_{KBE}}{S_{ABCD}}.$

3. Неравенство Коши

Среднее арифметическое двух неотрицательных чисел больше либо равно их среднему геометрическому, т. е. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Например, $\frac{9+25}{2} \geq \sqrt{9 \cdot 25}$. Действительно, $17 \geq 15$.

Алгебраическое доказательство указанного неравенства таково. Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Получим: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$. Так как $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ при всех допустимых a и b , то $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$. Следовательно, неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ верно.

Неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$, называется *неравенством Коши* по имени известного французского математика и часто используется при решении олимпиадных задач.

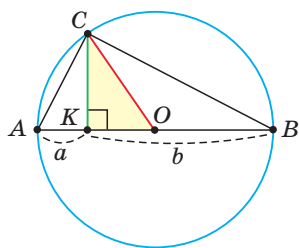


Рис. 87

Приведем геометрическое доказательство указанного неравенства. Изобразим окружность с диаметром AB и центром в точке O (рис. 87). На диаметре возьмем произвольную точку K (для определенности левее центра O). Пусть $AK = a$, $KB = b$. Из точки K восстановим перпендикуляр KC , где точка C принадлежит окружности. Проведем радиус OC . Так как вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой, то $\angle ACB = 90^\circ$ и $\triangle ABC$ прямоугольный, CK — его высота, проведенная к гипотенузе. По теореме о среднем пропорциональном в прямоугольном треугольнике ABC $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$. Но радиус OC равен половине диаметра AB , т. е. $OC = \frac{AK + KB}{2}$.

В треугольнике CKO катет меньше гипотенузы, т. е. $OC > CK$. Отсюда $\frac{AK + KB}{2} > \sqrt{AK \cdot KB}$, т. е. $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Равенство левой и правой частей неравенства достигается, когда точка K совпадает с точкой O . В этом случае треугольник ACB является равнобедренным и прямоугольным. Поэтому справедливо неравенство $\frac{AK + KB}{2} \geq \sqrt{AK \cdot KB}$, т. е. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 83.** В трапеции проведены четыре отрезка с концами на боковых сторонах трапеции, параллельные ее основаниям: k — отрезок, проходящий через точку O пересечения диагоналей трапеции; p — отрезок, который делит трапецию на две подобные трапеции (соответствующие углы равны, а стороны пропорциональны), m — средняя линия трапеции, s — отрезок, который делит трапецию на две равновеликие

трапеции (рис. 88). Зная основания a и b трапеции, найдите длину каждого из указанных отрезков.

Докажите алгебраически, что $k < p, p < m, m < s$, и убедитесь в правильности рисунка 88.

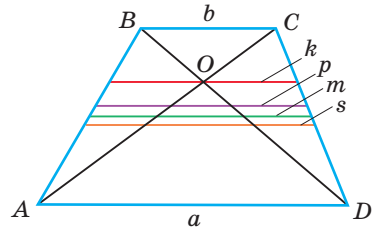


Рис. 88

84. Дана окружность с диаметром AB и центром в точке O , $AK = a$, $KB = b$, $CK \perp AB$, $DO \perp AB$, $KE \perp OC$ (рис. 89). Докажите, что:

а) $CK = \sqrt{ab}$ — среднее геометрическое чисел a и b ;

б) $DO = \frac{a+b}{2}$ — среднее арифметическое чисел a и b ;

в) $CE = \frac{2ab}{a+b}$ — среднее гармоническое чисел a и b ;

г) $KD = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ — среднее квадратичное чисел a и b .

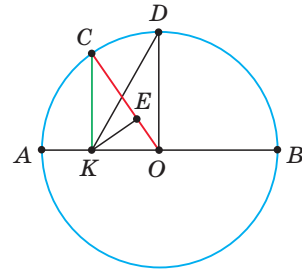


Рис. 89

85. Используя результат задачи 84, докажите геометрически, что $CE \leq CK \leq DO \leq KD$, откуда $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Рассмотрите, при каких a и b нестрогие неравенства обращаются в равенства.

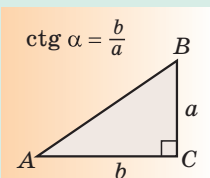
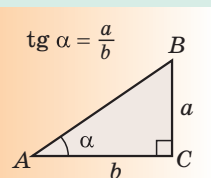
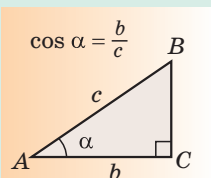
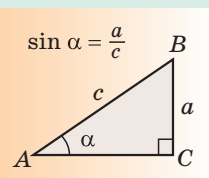
ТЕМЫ ПРОЕКТОВ



1. Теорема Чевы.
2. Общая теорема Менелая и ей обратная.
3. Возникновение тригонометрии, ее роль в современной математике.

ЗАПОМИНАЕМ

1.



2. Значения тригонометрических функций углов 30° , 45° , 60° :

$$1) \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$2) \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1, \quad \operatorname{ctg} 45^\circ = 1;$$

$$3) \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3. Тригонометрические формулы (тождества):

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Примеры. $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

4. Формулы площади треугольника и параллелограмма:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma, \quad S_{\text{пар}} = ab \sin \alpha.$$

5. Среднее пропорциональное в прямоугольном треугольнике:

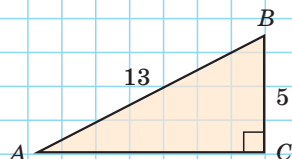
$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}, \quad a = \sqrt{c \cdot a_c}, \quad b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

Тест 1

Найдите:

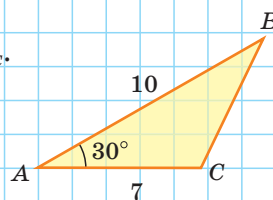
- а) $\sin A$;
 б) $\cos A$;
 в) $\operatorname{tg} A$;
 г) $\sin B$.



Тест 2

Найдите S_{ABC} .

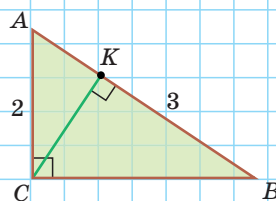
- а) 17,5;
 б) $35\sqrt{3}$;
 в) 35;
 г) $70\sqrt{3}$.



Тест 3

Найдите высоту CK треугольника ABC , если $AC = 2$, $KB = 3$.

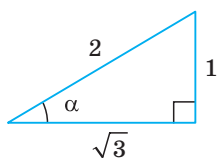
- а) 2; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}$; г) 2,5.



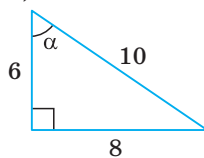
ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 1

1. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла α .

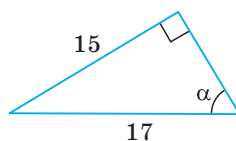
а)



б)

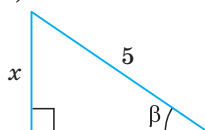


в)

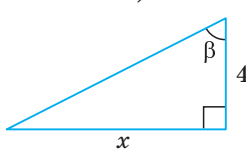


2. По углу β и одной из сторон найдите сторону x .

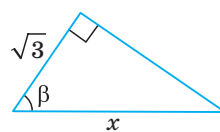
а)



б)

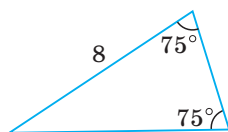


в)

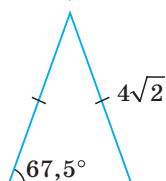


3. Найдите площадь треугольника.

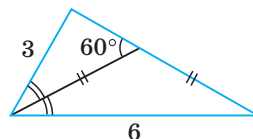
а)



б)

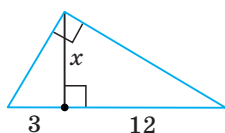


в)

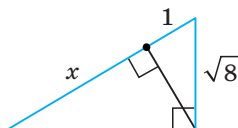


4. Найдите длину отрезка, обозначенного буквой x .

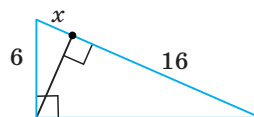
а)



б)

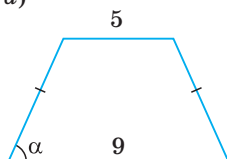


в)



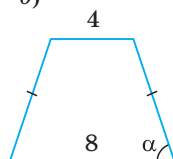
5. Найдите площадь равнобедренной трапеции.

а)



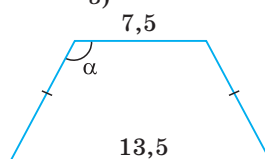
$$\operatorname{tg} \alpha = 2,5$$

б)



$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

в)



$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

Тригонометрические таблицы

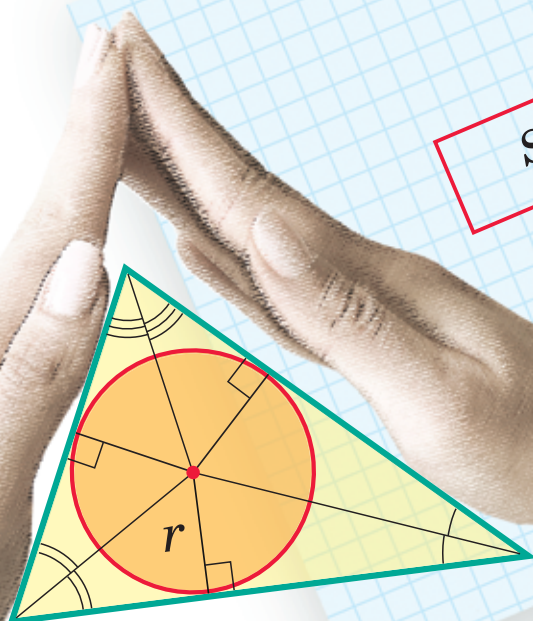
α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	—	90°	1,0000	0,0000	—	0,0000
1°	0175	9998	0175	57,2900	89°	9998	0175	57,2900	0175
2°	0349	9994	0349	28,6363	88°	9994	0349	28,6363	0349
3°	0523	9986	0524	19,0811	87°	9986	0523	19,0811	0524
4°	0698	9976	0699	14,3007	86°	9976	0698	14,3007	0699
5°	0872	9962	0875	11,4301	85°	9962	0872	11,4301	0875
6°	1045	9945	1051	9,5144	84°	9945	1045	9,5144	1051
7°	1219	9925	1228	8,1443	83°	9925	1219	8,1443	1228
8°	1392	9903	1405	7,1154	82°	9903	1392	7,1154	1405
9°	1564	9877	1584	6,3138	81°	9877	1564	6,3138	1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80°	0,9848	0,1736	5,6713	0,1763
11°	1908	9816	1944	5,1446	79°	9816	1908	5,1446	1944
12°	2079	9781	2126	4,7046	78°	9781	2079	4,7046	2126
13°	2250	9744	2309	4,3315	77°	9744	2250	4,3315	2309
14°	2419	9703	2493	4,0108	76°	9703	2419	4,0108	2493
15°	2588	9659	2679	3,7321	75°	9659	2588	3,7321	2679
16°	2756	9613	2867	3,4874	74°	9613	2756	3,4874	2867
17°	2924	9563	3057	3,2709	73°	9563	2924	3,2709	3057
18°	3090	9511	3249	3,0777	72°	9511	3090	3,0777	3249
19°	3256	9455	3443	2,9042	71°	9455	3256	2,9042	3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70°	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
21°	3584	9336	3839	6051	69°	9336	3584	6051	3839
22°	3746	9272	4040	4751	68°	9272	3746	4751	4040
23°	3907	9205	4245	3559	67°	9205	3907	3559	4245
24°	4067	9135	4452	2460	66°	9135	4067	2460	4452
25°	4226	9063	4663	1445	65°	9063	4226	1445	4663
26°	4384	8988	4877	2,0503	64°	8988	4384	2,0503	4877
27°	4540	8910	5095	9626	63°	8910	4540	9626	5095
28°	4695	8829	5317	8807	62°	8829	4695	8807	5317
29°	4848	8746	5543	1,8040	61°	8746	4848	1,8040	5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60°	0,8660	0,5000	1,7321	0,5774
31°	5150	8572	6009	6643	59°	8572	5150	6643	6009
32°	5299	8480	6249	6003	58°	8480	5299	6003	6249
33°	5446	8387	6494	5399	57°	8387	5446	5399	6494
34°	5592	8290	6745	4826	56°	8290	5592	4826	6745
35°	5736	8192	7002	4281	55°	8192	5736	4281	7002
36°	5878	8090	7265	3764	54°	8090	5878	3764	7265
37°	6018	7986	7536	3270	53°	7986	6018	3270	7536
38°	6157	7880	7813	2799	52°	7880	6157	2799	7813
39°	6293	7771	8098	1,2349	51°	7771	6293	1,2349	8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50°	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
41°	6561	7547	8693	1504	49°	7547	6561	1504	8693
42°	6691	7431	9004	1106	48°	7431	6691	1106	9004
43°	6820	7314	9325	0724	47°	7314	6820	0724	9325
44°	6947	7193	9657	0355	46°	7193	6947	0355	9657
45°	7071	7071	1,0000	1,0000	45°	7071	7071	1,0000	1,0000
α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Глава II

Вписанные и описанные окружности

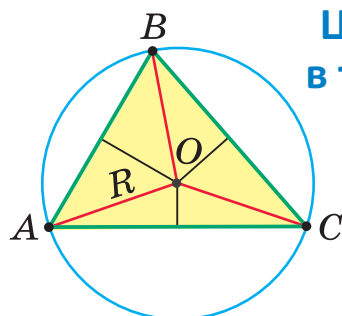
В этой главе вы узнаете:

- Где находится центр описанной, а где — центр вписанной окружности треугольника
- Формулу площади треугольника $S = pr$
- Свойства вписанной в окружность и описанной около окружности четырехугольника



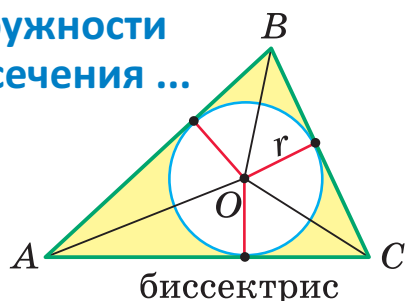
$$S = pr$$

Описанные и вписанные окружности

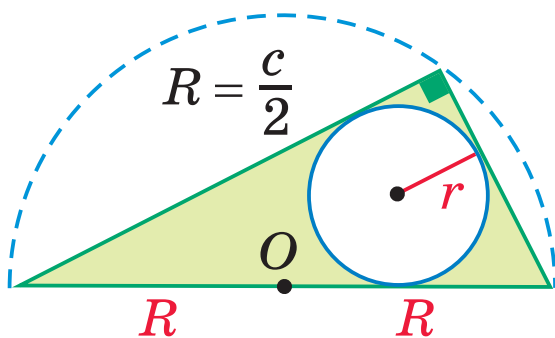


серединных перпендикуляров

Центр ... окружности
в точке пересечения ...

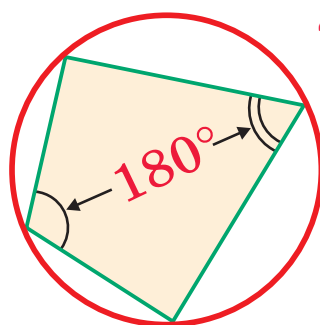


$$S = pr$$



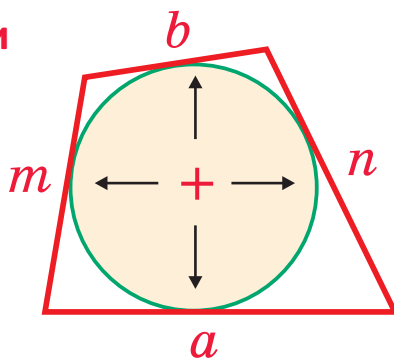
Прямоугольный

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$



Вписанный

4-угольники



Описанный

§ 8. Описанная и вписанная окружности треугольника

Определение. Окружность называется **описанной** около треугольника, если она проходит через все его вершины.

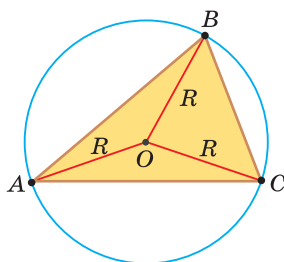


Рис. 90

На рисунке 90 изображена окружность с радиусом R и центром O , описанная около треугольника ABC .

Так как $OA = OB = OC = R$, то центр описанной окружности *равноудален от вершин треугольника*.

Вместо слов «окружность, описанная около треугольника ABC », также говорят «окружность, описанная вокруг треугольника ABC », или «описанная окружность треугольника ABC ».

Теорема (об окружности, описанной около треугольника). Около любого треугольника можно описать окружность, причем только одну, ее центр находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

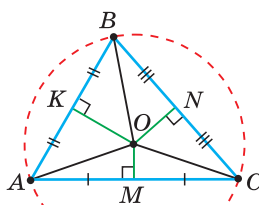


Рис. 91

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 91). Пусть O — точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам. Проведем отрезки OA , OB и OC . По свойству серединного перпендикуляра $OA = OC$, $OC = OB$. Так как точка O равноудалена от всех вершин треугольника ABC , то окружность с центром в точке O и радиусом OA проходит через все вершины треугольника ABC , т. е. является его описанной окружностью. Единственность описанной окружности докажете самостоятельно.

Замечание. Так как все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, то для нахождения центра описанной окружности достаточно построить точку пересечения любых двух из них.

Определение. Окружность называется **вписанной** в треугольник, если она касается всех его сторон.

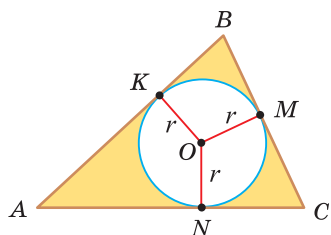


Рис. 92

На рисунке 92 изображена окружность с центром O и радиусом r , вписанная в треугольник ABC ; K , M и N — точки ее касания со сторонами треугольника ABC .

Так как $OK = OM = ON = r$ и по свойству касательной к окружности $OK \perp AB$, $OM \perp BC$, $ON \perp AC$, то центр вписанной окружности *равноудален от сторон треугольника*.

Вместо слов «окружность, вписанная в треугольник ABC », также говорят «вписанная окружность треугольника ABC ».

Теорема (об окружности, вписанной в треугольник).

В любой треугольник можно вписать окружность, причем только одну, ее центр находится в точке пересечения биссектрис треугольника.

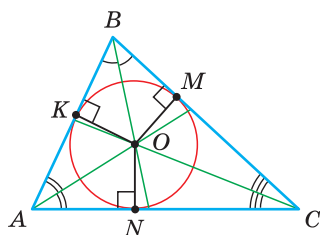


Рис. 93

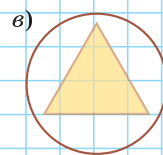
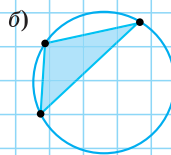
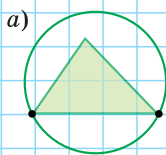
Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 93). Пусть O — точка пересечения его биссектрис. Проведем из точки O перпендикуляры OK , OM и ON соответственно к сторонам AB , BC и AC . По свойству биссектрисы угла $OK = ON$, $ON = OM$. Окружность с центром в точке O и радиусом OK будет проходить через точки K , M и N и касаться сторон AB , BC и AC в указанных точках по признаку касательной. Следовательно, эта окружность является вписанной в треугольник ABC . Единственность вписанной окружности докажете самостоятельно.

Замечание. Так как все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, то для нахождения центра вписанной окружности достаточно построить точку пересечения любых двух из них.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

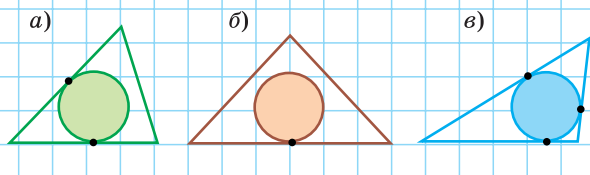
Тест 1

На каком из рисунков изображена окружность, описанная около треугольника?

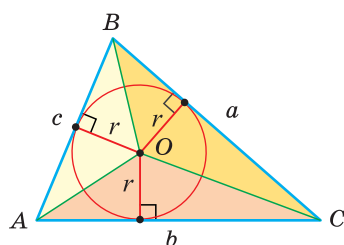


Тест 2

На каком из рисунков изображена окружность, вписанная в треугольник?



Теорема. Площадь треугольника можно найти по формуле $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



$$S = pr$$

Рис. 94

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, O — центр его вписанной окружности (рис. 94). Соединим отрезками точку O с вершинами A , B и C . Треугольник ABC разобьется на три треугольника: $\triangle BOC$, $\triangle AOC$, $\triangle AOB$. Радиусы r , проведенные в точки касания, будут высотами этих треугольников. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей указанных треугольников: $S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a + b + c)r = pr$.

Теорема доказана.

Следствие.

Радиус окружности, вписанной в треугольник, можно найти по формуле

$$r = \frac{S}{p}.$$

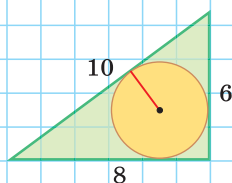
Одной из важнейших задач данной темы является задача нахождения радиуса описанной и радиуса вписанной окружностей данного треугольника.

А теперь выполните **Тест 3**.

Тест 3

Используя формулу $S = pr$, найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами, равными 6 см, 8 см, 10 см.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 1,5.





Задания к § 8

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC , у которого $AB = BC = 26$ см, высота $BK = 24$ см (рис. 95).

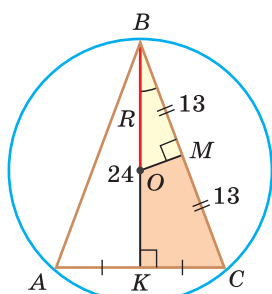


Рис. 95

Решение. Способ 1 (метод подобия). Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Проведем серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC , которые пересекутся в точке O — центре описанной окружности. Так как в равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой, то BK — серединный перпендикуляр к стороне AC . Пусть MO — серединный перпендикуляр к стороне BC . Тогда $BM = 13$ см, $BO = R$ — искомый радиус. Поскольку $\triangle BMO \sim \triangle BKC$ (как прямоугольные с общим острым углом CBK), то $\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}$,

$$\frac{13}{R} = \frac{24}{26}, \text{ откуда } R = \frac{13 \cdot 26}{24} = 14 \frac{1}{12} \text{ (см).}$$

Способ 2 (тригонометрический метод). Из $\triangle OBM$ (см. рис. 95) $\cos \angle OBM = \frac{BM}{BO}$, из $\triangle CBK$ $\cos \angle CBK = \frac{BK}{BC}$, откуда $\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}$. Дальнейшее решение совпадает с приведенным в способе 1.

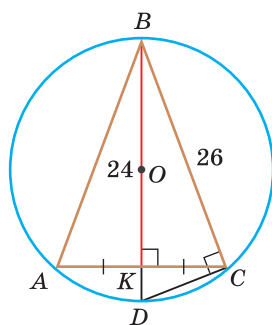


Рис. 96

Способ 3 (среднее пропорциональное). Продлим высоту BK до пересечения с описанной окружностью в точке D (рис. 96). Так как центр описанной окружности равнобедренного треугольника лежит на прямой BK (см. способ 1), то $BD = 2R$ — диаметр данной окружности. В прямоугольном треугольнике BCD ($\angle BCD = 90^\circ$ как вписанный, опирающийся на диаметр) катет BC есть среднее пропорциональное между гипотенузой BD и проекцией BK катета BC на гипотенузу. Поэтому $BC^2 = BD \cdot BK$, $26^2 = 2R \cdot 24$. Откуда $R = 14 \frac{1}{12}$ см.

Ответ: $14 \frac{1}{12}$ см.

Замечание. Из решения ключевой задачи 1 следует свойство: «*Центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, лежит на его высоте, проведенной к основанию, или на ее продолжении*».

Верно и обратное утверждение: «Если центр окружности, описанной около треугольника, лежит на высоте треугольника или на ее продолжении, то этот треугольник равнобедренный».

Обратное утверждение докажите самостоятельно.

Полезно запомнить!

Если в ключевой задаче 1 боковую сторону обозначить b , а высоту, проведенную к основанию, — h_a , то получится пропорция $\frac{\frac{b}{2}}{R} = \frac{h_a}{b}$. Отсюда следует удобная формула для нахождения радиуса окружности, описанной около равнобедренного треугольника:

$$R = \frac{b^2}{2h_a}.$$

Задача 2. Найти радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC , у которого $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.

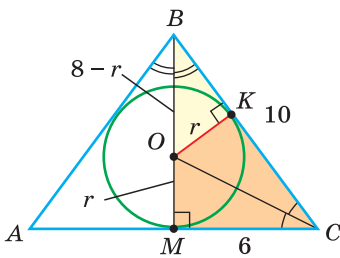


Рис. 97

Решение. *Способ 1* (метод подобия). Центр вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис треугольника. Проведем в треугольнике ABC биссектрисы из вершин B и C , которые пересекутся в точке O — центре вписанной окружности (рис. 97). Биссектриса BM , проведенная к основанию равнобедренного треугольника ABC , будет его высотой и медианой, отрезок CO — биссектриса угла C , $OM = r$ — искомый радиус вписанной окружности. Так как $AM = MC = 6$ см, то из треуголь-

ника BMC по теореме Пифагора $BM = \sqrt{BC^2 - MC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см), откуда $BO = BM - OM = 8 - r$. Проведем радиус OK в точку касания окружности со стороной BC , $OK \perp BC$. Из подобия прямоугольных треугольников BKO и BMC ($\angle MBC$ — общий) следует: $\frac{OK}{OB} = \frac{MC}{BC}$. Тогда $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$, $\frac{r}{8-r} = \frac{3}{5}$, $5r = 3(8-r)$, $8r = 24$, $r = 3$. Искомый радиус OM равен 3 см.

Способ 2 (тригонометрический метод). Из треугольника OBK (см. рис. 97) $\sin \angle OBK = \frac{OK}{OB}$, из треугольника BMC $\sin \angle MBC = \frac{MC}{BC}$, откуда $\frac{OK}{OB} = \frac{MC}{BC}$. Дальнейшее решение совпадает с приведенным в способе 1.

Способ 3 (свойство биссектрисы треугольника). CO — биссектриса треугольника BMC . Известно, что биссектриса треугольника делит противоположащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Поэтому $\frac{OM}{OB} = \frac{MC}{BC}$, $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$, откуда $r = 3$. Искомый радиус — 3 см.

Способ 4 (формула $S = pr$). $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ (см²);
 $p = \frac{1}{2} P_{ABC} = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16$ (см). Из формулы площади треугольника $S = pr$ следует: $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$ (см).
 Ответ: 3 см.

Замечание. Из решения ключевой задачи 2 следует свойство: «*Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, лежит на его высоте, проведенной к основанию.*».

Верно и обратное утверждение: «*Если центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на высоте треугольника, то этот треугольник равнобедренный.*».

Обратное утверждение докажите самостоятельно.

Задача 3. Дан равносторонний треугольник со стороной a . Найти радиус R его описанной окружности и радиус r его вписанной окружности.

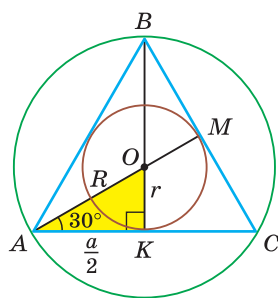


Рис. 98

Решение. Способ 1 (тригонометрический метод). Так как в равностороннем треугольнике биссектрисы являются и высотами, и медианами, то его биссектрисы лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника. Поэтому в равностороннем треугольнике центры описанной и вписанной окружностей совпадают.

Рассмотрим равносторонний треугольник ABC со стороной a , у которого высоты AM и BK пересекаются в точке O — центре описанной и вписанной окружностей (рис. 98). Тогда $OA = OB = R$ — радиусы описанной, $OK = OM = r$ — радиусы вписанной окружности. Так как AM — биссектриса и $\angle BAC = 60^\circ$, то $\angle OAK = 30^\circ$. Поскольку BK — высота и медиана, то $AK = \frac{a}{2}$. Из треугольника AKO $\cos 30^\circ = \frac{AK}{AO}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, откуда $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. В треугольнике AKO катет OK лежит против угла в 30° , поэтому $OK = \frac{1}{2} AO$, $r = \frac{1}{2} R = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Способ 2 (свойство медиан). Поскольку AM и BK — медианы треугольника ABC (см. рис. 98), то по свойству медиан $BO : OK = 2 : 1$. Высоту равностороннего треугольника можно найти по формуле $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Откуда $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $R = BO = \frac{2}{3} BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,
 $r = OK = \frac{1}{3} BK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Полезно запомнить!

Поскольку радиус описанной окружности равностороннего треугольника $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, то $a = R\sqrt{3}$. Значит, сторона равностороннего треугольника в $\sqrt{3}$ раз больше радиуса его описанной окружности. Чтобы найти радиус R описанной окружности равностороннего треугольника, нужно сторону a разделить на $\sqrt{3}$, а чтобы найти его сторону a , нужно радиус R умножить на $\sqrt{3}$. Радиус вписанной окружности равностороннего треугольника $r = \frac{1}{2}R$.

**РЕШАЕМ
САМОСТОЯТЕЛЬНО**

86. Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O .

- Найдите радиус описанной окружности (рис. 99, а).
- Найдите сторону AC , если K — ее середина, $OK = 5$ (рис. 99, б).
- Найдите радиус описанной окружности (рис. 99, в).

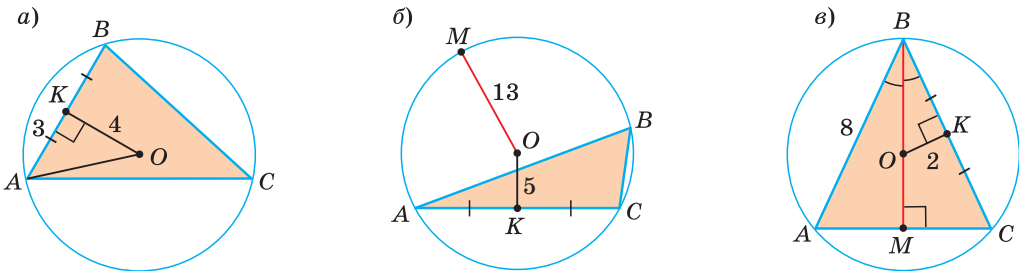


Рис. 99

87. Около треугольника ABC описана окружность. По данным на рисунках 100, а)—в) найдите расстояние от центра O окружности до прямой AC .

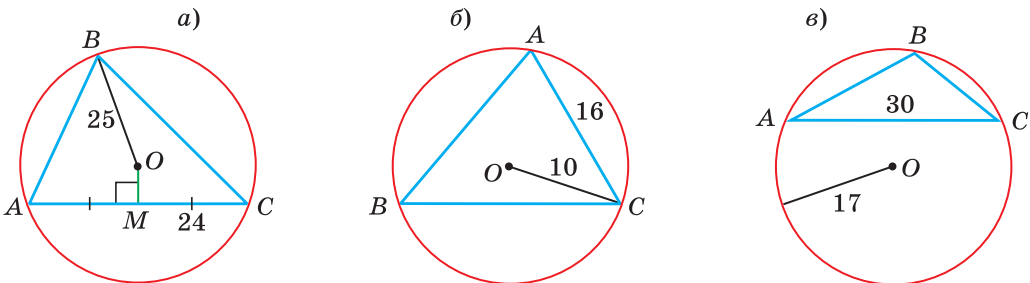


Рис. 100

88. Используя ключевую задачу 1 (с. 60), найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и высотой BK , если:

а) $AB = 12$ см, $BK = 10$ см (рис. 101, а);

б) $AB = 30$ см, $BK = 18$ см (рис. 101, б).

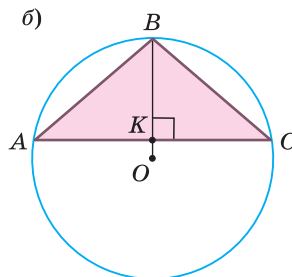
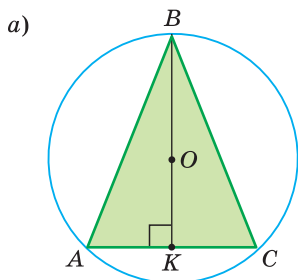


Рис. 101

89. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен 5 см, высота, проведенная к его основанию, равна 8 см. Найдите площадь данного треугольника.

90. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O .

а) По рисунку 102, а) определите радиус вписанной окружности.

б) По рисунку 102, б) определите длину отрезка OB , если $\angle ABC = 60^\circ$.

в) По рисунку 102, в) определите длину стороны BC , если диаметр вписанной окружности равен $\sqrt{8}$.

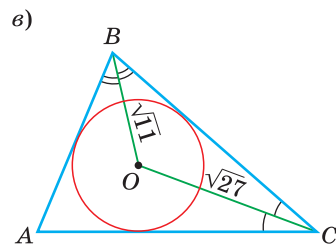
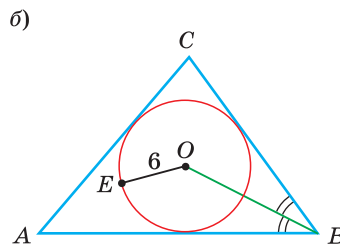
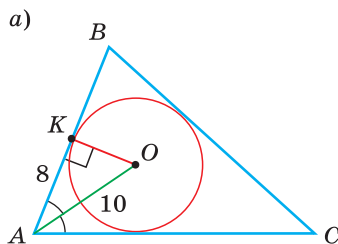


Рис. 102

91. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O . По данным на рисунках 103, а)–в) определите величину угла, обозначенного знаком вопроса.

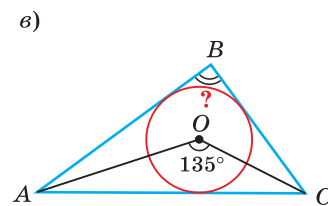
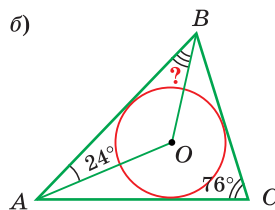
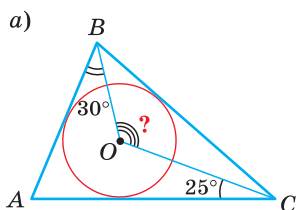


Рис. 103

92. а) Используя ключевую задачу 2 (с. 61), найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 6$ см и высотой $BH = 4$ см, проведенной к основанию (рис. 104).
 б) Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 10$ см и боковой стороной $AB = 13$ см (рис. 105).

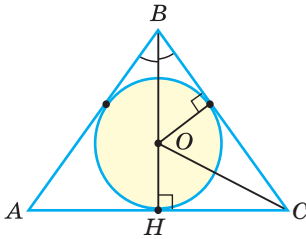


Рис. 104

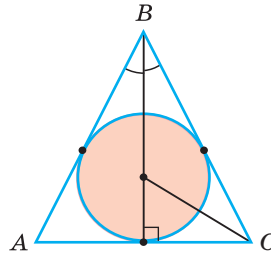


Рис. 105

93. Дан равносторонний треугольник со стороной, равной $4\sqrt{3}$ см. Вычислите:
 а) радиус описанной окружности этого треугольника;
 б) радиус вписанной окружности этого треугольника.
94. а) Найдите радиус R описанной и радиус r вписанной окружности равностороннего треугольника, если его высота $h = 12$ см.
 б) Найдите площадь равностороннего треугольника, если радиус R его описанной окружности равен 2 см.
95. а) При помощи циркуля и линейки опишите окружность около тупоугольного треугольника.
 б) При помощи циркуля и линейки впишите окружность в прямоугольный треугольник.
96. Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC = 8$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Определите:
 а) радиус его описанной окружности;
 б) радиус его вписанной окружности.
97. а) Найдите площадь треугольника, у которого периметр равен 24 см, а радиус вписанной окружности — 2 см.
 б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, площадь которого равна 48 см^2 , а периметр — 32 см.
98. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC , O_1 — центр описанной, O_2 — центр вписанной окружности. Найдите длину отрезка O_1O_2 , если $AB = 20$ см, высота $BH = 16$ см.

99. а) Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит точкой касания его боковую сторону на отрезки, равные 6 см и 4 см, считая от основания. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.
 б) Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит его высоту, проведенную к основанию, в отношении 4 : 5, считая от основания. Найдите площадь треугольника, если его боковая сторона равна 20 см.

100. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен 0,8, периметр треугольника равен 54 см. Найдите:

- а) радиус его вписанной окружности;
 б) радиус его описанной окружности.

101. В треугольник ABC вписана окружность с центром O , которая касается его сторон AB , BC и AC соответственно в точках M , N и K . Найдите:

- а) $\angle MNK$, если $\angle A = 70^\circ$;
 б) $\angle AOB$, если $\angle KMN = 64^\circ$.

102. Окружность с центром в точке O описана около треугольника ABC (рис. 106), $OB = R$ — радиус окружности, $BC = a$, $AC = b$, $CH = h_c$ — высота, $OM \perp BC$. Докажите, что:

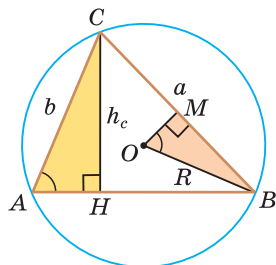


Рис. 106

- а) $\angle MOB = \angle A$; б) $\frac{CH}{AC} = \frac{MB}{OB}$; в) $R = \frac{ab}{2h_c}$.

103. а) В треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$, $BC = 6$ см. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

- б) В треугольнике ABC $AB = 10$ см, $BC = 16$ см, высота $BH = 8$ см. Найдите радиус R описанной окружности.

104. В треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$. Окружность, вписанная в треугольник, касается указанных сторон соответственно в точках M , N , K . Найдите:

- а) длину отрезка AK ;
 б) $AK + MB + NC$.

105. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O (рис. 107), высота AM проходит через точку O , $AM : BC = 2 : 3$, $P_{ABC} = 64$. Найдите радиус вписанной окружности.

106. В равносторонний треугольник ABC вписана окружность, радиус которой равен 24. Отрезок MK касается этой окружности и парал-

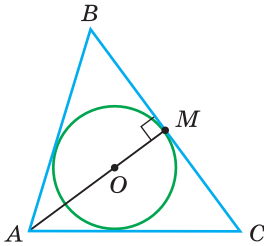


Рис. 107

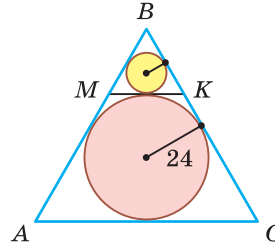


Рис. 108

лелен стороне AC (рис. 108). Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBK .

- 107.** Докажите, что если центры описанной и вписанной окружностей треугольника совпадают, то этот треугольник равносторонний.
- 108.** а) Докажите, что около данного треугольника можно описать только одну окружность.
б) Докажите, что в данный треугольник можно вписать только одну окружность.
- 109.** Дан остроугольный треугольник ABC , H — точка пересечения его высот (ортоцентр), O — центр описанной окружности. Точки O , H , A и C лежат на одной окружности. Найдите величину угла B .

Гимнастика ума

Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 109), равен 2 см, площадь треугольника $S = 2025 \text{ см}^2$. Найдите устно периметр P треугольника ABC .

Каким свойством, по вашему мнению, обладает треугольник, у которого радиус вписанной окружности равен 2? Обоснуйте ваше предположение.

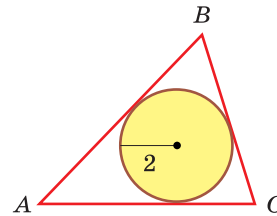


Рис. 109

Геометрия 3D

Заготовка представляет собой правильную треугольную призму высотой 2 см, в основании которой лежит равносторонний треугольник со стороной 6 см (рис. 110). В центре заготовки нужно проделать цилиндрическое отверстие. Расстояние от окружности отверстия до стороны основания равно 0,2 см.

Задание 1. Найдите (округлив результат до 1 мм) диаметр сверла для высверливания нужного отверстия.

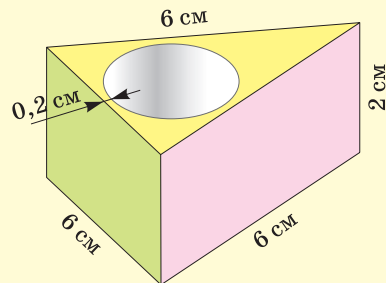


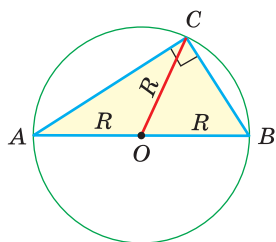
Рис. 110

Задание 2. По формуле объема цилиндра $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H$, где R — радиус основания, H — высота цилиндра, найдите объем цилиндрического отверстия. Примите $\pi \approx 3,14$. Ответ округлите до 1 см^3 .

Задание 3. Учтявая, что объем призмы равен произведению ее площади основания на высоту, т. е. $V_{\text{пр}} = S_{\text{осн}} \cdot H$, вычислите, сколько процентов составляет объем цилиндрического отверстия от объема призмы. Ответ округлите до 1% .

§ 9. Прямоугольный треугольник и его описанная и вписанная окружности

Теорема. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы, т. е. $R = \frac{c}{2}$, где c — гипотенуза.



$$R = \frac{c}{2}$$

Рис. 111

Доказательство. Проведем в прямоугольном треугольнике ABC медиану CO к гипотенузе AB (рис. 111). Так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то $OC = OA = OB$. Тогда середина гипотенузы — точка O — равноудалена от точек A , B и C и поэтому является центром описанной окружности треугольника ABC . Радиус этой окружности $R = OA = \frac{1}{2} AB = \frac{c}{2}$, где c — гипотенуза.

Теорема доказана.

Замечание. Способ 2. Можно доказать, что серединные перпендикуляры к катетам прямоугольного треугольника пересекаются на середине гипотенузы.

Отметим, что у остроугольного треугольника центр описанной окружности лежит внутри треугольника (рис. 112, а), у тупоугольного — вне треугольника (рис. 112, б), у прямоугольного — на середине гипотенузы (рис. 112, в). Обоснуйте первые два утверждения самостоятельно.

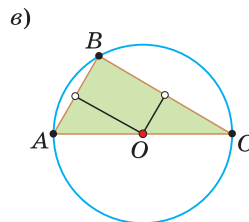
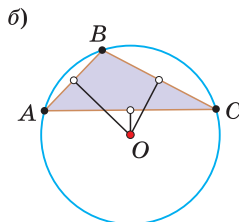
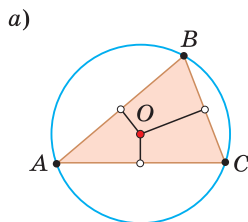
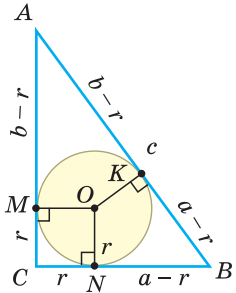


Рис. 112

Теорема. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, можно найти по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где r — искомый радиус, a и b — катеты, c — гипотенуза треугольника.



$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Рис. 113

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = a$, $AC = b$ и гипотенузой $AB = c$. Пусть вписанная в треугольник окружность с центром O и радиусом r касается сторон треугольника в точках M , N и K (рис. 113). Проведем радиусы в точки касания и получим: $OM \perp AC$, $ON \perp BC$, $OK \perp AB$. Четырехугольник $CMON$ — квадрат, так как у него все углы прямые и $OM = ON = r$. Тогда $CM = CN = r$, $NB = a - r$, $MA = b - r$. Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между собой, то $BK = BN = a - r$, $AK = AM = b - r$. Но $BK + AK = AB$, т. е. $(a - r) + (b - r) = c$, $a + b - 2r = c$, откуда $r = \frac{a+b-c}{2}$. Теорема доказана.

Следствие. $r = p - c$, где p — полупериметр треугольника.

Доказательство. Преобразуем формулу радиуса вписанной окружности:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = p - c.$$

Формула $r = p - c$ в сочетании с формулами $S = pr$ и $R = \frac{c}{2}$

дает возможность решать многие задачи, связанные с прямоугольным треугольником, алгебраическим методом.

Пример. Дан прямоугольный треугольник, $S = 24$, $R = 5$. Найти r .

Решение. Так как $r = p - c$, а $R = \frac{c}{2}$, то $p = r + c = r + 2R = r + 10$. Из формулы $S = pr$ следует $24 = (r + 10)r$, $r^2 + 10r - 24 = 0$. По теореме Виета (обратной) $r_1 = 2$, $r_2 = -12$ — посторонний корень, тогда $r = 2$.

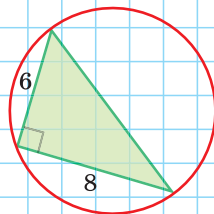
Ответ: 2.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

Найдите радиус окружности, описанной около изображенного треугольника.

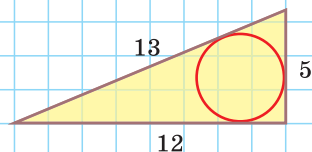
а) 7; б) 10; в) 5; г) 4.



Тест 2

Найдите радиус окружности, вписанной в изоб-
раженный треугольник.

а) 2; б) 3; в) 5; г) 4,5.



Задания к § 9

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. Найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, у которого один из катетов равен 6, а радиус вписанной окружности равен 2.

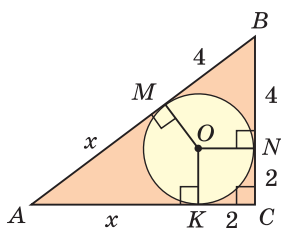


Рис. 114

Решение. Способ 1 (геометрический). Пусть в треугольнике ABC , где $\angle C = 90^\circ$, $BC = 6$, $r = 2$ — радиус вписанной окружности (рис. 114). Проведем из центра O вписанной окружности перпендикуляры OK , OM и ON к сторонам треугольника, которые будут радиусами вписанной окружности. Так как $KONC$ — квадрат, то $NC = KC = r = 2$, $BN = 6 - 2 = 4$.

По свойству касательных $BM = BN = 4$, $AM = AK = x$. Тогда $AC = x + 2$, $AB = x + 4$. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $(x + 2)^2 + 6^2 = (x + 4)^2$, $x^2 + 4x + 4 + 36 = x^2 + 8x + 16$, $4x = 24$, $x = 6$. Следовательно, $AB = x + 4 = 6 + 4 = 10$.

Радиус описанной окружности $R = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Способ 2 (алгебраический). Подставив в формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$ значения $r = 2$ и $a = 6$, получим $c = b + 2$. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, т. е. $(b + 2)^2 = 6^2 + b^2$, $b^2 + 4b + 4 = 36 + b^2$, $b = 8$. Тогда $c = 10$, $R = \frac{c}{2} = 5$.

Ответ: 5.

Задача 2. Гипотенуза прямоугольного треугольника $c = 18$, радиус вписанной в него окружности $r = 2$. Найти площадь треугольника.

Решение. Способ 1 (геометрический). Пусть в треугольнике ABC гипотенуза $AB = c = 18$, O — центр вписанной окружности, OK , OM , ON — ее радиусы, проведенные в точки касания (рис. 115). Так как $OM \perp AC$,

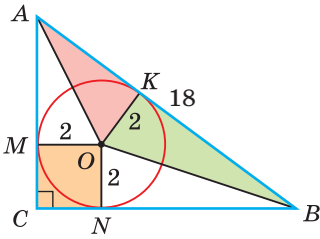


Рис. 115

$ON \perp BC$, $OK \perp AB$ и $OM = ON$, то $CMON$ — квадрат со стороной, равной радиусу r вписанной окружности, $OK = r$ — высота треугольника AOB . Поскольку отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между собой, то $AK = AM$, $BK = BN$. Отсюда $\triangle AKO = \triangle AMO$, $\triangle BKO = \triangle BNO$ по катету и гипотенузе.

Площадь треугольника ABC равна сумме удвоенной площади треугольника AOB и площади квадрата $CMON$, т. е. $S_{ABC} = 2S_{AOB} + S_{CMON} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OK + MO^2 = c \cdot r + r^2 = 18 \cdot 2 + 2^2 = 40$.

Способ 2 (алгебраический). Из формулы $r = \frac{a+b-c}{2}$ следует $2 = \frac{a+b-18}{2}$, $a+b=22$. Возведем обе части равенства в квадрат: $(a+b)^2 = 22^2$, $a^2 + 2ab + b^2 = 484$. Так как $a^2 + b^2 = c^2$ и $S_{ABC} = \frac{ab}{2}$, то $c^2 + 4S = 484$, $324 + 4S = 484$, $S = 40$.

Способ 3 (алгебраический). Из формулы $r = p - c$ следует, что $p = r + c$. Из формулы $S = pr$ следует, что $S_{ABC} = (r + c)r = (2 + 18) \cdot 2 = 40$.
 Ответ: 40.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

110. Используя данные рисунков 116, а)–в), найдите радиус описанной окружности треугольника.

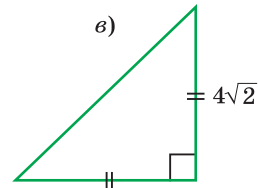
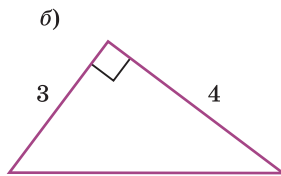
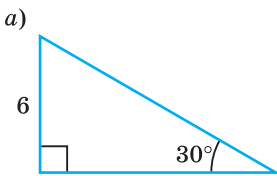
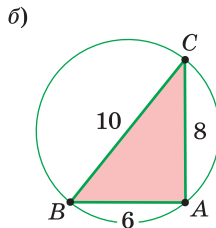
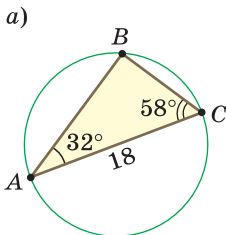


Рис. 116

111. По данным на рисунках 117, а)–в) найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .



в) $S_{ABC} = 60$

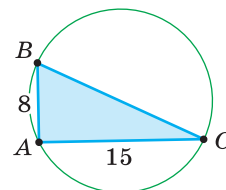


Рис. 117

- 112.** Найдите радиус описанной окружности прямоугольного треугольника с катетами, равными:
- а) 12 см и 16 см; б) 18 м и 24 м;
в) 14 дм и 48 дм; г) 1 км и 2 км.
- 113.** а) Найдите площадь прямоугольного треугольника ABC , если у него один из катетов равен 6 см, а радиус описанной окружности — 5 см.
б) Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен 8 см, а синус противолежащего ему угла равен $\frac{2}{3}$.
- 114.** Используя формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$, найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c , если:
- а) $a = 3$ см, $b = 4$ см; б) $a = 5$ дм, $b = 12$ дм;
в) $a = 7$ см, $c = 25$ см; г) $a = 4$ м, $c = 4\sqrt{2}$ м.
- 115.** Используя данные рисунков 118, а)–г), найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник.

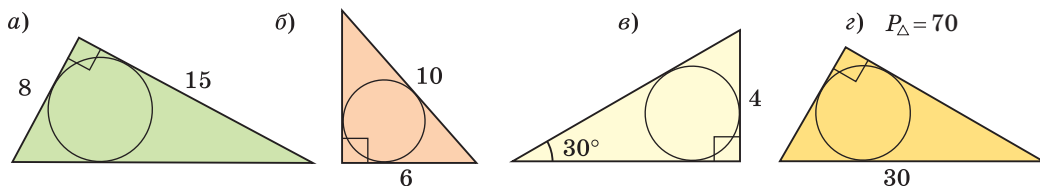


Рис. 118

- 116.** Расстояние от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до гипотенузы равно 6 см. Найдите расстояние от этого центра до вершины прямого угла.
- 117.** Найдите катеты прямоугольного треугольника, если вписанная окружность точкой касания делит гипотенузу на отрезки, равные 5 см и 12 см.
- 118.** Радиус описанной окружности прямоугольного треугольника равен 13 см, вписанной — 4 см. Найдите периметр и площадь треугольника.
-  **119.** а) Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2 , радиус его вписанной окружности равен 2 см. Найдите диаметр описанной окружности треугольника.
б) Площадь прямоугольного треугольника равна 30 см^2 , радиус его описанной окружности равен 6,5 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.
-  **120.** Найдите периметр прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза $c = 14$ см, а радиус вписанной окружности $r = 1$ см.

- 121.** Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника со сторонами, равными 12 см, 16 см и 20 см.
- 122.** Высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки, равные 9 см и 16 см. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.
- 123.** а) В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки, равные 3 см и 4 см. Найдите площадь треугольника.
б) Докажите, что если точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки, равные m и n , то площадь треугольника можно найти по формуле $S = mn$.
- 124.** $ABCD$ — прямоугольник (рис. 119), в треугольник BCD вписана окружность с центром O . Докажите, что площадь прямоугольника $AKOM$ равна половине площади прямоугольника $ABCD$.

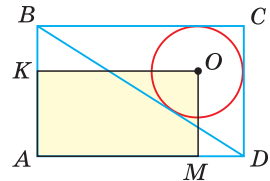


Рис. 119



При помощи **Интернета** найдите *формулу Эйлера*, которая связывает расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей с их радиусами.

Реальная геометрия

Из двух листов МДФ, один из которых имеет форму равносidedного треугольника со стороной 1 м, другой — форму прямоугольного равнобедренного треугольника с катетами, равными 1 м (рис. 120), было решено изготовить круглую столешницу для журнального столика. Для этого из каждого листа необходимо вырезать по одному кругу наибольшего диаметра.

Проведите расчеты и выясните:

- а) из какого листа будет вырезан круг большего диаметра;
б) каким в каждом случае будет процент отходов, если известно, что площадь круга можно найти по формуле $S = \pi R^2$, где $\pi \approx 3,14$.

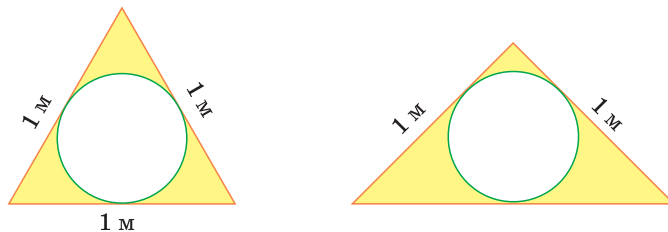


Рис. 120

Интересно знать. ОАО «Речицадрев» — деревообрабатывающее предприятие в Гомельской области Республики Беларусь, которое производит различные изделия из дерева, древесно-стружечные плиты, в том числе плиты МДФ (древесноволокнистые плиты из очень мелких древесных опилок), топливные брикеты, синтетические смолы. Доля экспортных поставок предприятия достигает 85 %.



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение описанной и вписанной окружностей треугольника.
2. Где находится центр описанной, а где — центр вписанной окружности треугольника.
3. Где находится центр описанной окружности прямоугольного треугольника и чему равен ее радиус R .
4. Формулу радиуса r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник.
5. Формулу площади треугольника, связанную с радиусом r вписанной окружности.

Умеем

1. Находить центр описанной окружности треугольника.
2. Находить центр вписанной окружности треугольника.
3. Выводить формулу $S = pr$.
4. Доказывать, что $R = \frac{c}{2}$ для прямоугольного треугольника.
5. Выводить формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$ для прямоугольного треугольника.

§ 10. Вписанные и описанные четырёхугольники

Определение. Окружность называется **описанной** около многоугольника, если она проходит через все его вершины. При этом многоугольник называется **вписанным в окружность**.

Окружность называется **вписанной** в многоугольник, если она касается всех его сторон. При этом многоугольник называется **описанным около окружности**.

Пятиугольник $ABCDE$ (рис. 121, а) является вписанным в окружность, а четырёхугольник $MNPК$ (рис. 121, б) — описанным около окружности.

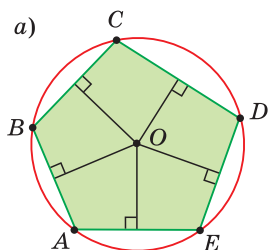
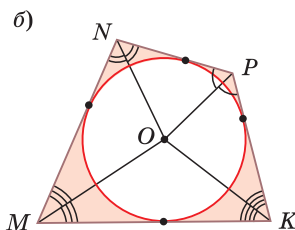


Рис. 121

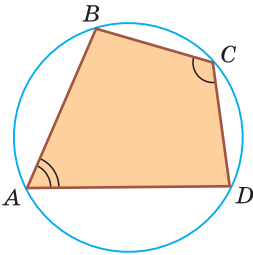


Центр описанной окружности многоугольника находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам, а центр вписанной — в точке пересечения биссектрис его углов.

Обоснуйте эти утверждения самостоятельно.

Теорема (свойство вписанного четырехугольника).

Сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна 180° .



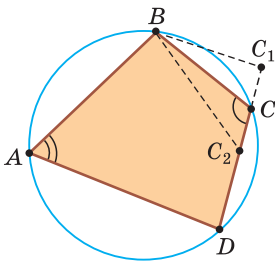
Если $ABCD$ вписан,
то $\angle A + \angle C = 180^\circ$

Рис. 122

Доказательство. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, вписанный в окружность (рис. 122). Его углы A , B , C и D являются вписанными в окружность. Так как вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, то $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$, $\angle C = \frac{1}{2} \cup BAD$. Дуги BCD и BAD дополняют друг друга до окружности, и поэтому сумма их градусных мер равна 360° . Отсюда $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$. Аналогично доказывается, что $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Теорема доказана.

Теорема (признак вписанного четырехугольника).

Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° , то около него можно описать окружность.



Если $\angle A + \angle C = 180^\circ$,
то $ABCD$ вписан

Рис. 123

Доказательство. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, у которого $\angle A + \angle C = 180^\circ$ (рис. 123). Через вершины A , B и D проведем окружность (около любого треугольника можно описать окружность). Если бы вершина C не лежала на данной окружности, а находилась вне ее в положении C_1 или внутри нее в положении C_2 , то в первом случае угол C был бы меньше, а во втором — больше половины градусной меры дуги BAD (по свойствам угла между секущими и угла между пересекающимися хордами). Тогда сумма $\angle A + \angle C$ не была бы равна 180° . Следовательно, вершина C лежит на данной окружности. Теорема доказана.

Замечание. Так как сумма углов четырехугольника равна 360° , то для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, достаточно, чтобы сумма любой пары его противоположных углов была равна 180° .

Следствия.

1. Около параллелограмма можно описать окружность, только если этот параллелограмм — прямоугольник (рис. 124, а). Центр этой окружности лежит в точке пересечения диагоналей прямоугольника.

2. Около ромба можно описать окружность, только если этот ромб — квадрат (рис. 124, б).

3. Около трапеции можно описать окружность, только если она равнобедренная (рис. 124, в).

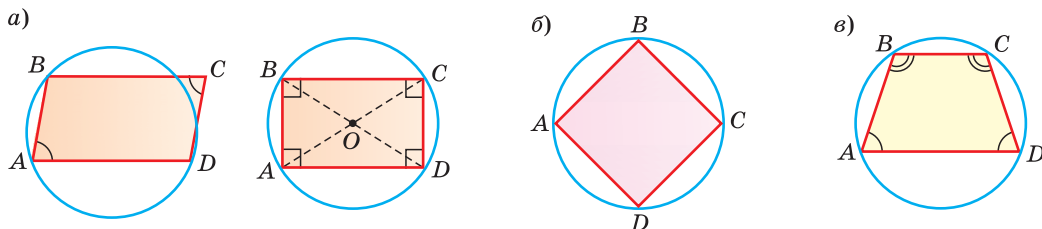


Рис. 124

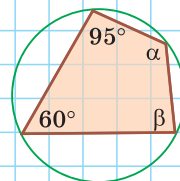
Докажите эти следствия самостоятельно.

А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

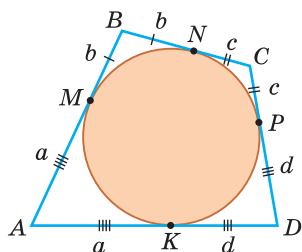
Около четырехугольника описана окружность. Найдите градусную меру угла α и угла β .

- а) 120° , 75° ; б) 60° , 95° ;
в) 120° , 85° ; г) 100° , 95° .



Теорема (свойство описанного четырехугольника).

Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника равны между собой.



Если $ABCD$ описан, то
 $AB + CD = BC + AD$

Рис. 125

Доказательство. Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник, M , N , P и K — точки касания его сторон с окружностью (рис. 125). Так как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны между собой, то $AM = AK = a$, $BM = BN = b$, $CP = CN = c$, $DP = DK = d$.

Тогда

$$AB + CD = a + b + c + d,$$

$$AD + BC = a + d + b + c,$$

$$\text{откуда } AD + BC = AB + CD.$$

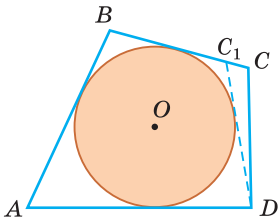
Теорема доказана.

Следствие.

Периметр описанного четырехугольника равен удвоенной сумме длин любой пары его противоположных сторон: $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + CD) = 2 \cdot (BC + AD)$.

Теорема (признак описанного четырехугольника).

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.



Если $AB + CD = BC + AD$,
то $ABCD$ описан

Рис. 126

Доказательство. Пусть для выпуклого четырехугольника $ABCD$ справедливо, что

$$AB + CD = AD + BC. \quad (1)$$

Проведем окружность, которая касается прямых AD , AB и BC (рис. 126). Такая окружность существует, ее центр находится в точке пересечения биссектрис углов A и B . Если окружность не касается стороны CD , то либо прямая CD не имеет с окружностью общих точек, либо является секущей. Рассмотрим первый случай. Проведем отрезок DC_1 , который касается окружности. По свойству описанного четырехугольника

$$AB + C_1D = AD + BC_1. \quad (2)$$

Отняв почленно от равенства (1) равенство (2), получим $CD - C_1D = BC - BC_1$, $CD - C_1D = C_1C$, $CD = C_1C + C_1D$, что противоречит неравенству треугольника.

Рассмотрев случай, когда прямая DC — секущая, также придем к противоречию (сделайте это самостоятельно). Следовательно, данная окружность касается стороны CD и в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Теорема доказана.

Следствия.

1. В параллелограмм можно вписать окружность, только если этот параллелограмм — ромб. Центр этой окружности лежит в точке пересечения диагоналей ромба, а ее диаметр равен высоте ромба (рис. 127, а).

2. В прямоугольник можно вписать окружность, только если этот прямоугольник — квадрат (рис. 127, б).

3. Если в трапецию можно вписать окружность, то диаметр этой окружности равен высоте трапеции (рис. 127, в).

Докажите эти следствия самостоятельно.

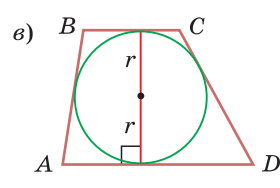
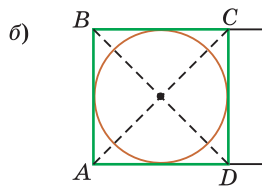
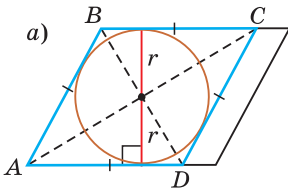


Рис. 127

Для описанного многоугольника справедлива формула $S = pr$, где S — его площадь, p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности. Доказательство аналогично приведенному в § 8 для треугольника. Выполните его самостоятельно, используя рисунок 128.

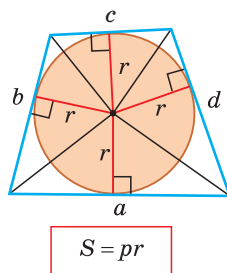


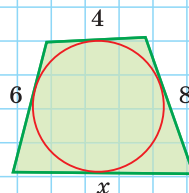
Рис. 128

Тест 2

В четырехугольник вписана окружность.

Найдите длину стороны x .

а) 9; б) 8; в) 6; г) 10.



Задания к § 10

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. Найти радиус окружности, вписанной в ромб с периметром 24 см и острым углом, равным 45° .

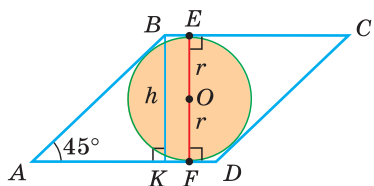


Рис. 129

Решение. Способ 1 (решение прямоугольного треугольника). Пусть $ABCD$ — ромб (рис. 129), O — центр вписанной в ромб окружности. Известно, что высота BK ромба равна диаметру EF вписанной окружности, т. е. $h = 2r$. Так как у ромба все стороны равны, то $AB = \frac{24}{4} = 6$ (см).

Из прямоугольного треугольника ABK находим, что $\frac{BK}{AB} = \sin A$, откуда $BK = AB \cdot \sin 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ (см). Искомый радиус вписанной окружности $r = \frac{BK}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (см).

Способ 2 (метод площадей). Ромб — параллелограмм. По формуле площади параллелограмма ($S = ab \sin \gamma$) найдем площадь данного ромба: $S = a \cdot a \cdot \sin \gamma = 6 \cdot 6 \cdot \sin 45^\circ = 36 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$ (см²). С другой стороны, площадь ромба можно найти по формуле площади описанного многоуголь-

ника $S = pr$. Поскольку $p = \frac{24}{2} = 12$ (см), то $S = 12r$. Отсюда $18\sqrt{2} = 12 \cdot r$,
 $r = \frac{18\sqrt{2}}{12} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (см).

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см.

Задача 2. Окружность, вписанная в прямоугольную трапецию $ABCD$, где $\angle A = 90^\circ$, делит точкой касания большую боковую сторону CD на отрезки $CK = 1$, $KD = 4$. Найти площадь трапеции (рис. 130).

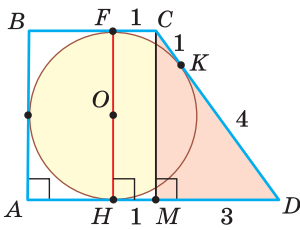


Рис. 130

Решение. Способ 1. Площадь трапеции находится по формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Необходимо найти сумму оснований и высоту трапеции. Проведем высоту $FH = h$ трапеции, проходящую через центр O вписанной окружности. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, $CF = CK = 1$, $DH = DK = 4$. Проведем высоту CM . Так как $HFCM$ — прямоугольник (все углы прямые), то $HM = FC = 1$, $MD = 3$. В прямоугольном треугольнике CMD по теореме Пифа-

гора $CM = \sqrt{CD^2 - MD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Тогда $AB = CM = h = 4$. По свойству описанного четырехугольника $AD + BC = AB + CD = 4 + 5 = 9$. Отсюда $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{AD+BC}{2} \cdot CM = \frac{9}{2} \cdot 4 = 18$.

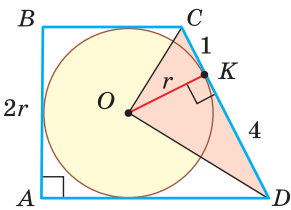


Рис. 131

Способ 2. Центр O вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов BCD и ADC . Так как $\angle BCD + \angle ADC = 180^\circ$ как внутренние односторонние углы при $BC \parallel AD$ и секущей CD , то $\angle OCD + \angle ODC = 90^\circ$ (рис. 131). Тогда $\angle COD = 90^\circ$, $\triangle COD$ — прямоугольный, радиус $OK = r$ является его высотой, проведенной к гипотенузе CD . Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, — есть среднее

пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу. Поэтому $OK = \sqrt{CK \cdot KD}$, или $r = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$. Высота h описанной трапеции равна диаметру вписанной окружности, откуда $AB = h = 2r = 4$. Так как по свойству описанного четырехугольника $AD + BC = AB + CD = 9$, то $S_{ABCD} = pr = (AB + CD) \cdot r = 9 \cdot 2 = 18$.

Ответ: 18.

Замечание. Полезно запомнить свойство: «Боковая сторона описанной трапеции видна из центра вписанной окружности под углом 90° ».

Задача 3. Внутри острого угла A взята точка M , из которой опущены перпендикуляры MB и MC на стороны угла A , $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$, $\angle MBC = 45^\circ$. Найти величину угла BAC (рис. 132, а).

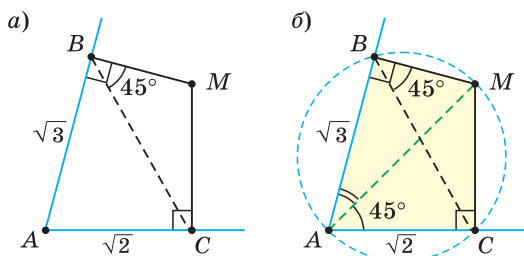


Рис. 132

Решение. Так как в четырехугольнике $ABMC$ сумма углов B и C равна 180° , то около него можно описать окружность. Проведем в ней хорду AM (рис. 132, б). Поскольку $\angle MAC = \angle MBC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу MC , то $\angle MAC = 45^\circ$ и прямоугольный треугольник AMC является равнобедренным, $AM = AC\sqrt{2} = 2$. В прямоугольном треугольнике ABM $\cos \angle BAM = \frac{AB}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\angle BAM = 30^\circ$, $\angle BAC = \angle BAM + \angle MAC = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.

Ответ: 75° .



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

125. Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность. Используя данные рисунков 133, а)–в), найдите величину угла, обозначенного знаком вопроса.

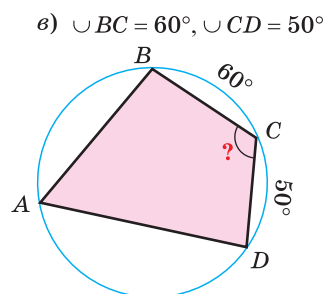
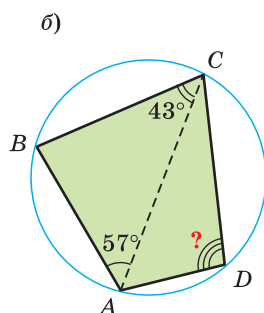
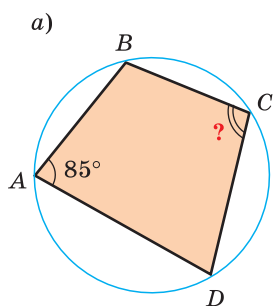


Рис. 133

126. $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Зная, что:

- $\angle A$ на 20° больше $\angle C$, найдите $\angle C$;
- $\angle B : \angle D = 2 : 3$, найдите $\angle D$;
- $\angle A + \angle B + \angle C = 284^\circ$, найдите $\angle B$;
- $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 5 : 6$, найдите $\angle D$.

127. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность.

а) Найдите $\angle BCD$, если $\angle BAC = 26^\circ$, $\angle CBD = 24^\circ$.

б) Найдите $\angle CAD$, если $\angle ABD = 34^\circ$, $\angle ADC = 116^\circ$.

128. Центр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, лежит на стороне AD . По данным на рисунках 134, а), б) найдите:

а) $\angle CAD$; б) $\angle BCD$.

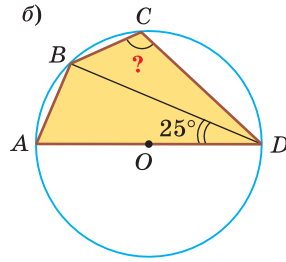
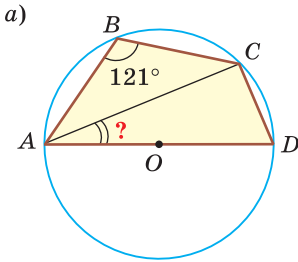


Рис. 134

129. а) $ABCD$ — вписанная трапеция ($AD \parallel BC$), $\angle A = 68^\circ$. Найдите градусную меру дуги ABC .

б) $ABCD$ — вписанная трапеция, средняя линия которой равна 7 см, а боковая сторона — 6 см. Найдите периметр трапеции.

130. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BAC = \angle BDC$.

131. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$, O — точка пересечения диагоналей, $AO = 3$ см, $BO = 6$ см, $DO = 4$ см. Найдите длину отрезка CO .

132. По данным на рисунках 135, а), б) найдите площадь прямоугольника:

а) $ABCD$, если $AD = 8$ см, $R = 5$ см;

б) $MNPK$, если $MK : MN = 12 : 5$, $R = 13$ см.

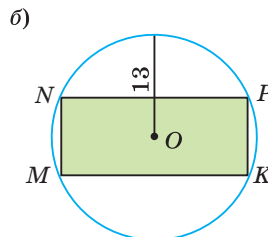
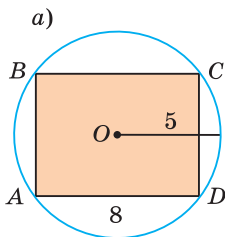


Рис. 135

133. а) Дана равнобедренная трапеция, у которой диагональ перпендикулярна боковой стороне. Меньшее основание трапеции равно 6 см, а радиус описанной окружности — 5 см. Найдите площадь трапеции.

б) Трапеция $ABCD$ вписана в окружность, большее основание трапеции является диаметром, меньшее основание равно 12 см, высота трапеции равна 8 см. Найдите среднюю линию трапеции.

134. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность. По данным на рисунках 136, а)–в) найдите длину отрезка, обозначенного знаком вопроса.

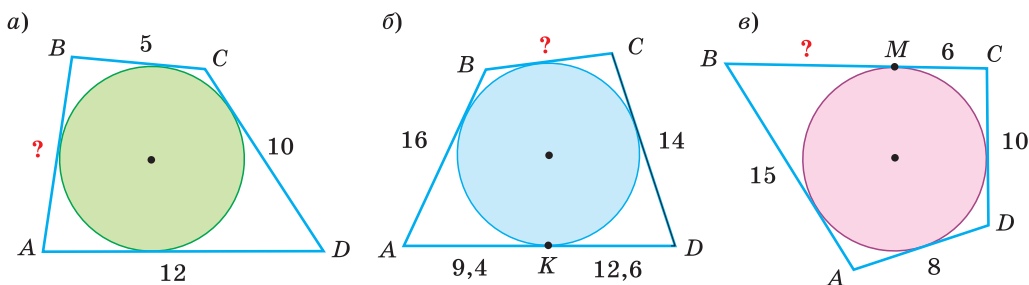


Рис. 136

135. а) Периметр описанного четырехугольника $ABCD$ равен 48 см. Найдите $BC + AD$.
 б) В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если $AB + CD = 16$ см.
136. а) Около параллелограмма со сторонами 4 см и 5 см описана окружность. Найдите площадь этого параллелограмма.
 б) В параллелограмм с периметром 48 см и острым углом 30° вписана окружность. Найдите диаметр этой окружности.
137. Сумма двух противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равна 15 см, а радиус вписанной в него окружности — 3 см. Найдите площадь данного четырехугольника.
138. а) Дана описанная прямоугольная трапеция $ABCD$ ($\angle A = 90^\circ$), средняя линия ее равна 12,5, боковая сторона CD равна 13. Найдите основания трапеции.
 б) Дана описанная равнобедренная трапеция с основаниями, равными 4 и 16. Найдите площадь этой трапеции.
139. $ABCD$ — описанный четырехугольник, BC меньше AB на 1 см, AD больше AB на 7 см, CD больше AB в 2 раза. Найдите AB .
140. O — центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, $\angle BAO = 32^\circ$, $\angle CDO = 24^\circ$. Найдите $\angle AOD$.
141. а) Радиус окружности, вписанной в ромб, равен 4,5 см, острый угол ромба равен 30° . Найдите периметр ромба.
 б) Диагонали ромба равны 30 см и 40 см. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

142. В равнобедренный треугольник ABC , у которого $AB = BC = 5$ см, $AC = 6$ см, вписана окружность. Касательная MN параллельна AC (рис. 137). Найдите периметр четырехугольника $AMNC$.

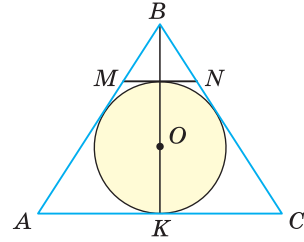


Рис. 137

143. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AD = 25$ см, $BC = 7$ см, диагональ $AC = 20$ см. Найдите диаметр окружности, описанной около трапеции.

144. а) Окружность радиусом 3 см вписана в прямоугольную трапецию, меньшее основание которой равно 4 см. Найдите боковые стороны и большее основание трапеции.

б) В прямоугольную трапецию вписана окружность. Расстояния от центра этой окружности до концов большей боковой стороны равны 15 см и 20 см. Найдите площадь трапеции.

145. Центр окружности, описанной около трапеции $ABCD$, лежит внутри трапеции. Основания трапеции равны 6 см и 8 см, высота равна 7 см. Найдите диаметр описанной окружности.

146. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$, $AB = CD = 6$ см, $AD = 8$ см, $BC = 4$ см. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K . Найдите длину отрезка AK .

147. Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, если:

а) $\angle ABD = \angle ACD$;

б) $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, где O — точка пересечения диагоналей.

148. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и BN , которые пересекаются в точке I . Известно, что точки K , I , N и C лежат на одной окружности. Найдите величину угла C .

Моделирование

Из остатков льняной ткани, которые имеют форму прямоугольной трапеции, было решено изготовить салфетку круглой формы. Для этого закройщику из данного куска необходимо вырезать круг наибольшего диаметра.

Используя размеры, которые указаны на рисунке 138, составьте алгоритм нахождения:

а) центра круга наибольшего диаметра;

б) радиуса круга наибольшего диаметра.

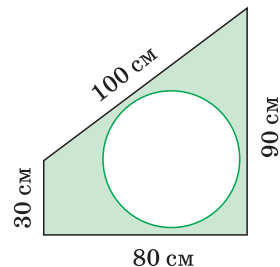


Рис. 138

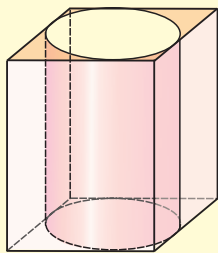
Интересно знать. Лен является визитной карточкой Республики Беларусь. Крупнейшее экспортно ориентированное предприятие «Оршанский льнокомбинат» — единственный в Республике Беларусь комплексный переработчик льноволокна. Продукция под торговой маркой «Беларускі лён» экспортируется более чем в 40 стран мира.

Геометрия 3D

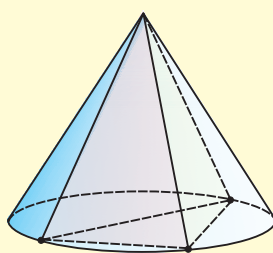
Многогранники (призма, пирамида) и тела вращения (цилиндр, конус, шар) могут быть вписаны друг в друга.

Задание 1. В правильную четырехугольную призму вписан цилиндр так, что его основания вписаны в основания призмы (рис. 139, а). Радиус основания цилиндра равен 4 см, высота цилиндра — 10 см. Найдите размеры призмы.

а)



б)



в)

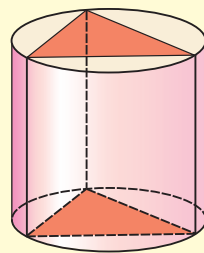


Рис. 139

Задание 2. В конус вписана треугольная пирамида так, что ее основание вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 139, б). Найдите радиус основания конуса, если стороны основания пирамиды равны 10 см, 24 см, 26 см.

Задание 3. В цилиндр вписана правильная треугольная призма так, что основания призмы вписаны в основания цилиндра, а боковые ребра принадлежат боковой поверхности цилиндра (рис. 139, в). Найдите площадь боковой поверхности призмы, если радиус основания цилиндра равен $2\sqrt{3}$ см, а его высота — 8 см.



При помощи **Интернета** уточните понятие *правильной призмы*.



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение вписанного четырехугольника.
2. Определение описанного четырехугольника.
3. Свойство и признак вписанного четырехугольника.
4. Свойство и признак описанного четырехугольника.

Умеем

1. Доказывать теорему о свойстве углов вписанного четырехугольника.
2. Доказывать теорему о свойстве сторон описанного четырехугольника.



§ 11. Креативная геометрия

1. Окружность, вписанная в треугольник

Задача 1. Окружность вписана в треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Вывести формулу для нахождения длин отрезков, на которые точки касания окружности со сторонами делят каждую сторону треугольника.

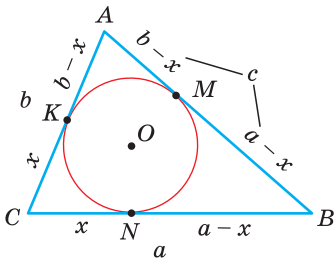


Рис. 140

Решение. Пусть K , M и N — точки касания вписанной окружности соответственно со сторонами AC , AB и BC треугольника ABC (рис. 140). Известно, что отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между собой. Тогда, если $CK = CN = x$, то $BN = BM = a - x$, $AK = AM = b - x$. Так как $AB = AM + MB$, то $c = (a - x) + (b - x)$, откуда $x = \frac{a+b-c}{2}$, т. е.

$CN = CK = \frac{a+b-c}{2}$. После преобразований получим:

$$CN = CK = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = p - c.$$

Аналогично: $BN = BM = \frac{a+c-b}{2} = p - b$, $AK = AM = \frac{b+c-a}{2} = p - a$.

Ответ: $CN = CK = p - c$, $BN = BM = p - b$, $AK = AM = p - a$.

Замечание. Если $\angle C = 90^\circ$ (рис. 141), то $CN = CK = r = p - c$ (см. с. 69). Формула радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$ — частный случай результата задачи 1.

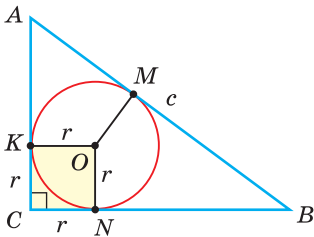


Рис. 141



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 149.** Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 8$. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AC в точке K . Найдите отношение площадей треугольников ABK и CBK .
- 150.** В треугольник ABC , у которого $AB = 8$, вписана окружность. Касательная к окружности пересекает стороны BC и AC в точках M и K соответственно. Периметр треугольника $МСК$ равен 12. Найдите периметр треугольника ABC .

- 151.** В треугольник со сторонами 7, 9 и 10 вписана окружность. К окружности проведена касательная, которая пересекает две меньшие стороны треугольника. Найдите периметр треугольника, отсеченного от данного этой касательной.

2. Описанная трапеция

Задача 2. Найти площадь описанной равнобедренной трапеции с основаниями a и b .

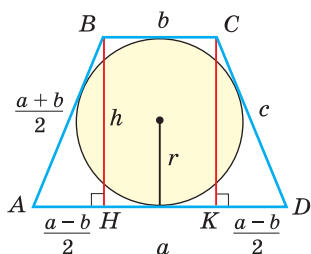


Рис. 142

Решение. Площадь трапеции можно найти по формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Пусть в трапеции $ABCD$ основания $AD = a$ и $BC = b$, $AB = CD = c$ — боковые стороны, $BH = h$ — высота (рис. 142). По свойству описанного четырехугольника $AB + CD = AD + BC$, откуда $2AB = a + b$, $AB = c = \frac{a+b}{2}$. Известно, что

в равнобедренной трапеции $AH = \frac{a-b}{2}$ (можно опустить высоту CK и убедиться в этом). Из прямоугольного треугольника AHB получаем:

$$h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab, \quad h = \sqrt{ab}.$$

$$\text{Отсюда } S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}.$$

Замечание. Площадь описанной равнобедренной трапеции равна произведению среднего арифметического и среднего геометрического ее оснований.

Полезно запомнить!

Для описанной равнобедренной трапеции с основаниями a и b , боковой стороной c , высотой h , средней линией m и радиусом r вписанной окружности (см. рис. 142) справедливы равенства:

$$1) \quad c = \frac{a+b}{2} = m;$$

$$2) \quad P = 4c = 4m = 2(a+b);$$

$$3) \quad h = \sqrt{ab};$$

$$4) \quad S = ch;$$

$$5) \quad r = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{2};$$

$$6) \quad S = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}.$$



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 152.** а) В равнобедренную трапецию с основаниями 2 см и 8 см вписана окружность. Найдите площадь трапеции.
б) Найдите площадь описанной равнобедренной трапеции, большее основание которой равно 18 см, боковая сторона — 13 см.
- 153.** В равнобедренную трапецию площадью 32 см^2 с углом 30° вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.
- 154.** Докажите, что если в прямоугольную трапецию с основаниями a и b можно вписать окружность, то площадь трапеции $S = ab$.
- 155.** В прямоугольную трапецию, меньшее основание которой равно 4 см, вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности, если площадь трапеции равна 48 см^2 .

3. Дополнительные свойства и признаки вписанного четырехугольника

Теорема.

Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда угол между его стороной и диагональю равен углу между противоположной стороной и другой диагональю.

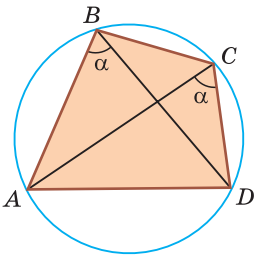


Рис. 143

Доказательство. 1) Если четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 143), то $\angle ABD = \angle ACD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.

2) Докажем, что если в некотором четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABD = \angle ACD$, то около него можно описать окружность. Опишем около треугольника ABD окружность.

В 8-м классе (В. В. Казаков. «Геометрия, 8», с. 193) было доказано свойство: «Геометрическим местом точек плоскости, из которых данный отрезок AD виден под углом α , является объединение двух дуг окружностей: дуги ABD и ей симметричной относительно прямой AD , исключая точки A и D ». Данное свойство гарантирует, что вершины всех углов, равных углу ABD и лежащих по одну сторону от прямой AD , расположены на дуге ABD окружности. Поэтому окружность, описанная около треугольника ABD , пройдет и через вершину C .

Теорема доказана.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 156.** Докажите теорему: «Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда произведения отрезков диагоналей, на которые они разбиваются точкой пересечения, равны», т. е. если четырехугольник $ABCD$ вписанный, то $AP \cdot PC = BP \cdot PD$ (рис. 144), и обратно.

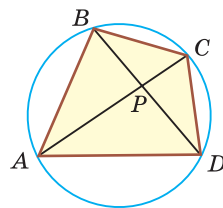


Рис. 144

- 157.** а) O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, $\angle BAD = 42^\circ$. Найдите $\angle BCD$.
б) Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , $AP = 12$, $PC = 3$, $BP = 4$, $PD = 9$, $\angle CAD = 40^\circ$. Найдите $\angle CBD$.
- 158.** В трапеции $ABCD$ основания $AD = 12$, $BC = 4$, боковая сторона $AB = 5$, $\angle BAC = \angle CDB$. Найдите площадь трапеции.
- 159.** а) В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ADB = 45^\circ$, $\angle BDC = 70^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$. Найдите $\angle ABC$.
б) В четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAD = 78^\circ$, $\angle BCD = 102^\circ$, $\angle CBD = 52^\circ$. Найдите $\angle CAD$.
- 160.** В треугольнике ABC (рис. 145) $\angle B = 60^\circ$, биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке I . Докажите, что около четырехугольника C_1BA_1I можно описать окружность.

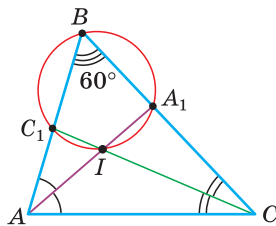


Рис. 145

4. Внеписанные окружности

Окружность, которая касается стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, называется *внеписанной* окружностью треугольника. На рисунке 146 изображен треугольник ABC и три его внеписанные окружности с центрами O_A , O_B , O_C и радиусами r_a , r_b , r_c . Центр каждой такой окружности лежит в точке пересечения биссектрис двух внешних углов при вершинах треугольника.

Внеписанные окружности обладают рядом интересных свойств:

1. Центры вписанной и внеписанной окружностей лежат на биссектрисе соответствующего внутреннего угла треугольника.

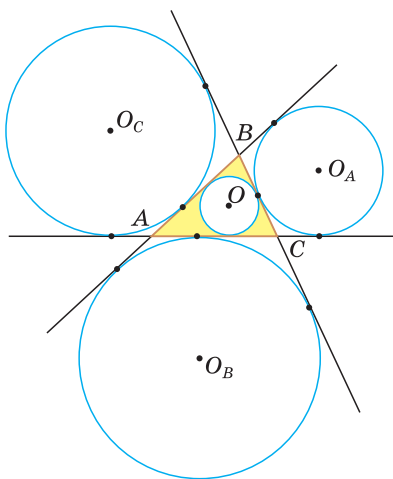


Рис. 146

2. $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$, где r — радиус вписанной окружности треугольника.

3. $4R + r = r_a + r_b + r_c$, где R — радиус описанной окружности $\triangle ABC$. Попробуйте доказать некоторые из этих свойств самостоятельно.

Найдем радиус r_a внеписанной окружности треугольника ABC со сторонами a , b и c (рис. 147). Для этого проведем радиусы OE и O_AK . По свойству касательной $OE \perp AC$, $O_AK \perp AC$.

Из подобия прямоугольных треугольников AOE и AO_AK (по острому углу) следует $\frac{OE}{AE} = \frac{O_AK}{AK}$.

Так как $AK = \frac{1}{2}P_{ABC} = p$, $AE = p - a$ и $r = \frac{S}{p}$,

где $OE = r$, то $\frac{\frac{S}{p}}{p - a} = \frac{r_a}{p}$, откуда $S = r_a(p - a)$,

$$r_a = \frac{S}{p - a}.$$

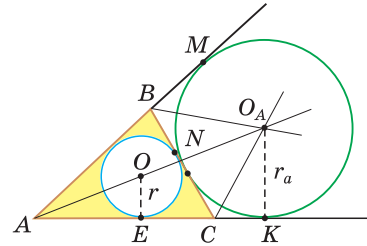


Рис. 147

Пример. Вычислим, используя данную формулу, радиус внеписанной окружности прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, которая касается гипотенузы:

$$r_c = \frac{S}{p - c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4}{\frac{3+4+5}{2} - 5} = \frac{6}{1} = 6.$$



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

161. Пусть в треугольнике ABC $\angle A = 40^\circ$. Найдите $\angle BO_A C$, где O_A — центр внеписанной окружности треугольника, касающейся стороны BC .
162. Найдите радиус внеписанной окружности равностороннего треугольника со стороной, равной a .
163. Докажите, что для треугольника $O_A O_B O_C$ (см. рис. 146) отрезки $O_A A$, $O_B B$, $O_C C$ являются высотами.
164. Внеписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке M , продолжений сторон AB и AC — в точках N и P соответственно. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AC в точке K , а стороны AB — в точке L . Докажите, что:
- а) $AN = \frac{1}{2}P_{ABC}$; б) $NL = BC$.

- 165.** Докажите, что отрезок, соединяющий центр вписанной и центр внеписанной окружности треугольника, делится описанной окружностью этого треугольника пополам.

5. Обобщенная теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CH , которая делит его на треугольники ACH и CBH , подобные между собой и подобные треугольнику ABC ($\angle A = \angle BCH$) (рис. 148). Тогда теорема Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$ может звучать так: сумма квадратов гипотенуз a

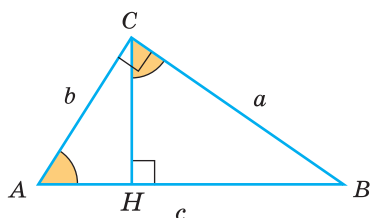


Рис. 148

и b треугольников CBH и ACH равна квадрату гипотенузы треугольника ABC . И вообще, если m , n и l — соответствующие линейные элементы треугольников CBH , ACH и ABC , то можно сформулировать обобщенную теорему Пифагора: $m^2 + n^2 = l^2$.

Действительно, из подобия указанных треугольников $\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \frac{l}{c} = k$, откуда $m = ka$,

$$n = kb, \quad l = kc, \quad m^2 + n^2 = k^2(a^2 + b^2) = (kc)^2 = l^2.$$

Пример. Пусть $P_{ACH} = 15$ см, $P_{CBH} = 36$ см (см. рис. 148). Найдем P_{ABC} . По обобщенной теореме Пифагора $P_{ACH}^2 + P_{CBH}^2 = P_{ABC}^2$, откуда $P_{ABC}^2 = 15^2 + 36^2 = 1521$; $P_{ABC} = 39$ см.

Ответ: 39 см.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 166.** В прямоугольном треугольнике с катетами 15 и 20 к гипотенузе проведена высота. Она разбивает данный треугольник на два прямоугольных треугольника. В каждый из полученных треугольников вписана окружность. Найдите:

- расстояние между точками касания этих окружностей с указанной высотой;
- расстояние между центрами этих окружностей.

- 167.** Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит прямоугольный треугольник на два треугольника, площади которых равны 1 см^2 и 4 см^2 . Найдите гипотенузу данного прямоугольного треугольника.

- 168.** Докажите, что для прямоугольного треугольника с катетами a и b и высотой h , проведенной к гипотенузе, справедливо равенство

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

- 169.** Пусть $CH = h$ — высота прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB , r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , r_1 — радиус окружности, вписанной в треугольник ACH , r_2 — радиус окружности, вписанной в треугольник BCH .

- а) Докажите, что $r_1 + r_2 + r = h$.
 б) Найдите r , если $r_1 = 3$, $r_2 = 4$.

6. Формула Эйлера для окружностей

Для вписанной и описанной окружностей треугольника с радиусами r и R и расстоянием d между их центрами (рис. 149) справедлива формула Эйлера

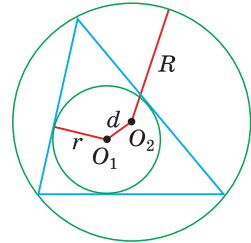
$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Покажем эффективность этой формулы на примере равнобедренного треугольника ABC , у которого $AB = BC = 10$, $AC = 12$ (рис. 150).

Вначале найдем расстояние между центрами указанных окружностей традиционным способом. Проведем высоту BH , длина которой будет равна 8 (пифагорова тройка 6, 8, 10). Центры описанной и вписанной окружностей — соответственно точки O_1 и O_2 — лежат на прямой BH (свойство равнобедренного треугольника). Тогда $BO_1 = R$, $O_2H = r$, $d = O_1O_2$ — расстояние между указанными центрами. Для нахождения радиуса описанной окружности воспользуемся формулой $R = \frac{b^2}{2h_a}$, где b — боковая сторона, h_a — высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника. Получим

$R = \frac{10^2}{2 \cdot 8} = 6\frac{1}{4}$. Радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$. Так как $BO_1 = R = 6\frac{1}{4}$ и $O_1H = 8 - 6\frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$, то $O_1H < O_2H$. Искомое расстояние $d = O_1O_2 = O_2H - O_1H = 3 - 1\frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$.

А теперь найдем d по формуле Эйлера: $d^2 = R^2 - 2Rr = \left(6\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot 6\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{625}{16} - \frac{150}{4} = \frac{25}{16}$, откуда $d = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. Как видим, формула Эйлера достаточно эффективна.



$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

Рис. 149

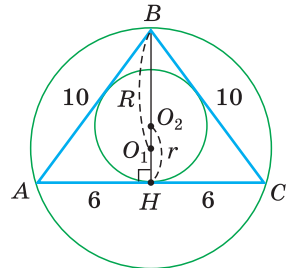


Рис. 150

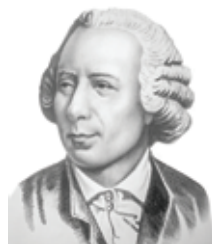


РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 170.** Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника с катетами 12 и 16 двумя способами: традиционным и с помощью формулы Эйлера.
- 171.** Докажите, что для радиуса R описанной и радиуса r вписанной окружностей треугольника справедливо неравенство $\frac{R}{r} \geq 2$.
- 172.** При помощи формулы Эйлера докажите, что в равностороннем треугольнике $R = 2r$.

Интересно знать. Леонард Эйлер (1707—1783) — выдающийся математик, внесший значительный вклад в развитие этой науки. Родился в Швейцарии, длительное время работал в России, являясь академиком Петербургской академии наук.

В 1775 году Леонард Эйлер опубликовал теорему: «*Основания высот, основания медиан и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами треугольника, лежат на одной окружности*». Эту окружность называют *окружностью Эйлера* или *окружностью девяти точек*. Ее радиус в 2 раза меньше радиуса описанной окружности треугольника.



При помощи **Интернета** найдите информацию об *окружности Эйлера*, а также о *прямой Эйлера*. Выясните, как связаны прямая Эйлера и окружность Эйлера.

ТЕМЫ ПРОЕКТОВ



1. Окружность девяти точек.
2. Прямая Эйлера.
3. Точка Нагеля, точка Жергонна, точка Торричелли.

ЗАПОМИНАЕМ

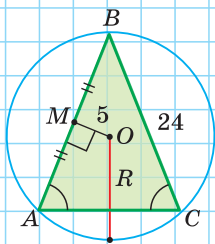
1. Центр описанной окружности треугольника (многоугольника) лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.
2. Центр вписанной окружности треугольника (многоугольника) лежит в точке пересечения биссектрис его углов.
3. Центр описанной окружности прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы: $R = \frac{c}{2}$.
4. Радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника находится по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$.
5. Если четырехугольник вписан в окружность, то суммы его противоположных углов равны 180° . Верно и обратное утверждение.
6. Если четырехугольник описан около окружности, то суммы его противоположных сторон равны между собой. Верно и обратное утверждение.
7. Площадь треугольника и любого другого описанного многоугольника можно найти по формуле $S = pr$, где p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности.

ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

Тест 1

По данным на рисунке найдите радиус R .

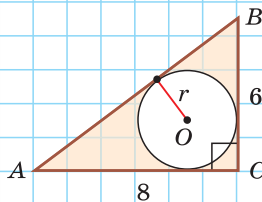
- а) 12;
б) 10;
в) 13;
г) 8.



Тест 2

По данным на рисунке найдите радиус r .

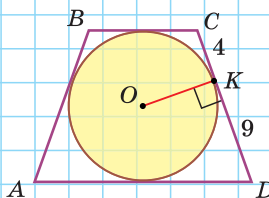
- а) 2;
б) 3;
в) 4;
г) 5.



Тест 3

Найдите площадь равнобедренной трапеции $ABCD$.

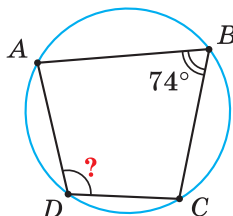
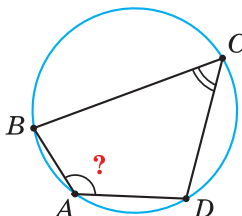
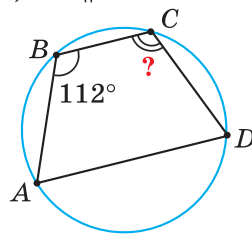
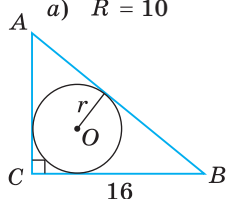
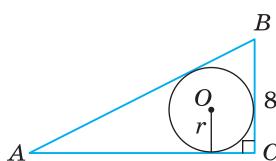
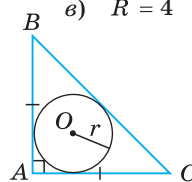
- а) 78; б) 312; в) 156; г) 124.



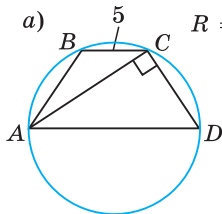
ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 2

1. Найдите величину угла, обозначенного знаком вопроса.

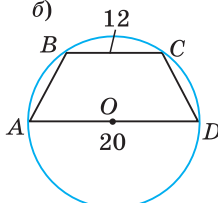
а)

б) $\angle C : \angle A = 1 : 3$ в) $BC \parallel AD$ 2. Найдите радиус r вписанной окружности.а) $R = 10$ б) $R = 8,5$ в) $R = 4$ 

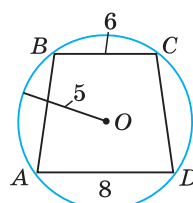
3. Найдите высоту трапеции, вписанной в окружность.

а) $R = 6,5$ 

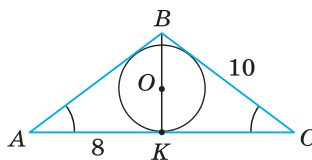
б)



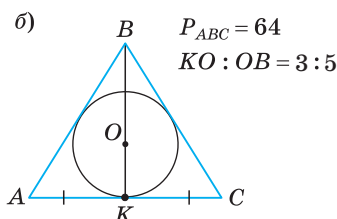
в)

4. Найдите радиус вписанной и радиус описанной ($R = \frac{a^2}{2h}$) окружностей $\triangle ABC$.

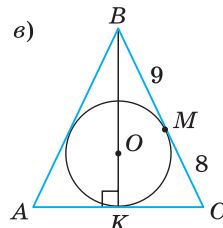
а)



б)

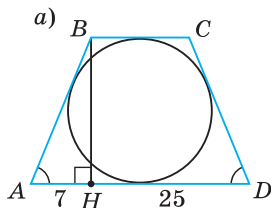


в)

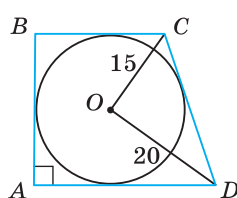


5. Найдите площадь описанной трапеции.

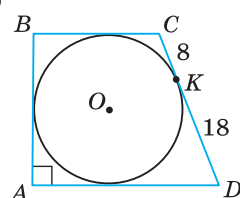
а)



б)



в)



Повторение главы I

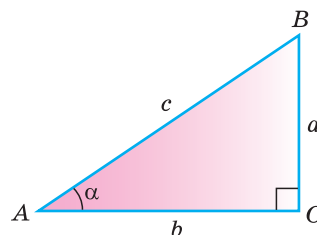
1. Решение прямоугольного треугольника

Дано: a, α .

Найти: b, c .

Решение. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$, $b = a \operatorname{ctg} \alpha$;

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$



2. Значения тригонометрических функций углов 30° , 60° , 45°

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

3. Тригонометрические формулы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

4. Нахождение значений тригонометрических функций тупого угла

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Примеры. $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

5. Формулы площади треугольника и площади параллелограмма

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma, \quad S_{\text{пар}} = ab \sin \alpha.$$

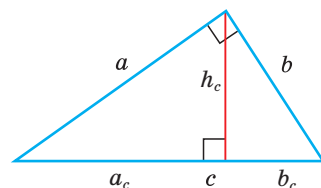
6. Среднее геометрическое в прямоугольном треугольнике

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c},$$

$$a = \sqrt{c \cdot a_c},$$

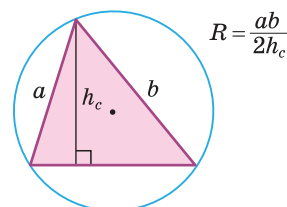
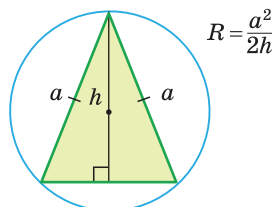
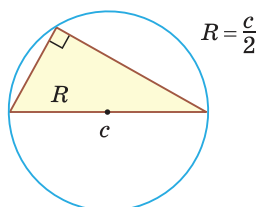
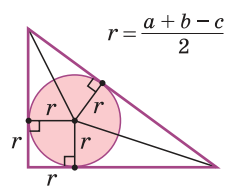
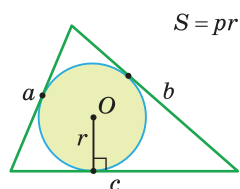
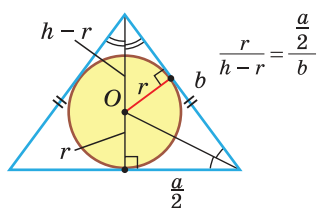
$$b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

$$h_c = \frac{ab}{c}, \quad a_c = \frac{a^2}{c}, \quad b_c = \frac{b^2}{c}.$$



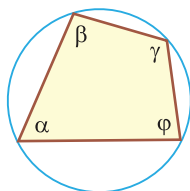
Повторение главы II

1. Нахождение радиуса описанной окружности треугольника

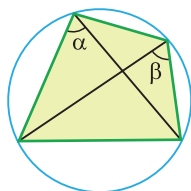
2. Нахождение радиуса r вписанной окружности треугольника

3. Вписанный четырехугольник и его описанная окружность

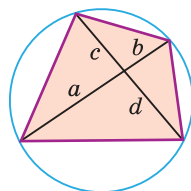
$$\alpha + \gamma = \beta + \varphi = 180^\circ$$



$$\alpha = \beta$$

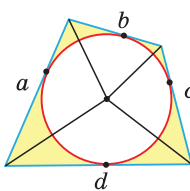


$$ab = cd$$

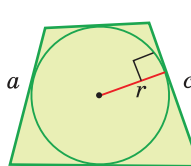


4. Описанный четырехугольник. Равнобедренная описанная трапеция

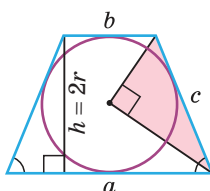
$$a + c = b + d$$



$$S = (a + c)r = pr$$

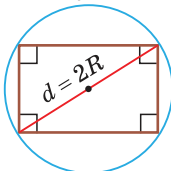


$$S = ch \quad h = \sqrt{ab}$$

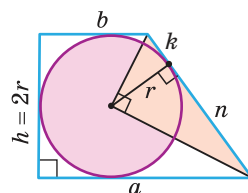
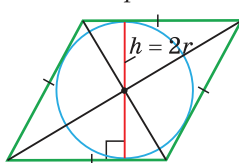


5. Параллелограмм и окружность. Прямоугольная описанная трапеция

прямоугольник



ромб

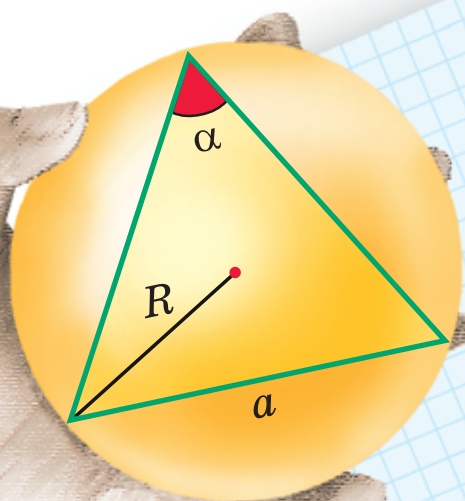


Глава III

Теорема синусов, теорема косинусов

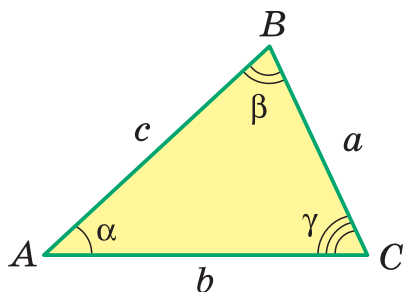
В этой главе вы узнаете:

- Что утверждают теорема синусов и теорема косинусов
- Как найти величины углов треугольника, зная длины всех его сторон
- Формулу Герона о площади треугольника



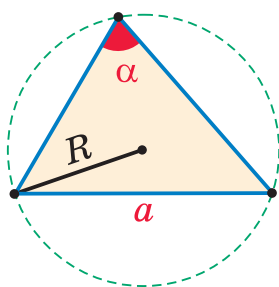
$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

Теорема синусов и теорема косинусов



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

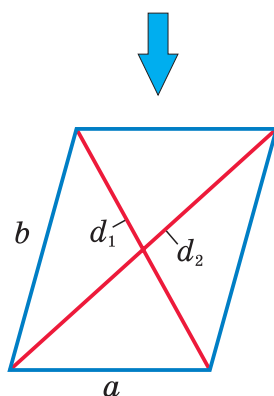
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

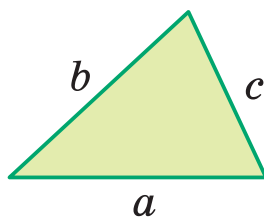
R



Свойство диагоналей
параллелограмма

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

**Формула
Герона**



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

§ 12. Теорема синусов

Вы уже знаете, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла — большая сторона. Пусть a, b, c — стороны, α, β, γ — противолежащие им углы треугольника ABC соответственно (рис. 151). Если сторона a — большая, b — средняя, c — меньшая, то угол α — больший, β — средний, γ — меньший. Установим точную связь между длиной стороны треугольника и величиной противолежащего ей угла.

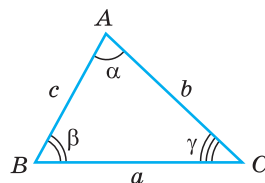


Рис. 151

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу окружности, описанной около треугольника, т. е.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC , $BC = a$, $\angle A = \alpha$, R — радиус его описанной окружности. Угол α может быть острым, тупым или прямым. Рассмотрим эти случаи отдельно.

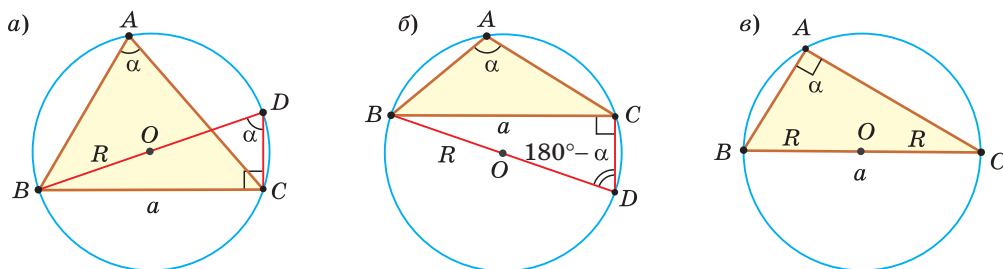


Рис. 152

1) Угол α острый (рис. 152, а). Проведя диаметр BD и отрезок DC , получим прямоугольный треугольник BCD , в котором $\angle BCD = 90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр. Заметим, что $\angle D = \angle A = \alpha$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC . Из прямоугольного треугольника BCD находим $\sin D = \frac{BC}{BD}$, т. е. $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$, откуда $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

2) Угол α тупой (рис. 152, б). Проведем диаметр BD и отрезок DC . В четырехугольнике $ABDC$ по свойству вписанного четырехугольника $\angle D = 180^\circ - \alpha$. Из прямоугольного треугольника BCD ($\angle BCD = 90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр) $\sin D = \frac{BC}{BD}$, $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{a}{2R}$.

Поскольку $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, то $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$, откуда $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

3) Для $\alpha = 90^\circ$ справедливость равенства $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ докажите самостоятельно.

В силу доказанного $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$, $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, откуда $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$. Теорема доказана.

Теорема синусов дает возможность решать широкий круг задач.

Так, пропорция $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ позволяет решить две следующие задачи:

- зная две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из них, найти синус угла, противолежащего другой стороне;
- зная два угла треугольника и сторону, противолежащую одному из этих углов, найти сторону, противолежащую другому углу.

С помощью формулы $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ можно решить еще три задачи (рис. 153):

- зная сторону треугольника и противолежащий ей угол, найти радиус окружности, описанной около треугольника;
- зная угол треугольника и радиус описанной окружности, найти сторону треугольника, противолежащую данному углу;
- зная сторону треугольника и радиус его описанной окружности, найти синус угла, противолежащего данной стороне.

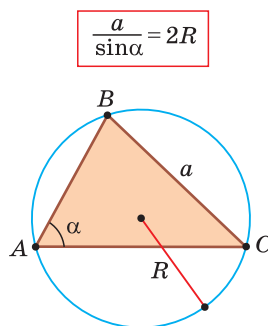


Рис. 153

А теперь выполните Тест 1 и Тест 2.

Тест 1

Найдите сторону x треугольника на рисунке, используя теорему синусов: $\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{7}{\sin 30^\circ}$.

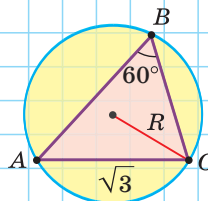
а) 14; б) 21; в) $7\sqrt{2}$; г) 10.



Тест 2

Найдите величину радиуса R на рисунке, используя формулу $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

а) 1; б) 2; в) $\sqrt{3}$; г) 3.



Повторение

$$1) \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

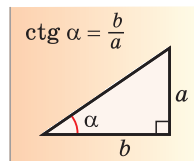
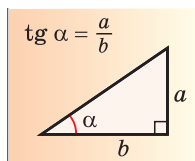
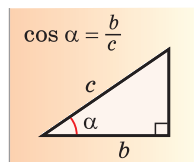
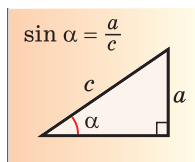
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$$

$$2) \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$3) \quad \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

$$4) \quad \sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

**Задания к § 12****РЕШАЕМ ВМЕСТЕ****ключевые задачи**

Задача 1. В остроугольном треугольнике известны стороны $a = 8$, $b = 9$ и угол $\alpha = 60^\circ$. Найти два других угла β и γ , округлив их значения до 1° , и третью сторону треугольника, округлив ее длину до $0,1$.

Решение. По теореме синусов $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, откуда $\frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{9}{\sin \beta}$, $\sin \beta = \frac{9 \cdot \sin 60^\circ}{8} \approx \frac{9 \cdot 0,8660}{8} \approx 0,9743$. При помощи калькулятора (таблиц) находим $\beta \approx 77^\circ$. Тогда $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 43^\circ$. По теореме синусов $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$, откуда $\frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 43^\circ}$, $c = \frac{8 \cdot \sin 43^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 8 \cdot \frac{0,6820}{0,8660} \approx 6,3$.

Ответ: $\beta \approx 77^\circ$, $\gamma \approx 43^\circ$, $c \approx 6,3$.

Замечание. Если бы по условию треугольник был тупоугольным с тупым углом β , то, зная $\sin \beta \approx 0,9743$, вначале мы бы нашли острый угол $\beta_1 \approx 77^\circ$. А затем, используя формулу $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, получили бы, что $\beta = 180^\circ - \beta_1 \approx 180^\circ - 77^\circ \approx 103^\circ$.

Задача 2. Доказать справедливость формулы площади треугольника

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad \text{где } a, b, c \text{ — его стороны, } R \text{ — радиус описанной окружности.}$$

Доказательство. Воспользуемся известной формулой площади треугольника: $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$. По теореме синусов $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, откуда $\sin \gamma = \frac{c}{2R}$. Тогда $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Выведенная формула позволяет найти радиус описанной окружности треугольника: $R = \frac{abc}{4S}$.

Задача 3. Найти радиус R окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC с основанием $AC = 10$ и боковой стороной $BC = 13$ (рис. 154).

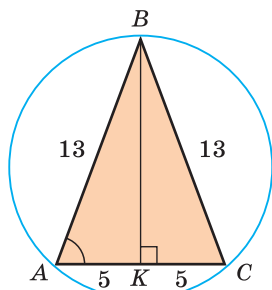


Рис. 154

Решение. Способ 1. Из формулы $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ следует, что $\frac{BC}{\sin A} = 2R$. Найдем $\sin A$. Для этого в треугольнике ABC проведем высоту BK , которая будет и медианой, откуда $AK = \frac{1}{2}AC = 5$. Из $\triangle ABK$ по теореме Пифагора $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, откуда $\sin A = \frac{BK}{AB} = \frac{12}{13}$.

$$\text{Тогда } 2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{13}{\frac{12}{13}} = \frac{169}{12}, \quad R = \frac{169}{2 \cdot 12} = 7 \frac{1}{24}.$$

Способ 2. Используем формулу $S = \frac{abc}{4R}$, из которой $R = \frac{abc}{4S}$. Так как $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$, то $R = \frac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60} = \frac{169}{24} = 7 \frac{1}{24}$.

Ответ: $7 \frac{1}{24}$.

 **Замечание.** Напомним, что в главе II мы находили радиус R описанной окружности равнобедренного треугольника, проводя серединные перпендикуляры к его сторонам и используя подобие полученных прямоугольных треугольников. Также мы могли использовать формулу $R = \frac{b^2}{2h_a}$, где b — боковая сторона, h_a — высота, проведенная к основанию a . Заменив S в формуле $R = \frac{abc}{4S}$ на $\frac{1}{2}ch_c$, получим $R = \frac{ab}{2h_c}$ — формулу радиуса описанной окружности для произвольного треугольника. Итак, мы имеем четыре формулы для нахождения радиуса R описанной окружности треугольника:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R,$$

$$R = \frac{abc}{4S},$$

$$R = \frac{ab}{2h_c},$$

$$R = \frac{b^2}{2h_a}.$$

Произвольный треугольник

Равнобедренный
треугольник

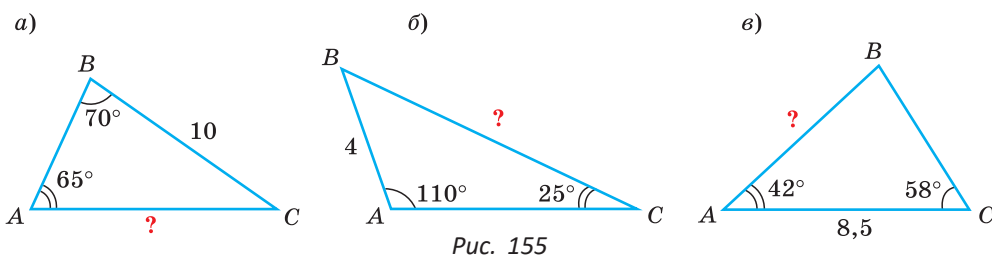


РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

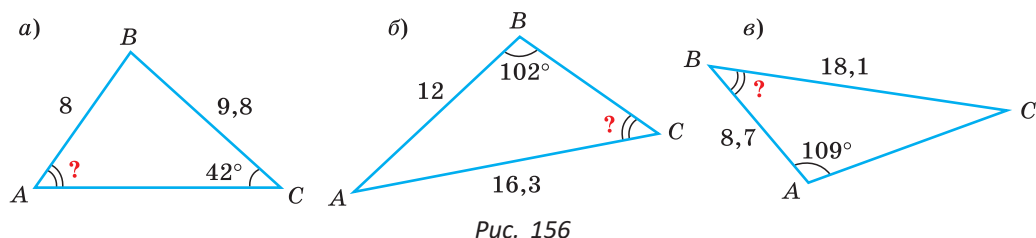
- 173.** Перенесите в тетрадь и заполните таблицу, в которой α и β — углы, a и b — соответствующие этим углам стороны треугольника. Для нахождения неизвестных значений используйте пропорцию $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$.

a	4		$\sqrt{6}$
b		6	2
α	30°	45°	120°
β	45°	60°	

- 174.** По данным на рисунках 155, а)–в) вычислите длину стороны треугольника, обозначенной знаком вопроса. При расчетах используйте калькулятор (таблицы), результат округлите до 0,1.



- 175.** По данным на рисунках 156, а)–в) вычислите при помощи калькулятора (таблиц) угол треугольника, обозначенный знаком вопроса. Ответ округлите до 1° .



- 176.** Сделайте схематический чертеж треугольника ABC . При помощи теоремы синусов найдите длину стороны b (округлив ответ до 0,1), если:

- а) $a = 4$, $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 70^\circ$;
 б) $a = 6,5$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

- 177.** Сделайте схематический чертеж треугольника ABC . Найдите величину угла B треугольника ABC (округлив ответ до 1°), если:

- а) $BC = 6$, $AC = 3$, $\angle A = 62^\circ$;
 б) $AB = 4,6$, $AC = 4,3$, $\angle C = 26^\circ$.

178. В треугольнике ABC известно: $\sin A = 0,8$, $\sin B = 0,6$, $AC + BC = 28$ см. Найдите длины сторон AC и BC .

179. По данным на рисунках 157, а)–в) вычислите:

а) $\angle B$; б) AB ; в) BC .

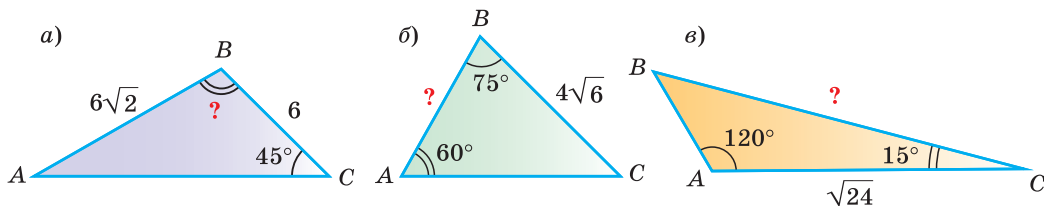


Рис. 157

180. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A$ острый, $\sin \angle DAC = \frac{1}{2}$, $\sin \angle BAC = \frac{3}{4}$. Найдите периметр параллелограмма, если $AB = 6$ см.

181. По данным на рисунках 158, а)–в) найдите радиус R окружности, описанной около треугольника ABC .

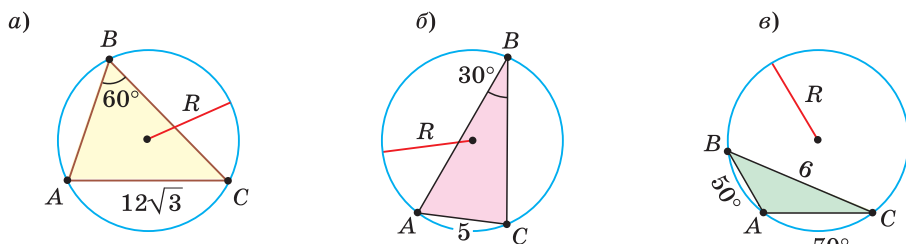


Рис. 158

182. а) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 159, а), если $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $BC = 12$ см.

б) Найдите длину стороны AB треугольника ABC (рис. 159, б), если $\angle C = 60^\circ$, а радиус его описанной окружности $R = 2\sqrt{3}$ см.

в) Найдите величину острого угла B треугольника ABC (рис. 159, в), если $AC = \sqrt{8}$ см, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 2 см.

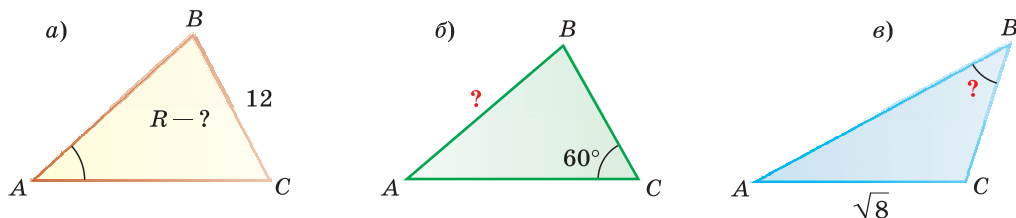


Рис. 159

- 183.** Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O и диаметром, равным $16\sqrt{2}$ см. Найдите длину стороны AB треугольника ABC , если $\angle BOC = 160^\circ$, $\angle ABC - \angle ACB = 10^\circ$ и $\angle A$ — острый.
- 184.** По данным на рисунках 160, а)–в) вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

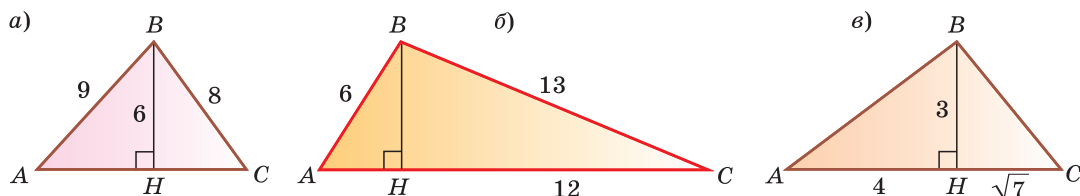


Рис. 160

- 185.** а) В треугольнике ABC $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 105^\circ$, $BC = 6$ см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
 б) Треугольник ABC равнобедренный, основание $AC = 8$ см, угол при основании равен 15° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
 в) Докажите, что если один из углов треугольника равен 30° или 150° , то длина стороны треугольника, противолежащей этому углу, равна радиусу окружности, описанной около треугольника.
- 186.** Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника со сторонами:
 а) 10 см, 10 см, 12 см;
 б) $2\sqrt{5}$ см, $2\sqrt{5}$ см, 8 см.
- 187.** В треугольнике дана сторона a и углы β , γ . Используя теорему синусов, найдите стороны b и c .
- 188.** Используя формулу $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной a .
- 189.** В прямоугольнике $ABCD$ $BC = 8$ см, $AB = 6$ см, M — середина стороны AD . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ACM .
- 190.** а) Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , диагональ $AC = 8\sqrt{3}$ см. Луч AC является биссектрисой угла BAD , $\angle ACB = 30^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.
 б) Основания BC и AD вписанной трапеции $ABCD$ равны 11 см и 21 см соответственно, боковая сторона AB равна 13 см. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

- 191.** а) Точка M лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC . Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников ABM и CBM равны между собой и не зависят от положения точки M .
- б) Дан треугольник ABC . На его стороне AC взята точка M . Докажите, что отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM , не зависит от положения точки M .
- 192.** Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если:
- а) $A(1; 1)$, $B(4; 4)$, $C(4; 0)$;
- б) $A(-2; 0)$, $B(6; 6)$, $C(6; -4)$.
- 193.** Докажите, что радиус окружности, проходящей через ортоцентр непрямоугольного треугольника и две любые его вершины, равен радиусу окружности, описанной около треугольника.
- 194.** Дан остроугольный треугольник ABC , где $AB < BC$; BM — медиана, BK — биссектриса треугольника. Докажите, используя теорему синусов, что $AK < AM$.
- 195.** Докажите, что радиус описанной окружности треугольника больше либо равен половине любой стороны треугольника.

Моделирование

Задание 1.

- 1) Составьте алгоритм нахождения при помощи теоремы синусов расстояния от точки A до недоступной точки C (рис. 161), если известно, что $AB = c$, $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$.
- 2) Выразите $AC = b$ через c , α и β .
- 3) Найдите AC при условии, что $AB = 30$ м, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 80^\circ$. Ответ округлите до 1 м.

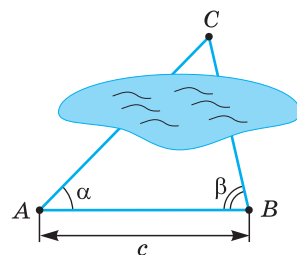


Рис. 161

Задание 2.

- 1) Глядя на рисунок 162, составьте математическую модель нахождения высоты h башни, длин l_1 и l_2 тросов, идущих от вершины башни к земле. Расстояние от наблюдателя до башни измерить рулеткой нельзя, так как башню окружает ров, но можно измерить углы α и β и расстояние a .
- 2) Найдите высоту башни и длины тросов при условии, что $a = 4$ м, $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 48^\circ$. Ответ округлите до 1 м.

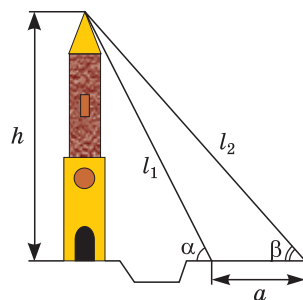


Рис. 162



Рис. 163

На рисунке 164 изображен один из символов Беларуси — Каменецкая башня, расположенная в Брестской области (г. Каменец). Это наиболее хорошо сохранившаяся оборонительная башня, построенная в 1276—1288 гг. по приказу князя Владимира Васильковича. Ее высота составляет 29,4 м. С 1960 г. башня является филиалом Брестского областного краеведческого музея.



Рис. 164

§ 13. Теорема косинусов

Теорема косинусов позволяет выразить длину любой стороны треугольника через длины двух других его сторон и косинус угла между ними (например, длину стороны a треугольника ABC (рис. 165) через длины сторон b и c и $\cos \alpha$). Теорему косинусов можно назвать самой «работающей» в геометрии. Она имеет многочисленные следствия, которые часто используются при решении задач.

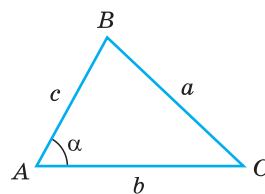


Рис. 165

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними, т. е.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

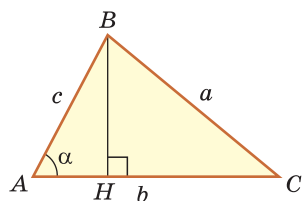


Рис. 166

Доказательство. Докажем теорему для случая, когда в треугольнике ABC угол A и угол C острые (рис. 166). Проведем высоту BH к стороне AC . Из $\triangle ABH$ находим $BH = c \sin \alpha$, $AH = c \cos \alpha$, откуда $HC = b - c \cos \alpha$.

Из $\triangle BHC$ по теореме Пифагора $a^2 = HC^2 + BH^2 = (b - c \cos \alpha)^2 + (c \sin \alpha)^2 = b^2 - 2bc \cos \alpha + c^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$.

По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Тогда $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Справедливость теоремы для случаев, когда $\angle A$ или $\angle C$ тупой или прямой, докажите самостоятельно. Теорема доказана.

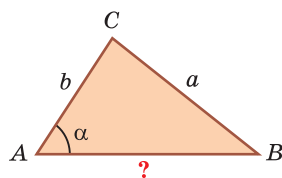
Для сторон b и c теорема косинусов запишется так:

$$\begin{aligned}b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.\end{aligned}$$

Замечание. Так как при $\gamma = 90^\circ$ по теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 90^\circ = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$, то теорема Пифагора — частный случай теоремы косинусов.

С помощью теоремы косинусов можно решить следующие задачи:

- зная две стороны и угол между ними, найти третью сторону треугольника;
- зная две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон, найти третью сторону (рис. 167) (в этом случае возможны два решения).



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Рис. 167

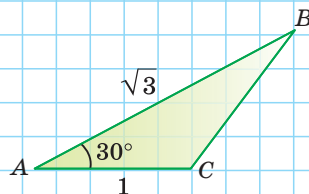
А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

При помощи теоремы косинусов найдите BC :

1) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = \dots$

2) $BC = \dots$



Рассмотрим следствия из теоремы косинусов, которые дают возможность решить еще целый ряд задач.

Следствие 1.

Теорема косинусов позволяет, зная три стороны треугольника, найти его углы (косинусы углов). Из равенства $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ следует формула

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Для углов β и γ получим:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Пример 1. В треугольнике ABC стороны $AB = 8$, $BC = 5$, $AC = 7$. Найдём $\angle B$ (рис. 168).

По теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B,$$

$$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos B,$$

$$49 = 64 + 25 - 80 \cos B, \cos B = \frac{1}{2}, \angle B = 60^\circ.$$

Используя записанную выше формулу, можно сра-

$$\text{зу получить: } \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2}.$$

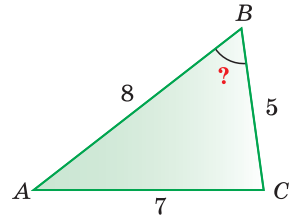


Рис. 168

Следствие 2.

С помощью теоремы косинусов можно по трем сторонам определить вид треугольника: *остроугольный*, *прямоугольный* или *тупоугольный*.

Так, из формулы $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ с учетом того, что $2bc > 0$, следует:

- 1) если $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, то $\cos \alpha > 0$ и угол α острый;
- 2) если $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, то $\cos \alpha < 0$ и угол α тупой;
- 3) если $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, то $\cos \alpha = 0$ и угол α прямой.

При определении вида треугольника достаточно найти знак косинуса угла, лежащего против большей стороны, поскольку только больший угол треугольника может быть прямым или тупым.

Пример 2. Выясним, каким является треугольник со сторонами $a = 2$, $b = 3$ и $c = 4$. Для этого найдем знак косинуса угла γ , лежащего против большей стороны c . Так как $a^2 + b^2 - c^2 = 2^2 + 3^2 - 4^2 = 4 + 9 - 16 < 0$, то $\cos \gamma < 0$, угол γ тупой и данный треугольник тупоугольный.

Сформулируем правило определения вида треугольника (относительно углов). *Треугольник является:*

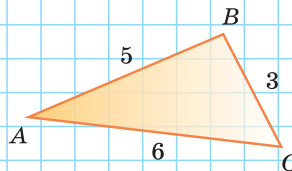
- 1) *остроугольным*, если квадрат его большей стороны меньше суммы квадратов двух других его сторон: $a^2 < b^2 + c^2$;
- 2) *тупоугольным*, если квадрат его большей стороны больше суммы квадратов двух других его сторон: $a^2 > b^2 + c^2$;
- 3) *прямоугольным*, если квадрат его большей стороны равен сумме квадратов двух других его сторон: $a^2 = b^2 + c^2$.

А теперь выполните **Тест 2**.

Тест 2

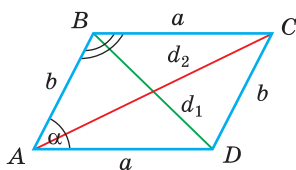
Выясните, каким является треугольник ABC :

- а) остроугольным;
- б) тупоугольным;
- в) прямоугольным.



Следствие 3.

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.



$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Рис. 169

Доказательство. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AD = a$, $AB = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$ и $\angle A = \alpha$ — острый, откуда $\angle B = 180^\circ - \alpha$ — тупой (рис. 169). По теореме косинусов из $\triangle ABD$:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha. \quad (1)$$

Из $\triangle ABC$: $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha)$. Поскольку $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, то

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha. \quad (2)$$

Сложив почленно равенство (1) и равенство (2), получим $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$, что и требовалось доказать.

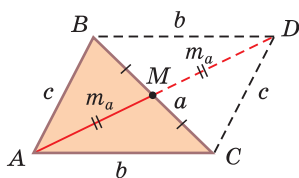
Для прямоугольного треугольника докажите следствие 3 самостоятельно.

Данная формула дает возможность:

- зная две соседние стороны и одну из диагоналей параллелограмма, найти другую диагональ;
- зная две диагонали и одну из сторон параллелограмма, найти соседнюю с ней сторону.

Следствие 4.

Медиану m_a треугольника со сторонами a , b и c можно найти по формуле $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.



$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Рис. 170

Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABC$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AM = m_a$ — медиана треугольника (рис. 170). Продлим медиану AM за точку M на ее длину: $MD = AM = m_a$. Проведем отрезки BD и DC . Так как у четырехугольника $ABDC$ диагонали AD и BC точкой пересечения делятся пополам, то он — параллелограмм. По свойству диагоналей параллелограмма $AD^2 + BC^2 = 2AC^2 + 2AB^2$, $(2m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$, $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Отсюда следует, что $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Утверждение доказано.

Аналогично: $m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Формула медианы позволяет:

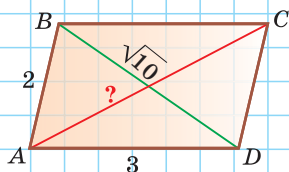
- зная три стороны треугольника, найти любую из его медиан;
- зная две стороны и медиану, проведенную к третьей стороне, найти третью сторону;
- зная три медианы, найти любую из сторон треугольника.

А теперь выполните **Тест 3** и **Тест 4**.

Тест 3

Найдите диагональ AC параллелограмма, зная, что $BD = \sqrt{10}$.

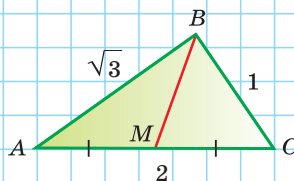
а) 4; б) 5; в) 6; г) $\sqrt{12}$.



Тест 4

Найдите медиану BM треугольника ABC по формуле медианы.

а) 2; б) 1,5; в) 1; г) $\sqrt{2}$.



Задания к § 13

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. а) Дан треугольник ABC , $a = 5$, $b = 3$, $\gamma = 120^\circ$. Найти сторону c .
б) Дан треугольник ABC , $a = 7$, $c = 8$, $\alpha = 60^\circ$. Найти сторону b .

Решение. а) По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 25 + 9 - 2 \cdot 15 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$. Отсюда $c = \sqrt{49} = 7$.

б) Пусть $b = x$. По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$, то есть $7^2 = x^2 + 8^2 - 2 \cdot x \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$, $49 = x^2 + 64 - 2 \cdot x \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$, $x^2 - 8x + 15 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Отсюда $b = 3$ или $b = 5$, так как для наборов длин отрезков 7, 3, 8 и 7, 5, 8 выполняется неравенство треугольника.

Ответ: а) 7; б) 3 или 5.

Задача 2. Две стороны треугольника равны 6 и 10, его площадь — $15\sqrt{3}$. Найти третью сторону треугольника при условии, что противолежащий ей угол — тупой.

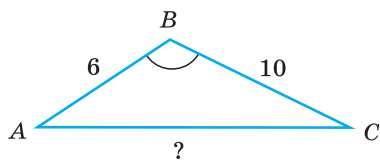


Рис. 171

Решение. Пусть в треугольнике ABC стороны $AB = 6$, $BC = 10$ и $S_{ABC} = 15\sqrt{3}$ (рис. 171).

Поскольку $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B$, то $15\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin B$, откуда $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и по условию

$\angle B$ — тупой, то $\angle B = 120^\circ$, $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$. Для нахождения стороны AC применим теорему косинусов: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$, $AC^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 196$, $AC = 14$.

Ответ: 14.

Задача 3. Найти площадь треугольника, две стороны которого равны 6 и 8, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 5.

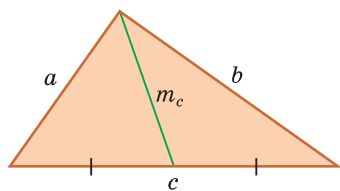


Рис. 172

Решение. Обозначим стороны треугольника a , b , c . Пусть $a = 6$, $b = 8$, $m_c = 5$ — медиана (рис. 172). По формуле медианы $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, откуда $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, $4 \cdot 25 = 72 + 128 - c^2$, $c^2 = 100$, $c = 10$. По обратной теореме Пифагора данный треугольник со сторонами 6, 8 и 10 — прямоугольный, его площадь равна половине произведения катетов: $S_{\triangle} = \frac{ab}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

Ответ: 24.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

196. Используя теорему косинусов, найдите сторону x (рис. 173, а, б).

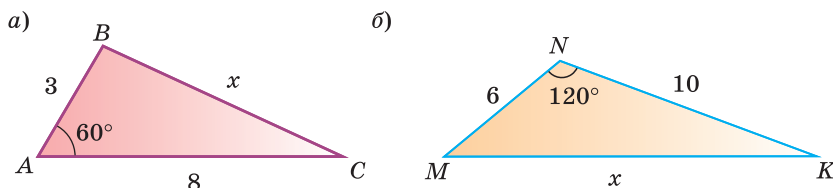


Рис. 173

197. Используя калькулятор (таблицы), найдите сторону c треугольника, округлив результат до 0,1 см, если:

- а) $a = 10$ см, $b = 8$ см, $\gamma = 50^\circ$;
б) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $\gamma = 132^\circ$.

198. В треугольнике MNK стороны $MK = 4$ см, $NK = 6$ см, $\cos K = \frac{2}{3}$. Найдите длину стороны MN .

199. В треугольнике ABC ($\angle C$ — острый) стороны $AC = 5$ см, $BC = 7$ см, $\sin C = 0,6$. Найдите длину стороны AB .

- 200.** а) Сторона равностороннего треугольника ABC равна 10 см. На стороне BC взята точка M так, что $BM : MC = 2 : 3$. Найдите длину отрезка AM .
 б) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка M так, что $AM : MB = 2 : 1$. Найдите длину отрезка CM , если $AB = 9$ см, $BC = 6$ см.
- 201.** Диагонали параллелограмма равны 8 см и 14 см, косинус острого угла между ними равен $\frac{2}{7}$. Найдите периметр параллелограмма.
- 202.** В треугольнике ABC проведены медианы $AM = 9$ см и $BK = 6$ см, которые пересекаются в точке E , $\angle MEK = 120^\circ$. Найдите сторону AB треугольника ABC .
- 203.** а) В треугольнике ABC сторона $AC = 8\sqrt{3}$ см, $\angle C = 30^\circ$, $BC - AB = 4$ см. Вычислите длины сторон AB и BC .
 б) В треугольнике ABC сторона $BC = 2\sqrt{3}$ см, $\angle A = 60^\circ$, $AB : AC = 1 : 2$. Вычислите длины сторон AB и AC .
- 204.** В треугольнике ABC стороны $AB = 5$ см, $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45^\circ$. Найдите наименьшее возможное значение длины стороны AC .
- 205.** В треугольник ABC вписана окружность с центром O . Найдите длину стороны AB , если:
- а) $\angle C = 90^\circ$, $OA = \sqrt{2}$, $OB = 3$ (рис. 174, а);
 б) $\angle AOB = 150^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$ (рис. 174, б).

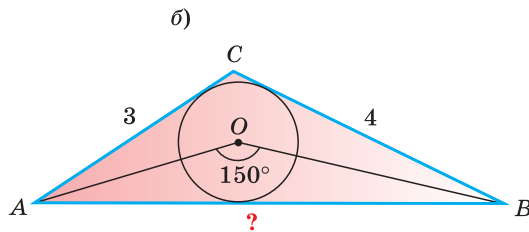
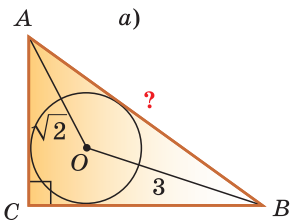


Рис. 174

- 206.** а) В треугольнике ABC стороны $AB = 2$ см, $BC = \sqrt{7}$ см, $AC = 3$ см. Найдите градусную меру угла A .
 б) В треугольнике ABC стороны $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $AC = 7$ см. Найдите градусную меру угла B .
- 207.** а) Найдите косинус меньшего угла треугольника со сторонами, равными 2 см, 3 см и 4 см.
 б) Найдите косинус большего угла треугольника со сторонами, равными 5 см, 6 см, 7 см.

208. Выясните, каким является треугольник (остроугольным, прямоугольным или тупоугольным), если его стороны равны:

- а) 10, 8 и 7;
- б) 20, 21 и 29;
- в) 5, 6 и 8.

209. а) Периметр треугольника ABC равен 18. Вычислите его площадь по данным на рисунке 175.

б) Угол ABC параллелограмма $ABCD$ равен 120° . Вычислите периметр параллелограмма по данным на рисунке 176.

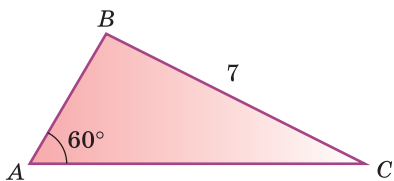


Рис. 175

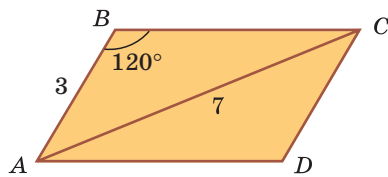


Рис. 176

210. а) В параллелограмме $ABCD$ стороны $AB = 3$ см, $AD = 4$ см, диагональ $AC = 6$ см. Найдите длину диагонали BD .

б) В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = 2\sqrt{6}$ см, диагонали $AC = 4$ см, $BD = 8$ см. Найдите длину стороны AD .

211. а) В параллелограмме стороны равны 7 см и 9 см, а диагонали относятся как 4 : 7. Найдите диагонали параллелограмма.

б) В параллелограмме одна из диагоналей на 2 см больше другой, а стороны равны 11 см и 13 см. Найдите диагонали параллелограмма.

212. а) В равнобедренном треугольнике ABC стороны $AB = BC = 4$ см, $AM = 3$ см — медиана (рис. 177). Найдите основание AC треугольника.

б) В треугольнике ABC стороны $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 8$ см. На сторонах BC и AC взяты точки F и K соответственно такие, что $BF = 2FC$, $AK = KC$ (рис. 178). Найдите длину отрезка KF .

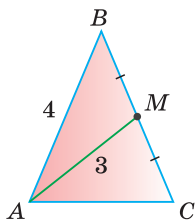


Рис. 177

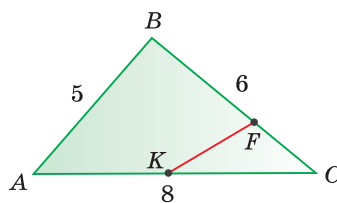


Рис. 178

- 213.** Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AC в точке K . Найдите периметр треугольника ABC , если $AK = 5$ см, $KC = 10$ см, $\angle A = 60^\circ$.
- 214.** Найдите длину медианы треугольника со сторонами 7 см, 11 см, 12 см, проведенную из вершины большего угла треугольника.
- 215.** а) В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали $AC = 6$ см, $BD = 9$ см, O — точка пересечения диагоналей, $\cos \angle COD = \frac{1}{4}$. Найдите среднюю линию трапеции.
 б) Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), диагональ AC равна 9 см, $AD - CD = 3$ см, $\cos \angle CAD = \frac{5}{6}$. Найдите периметр трапеции.
- 216.** Две стороны треугольника равны 8 см и 14 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 7 см. Найдите третью сторону треугольника.
- 217.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, $AB = BC = 1$, $CD = 2$, $AD = 3$. Найдите диагональ BD .
- 218.** В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны 2 и 3, а угол между ними равен 60° . Найдите диагонали четырехугольника.
- 219.** В треугольнике ABC $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, $\angle A = \alpha$. Докажите, что с увеличением угла A сторона a увеличивается.
- 220.** Выясните, каким является треугольник с высотами, равными 3, 4 и 5: остроугольным, прямоугольным или тупоугольным.
- 221.** Докажите, что площадь параллелограмма (не являющегося прямоугольником) можно вычислить по формуле $S = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$, где d_1 , d_2 — диагонали ($d_2 > d_1$), α — острый угол параллелограмма.

Реальная геометрия

Задание 1. Объясните, как можно найти расстояние между точками A и B (рис. 179), если известны расстояния от точки M , где находится наблюдатель, до точек A и B и угол AMB . Найдите это расстояние при условии, что $MA = 30$ м, $MB = 20$ м, $\angle AMB = 68^\circ$. Ответ округлите до метров.

(Для самоконтроля. Ответ: искомое число в метрах равно числу дней в феврале високосного года.)

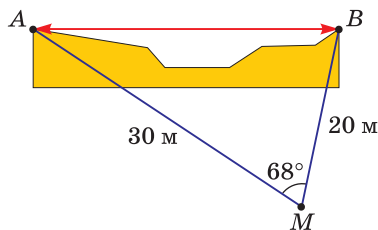


Рис. 179

Задание 2. Из одного населенного пункта выходят две дороги, угол между которыми равен 60° (рис. 180). Одновременно по одной дороге выезжает автомобиль со скоростью 80 км/ч, по другой — автобус со скоростью 50 км/ч. Определите в минутах, через какое время расстояние между автобусом и автомобилем станет равным 7 км.

(Для самоконтроля. Ответ: искомое число равно n , где 1) — Меркурий; 2) — Венера; 3) — Земля; ...; n) — Сатурн.)

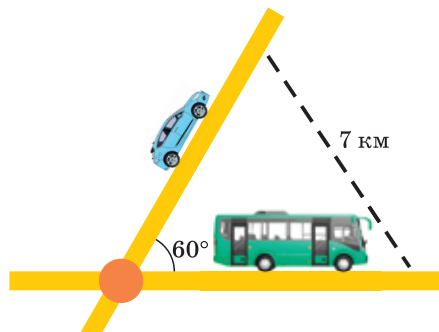


Рис. 180

Задание 3. Определите угол «обстрела» футбольных ворот с 11-метровой отметки (рис. 181). Для этого достаточно измерить шагами расстояния от точки A до точек B и C и ширину ворот на школьном футбольном поле. При решении используйте теорему косинусов.

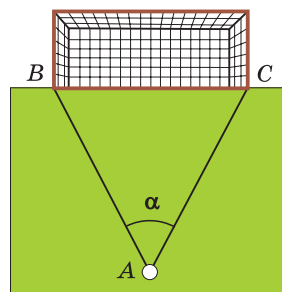


Рис. 181

Интересно знать. На фото изображен фрагмент игры одного из лучших белорусских футбольных клубов БАТЭ. БАТЭ — самый титулованный белорусский профессиональный клуб из города Борисов. Основан в 1996 г.

Ответьте, как расширяется БАТЭ.

Геометрия 3D

Задание. Дана прямая треугольная призма (ее боковые грани — прямоугольники), в основании которой лежит треугольник со сторонами 5 см и 6 см. Косинус угла α между ними равен 0,6 (рис. 182). Большая по площади боковая грань призмы является квадратом.

Найдите:

- площадь боковой поверхности призмы;
- площадь полной поверхности призмы.

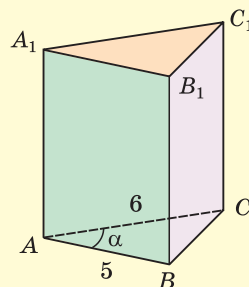


Рис. 182



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Теорему синусов.
2. Основные задачи, которые позволяет решить теорема синусов.
3. Теорему косинусов.
4. Алгоритм нахождения косинуса угла треугольника по трем сторонам.
5. Формулу, связывающую стороны и диагонали параллелограмма.
6. Как по трем сторонам треугольника определить его вид: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный.
7. Формулу медианы треугольника.



Умеем

1. Доказывать теорему синусов.
2. По двум сторонам и углу, противолежащему одной из этих сторон, находить угол, противолежащий другой стороне.
3. По двум углам и стороне, противолежащей одному из углов, находить сторону, противолежащую другому углу.
4. По стороне треугольника и противолежащему ей углу находить радиус описанной окружности.
5. Доказывать теорему косинусов.
6. Находить косинус угла треугольника, зная три его стороны.
7. Находить диагональ параллелограмма, зная две его соседние стороны и другую диагональ.
8. Находить медиану треугольника, зная три его стороны.



§ 14. Формула Герона.

Решение треугольников

1. Формула Герона

Мы знаем, как найти площадь треугольника по основанию и высоте, проведенной к этому основанию: $S = \frac{1}{2}ah$, а также по двум сторонам и углу между ними: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Теперь мы выведем формулу нахождения площади треугольника по трем сторонам.

Теорема (формула Герона).

Площадь треугольника со сторонами a , b и c можно найти по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

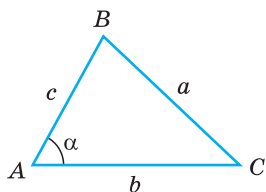


Рис. 183

Доказательство. $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ (рис. 183). Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ следует, что $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$. Для $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ синус положительный. Поэтому $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.

Из теоремы косинусов $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

$$\begin{aligned} \text{откуда } \cos^2\alpha &= \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2. \quad \text{Тогда } S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2}bc \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)\left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)} = bc \cdot \frac{1}{bc} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } \frac{b+c-a}{2} &= \frac{b+c+a-2a}{2} = p-a, \quad \frac{a-b+c}{2} = \frac{a+c+b-2b}{2} = p-b, \quad \frac{a+b-c}{2} = \\ &= \frac{a+b+c-2c}{2} = p-c, \quad \text{то } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad \text{Теорема доказана.} \end{aligned}$$

2. Решение треугольников

Решением треугольника называется нахождение его неизвестных сторон и углов (иногда других элементов) по данным, определяющим треугольник. Такая задача часто встречается на практике, например в геодезии, астрономии, строительстве, навигации.

Рассмотрим алгоритмы решения трех задач.

Задача А (решение треугольника по двум сторонам и углу между ними).

Дано: a, b, γ (рис. 184).

Найти: c, α, β .

Решение.

1) По теореме косинусов $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$.

2) По следствию из теоремы косинусов $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

3) Угол α находим при помощи калькулятора или таблиц.

4) Угол $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$.

Замечание. Нахождение угла α по теореме синусов $\left(\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}, \sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{c}\right)$ требует выяснения того, острый или тупой угол α .

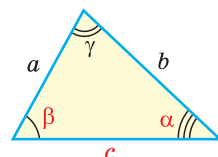


Рис. 184

Задача В (решение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам).

Дано: a, β, γ (рис. 185).

Найти: α, b, c .

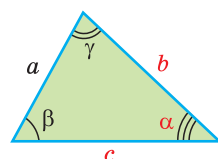


Рис. 185

Решение.

1) Угол $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$.

2) По теореме синусов $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ ($\sin \alpha$ и $\sin \beta$ находим при помощи калькулятора или таблиц).

3) Сторону c можно найти с помощью теоремы косинусов или теоремы синусов: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$ или $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$, $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ ($\cos \gamma$ и $\sin \gamma$ находим при помощи калькулятора или таблиц).

Задача С (решение треугольника по трем сторонам).

Дано: a, b, c (рис. 186).

Найти: α, β, γ и радиус R описанной окружности.

Решение.

1) По следствию из теоремы косинусов

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

2) Зная $\cos \alpha$, угол α находим при помощи калькулятора или таблиц.

3) Аналогично находим угол β .

4) Угол $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$.

5) Радиус R описанной окружности треугольника можно найти по формуле $R = \frac{abc}{4S}$, где $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

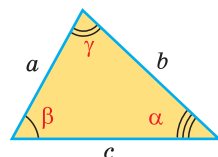


Рис. 186

 **Замечание.** Вторым способом нахождения R будет нахождение косинуса любого угла при помощи теоремы косинусов $\left(\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$, затем нахождение по косинусу угла его синуса $\left(\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \right)$ и, наконец, использование теоремы синусов $\left(\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \right)$ для нахождения R .



Задания к § 14

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. Найти площадь S и радиус R описанной окружности треугольника со сторонами 9, 12 и 15.

Решение. Способ 1. Воспользуемся формулой Герона. Обозначим $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$. Получим: $p = \frac{9+12+15}{2} = 18$, $p - a = 18 - 9 = 9$, $p - b =$

$= 18 - 12 = 6$, $p - c = 18 - 15 = 3$. Тогда $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = 9 \cdot 6 = 54$. Радиус R описанной окружности найдем из формулы $S = \frac{abc}{4R}$. Имеем: $R = \frac{abc}{4S} = \frac{9 \cdot 12 \cdot 15}{4 \cdot 54} = 7,5$.

Способ 2. Так как $9^2 + 12^2 = 15^2$, поскольку $(3 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 4)^2 = (3 \cdot 5)^2$, то треугольник — прямоугольный по обратной теореме Пифагора. Его площадь равна половине произведения катетов: $S = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$, а радиус описанной окружности равен половине гипотенузы: $R = \frac{15}{2} = 7,5$.

Ответ: $S = 54$, $R = 7,5$.

Задача 2. Найти площадь трапеции с основаниями, равными 5 и 14, и боковыми сторонами, равными 10 и 17.

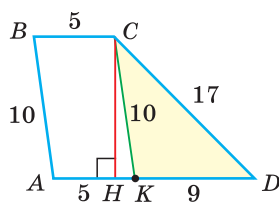


Рис. 187

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ основания $AD = 14$ и $BC = 5$, боковые стороны $AB = 10$ и $CD = 17$. Проведем $CK \parallel AB$ (рис. 187). Так как $ABCK$ — параллелограмм, то $CK = AB = 10$, $AK = BC = 5$, откуда $KD = AD - AK = 9$. Найдем высоту CH треугольника KCD , которая равна высоте трапеции. Площадь треугольника KCD найдем по формуле Герона, обозначив его стороны $a = 10$, $b = 17$, $c = 9$. Получим:

$$p = \frac{10+17+9}{2} = 18, \quad p - a = 18 - 10 = 8,$$

$$p - b = 18 - 17 = 1, \quad p - c = 18 - 9 = 9,$$

$$S_{KCD} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 9} = 36. \quad \text{Так как } S_{KCD} = \frac{1}{2} KD \cdot CH, \quad \text{то } \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot CH = 36,$$

$$CH = 8. \quad \text{Площадь трапеции } S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot CH = \frac{14+5}{2} \cdot 8 = 76.$$

Ответ: 76.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

222. Стороны треугольника $a = 20$, $b = 13$, $c = 11$. Найдите:

а) полупериметр треугольника $p = \frac{a+b+c}{2}$;

б) значения выражений $p - a$, $p - b$, $p - c$;

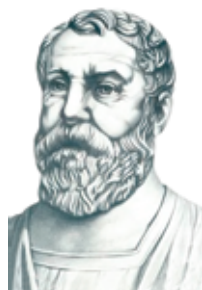
в) площадь треугольника по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

- 223.** При помощи формулы Герона найдите площадь треугольника со сторонами:
а) 7 см, 15 см, 20 см;
б) 10 м, 10 м, 4 м.
- 224.** а) Найдите площадь параллелограмма, одна сторона которого равна 15 см, а диагонали — 8 см и 26 см.
б) Найдите площадь параллелограмма, две стороны которого равны 9 см и 10 см, а одна из диагоналей — 17 см.
- 225.** а) Найдите наибольшую высоту треугольника со сторонами 20 см, 13 см, 11 см.
б) Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами 40 см, 37 см, 13 см.
- 226.** а) Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 5 см и 15 см, а боковые стороны — 9 см и 17 см.
б) Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 3 см и 12 см, а диагонали — 13 см и 14 см.
- 227.** Найдите площадь треугольника и радиус описанной окружности треугольника со сторонами 15 см, 13 см и 4 см.
- 228.** Решите треугольник, у которого известны:
а) $a = 4$, $b = 5$, $\gamma = 30^\circ$; б) $a = 1$, $b = 2$, $\gamma = 45^\circ$;
в) $a = 8$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 50^\circ$; г) $b = 10$, $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 32^\circ$;
д) $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$; е) $a = 50$, $b = 40$, $c = 20$.
-  **229.** Медианы, проведенные к двум сторонам треугольника, равны 12 см и 9 см, третья сторона треугольника равна 6 см. Найдите площадь треугольника.
-  **230.** а) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами, равными 29 см, 25 см и 6 см.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами, равными 20 см, 15 см, 7 см.
-  **231.** Найдите радиус окружности, касающейся сторон треугольника, равных 13 и 15, центр которой лежит на третьей стороне, равной 14.
-  **232.** Центр O окружности, вписанной в треугольник ABC , соединен с его вершинами отрезками. Площади треугольников, на которые разбивается треугольник ABC , равны 7 см^2 , 15 см^2 , 20 см^2 . Найдите стороны треугольника.

Интересно знать. Герон Александрийский — один из величайших инженеров античного мира. Многие его изобретения до сих пор вызывают восхищение. Вот только некоторые из них: одометр — механизм для нахождения расстояний на местности, автомат по продаже воды, устройство для автоматического открывания дверей и многое другое.



При помощи **Интернета** выясните, чем еще знаменит математик Герон. Какие треугольники называются *героновыми треугольниками*? Установите при помощи Википедии, почему этого ученого звали Героном Александрийским и мог ли он встречаться с Пифагором.



Гимнастика ума

Придумайте «красивый» (рациональный) способ нахождения площади изображенного на рисунке 188 треугольника.

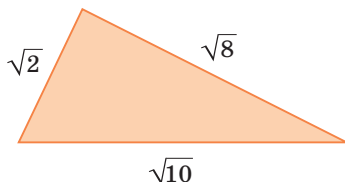


Рис. 188



§ 15. Креативная геометрия

1. Примеры решения задач с использованием теоремы синусов и теоремы косинусов

Задача 1. Внутри угла A , равного 60° , взята точка M , которая находится на расстоянии 1 от одной стороны угла и на расстоянии 2 от другой стороны. Найти расстояние от точки M до вершины угла A (рис. 189, а).

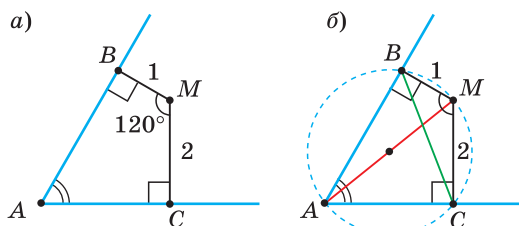


Рис. 189

Решение. Пусть $MB = 1$, $MC = 2$, $MB \perp AB$, $MC \perp AC$. Найдем длину отрезка AM . Сумма углов четырехугольника $ABMC$ равна 360° . Поэтому $\angle BMC = 120^\circ$.

Так как в четырехугольнике $ABMC$ $\angle B + \angle C = 180^\circ$, то около него можно описать окружность по признаку вписанного четырехугольника (рис. 189, б). Поскольку прямой вписанный угол опирается на диаметр,

то отрезок AM — диаметр этой окружности, т. е. $AM = 2R$, где R — радиус. Из $\triangle BMC$ по теореме косинусов $BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2 \cdot MB \cdot MC \cdot \cos 120^\circ = 1 + 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$, $BC = \sqrt{7}$. Из $\triangle ABC$ по теореме синусов $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, откуда $\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = AM$, $AM = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Замечание. Вторым способом решения будет продление отрезка BM до пересечения с лучом AC и использование свойств полученных прямоугольных треугольников. Рассмотрите этот способ самостоятельно.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике ABC известно: $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 15^\circ$, высота $CH = 2$ (рис. 190). Найти гипотенузу AB .

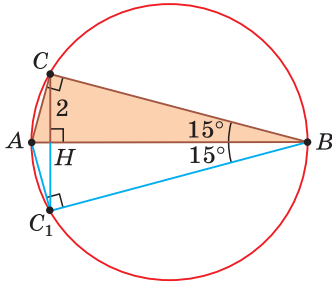


Рис. 190

Решение. Построим $\triangle ABC_1$, симметричный $\triangle ABC$ относительно прямой AB (см. рис. 190). Поскольку $\angle ACB + \angle AC_1B = 180^\circ$, то вокруг четырехугольника $ACBC_1$ можно описать окружность, где AB — диаметр этой окружности (прямой вписанный угол опирается на диаметр). Треугольник C_1CB вписан в эту окружность, $\angle CBC_1 = 30^\circ$, $CC_1 = 4$. По теореме синусов $\frac{CC_1}{\sin \angle CBC_1} = 2R$, $\frac{4}{\sin 30^\circ} = AB$, откуда $AB = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$.

Ответ: 8.

Задача 3. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = a$ и $AC = b$. На гипотенузе AB как на стороне построен квадрат $ADFB$ (рис. 191). Найти расстояние от центра O этого квадрата до вершины C прямого угла, т. е. отрезок CO .

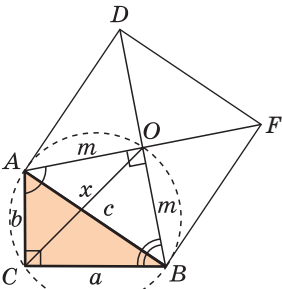


Рис. 191

Решение. Способ 1. Так как $\angle AOB = 90^\circ$ (диагонали квадрата $ADFB$ взаимно перпендикулярны), то $\angle AOB + \angle ACB = 180^\circ$, поэтому четырехугольник $AOCB$ является вписанным в окружность, ее диаметр $AB = c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тогда $AO = BO = m = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Пусть $CO = x$. По теореме косинусов из $\triangle AOC$ находим $\cos \angle OAC = \frac{b^2 + m^2 - x^2}{2bm}$, из $\triangle BOC$ находим $\cos \angle OBC = \frac{a^2 + m^2 - x^2}{2am}$.

По свойству вписанного четырехугольника $\angle OAC + \angle OBC = 180^\circ$. Поскольку $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, то $\frac{b^2 + m^2 - x^2}{2bm} = -\frac{a^2 + m^2 - x^2}{2am}$, откуда находим

$$x^2 = ab + m^2 = ab + \frac{c^2}{2} = \frac{2ab + a^2 + b^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}. \text{ Тогда } x = CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Способ 2. Используем теорему Птолемея, которая гласит: «Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон». Для нашей задачи получаем (см. рис. 191):

$$CO \cdot AB = CB \cdot AO + AC \cdot OB, \quad CO \cdot c = a \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} + b \cdot \frac{c}{\sqrt{2}}, \quad \text{откуда } CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

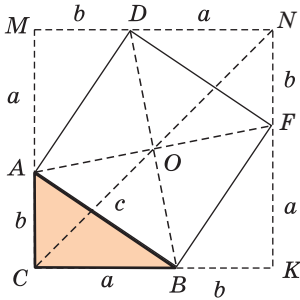


Рис. 192

Способ 3. Достроим $\triangle ABC$ до квадрата $CMNK$, как показано на рисунке 192. Можно показать, что центр квадрата $CMNK$ совпадает с центром квадрата $ADFB$, т. е. с точкой O (точки B и D симметричны относительно центров обоих квадратов). Тогда $CN = (a+b)\sqrt{2}$, $CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Ответ: } CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Задача 4. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC , $S_{AOB} = 7$, $S_{BOC} = 15$, $S_{AOC} = 20$. Найдите стороны треугольника (см. задачу 232).

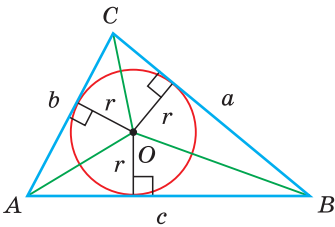


Рис. 193

Решение. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и r — радиус вписанной окружности (рис. 193).

$$\text{Тогда } S_{BOC} = \frac{1}{2}ar, \quad S_{AOB} = \frac{1}{2}cr, \quad S_{AOC} = \frac{1}{2}br.$$

$$\text{Отсюда } a = \frac{2S_{BOC}}{r} = \frac{30}{r}, \quad b = \frac{2S_{AOC}}{r} = \frac{40}{r}, \quad c = \frac{2S_{AOB}}{r} = \frac{14}{r}.$$

Применим формулу Герона:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{30}{r} + \frac{40}{r} + \frac{14}{r}\right) = \frac{42}{r}, \quad p - a = \frac{12}{r}, \quad p - b = \frac{2}{r},$$

$$p - c = \frac{28}{r}; \quad S_{ABC} = \sqrt{\frac{42}{r} \cdot \frac{12}{r} \cdot \frac{2}{r} \cdot \frac{28}{r}} = \frac{168}{r^2}.$$

$$\text{С другой стороны, } S_{ABC} = 7 + 15 + 20 = 42.$$

$$\text{Из уравнения } \frac{168}{r^2} = 42 \text{ находим } r = 2.$$

$$\text{Откуда } a = \frac{30}{2} = 15, \quad b = \frac{40}{2} = 20, \quad c = \frac{14}{2} = 7.$$

Ответ: 15; 20; 7.

2. Теорема Стюарта

Следующая теорема позволяет найти длину отрезка, соединяющего вершину треугольника с точкой на противоположной стороне.

Теорема Стюарта. Если a , b и c — стороны треугольника и отрезок d делит сторону c на отрезки, равные x и y (рис. 194), то справедлива формула

$$d^2 = a^2 \cdot \frac{x}{x+y} + b^2 \cdot \frac{y}{x+y} - xy.$$

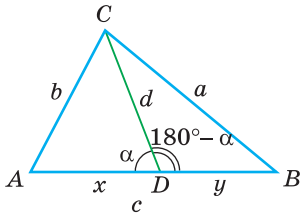


Рис. 194

Доказательство. По теореме косинусов из $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ (см. рис. 194) следует:

$$b^2 = d^2 + x^2 - 2dx \cos \alpha, \quad (1)$$

$$a^2 = d^2 + y^2 - 2dy \cos(180^\circ - \alpha) = d^2 + y^2 + 2dy \cos \alpha. \quad (2)$$

Умножим обе части равенства (1) на y , равенства (2) — на x : $yb^2 = yd^2 + yx^2 - 2ydx \cos \alpha$, $xa^2 = xd^2 + xy^2 + 2xdy \cos \alpha$.

Сложим почленно полученные равенства:

$$xa^2 + yb^2 = d^2(x+y) + xy(x+y).$$

Из последнего равенства выразим d^2 :

$$d^2 = a^2 \cdot \frac{x}{x+y} + b^2 \cdot \frac{y}{x+y} - xy. \text{ Теорема доказана.}$$

Следствие.

Биссектрису треугольника можно найти по формуле (рис. 195)

$$l_c^2 = ab - xy.$$

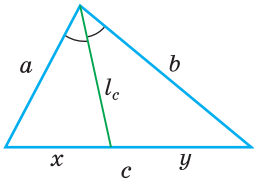


Рис. 195

Доказательство. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Разделив сторону c в отношении $a : b$, получим: $x = \frac{c}{a+b} \cdot a$, $y = \frac{c}{a+b} \cdot b$. По теореме Стюарта

$$\begin{aligned} l_c^2 &= a^2 \cdot \frac{y}{c} + b^2 \cdot \frac{x}{c} - xy = a^2 \cdot \frac{b}{a+b} + b^2 \cdot \frac{a}{a+b} - xy = \\ &= \frac{ab}{a+b} \cdot (a+b) - xy = ab - xy. \end{aligned}$$

Задача 5. Доказать, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник — равнобедренный (теорема Штейнера — Лемуса).

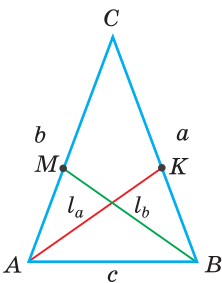


Рис. 196

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC , $AK = l_a$ и $BM = l_b$ — биссектрисы, проведенные к сторонам $BC = a$ и $AC = b$ соответственно, и $l_a = l_b$ (рис. 196). Нужно доказать, что $a = b$. Выразим l_a и l_b через a , b и c и приравняем полученные выражения. Биссектриса делит противоположающую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Поэтому $\frac{CK}{BK} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$, откуда $CK = \frac{a}{b+c} \cdot b$, $BK = \frac{a}{b+c} \cdot c$;

$$\frac{CM}{AM} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \text{ откуда } CM = \frac{b}{a+c} \cdot a, \quad AM = \frac{b}{a+c} \cdot c.$$

По формуле биссектрисы треугольника $l_a^2 = bc - \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$,
 $l_b^2 = ac - \frac{ab}{a+c} \cdot \frac{bc}{a+c} = ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2}$.

Из условия $l_a = l_b$ следует: $ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$. Перенеся слагаемые в одну часть равенства, разложив многочлены на множители и сократив на c (проделайте это самостоятельно), получим:
 $(a-b) \cdot \left(1 + ab \cdot \frac{a^2 + ab + b^2 + 2c(a+b) + c^2}{(a+c)^2(b+c)^2}\right) = 0$. Отсюда $a - b = 0$, $a = b$ (второй множитель при положительных a , b и c больше нуля). Утверждение доказано.

3. Теорема Птолемея о вписанном четырехугольнике

Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон, т. е. $d_1 d_2 = ac + bd$ (рис. 197).

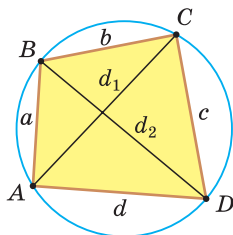


Рис. 197

Доказательство. Из $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ по теореме косинусов $\cos B = \frac{a^2 + b^2 - d_1^2}{2ab}$, $\cos D = \frac{c^2 + d^2 - d_1^2}{2cd}$.

Так как $\angle D = 180^\circ - \angle B$ (по свойству вписанного четырехугольника) и $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, то $\frac{a^2 + b^2 - d_1^2}{2ab} = -\frac{c^2 + d^2 - d_1^2}{2cd}$, откуда $d_1^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$.

Аналогично из $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$ получим $d_2^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$.

Тогда $d_1^2 \cdot d_2^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd} \cdot \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} = (ac + bd)^2$,
 $d_1 \cdot d_2 = ac + bd$. Теорема доказана.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

233. Докажите, что если m_a , m_b и m_c — медианы треугольника со сторонами a , b и c , то справедливы следующие формулы:

а) $a = \frac{2}{3} \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$; б) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

234. Двумя способами (алгебраическим и геометрическим) найдите площадь треугольника с медианами, равными 3 см, 4 см и 5 см.

235. В треугольник вписана окружность радиусом 2, которая точкой касания делит одну из его сторон на отрезки, равные 1 и 6. Найдите периметр треугольника.

- 236.** Используя теорему Птолемея, решите задачу: «Около равностороннего треугольника ABC описана окружность, на дуге BC взята точка M . Докажите, что $AM = BM + CM$ ».
- 237.** В треугольнике ABC проведен отрезок AK , где $K \in BC$. Используя теорему Стюарта, выразите длину отрезка AK через отрезки AB , AC , BK и CK . Вычислите длину отрезка AK , если $AB = 6$, $AC = 9$, $BK = 2$, $CK = 4$.
- 238.** При помощи теоремы Стюарта выведите формулу для медианы m_a треугольника со сторонами a , b и c : $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.
- 239.** Медиана треугольника равна m_a и образует с соседними сторонами b и c углы β_1 и γ_1 соответственно. Найдите стороны b и c .
- 240.** Углы треугольника равны α , β и γ . Найдите сторону a треугольника, если:
- а) периметр треугольника равен P ;
 - б) площадь треугольника равна S .
- 241.** а) Найдите биссектрису AK треугольника ABC , если $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 7$.
б) Найдите биссектрису равнобедренного треугольника с основанием 5 и боковой стороной 20, проведенную к боковой стороне.
- 242.** Стороны параллелограмма равны a , b , диагонали — d_1 и d_2 . Докажите, что $a^4 + b^4 = d_1^2 d_2^2$ тогда и только тогда, когда угол параллелограмма равен 45° .
- 243.** а) Стороны треугольника равны a , b и c . Докажите, что медианы m_a и m_b треугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 = 5c^2$.
б) Докажите, что медианы m_a и m_b треугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда $m_c = \frac{3}{2}c$.
- 244.** В параллелограмме $ABCD$ известно: $AD = a$, $AB = b$, $\angle A = \alpha$.
а) Найдите диагонали $BD = d_1$ и $AC = d_2$ параллелограмма ($d_1 < d_2$) и синус угла φ между диагоналями.
б) Решите задачу а) при условии, что $a = 2$, $b = 1$, $\angle A = 60^\circ$.
- 245.** При помощи циркуля и линейки по данным отрезкам a и b отрезок x , если:
- а) $x = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$;
 - б) $x = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$.

ЗАПОМИНАЕМ

1. Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу его описанной окружности:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$
2. Радиус описанной окружности треугольника можно найти, используя формулы: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, $S = \frac{abc}{4R}$.
3. Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.
4. Пусть a , b , c — стороны треугольника и c — бо́льшая сторона. Если $a^2 + b^2 < c^2$, то треугольник тупоугольный, если $a^2 + b^2 > c^2$, то треугольник остроугольный, если $a^2 + b^2 = c^2$, то треугольник прямоугольный.
5. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.
6. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
7. Формула медианы: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

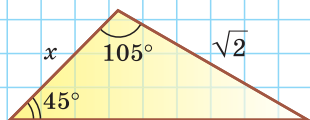


ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

Тест 1

Длина отрезка x равна:

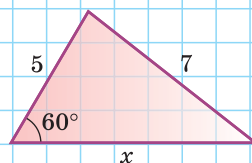
а) $\sqrt{2}$; б) 1; в) $\sqrt{3}$; г) 2.



Тест 2

Длина отрезка x равна:

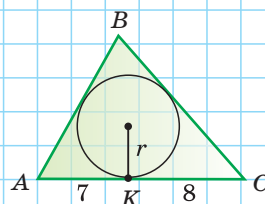
а) 6; б) 8; в) 7; г) $5\sqrt{3}$.



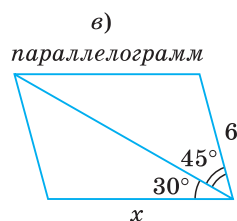
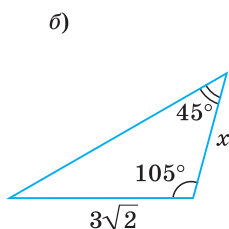
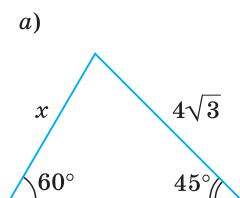
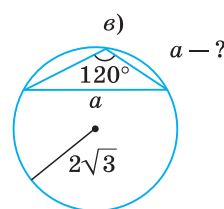
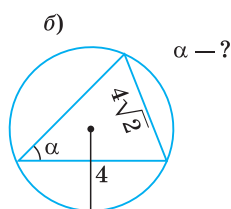
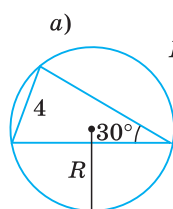
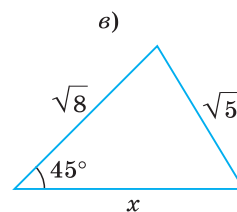
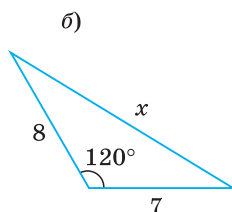
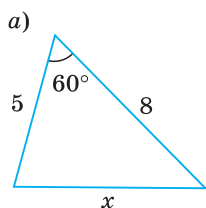
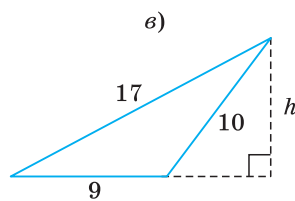
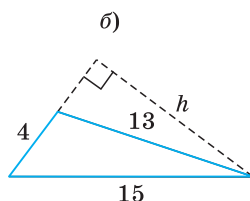
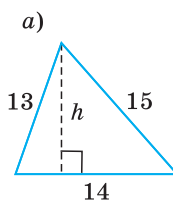
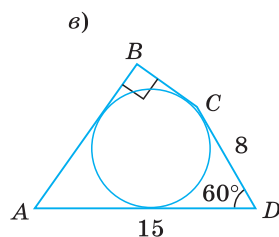
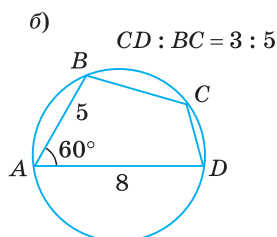
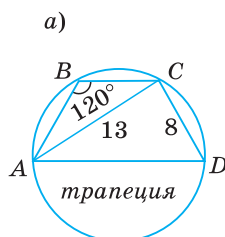
Тест 3

Найдите радиус r вписанной окружности треугольника ABC , если его периметр равен 42 и $AK = 7$, $KC = 8$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 1,5.



ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 3

1. Найдите длину стороны x .2. Найдите радиус R (рис. а), угол α (рис. б) и сторону a (рис. в).3. Найдите длину стороны x .4. Зная три стороны треугольника, найдите S , h и R .5. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

ТЕМЫ ПРОЕКТОВ



1. Теорема Бретшнайдера (теорема косинусов для четырехугольника).
2. Теорема Стюарта и ее приложения.
3. Теорема Аполлония.
4. Формула Брахмагупты.

Экспресс-повторение главы III

Соедините разделенные половинки формул по образцу: A4 и т. д. Объясните, что означает каждая формула.

... = $b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ 5

... = $2R$ 4

... = $\frac{abc}{4S}$ 6

C $R = \dots$

... = $\frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ 3

B $a^2 = \dots$

... = $2a^2 + 2b^2$ 1

A $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \dots$

F $m_a = \dots$

E $S = \dots$

D $d_1^2 + d_2^2 = \dots$

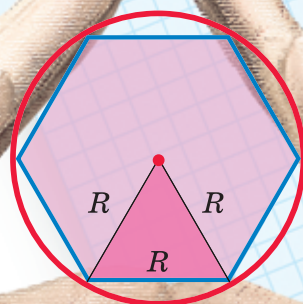
... = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 2

Глава IV

Правильные многоугольники

В этой главе вы узнаете:

- Определение и свойства правильных многоугольников
- О том, что правильный четырехугольник — это квадрат
- Почему площадь круга равна πR^2



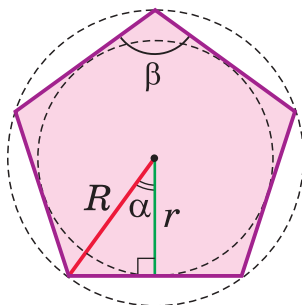
$$C_{\text{окр}} = 2\pi R$$

$$S_{\text{кр}} = \pi R^2$$

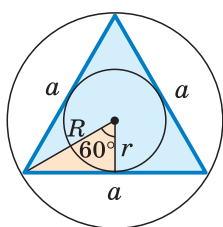
Правильные многоугольники

ВСЕ СТОРОНЫ РАВНЫ И ВСЕ УГЛЫ РАВНЫ

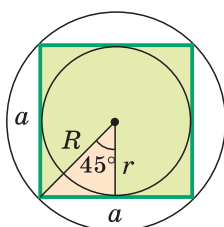
окружность
можно
описать,
вписать,
центры
совпадают



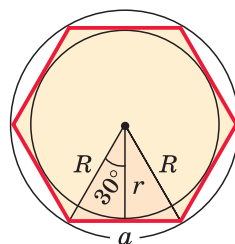
$$\beta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$



$$n = 3$$

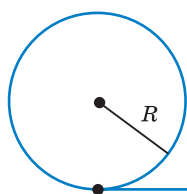


$$n = 4$$



$$n = 6$$

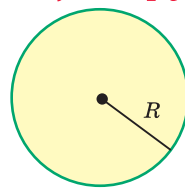
ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА



$$C = 2\pi R$$

длина окружности

площадь круга



$$S = \pi R^2$$

§ 16. Правильные многоугольники

Определение. **Правильным многоугольником** называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

На рисунке 198 изображены правильные треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник, семиугольник. Правильный треугольник — это равносторонний треугольник, а правильный четырехугольник — это квадрат.

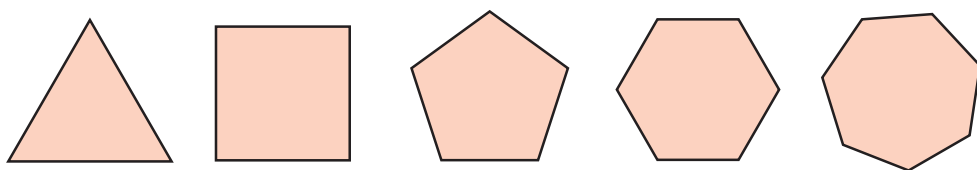


Рис. 198

Одной из простейших задач является задача нахождения величины внутреннего угла правильного многоугольника. Так как все углы правильного n -угольника равны между собой, а сумма углов любого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$, то угол β правильного n -угольника можно найти по формуле

$$\beta = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}.$$

Например, для правильного шестиугольника $\beta = \frac{180^\circ \cdot (6 - 2)}{6} = 120^\circ$.

Теорема. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, в любой правильный многоугольник можно вписать окружность; центры этих окружностей совпадают.

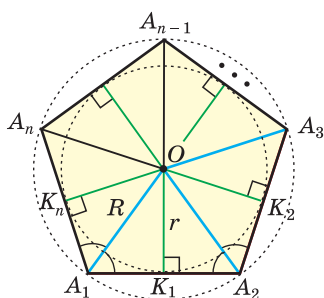


Рис. 199

Доказательство. В правильном многоугольнике $A_1A_2A_3\dots A_n$ проведем биссектрисы внутренних углов A_1 и A_2 . Пусть O — точка пересечения этих биссектрис (рис. 199). Так как $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1$ как половины равных углов, то $\triangle A_1OA_2$ — равнобедренный с основанием A_1A_2 . Проведя отрезок OA_3 , получим $\triangle A_2OA_3$, равный $\triangle A_1OA_2$ по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2 = A_2A_3$, сторона OA_2 — общая, $\angle OA_2A_1 = \angle OA_2A_3$). Соединив точку O отрезками с остальными вершинами, получим множество равных равнобедренных треугольников. Отсюда $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OAn$. Поэтому окружность

с центром O и радиусом $R = OA_1$ пройдет через все вершины многоугольника $A_1A_2A_3\dots A_n$, т. е. будет его описанной окружностью. А поскольку высоты указанных равных равнобедренных треугольников, проведенные к их основаниям, равны, т. е. $OK_1 = OK_2 = OK_3 = \dots = OK_n$, то точка O — также и центр вписанной окружности многоугольника $A_1A_2A_3\dots A_n$, радиус которой $r = OK_1$. Теорема доказана.

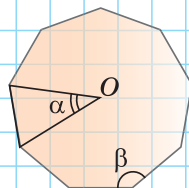
Точка O называется центром правильного n -угольника.

А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

На рисунке изображен правильный девятиугольник и его центр O . Найдите величину угла α и величину угла β .

а) $36^\circ, 144^\circ$; б) $40^\circ, 120^\circ$; в) $30^\circ, 120^\circ$; г) $40^\circ, 140^\circ$.



Задания к § 16

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 246.** Сумма длин двух сторон правильного шестиугольника равна 20 см. Найдите периметр этого многоугольника.
- 247.** Изобразите правильный восьмиугольник $A_1A_2A_3\dots A_8$, «отрезав» у квадрата уголки. Отметьте центр O этого многоугольника. Найдите $\angle A_1OA_2$, $\angle A_1A_2O$, $\angle A_1A_2A_3$. В ответе запишите градусную меру $\angle A_1A_2A_3$.
- 248.** Используя формулу суммы углов многоугольника, найдите градусную меру угла правильного n -угольника, если n равно:
 - а) 5; б) 10; в) 18.
- 249.** Внутренний угол правильного n -угольника равен 150° . Найдите число сторон этого n -угольника.
- 250.** Сумма градусных мер двух углов правильного многоугольника равна 324° , а его периметр равен 280 см. Найдите длину стороны этого многоугольника.
- 251.** Дан правильный n -угольник $A_1A_2A_3\dots A_n$, точка O — его центр, $\angle OA_1A_2 = 85^\circ 30'$, $A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 = 6$ см. Найдите периметр этого n -угольника.
- 252.** Внешний угол правильного n -угольника $A_1A_2A_3\dots A_n$ равен 60° , периметр — 72 см. Найдите $S_{A_1OA_2}$, где O — центр n -угольника.

253. Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ (рис. 200).

- Найдите углы треугольника $A_1A_2A_3$.
- Найдите углы треугольника $A_1A_3A_5$.
- Докажите, что все диагонали пятиугольника равны.
- Докажите, что диагональ A_1A_3 параллельна стороне A_4A_5 .
- Докажите, что пятиугольник, образованный при пересечении всех диагоналей данного правильного пятиугольника, также является правильным.

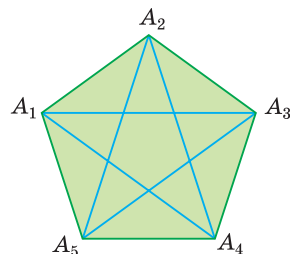


Рис. 200

254. На рисунке 201 изображен правильный восьмиугольник. Найдите величину угла α .

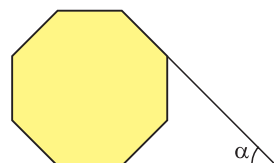


Рис. 201

255. Дан правильный 12-угольник $A_1A_2A_3...A_{12}$. Найдите угол между прямыми:

- A_2A_7 и A_4A_{12} ;
- A_1A_3 и A_6A_{10} .

(Для построения правильного 12-угольника схематически изобразите круглый циферблат часов, разбейте его окружность на 12 равных дуг, отметив точки, соответствующие 1 ч, 2 ч, 3 ч и т. д., и соедините соседние точки отрезками.)

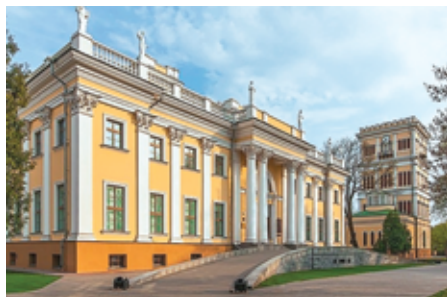
Гимнастика ума



Поверхность футбольного мяча шита из правильных черных 5-угольников и соединяющих их правильных белых 6-угольников.

Задание. Известно, что всего черных 5-угольников 12. Определите математическим путем число белых 6-угольников на поверхности мяча, а затем убедитесь в своей правоте на уроке физкультуры.

(Для самоконтроля. Ответ: число белых 6-угольников на поверхности мяча равно номиналу купюры Республики Беларусь, на лицевой стороне которой размещено изображение Дворца Румянцевых и Паскевичей в г. Гомеле.)



При помощи **Интернета** выясните, в каких странах мира некоторые монеты имеют форму правильного многоугольника.

§ 17. Формулы радиусов описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника

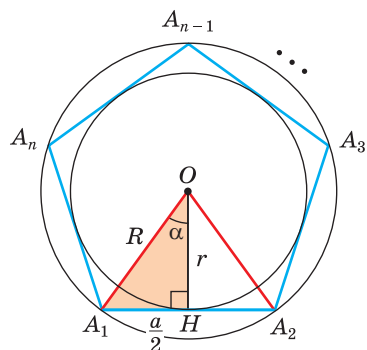


Рис. 202

Пусть $A_1A_2A_3\dots A_n$ — правильный n -угольник со стороной a , где O — его центр, $OA_1 = R$ — радиус описанной окружности, $OH = r$ — радиус вписанной окружности (рис. 202).

Так как $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{n}$, а высота OH равнобедренного треугольника A_1OA_2 является биссектрисой и медианой, то угол $\alpha = \angle A_1OH = \frac{180^\circ}{n}$, $A_1H = \frac{a}{2}$. Из прямоугольного треугольника A_1OH находим:

а) $\sin \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, откуда $a = 2R \sin \alpha = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$, $R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$;
 б) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, откуда $a = 2r \operatorname{tg} \alpha = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, $r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$.

Замечание. Выведенные формулы запоминать не обязательно. Важно помнить способ их получения: решение прямоугольного треугольника A_1OH .

Примеры. 1) Для правильного треугольника (рис. 203) получим:

$$\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ, \quad \alpha = \angle A_1OH = 60^\circ, \quad \sin 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R}, \quad \text{откуда} \quad R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2},$$

$$a = R\sqrt{3}, \quad \text{или} \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{r}, \quad r \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}, \quad a = 2\sqrt{3}r, \quad \text{или} \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

2) Для правильного четырехугольника (рис. 204) получим:

$$\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ, \quad \alpha = \angle A_1OH = 45^\circ, \quad \sin 45^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R}, \quad \text{откуда} \quad R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2},$$

$$a = R\sqrt{2}, \quad \text{или} \quad R = \frac{a}{\sqrt{2}}; \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{r}, \quad r \cdot 1 = \frac{a}{2}, \quad a = 2r, \quad \text{или} \quad r = \frac{a}{2}.$$

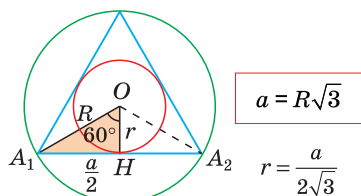


Рис. 203

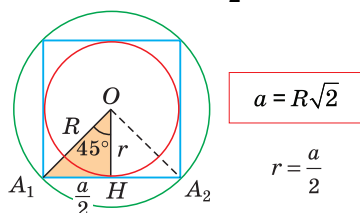


Рис. 204

3) Для правильного шестиугольника (рис. 205) $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, $\beta = \angle A_1OH = 30^\circ$, $\sin 30^\circ = \frac{a}{2R}$, откуда $R \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$, $a = R$; $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{\frac{a}{2}}$, $r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{2}$, $a = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$, или $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

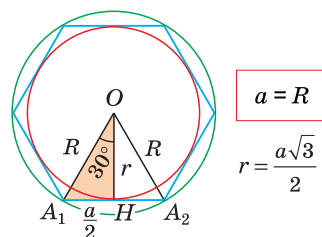


Рис. 205

Полезно запомнить формулы, выражающие сторону a_n правильного n -угольника через радиус R описанной окружности при $n = 3, 4, 6$:

$$a_3 = R\sqrt{3},$$

$$a_4 = R\sqrt{2},$$

$$a_6 = R.$$

Для нахождения площади правильного n -угольника $A_1A_2A_3\dots A_n$ с центром O и радиусом R описанной окружности можно найти площадь треугольника A_1OA_2 по формуле $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ и умножить ее на число таких треугольников, т. е. на n .

Пример.

$$S_6 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin \frac{360^\circ}{6} \right) = 3R^2 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2};$$

$$S_8 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin \frac{360^\circ}{8} \right) = 4R^2 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}R^2;$$

$$S_{12} = 12 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin \frac{360^\circ}{12} \right) = 6R^2 \sin 30^\circ = 3R^2.$$

Для нахождения радиуса r окружности, вписанной в правильный многоугольник, можно использовать формулу площади описанного многоугольника $S = pr$.



Задания к § 17

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 256.** Дан правильный треугольник. Используя формулы $a = R\sqrt{3}$ и $r = \frac{1}{2}R$, заполните в тетради таблицу, где a — сторона треугольника, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности.

a	6		
R		$4\sqrt{3}$	
r			1

- 257.** а) Найдите радиус окружности, вписанной в правильный четырехугольник со стороной, равной 8 см.
б) Найдите радиус окружности, описанной около правильного четырехугольника, периметр которого равен 32 см.

- 258.** Дан правильный шестиугольник с периметром, равным 30 см. Найдите радиус описанной и радиус вписанной окружностей этого шестиугольника.
- 259.** а) Вычислите радиус описанной окружности правильного 10-угольника со стороной, равной 6 см. Ответ округлите до 0,1 см.
б) Вычислите радиус вписанной окружности правильного 12-угольника со стороной, равной 24 см. Ответ округлите до 0,1 см.
- 260.** Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ с центром O и стороной $a = 20$ (рис. 206). Найдите угол β и выразите радиусы его описанной и вписанной окружностей через a и β .
- 261.** а) Выразите сторону a правильного девятиугольника через радиус R его описанной окружности.
б) Выразите радиус r окружности, вписанной в правильный 18-угольник, через его сторону a .
- 262.** Найдите площадь правильного 12-угольника, у которого радиус описанной окружности равен 6 см.
-  **263.** Дан правильный восьмиугольник $A_1A_2A_3...A_8$ (рис. 207).
- а) Докажите, что $A_2A_5 \parallel A_3A_4$.
б) Докажите, что $A_1A_2A_5A_6$ — прямоугольник.
в) Докажите, что диагональ A_1A_5 проходит через центр многоугольника.
г) Найдите углы треугольника $A_1A_2A_5$.
д) Докажите, что площадь прямоугольника $A_1A_2A_5A_6$ равна $\frac{1}{2}$ площади данного правильного восьмиугольника.

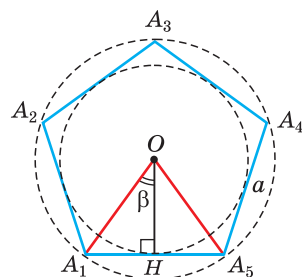


Рис. 206

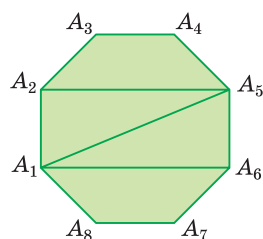


Рис. 207

Гимнастика ума

Прямоугольник на рисунке 208 составлен из шести квадратов. Сторона желтого квадрата равна 1. Найдите длину стороны красного квадрата.

(Для самоконтроля. Ответ: длина стороны красного квадрата равна числу периодов в таблице Менделеева.)

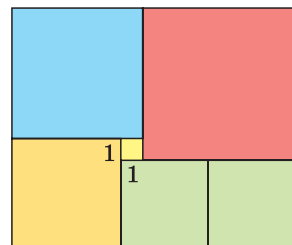


Рис. 208



При помощи **Интернета** выясните, какую теорему относительно правильных многоугольников доказал великий математик Карл Гаусс и какую геометрическую фигуру он завещал после смерти изобразить на своем памятнике.

§ 18. Правильный треугольник, четырехугольник, шестиугольник

1. Правильный треугольник

Обобщим информацию о правильном (равностороннем) треугольнике.

Запишем формулы высоты h , площади S , радиуса R описанной и радиуса r вписанной окружностей правильного треугольника ABC со стороной a (рис. 209):

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

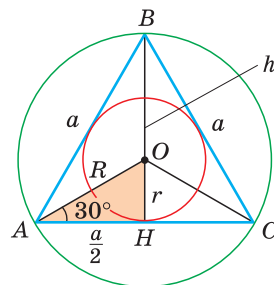


Рис. 209

Из $\triangle AOH$, где $\angle OAH = 30^\circ$, следует, что $r = \frac{1}{2}R$.

При заданной стороне a правильного треугольника его можно построить при помощи циркуля и линейки, используя алгоритм построения треугольника по трем сторонам.

Так как $BO : OH = 2 : 1$, то $R = \frac{2}{3}h$, $r = \frac{1}{3}h$. Для построения описанной и вписанной окружностей правильного треугольника достаточно построить его медианы (высоты), точка пересечения которых будет центром искомых окружностей.

2. Правильный четырехугольник

Пусть сторона квадрата $ABCD$ равна a , R — радиус описанной, r — радиус вписанной окружности (рис. 210). Диаметр его описанной окружности равен диагонали AC . В свою очередь, $AC = a\sqrt{2}$, откуда

$$2R = a\sqrt{2}, \text{ или } R = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Из равнобедренного прямоугольного треугольника AOD также следует, что $AD = AO\sqrt{2}$, $a = R\sqrt{2}$. Диаметр KH окружности, вписанной в квадрат, равен длине стороны квадрата,

т. е. $KH = AB = a$, откуда $a = 2r$, $r = \frac{a}{2}$. Из прямоугольного равнобедренного треугольника AOH также следует, что $r = AH = \frac{a}{2}$.

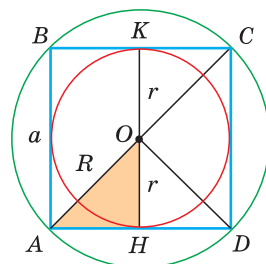


Рис. 210

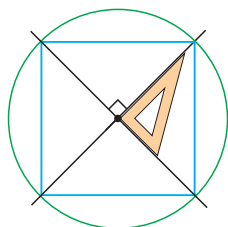


Рис. 211

Для построения квадрата, вписанного в данную окружность с заданным центром, можно построить две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через центр окружности (рис. 211). Эти прямые пересекают окружность в вершинах квадрата. Обоснуйте это утверждение. Выполните указанное построение при помощи чертежного треугольника.

3. Правильный шестиугольник

Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной a , вписанный в окружность с центром O и радиусом R (рис. 212). Его внутренние углы равны по 120° . Треугольник AOF равнобедренный, так как $OA = OF = R$, $\angle AOF = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Поэтому $\triangle AOF$ — равносторонний, откуда

$$a = R.$$

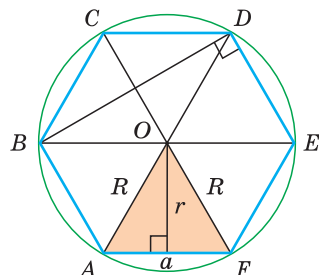


Рис. 212

Так как радиус r вписанной окружности является высотой равностороннего треугольника со стороной a , то

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Поскольку $\angle BOC + \angle COD + \angle DOE = 180^\circ$, то большая (главная) диагональ BE правильного шестиугольника проходит через его центр O , а все три большие диагонали AD , BE и CF разбивают его на шесть равных равносторонних треугольников. Площадь правильного шестиугольника

$$S_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Меньшая (малая) диагональ BD правильного шестиугольника является диагональю ромба $BCDO$ ($BC = CD = DO = BO = a$) с углами, равными 60° и 120° . Откуда $CD \parallel BE$. Треугольник BDE является прямоугольным ($\angle BDE = 90^\circ$ как опирающийся на диаметр), $\angle BED = 60^\circ$, $\angle DBE = 30^\circ$. Кроме того, $CD \parallel AF$, $BC \parallel FE$, $AB \parallel ED$, а расстояния между указанными парами параллельных прямых равны $a\sqrt{3}$. Докажите это самостоятельно.

Построим при помощи циркуля и линейки правильный шестиугольник, вписанный в данную окружность радиусом R (рис. 213, а). Восполь-

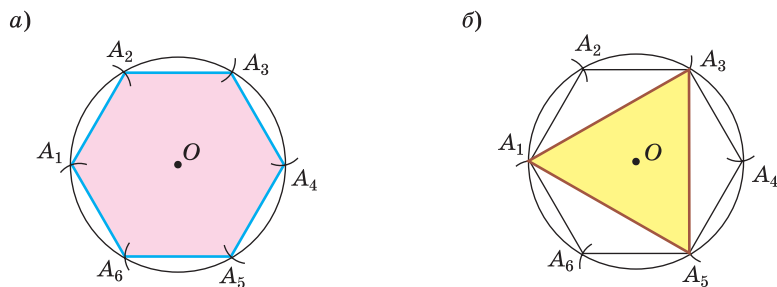


Рис. 213

зуемся тем, что $a = R$, где a — сторона правильного шестиугольника. Одну вершину A_1 шестиугольника берем на окружности произвольно. Из нее как из центра радиусом, равным радиусу R , делаем засечку на окружности и получаем вершину A_2 . Затем аналогично последовательно строим остальные вершины: A_3, A_4, A_5, A_6 — и соединяем их отрезками. Из равенства равносторонних треугольников ($\triangle A_1OA_2 = \triangle A_2OA_3 = \triangle A_3OA_4 = \triangle A_4OA_5 = \triangle A_5OA_6 = \triangle A_6OA_1$) следует равенство углов построенного шестиугольника $A_1A_2A_3\dots A_6$, откуда заключаем, что он — правильный.

Для построения правильного треугольника, вписанного в данную окружность, достаточно соединить отрезками через одну вершины правильного вписанного шестиугольника (рис. 213, б). Для построения правильного 12-угольника следует разделить дуги $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_5A_6, A_6A_1$ пополам (построив серединные перпендикуляры к сторонам правильного шестиугольника) и каждую из точек деления соединить отрезками с концами соответствующей стороны.

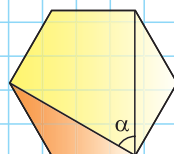
Применяя указанный способ деления дуг пополам, можно с помощью циркуля и линейки построить множество правильных многоугольников. Так, из правильного четырехугольника можно построить правильный восьмиугольник, 16-угольник, и вообще любой правильный 2^k -угольник, где k — целое число, большее двух.

А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

На рисунке изображен правильный шестиугольник, его площадь равна 120 см^2 . Найдите величину угла α и площадь оранжевого треугольника.

- а) $60^\circ, 40 \text{ см}^2$;
- б) $45^\circ, 20 \text{ см}^2$;
- в) $60^\circ, 20 \text{ см}^2$.





Задания к § 18

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. В окружности с центром O проведен диаметр BD , через середину радиуса OD проведена хорда AC , перпендикулярная диаметру BD (рис. 214). Доказать, что $\triangle ABC$ — правильный.

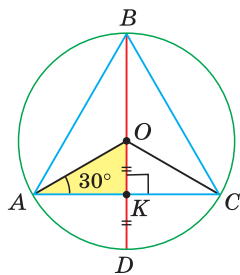


Рис. 214

Доказательство. Так как $OK = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}OA$, то в прямоугольном треугольнике AOK $\angle OAK = 30^\circ$. В равнобедренном треугольнике AOC ($OA = OC$) $\angle OCA = 30^\circ$, $\angle AOC = 120^\circ$. Вписанный угол ABC равен половине центрального угла AOC , т. е. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = 60^\circ$.

Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. Поэтому $AK = KC$. Так как в треугольнике ABC высота BK является и медианой, то он — равнобедренный, $AB = BC$. Отсюда $\angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$ и $\triangle ABC$ — равнобедренный, т. е. правильный. Что и требовалось доказать.

Замечание. Из задачи следует второй способ построения правильного треугольника, вписанного в окружность: строится диаметр BD , через середину радиуса OD проводится хорда AC , перпендикулярная диаметру. Треугольник ABC — правильный.

Задача 2. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, диагональ AC равна $6\sqrt{3}$. Найти площадь шестиугольника (рис. 215).

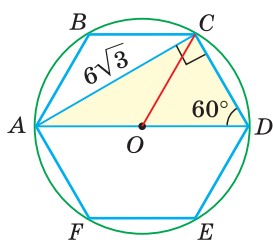


Рис. 215

Решение. Вписанный угол ACD опирается на диаметр AD , поэтому он прямой. Из прямоугольного треугольника ACD : $\angle D = 60^\circ$, $\operatorname{ctg} D = \frac{CD}{AC}$, $CD = AC \operatorname{ctg} 60^\circ =$

$$= 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6. \text{ Так как } S_{COD} = \frac{CD^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3},$$

$$\text{то } S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{COD} = 6 \cdot 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3}.$$

Ответ: $54\sqrt{3}$.

РЕШАЕМ
САМОСТОЯТЕЛЬНО

264. Дан правильный треугольник, a — его сторона, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, h — высота, S — площадь. Перенесите в тетрадь и заполните таблицу.

a	6				
h		$2\sqrt{3}$			
R			2		
r				$\sqrt{6}$	
S					$16\sqrt{3}$

- 265.** Дан правильный четырехугольник, a — его сторона, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности. Перенесите в тетрадь и заполните таблицу.

a	4		
R		$8\sqrt{2}$	
r			$\sqrt{8}$

- 266.** а) Из проволоки сделан правильный треугольник со стороной, равной 12 см. Проволоку разогнули и сделали из нее правильный четырехугольник. Найдите длину стороны этого четырехугольника.
 б) Из проволоки сделан правильный шестиугольник со стороной, равной 2 см. Проволоку разогнули и сделали из нее правильный треугольник. Найдите длину его стороны.
- 267.** а) Найдите площадь правильного шестиугольника со стороной, равной 4 см.
 б) Найдите периметр правильного шестиугольника, если радиус вписанной в него окружности равен $6\sqrt{3}$ см.

- 268.** Найдите площадь правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 216), если площадь треугольника ABD равна 60 см^2 .

- 269.** Дан правильный шестиугольник $A_1A_2A_3...A_6$.

- а) Найдите радиус окружности, описанной около этого шестиугольника, и радиус окружности, вписанной в этот шестиугольник, если $A_2A_4 = 4\sqrt{3}$ см.
 б) Докажите, что расстояние между прямыми A_2A_3 и A_6A_5 равно длине диагонали A_2A_4 .

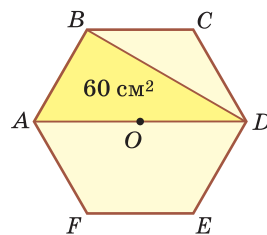


Рис. 216

270. а) Придумайте алгоритм построения при помощи циркуля и линейки правильного треугольника по его высоте h .

б) Придумайте алгоритм построения при помощи циркуля и линейки правильного четырехугольника по его диагонали d .

 **271.** а) В правильный треугольник ABC со стороной, равной 6, вписан квадрат $MNPК$ (рис. 217). Найдите длину стороны квадрата.

б) На рисунке 218 изображены правильный треугольник ABC и правильный четырехугольник $EDFC$. Найдите длину стороны AB треугольника, если $FC = 3$.

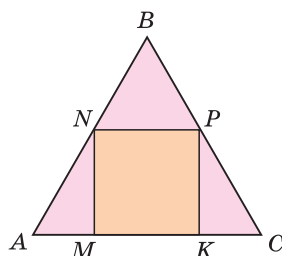


Рис. 217

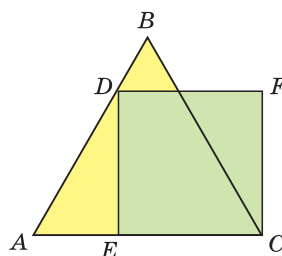


Рис. 218

 **272.** Найдите площадь правильного треугольника, если дан:

а) радиус R его описанной окружности;

б) радиус r его вписанной окружности.

 **273.** Придумайте алгоритм построения при помощи циркуля и линейки квадрата по отрезку, равному сумме стороны квадрата и его диагонали.

 **274.** Около данной окружности опишите при помощи циркуля и линейки правильный:

а) треугольник;

б) четырехугольник;

в) шестиугольник.

Моделирование

Дизайнер хочет изготовить бумажные цветы, вырезав их из кругов, как показано на рисунке 219.

Задание. Помогите дизайнеру: составьте алгоритм решения поставленной задачи с использованием циркуля, ножниц и бумаги.

Обоснуйте вашу идею математически и проверьте ее на практике.

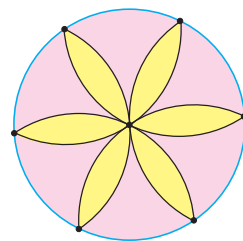


Рис. 219

Интересно знать. Ячейки пчелиных сот в форме правильных шестиугольников (рис. 220) всегда восхищали людей. Недаром пчелы считаются одними из величайших инженеров в мире природы. Как точно и соразмерно подгоняют они одну ячейку сот к другой!

Регулярный ячеистый рисунок можно получить из треугольных, квадратных или шестиугольных ячеек. Шестиугольная ячейка является наиболее экономичной. На соты с такими ячейками идет наименьшее количество воска. Впервые такую особенность заметили в IV в., тогда же было выдвинуто предположение, что пчелы при постройке сот «руководствуются математическим планом».



Рис. 220

Гимнастика ума

Из трех карандашей одной длины можно составить 1 правильный треугольник. Из пяти таких карандашей можно составить 2 правильных треугольника (рис. 221).

Попробуйте из шести карандашей одной длины составить фигуру, состоящую из четырех правильных треугольников.



Рис. 221

Реальная геометрия

Задание 1. Имеется квадратный лист гипсокартона со стороной 1 м. Из него необходимо получить правильный восьмиугольник, обрезав углы (рис. 222). Определите длины отрезков x и y . Ответ округлите до 1 см.

Задание 2. Из листа фанеры, имеющего форму правильного треугольника со стороной 1 м, необходимо изготовить правильный шестиугольник, обрезав углы (рис. 223). Определите длины отрезков x и y . Ответ округлите до 1 см.

Замечание. При выполнении заданий 1 и 2 используйте тригонометрические таблицы и калькулятор.

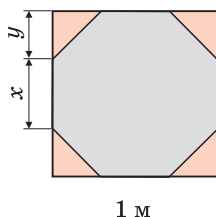


Рис. 222

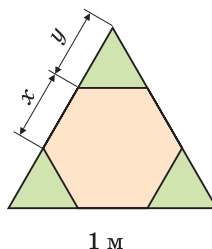


Рис. 223

§ 19. Нахождение длины окружности и площади круга

1. Длина окружности и площадь круга

Длину окружности, сделанной из гибкой проволоки, можно измерить, если проволоку распрямить в отрезок. Еще древние заметили, что отношение длины любой окружности к ее диаметру есть величина постоянная: длина окружности примерно в 3 раза больше диаметра. Вы можете убедиться в этом при помощи нитки и линейки, используя в качестве окружности верхнюю кромку чашки (рис. 224).



Рис. 224

Понятно, что периметр правильного многоугольника, вписанного в окружность, будет стремиться к длине окружности при неограниченном увеличении числа его сторон, а площадь этого многоугольника — к площади круга, ограниченного данной окружностью (рис. 225).

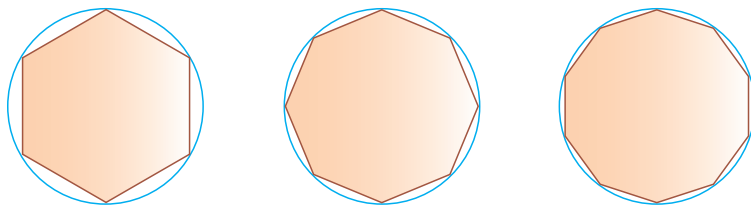


Рис. 225

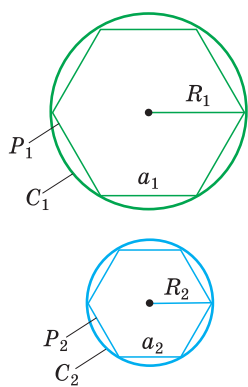


Рис. 226

Используя этот факт, выведем уже известные вам формулы длины окружности $C = 2\pi R$ и площади круга $S = \pi R^2$, где R — радиус окружности и круга.

Вначале покажем, что отношение длины окружности C к ее диаметру $D = 2R$ есть величина постоянная, одна и та же для всех окружностей. Для этого рассмотрим две окружности и два правильных вписанных в них многоугольника с одинаковым числом сторон n , где a_1 — сторона первого, a_2 — сторона второго многоугольника, P_1 и P_2 — их соответствующие периметры, C_1 — длина первой, а C_2 — длина второй описанной окружности (рис. 226).

Найдем отношение указанных периметров:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{n} \cdot a_1}{\frac{1}{n} \cdot a_2} = \frac{2R_1 \sin \frac{180^\circ}{n}}{2R_2 \sin \frac{180^\circ}{n}} = \frac{2R_1}{2R_2}.$$

При неограниченном увеличении числа n периметр P_1 устремится к C_1 , периметр P_2 — к C_2 , а отношение $\frac{P_1}{P_2}$ — к отношению $\frac{C_1}{C_2}$, и тогда $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$, $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$. Значит, отношение $\frac{C}{2R}$ одно и то же для всех окружностей.

Это отношение обозначается буквой π . Так как $\frac{C}{2R} = \pi$, то длина окружности $C = 2\pi R$. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема. Длина окружности радиусом R находится по формуле

$$C = 2\pi R.$$

Интересно знать. Число $\pi \approx 3,1415\dots$ — иррациональное и в десятичном виде представляет собой бесконечную непериодическую дробь. Оно было известно уже древним грекам. Еще Архимед нашел дробь $\frac{22}{7}$, довольно точно приближающую число π . Мы же для приближенных вычислений будем пользоваться в основном значением $\pi \approx 3,14$.

А теперь выведем формулу площади круга.

Теорема. Площадь круга радиусом R находится по формуле

$$S = \pi R^2.$$

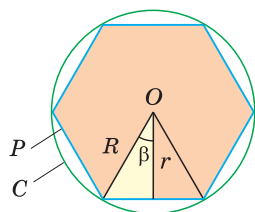


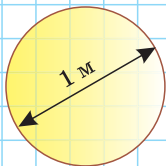
Рис. 227

Доказательство. Рассмотрим некоторую окружность радиусом R и вписанный в нее правильный n -угольник (рис. 227), площадь которого $S_n = pr = \frac{1}{2}Pr$, где P — его периметр, r — радиус вписанной окружности. При неограниченном увеличении числа n площадь S_n правильного n -угольника устремится к площади $S_{\text{кр}}$ круга радиусом R , периметр P — к длине C описанной окружности, а радиус r — к радиусу R (поскольку угол β устремится к нулю). Тогда $\frac{1}{2}Pr$ устремится к $\frac{1}{2}CR$, то есть к $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot R \cdot R$, что равно πR^2 , откуда $S_{\text{кр}} = \pi R^2$. Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

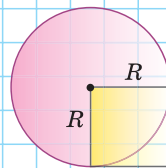
Тест 1

Диаметр круглого бревна 1 м. Хватит ли веревки длиной 3 м, чтобы обвязать бревно?



Тест 2

Что больше: площадь круга или площадь трех желтых квадратов со стороной, равной радиусу?



2. Длина дуги окружности и площадь сектора круга

Поскольку длина окружности $C = 2\pi R$, а ее градусная мера равна 360° , то длина дуги, содержащей 1° , равна $\frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{\pi R}{180^\circ}$. Тогда длина l дуги, содержащей n° (рис. 228), равна $\frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$.

Напомним, что *сектором* называется часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, соединяющей концы радиусов (рис. 229). Радиус круга называется *радиусом сектора*, указанная дуга — *дугой сектора*, центральный угол между радиусами, ограничивающими сектор, — *углом сектора*.

Так как площадь круга $S = \pi R^2$, то площадь сектора с углом в 1° равна $\frac{\pi R^2}{360^\circ}$, а с углом в n° градусов — $\frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$.

Заметим, что $S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ \right) \cdot R = \frac{1}{2} \cdot l_{\text{дуги}} \cdot R$, т. е. площадь сектора равна половине произведения длины дуги сектора на его радиус.

Пример 1. Пусть дана дуга окружности радиусом 9 см, содержащая 30° (рис. 230, а). Найдем длину дуги:

$$l_{\text{дуги}} = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ = \frac{\pi \cdot 9}{180^\circ} \cdot 30^\circ = 1,5\pi \approx 1,5 \cdot 3,14 \approx 4,7 \text{ (см)}.$$

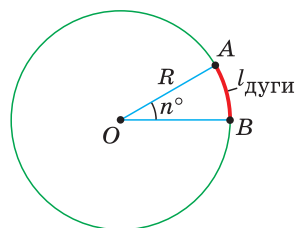


Рис. 228

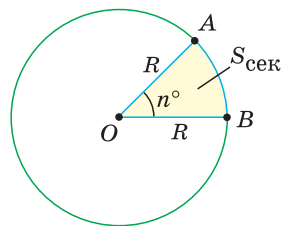


Рис. 229

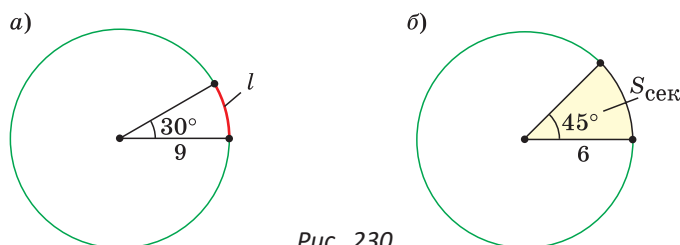


Рис. 230

Пример 2. Пусть угол сектора содержит 45° , а радиус равен 6 см (рис. 230, б). Найдем площадь сектора:

$$S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ = \frac{\pi \cdot 6^2}{360^\circ} \cdot 45^\circ = 4,5 \cdot \pi \approx 4,5 \cdot 3,14 \approx 14,1 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Замечание. При вычислении длины дуги (площади сектора) допустимы обе следующие записи: $l_{\text{дуги}} = \frac{\pi R}{180} \cdot n$ и $l_{\text{дуги}} = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$ ($S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n$ и $S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$).

Длина дуги и площадь сектора прямо пропорциональны градусной мере дуги и угла сектора. Поэтому длина дуги так относится к длине окружности, как градусная мера дуги относится к градусной мере окружности. Площадь сектора так относится к площади круга, как градусная мера угла сектора относится к градусной мере полного угла, т. е. справедливы пропорции:

$$\frac{l_{\text{дуги}}}{C} = \frac{n^\circ}{360^\circ},$$

$$\frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{кр}}} = \frac{n^\circ}{360^\circ},$$

$$\frac{l_{\text{дуги}}}{C} = \frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{кр}}}.$$

Данные пропорции также позволяют находить длину дуги и площадь сектора. Так, если длина окружности равна 10 см, а градусная мера ее дуги $n^\circ = 120^\circ$, то $\frac{l_{\text{дуги}}}{10} = \frac{120^\circ}{360^\circ}$, откуда длина данной дуги $l_{\text{дуги}} = \frac{10 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = 3\frac{1}{3}$ (см).

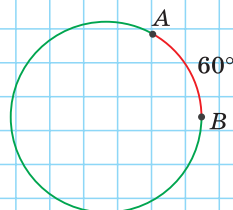
А если площадь круга равна 12 см^2 и угол сектора равен 80° , то $\frac{S_{\text{сек}}}{12} = \frac{80^\circ}{360^\circ}$, откуда площадь данного сектора $S_{\text{сек}} = \frac{12 \cdot 80^\circ}{360^\circ} = 2\frac{2}{3}$ (см²).

А теперь выполните **Тест 3** и **Тест 4**.

Тест 3

Длина окружности равна 24 см. Найдите длину дуги AB , содержащей 60° .

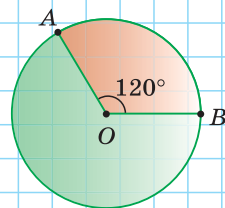
а) 6 см; б) 4 см; в) 12 см; г) 8 см.



Тест 4

Площадь круга равна 60 см^2 . Найдите площадь сектора AOB , угол которого равен 120° .

а) 24 см^2 ; б) 15 см^2 ; в) 20 см^2 ; г) 30 см^2 .



Задания к § 19

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. Дан сектор AOB (рис. 231), радиус которого равен 6, а площадь — 3π . Найдите длину дуги этого сектора. Ответ округлить до 0,1.

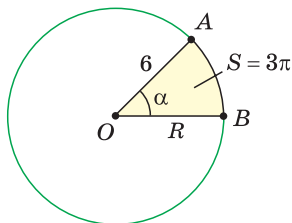


Рис. 231

Решение. Способ 1. Пусть $\angle AOB = \alpha$, откуда

$$S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha. \text{ Так как по условию } S_{\text{сек}} = 3\pi, \text{ то}$$

$$3\pi = \frac{\pi \cdot 6^2}{360^\circ} \cdot \alpha, \text{ откуда } \alpha = 30^\circ. \text{ Найдём длину дуги } AB:$$

$$\text{дуги } AB: \text{дуга } AB = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 6}{180^\circ} \cdot 30^\circ = \pi \approx 3,1.$$

Способ 2. Воспользуемся пропорцией $\frac{l_{\text{дуги}}}{C} = \frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{кр}}}$.
Тогда $\frac{l_{\text{дуги}}}{2\pi R} = \frac{S_{\text{сек}}}{\pi R^2}, \frac{l_{\text{дуги}}}{2} = \frac{S_{\text{сек}}}{R}, \frac{l_{\text{дуги}}}{2} = \frac{3\pi}{6},$
 $l_{\text{дуги}} = \pi \approx 3,1.$

Способ 3. Так как $S_{\text{сек}} = \frac{1}{2} \cdot l_{\text{дуги}} \cdot R$, то $3\pi = \frac{1}{2} \cdot l_{\text{дуги}} \cdot 6, l_{\text{дуги}} = \pi \approx 3,1.$
Ответ: 3,1.

Задача 2. Найдите площадь сегмента круга, радиус которого равен 12, если градусная мера дуги этого сегмента равна 120° .

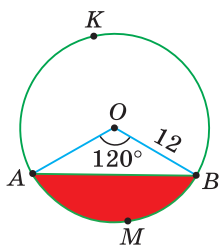


Рис. 232

Решение. Напомним, что *сегментом* называется часть круга, ограниченная хордой и дугой окружности, которая соединяет концы этой хорды.

Пусть O — центр данной окружности, $\text{дуга } AMB = 120^\circ$ (рис. 232). Тогда $\angle AOB = 120^\circ, OA = OB = 12$. Площадь сегмента AMB равна разности площади сектора $AOBM$ и площади равнобедренного треугольника AOB . Так как $S_{AOBM} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot 120^\circ =$

$$= \frac{\pi \cdot 12^2}{3} = 48\pi, \text{ а } S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}, \text{ то}$$

$$S_{AMB} = 48\pi - 36\sqrt{3}.$$

Ответ: $48\pi - 36\sqrt{3}$.

Замечание. Площадь сегмента AKB (см. рис. 232) можно найти как сумму площадей сектора $OAKB$ и треугольника AOB либо как разность площади круга и площади сегмента AMB .

Гимнастика ума

Фрагмент пазла представляет собой прямоугольник размером 30×50 мм, в котором на противоположных сторонах есть два полукруглых выреза и на двух других сторонах — два выступа в виде полукругов. Вырезы и выступы имеют одинаковый диаметр 12 мм (рис. 233). Найдите площадь этого фрагмента пазла в квадратных сантиметрах.

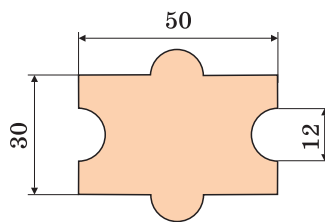


Рис. 233

Реальная геометрия

Из квадратного листа металла необходимо вырезать 4 одинаковых круга наибольшего диаметра (рис. 234). Определите, сколько процентов составят отходы.

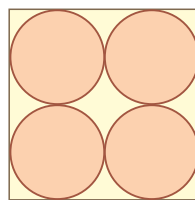


Рис. 234

Интересно знать. В 1987 г. был учрежден неофициальный праздник — день числа π , который отмечают любители математики 14 марта (3-й месяц, 14-е число).

Долгое время математики старались найти как можно большее число знаков числа π после запятой. Легко запомнить двенадцать первых знаков числа $\pi \approx 3,14159265358...$ при помощи следующей считалки: «*Это я знаю и помню прекрасно, но многие цифры мне лишни, напрасны*», — в которой количество букв в каждом слове соответствует очередной цифре числа π : «это» — 3, «я» — 1, «знаю» — 4 и т. д.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

275. Найдите приблизительно длину окружности, если ее радиус равен:

- а) 10 см; б) 1,5 дм; в) 0,05 м; г) $3\frac{1}{2}$ км.

(При вычислениях возьмите $\pi \approx 3,14$.)

276. Найдите, округлив до десятых, радиус окружности, если ее длина равна:

- а) 60 см; б) 300 мм; в) 6,28 дм; г) 1 м.

- 277.** Длина окружности равна 600 см. Найдите длину ее дуги, содержащей:
а) 90° ; б) 60° ; в) 120° ; г) 24° .
- 278.** Длина дуги окружности равна 12 см. Вычислите радиус окружности (округлив результат до 0,1 см), если градусная мера дуги составляет:
а) 45° ; б) 120° .
- 279.** Найдите градусную меру дуги (округлив ответ до 1°), если даны ее радиус R и длина l :
а) $R = 10$ см, $l = 15$ см; б) $R = 36$ м, $l = 12$ м.
- 280.** Вычислите приближенно градусную меру дуги, длина которой равна радиусу окружности. Ответ округлите до 1° .
- 281.** Длина окружности больше ее диаметра на 12 см. Найдите приближенно радиус окружности. Результат округлите до 0,1 см.
- 282.** Радиус закругления железнодорожного полотна (рис. 235) равен 1800 м, длина дуги закругления равна 900 м. Найдите, сколько примерно градусов содержит дуга закругления (при расчетах возьмите $\pi \approx 3$).
- 283.** а) Определите, на сколько увеличится длина C окружности, если ее радиус R увеличить на 1 см.
б) Во сколько раз увеличится площадь круга, если его радиус увеличить в 2 раза?
- 284.** Дуга AB окружности содержит 120° . Через ее точки A и B проведены касательные AC и BC (рис. 236). Докажите, что длина окружности, касающейся данной окружности и прямых AC и BC , равна длине дуги AB .
- 285.** Найдите приближенно площадь круга, взяв $\pi \approx 3,14$, если радиус круга равен:
а) 5 см; б) 10 м; в) 2,5 дм; г) 1 км.
- 286.** Найдите приближенно радиус круга (округлив ответ до 0,1), если площадь круга равна:
а) 4 см^2 ; б) 314 дм^2 .
- 287.** Площадь крышки люка равна $0,5 \text{ м}^2$. Найдите диаметр крышки люка. Ответ запишите в сантиметрах.



Рис. 235

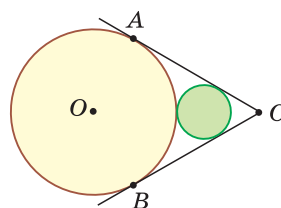


Рис. 236

288. а) Вычислите площадь круга, если длина его окружности равна 6,28 см. Ответ округлите до 0,01 см².
 б) Вычислите длину окружности, если площадь круга, ограниченного этой окружностью, равна 15 см². Ответ округлите до 0,01 см.

289. а) Найдите площадь кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с радиусами $R = 8$ см и $r = 5$ см.

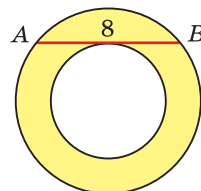


Рис. 237

- б) Дано кольцо (рис. 237). Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности и равна 8 см. Найдите площадь кольца.

290. В окружность вписан квадрат, в этот квадрат вписана окружность. Найдите отношение площадей кругов, ограниченных этими окружностями.

291. Площадь круга равна Q . Найдите площадь сектора с дугой, содержащей:

а) 30° ; б) 60° ; в) 120° ; г) 270° .

292. а) На рисунке 238, а) площадь закрашенного сектора относится к площади круга как 2 : 9. Найдите градусную меру угла сектора.
 б) На рисунке 238, б) площадь круга составляет 120 см². Найдите площадь закрашенного сектора.
 в) На рисунке 238, в) дуги EG и KP содержат 60° и 120° соответственно, площадь незакрашенного сектора EOG равна 90 см². Найдите сумму площадей закрашенных секторов KOE и POG .

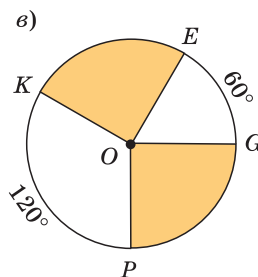
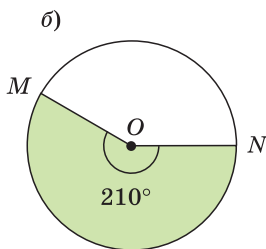
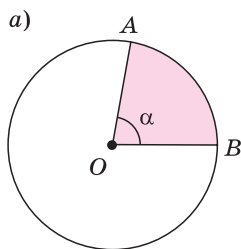


Рис. 238

293. На рисунке 239 изображена круговая диаграмма. Найдите площадь сектора, составляющего 40 %, если радиус круга равен 10 см.

294. Найдите отношение площадей вписанного и описанного кругов:

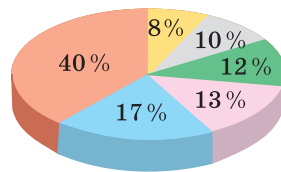


Рис. 239

- а) для правильного треугольника;
 б) для правильного шестиугольника.

295. Найдите площадь сектора круга с углом α и радиусом R , если:

а) $R = 4$ см, $\alpha = 15^\circ$;

б) $R = 2$ м, $\alpha = 135^\circ$.

296. а) Вычислите радиус сектора, если его площадь равна 16π , а дуга сектора содержит 40° .

б) Вычислите площадь сектора, если площадь круга равна 256π , а длина дуги этого сектора равна 4π .

 **297.** Из тонкого металлического круга вырезали правильный треугольник наибольшей площади. Определите, сколько процентов составили отходы. Ответ округлите до 1 %.

 **298.** Определите площадь сегмента окружности радиусом R с дугой, равной α , если:

а) $\alpha = 60^\circ$;

б) $\alpha = 270^\circ$.

 **299.** Из концов дуги AB к окружности, радиус которой равен R , проведены касательные, которые пересекаются в точке D . Определите площадь фигуры, заключенной между этими касательными и дугой, если градусная мера дуги AB равна:

а) 90° ; б) 120° .

 **300.** а) Дан правильный треугольник со стороной, равной 2. Построены три сектора с центрами в вершинах треугольника и радиусами, равными 1 (рис. 240). Найдите площадь желтой части треугольника.

б) Дан сектор с углом 90° и радиусом, равным 4 (рис. 241). На его радиусах построены полукруги. Найдите площадь красной части сектора.

 **301.** На рисунке 242 изображены три круга равного радиуса площадью 12 см^2 каждый, центры которых находятся в вершинах произвольного треугольника. Найдите сумму площадей трех закрашенных секторов этих кругов.

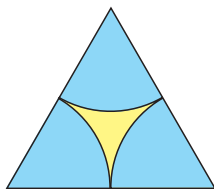


Рис. 240

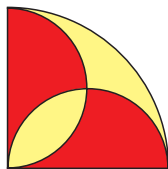


Рис. 241

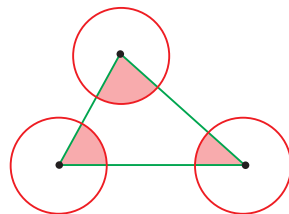


Рис. 242

302. Два круга радиусом R каждый расположены на плоскости так, что окружность одного проходит через центр другого. Определите площадь общей части кругов.

303. Дан круг радиусом 1 и вписанный угол ABC , равный 60° (рис. 243). Найдите наибольшее значение площади закрашенной фигуры.

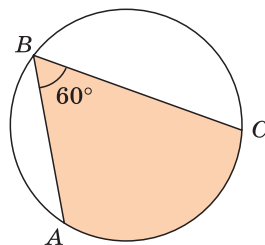


Рис. 243



При помощи **Интернета** выясните, почему фразеологизм «квadrатура круга» означает «неразрешимую задачу».

Гимнастика ума

Допустим, что земной шар вдоль экватора (длина экватора примерно равна 40 000 км) обтянули нитью. Затем эту нить удлиннили на 20 см и равномерно (на одинаковом расстоянии от поверхности Земли) расположили по окружности над экватором (рис. 244). Сможет ли в полученный зазор между нитью и поверхностью Земли пролезть мышка?



Найдите размер этого зазора.

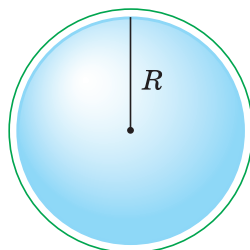


Рис. 244

Реальная геометрия

Яблочный пирог диаметром 30 см стоит 30 р. Сколько должен стоять яблочный пирог диаметром 20 см (рис. 245)? Подсказка: ответ 20 р. неверный.

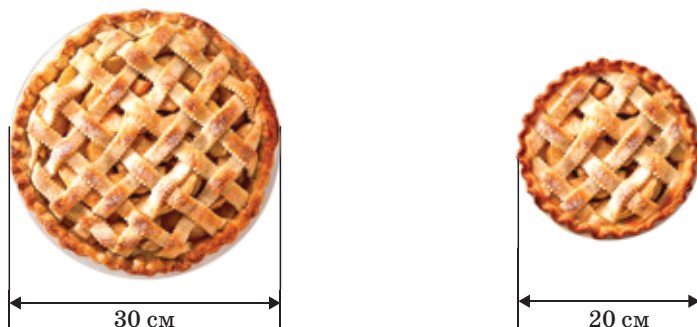
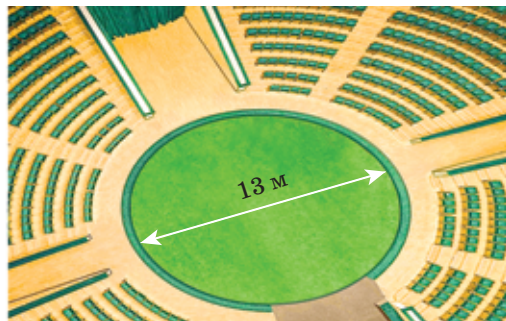


Рис. 245

Интересно знать. Белорусский государственный цирк находится на проспекте Независимости в Минске. Первое представление в нем состоялось в 1959 г. Минский цирк вмещает 1580 зрителей. Диаметр цирковой арены (манежа) равен 13 м, как и во всех цирках мира.



С помощью **Интернета** выясните, как цирк связан с геометрией. В частности, что общего у слов «цирк» и «циркуль»? Почему диаметр манежа равен именно 13 м?



Задание. а) Определите длину окружности манежа. Подсчитайте, за сколько секунд обезьянка может оббежать манеж по окружности со скоростью 10 км/ч.

б) Определите площадь арены в квадратных метрах. Выясните, сколько ведер опилок понадобится, чтобы засыпать манеж, если одним ведром можно засыпать 9 дм^2 .

Геометрия 3D

Напомним, что в 8-м классе мы рассмотрели два тела вращения: цилиндр и конус. На рисунках 246 и 247 изображены эти тела и развертки их поверхности на плоскость.

Выполните задания 1 и 2, связанные с этими пространственными фигурами.

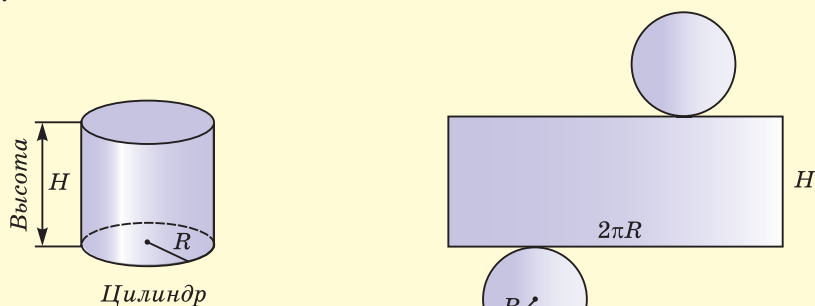


Рис. 246

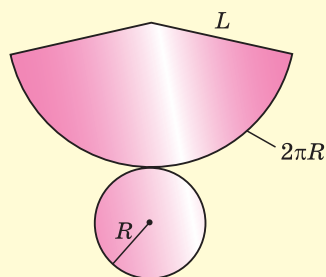
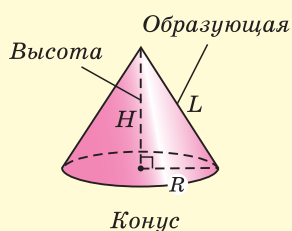


Рис. 247

Задание 1. Найдите площадь поверхности цилиндра, высота которого равна 10 см, а радиус основания — 4 см. Значение π возьмите равным 3.

Задание 2. Найдите площадь поверхности конуса, высота которого равна 4 см, а радиус основания — 3 см. Значение π возьмите равным 3.

Задание 3. Шар называется вписанным в конус, если он касается основания конуса в его центре и боковой поверхности по некоторой окружности (рис. 248). Центр шара при этом лежит на высоте конуса. Если провести плоскость через высоту конуса, то в сечении конуса получится равнобедренный треугольник, а в сечении вписанного шара — его большой круг, вписанный в указанный равнобедренный треугольник. Найдите радиус шара, вписанного в конус с радиусом основания, равным 6 см, и высотой, равной 4 см.

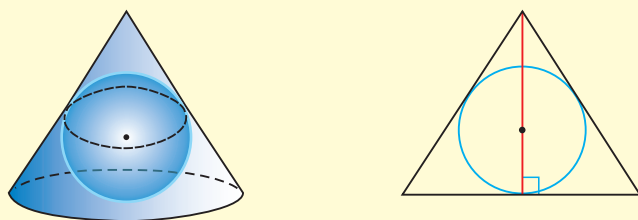


Рис. 248



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Формулу длины окружности.
2. Формулу площади круга.
3. Алгоритм нахождения длины дуги.
4. Алгоритм нахождения площади сектора.
5. Алгоритм нахождения площади сегмента.

Умеем

1. Находить длину окружности по ее радиусу.
2. Находить площадь круга по его радиусу.
3. Определять длину дуги окружности по радиусу и градусной мере дуги.
4. Определять площадь сектора по его радиусу и углу.
5. Определять площадь сегмента по радиусу окружности и градусной мере дуги сегмента.
6. Выводить формулу длины окружности.
7. Выводить формулу площади круга.



§ 20. Креативная геометрия

1. Луночки Гиппократа

Луночками Гиппократа называют серповидные фигуры, ограниченные дугами двух окружностей.

Задача. На отрезках AB , AM и MB построены полуокружности с центрами в точках O , O_1 и O_2 . $NM \perp AB$, $NM = 10$ (рис. 249). Найти площадь закрашенной части большого полуокруга.

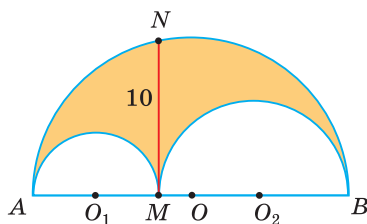


Рис. 249

Решение. Площадь закрашенной фигуры равна разности площадей полуокруга с диаметром $AB = 2R$ и двух полуокругов с диаметрами $AM = 2R_1$ и $MB = 2R_2$, т. е.

$$\begin{aligned} S_{ANBM} &= \frac{\pi \cdot R^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot R_1^2}{2} + \frac{\pi \cdot R_2^2}{2} \right) = \\ &= \frac{\pi}{8} \left((2R)^2 - ((2R_1)^2 + (2R_2)^2) \right) = \\ &= \frac{\pi}{8} \left(AB^2 - (AM^2 + MB^2) \right) = \frac{\pi}{8} \left((AM + MB)^2 - (AM^2 + MB^2) \right) = \\ &= \frac{\pi}{8} \cdot 2AM \cdot MB = \frac{\pi}{4} \cdot AM \cdot MB. \end{aligned}$$

Так как $\angle ANB = 90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр AB , то NM — высота прямоугольного треугольника ANB , проведенная к гипотенузе. А высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, — это среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу, т. е. $MN^2 = AM \cdot MB$. Следовательно, $S_{ANBM} = \frac{\pi}{4} \cdot MN^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 = 25\pi$.
Ответ: 25π .



При помощи **Интернета** выясните, один ли и тот же человек сформулировал клятву Гиппократ и исследовал гиппократовы луночки.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 304.** На сторонах прямоугольного треугольника ABC как на диаметрах построены полуокружности (рис. 250, а). Докажите, что $S_1 + S_2 = S_3$.
- 305.** На сторонах прямоугольного треугольника ABC как на диаметрах построены полуокружности (рис. 250, б). Найдите сумму площадей луночек Гиппократ $S_1 + S_2$, если $AC = 12$, $BC = 5$.

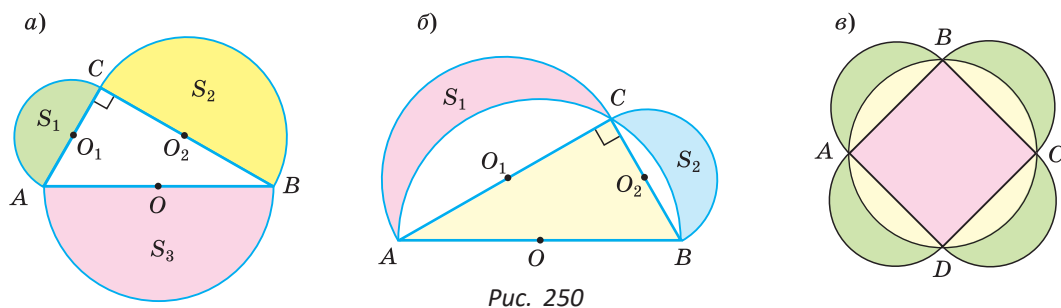


Рис. 250

306. Около квадрата $ABCD$ описан круг, а на его сторонах построены полуокружности как на диаметрах (рис. 250, в). Докажите, что сумма площадей зеленых луночек равна площади квадрата.

2. Золотое сечение

«Золотое сечение», или «божественная пропорция», — так называют математики деление отрезка некоторой точкой на части так, что больший из полученных отрезков является средним пропорциональным (средним геометрическим) между меньшим отрезком и целым. Другими словами, больший отрезок должен так относиться к меньшему, как целый отрезок относится к большему. Если на отрезке AB отмечена точка M и $\frac{AM}{MB} = \frac{AB}{AM}$, то отрезок AM — среднее пропорциональное отрезков AB и MB . Поэтому точка M делит отрезок AB в отношении золотого сечения.

Пусть $AB = 1$, $AM = x$, $MB = 1 - x$ (рис. 251).

Тогда $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$, откуда $x^2 + x - 1 = 0$. Учитывая, что $x > 0$, получим $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618033989\dots$



Рис. 251

Таким образом, больший отрезок AM составляет приблизительно 62 %, а меньший отрезок MB — приблизительно 38 % всего отрезка AB .

Число $\Phi = \frac{1}{x} = 1,618033989\dots$ — считается отношением золотого сечения. Оно примерно равно отношению 8 : 5 (рис. 252).

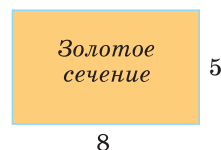


Рис. 252

Золотое сечение обладает определенной гармонией, которую человек находит прекрасной. Многие художественные, музыкальные, поэтические произведения, шедевры архитектуры содержат в своей структуре золотое сечение. Опытным путем установлено, что оптимальным человеку кажется прямоугольник, длина и ширина которого находятся в отношении золотого сечения. Физиологи объясняют это тем, что поле зрения человека, т. е. та часть окружающего мира, которую видит человек, представляет собой

прямоугольник со сторонами, находящимися в отношении золотого сечения.

Известно, например, что в знаменитой скульптуре Венеры Милосской (рис. 253) — эталоне женской красоты — талия делит фигуру в отношении золотого сечения.

Примечателен один исторический факт. Когда информация о Венере Милосской и золотом сечении была опубликована в одном из популярных журналов начала XX в., то в магазинах поблизости женских гимназий вдруг исчезли портняжные метры. Их раскупили девушки гимназистки, чтобы проверить, насколько их фигура близка к идеалу и какой высоты каблук следует носить, чтобы к нему приблизиться.

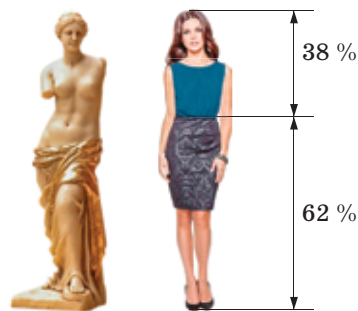


Рис. 253

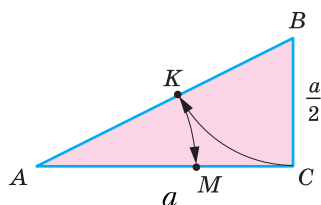


Рис. 254

Покажем способ деления отрезка в отношении золотого сечения при помощи циркуля и линейки. Пусть дан отрезок, равный a . Построим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = a$ и $BC = \frac{a}{2}$ (рис. 254). На гипотенузе AB отложим отрезок BK , равный отрезку BC . Затем на катете AC отложим отрезок AM , равный отрезку AK . Точка M делит отрезок AC в отношении золотого сечения, т. е. $\frac{AM}{MC} = \frac{AC}{AM}$. Убедитесь в этом самостоятельно.

3. Построение правильного пятиугольника

С давних времен построению правильных многоугольников при помощи циркуля и линейки математики уделяли большое внимание. Древние греки умели строить правильные треугольники, четырехугольники, пятиугольники, а также правильные многоугольники, получаемые удвоением числа их сторон: 6-угольники, 8-угольники, 10-угольники и т. д. Далее дело зашло в тупик: они не могли найти способ построения правильных 7-угольников, 9-угольников, 11-угольников. И только 2000 лет спустя великий немецкий математик XVII в. Карл Гаусс решил эту математическую проблему. Будучи 19-летним юношей, он доказал, что можно построить правильный 17-угольник, а вот 7-угольник, 9-угольник, 11-угольник, 13-угольник циркулем и линейкой построить нельзя. Задача о построении правильного 17-угольника была его первым научным открытием. Несмотря на выдающиеся достижения Гаусса в области математики, этой первой своей решенной проблеме он придавал такое значение, что в конце жизни завещал изобразить на могильном камне правильный 17-угольник.

Рассмотрим правильный пятиугольник. Если в нем провести все диагонали (рис. 255), то получится звезда (звездчатый пятиугольник). Звезда была символом школы Пифагора. Замечательно то, что точки пересечения диагоналей пятиугольника делят их в отношении золотого сечения: $\frac{AM}{MC} = \frac{AC}{AM}$. Докажем это.

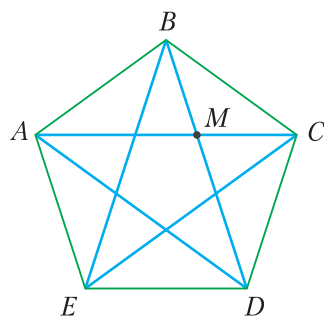


Рис. 255

Так как $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ — равные равнобедренные треугольники (рис. 256), то $\angle BAC = \angle ACB = \angle DBC$. Поскольку $AC \parallel ED$, $BD \parallel AE$ (докажите самостоятельно), то $AMDE$ — параллелограмм, поэтому $AM = ED = x$. Но $BC = ED = x$ как стороны пятиугольника. Из подобия треугольников ABC и BMC (по двум углам) следует $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{MC}$, или $\frac{AC}{AM} = \frac{AM}{MC}$. Следовательно, точка M делит отрезок AC в отношении золотого сечения.

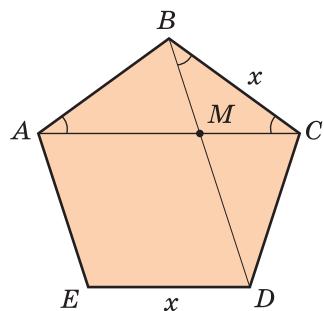


Рис. 256

Рассмотрим задачу о построении правильного пятиугольника при помощи циркуля и линейки. Для построения правильного пятиугольника можно взять произвольный отрезок d , равный диагонали правильного пятиугольника, и разделить его в отношении золотого сечения. Получив отрезок x , который равен стороне правильного пятиугольника, можно легко построить правильный пятиугольник. Продолжите построение сами.

Задача о построении правильного пятиугольника равносильна построению углов, равных 36° , 72° , 108° , а также построению равнобедренного треугольника, биссектриса угла при основании которого разбивает данный треугольник на два равнобедренных. Пусть в треугольнике ABC (рис. 257) $\angle B = 36^\circ$, AK — биссектриса и $AB = BC = 1$. Обозначим $AC = AK = KB = x$, $KC = 1 - x$. Из свойства биссектрисы вытекает $\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{KC}$, $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$, откуда $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Таким образом, точка K делит отрезок BC в отношении золотого сечения. Из треугольника ABC по теореме косинусов

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ &= \frac{1^2 + 1^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}{2} = \\ &= \frac{2 - \frac{6-2\sqrt{5}}{4}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

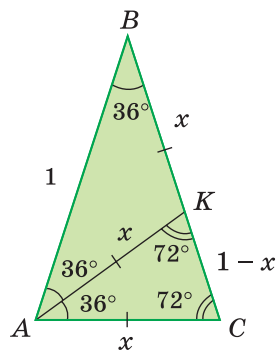


Рис. 257

Отметим, что сторона AC треугольника ABC является стороной правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиусом, равным AB .



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 307.** При помощи циркуля и линейки постройте:
- правильный пятиугольник по данной его стороне a ;
 - правильный пятиугольник, вписанный в данную окружность.
- 308.** При помощи циркуля и линейки постройте правильный десятиугольник с данной стороной b .
- 309.** Найдите точное значение $\cos 72^\circ$, используя рисунок 257.

Интересно знать. Карл Фридрих Гаусс — один из величайших математиков мира, его называли «королем математиков».

Сын печника, родившийся в Германии, он проявил способности к математике в раннем детстве. После окончания школы Гаусс поступил в Геттингенский университет на отделение филологии и хотел стать поэтом. Но позже Гаусс увлекся одной математической задачей и выбрал своей профессией математику.



ТЕМЫ ПРОЕКТОВ



1. Квадратура круга.
2. Золотое сечение.
3. Карл Гаусс и его достижения.
4. Задача Дидоны.

ЗАПОМИНАЕМ

1. Для квадрата со стороной a справедливо: $R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{a}{2}$.

2. Для правильного треугольника со стороной a справедливо:

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

3. Для правильного шестиугольника со стороной a справедливо:

$$R = a, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2.$$

4. Длина окружности находится по формуле $C = 2\pi R$.

5. Площадь круга находится по формуле $S = \pi R^2$.

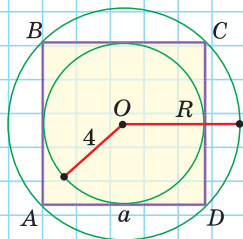
6. Длина дуги, содержащей n° , находится по формуле $l_{\text{дуги}} = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$.

7. Площадь сектора с углом, равным n° , находится по формуле $S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$.

ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

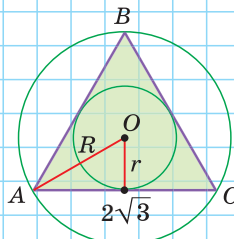
Тест 1

$ABCD$ — квадрат. Найдите a и R .



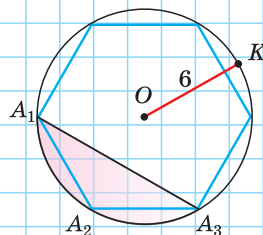
Тест 2

$\triangle ABC$ правильный. Найдите R и r .



Тест 3

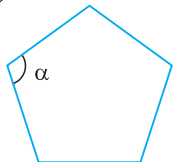
Дан правильный шестиугольник, радиус его описанной окружности $OK = 6$. Найдите площадь сегмента $A_1A_2A_3$.



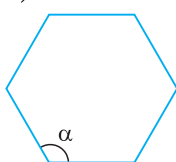
ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 4

1. Найдите угол α правильного n -угольника.

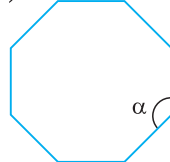
а)



б)

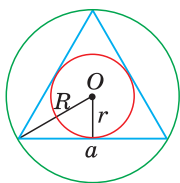


в)

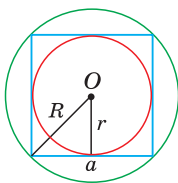


2. Найдите указанные элементы правильных многоугольников.

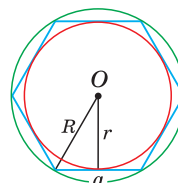
а) $a = 4\sqrt{3}$. $R = ?$ $r = ?$



б) $r = 6$. $a = ?$ $R = ?$

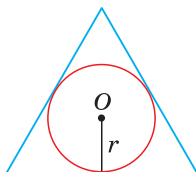


в) $R = 2\sqrt{3}$. $a = ?$ $r = ?$

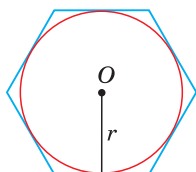


3. Найдите указанную величину для правильного многоугольника.

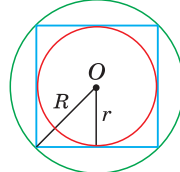
а) $S = 16\sqrt{3}$. $r = ?$



б) $r = 2\sqrt{3}$. $S_6 = ?$

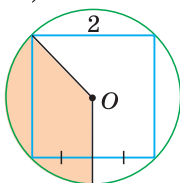


в) $R + r = 2 + \sqrt{2}$. $S_4 = ?$

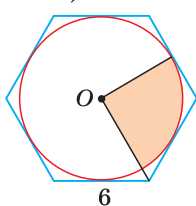


4. Дан правильный n -угольник. Найдите площадь и периметр закрашенной фигуры, зная сторону n -угольника.

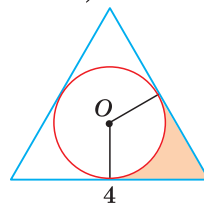
а)



б)

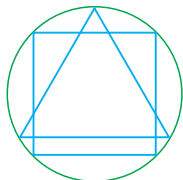


в)

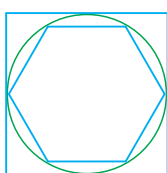


5. Найдите отношение площадей правильных многоугольников.

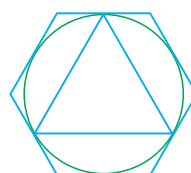
а) $S_3 : S_4 = ?$



б) $S_4 : S_6 = ?$



в) $S_3 : S_6 = ?$



Повторение главы III

1. Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Задача. Найти:

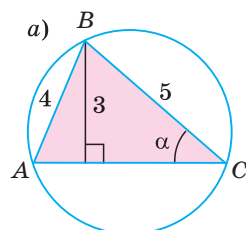
- а) радиус R описанной окружности $\triangle ABC$;
 б) сторону x параллелограмма $ABCD$.

Решение.

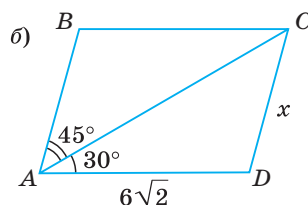
а) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{4}{\sin \alpha} = 2R$, $\frac{4}{\frac{3}{5}} = 2R$, $R = 3\frac{1}{3}$;

б) $\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$, $x = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{6\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6$.

Ответ: а) $3\frac{1}{3}$; б) 6.



$R = ?$



2. Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

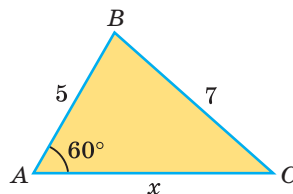
Задача. Найти сторону x треугольника ABC .

Решение.

$$7^2 = 5^2 + x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x \cdot \cos 60^\circ, \quad 49 = 25 + x^2 - 10 \cdot x \cdot \frac{1}{2},$$

$$x^2 - 5x - 24 = 0, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 8.$$

Ответ: 8.



3. Свойство диагоналей параллелограмма

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

4. Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Задача. Найти площадь треугольника ABC .

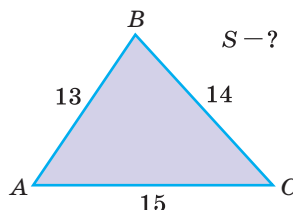
Решение.

$$p = \frac{13+14+15}{2} = 21, \quad p-c = 21-13 = 8,$$

$$p-a = 21-14 = 7, \quad p-b = 21-15 = 6,$$

$$S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84.$$

Ответ: 84.



Повторение главы IV

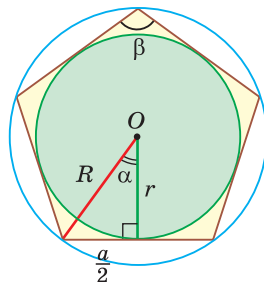
1. Правильный n -угольник

Все стороны и все углы равны.

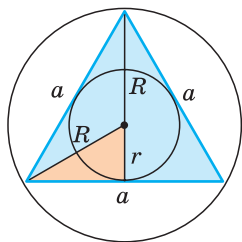
Можно описать и можно вписать окружность, их центры совпадают.

$\beta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ — внутренний угол.

$$R = \frac{a}{2} : \sin \alpha = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \quad r = \frac{a}{2} : \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

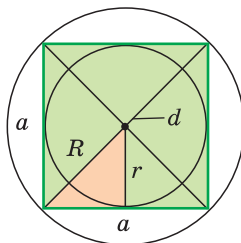


2. Правильный треугольник, четырехугольник, шестиугольник



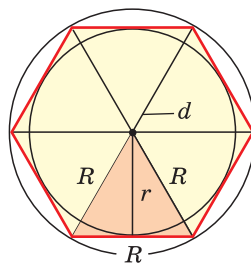
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



$$d = a\sqrt{2}, \quad a = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

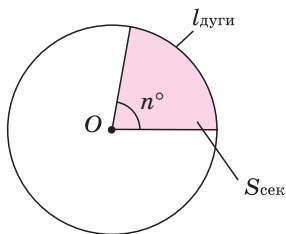
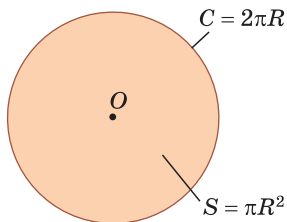
$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad r = \frac{a}{2}$$



$$a = R, \quad S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$d = 2a, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

3. Длина окружности и площадь круга



4. Длина дуги

$$\frac{l_{\text{дуги}}}{2\pi R} = \frac{n^\circ}{360^\circ}$$

5. Площадь сектора

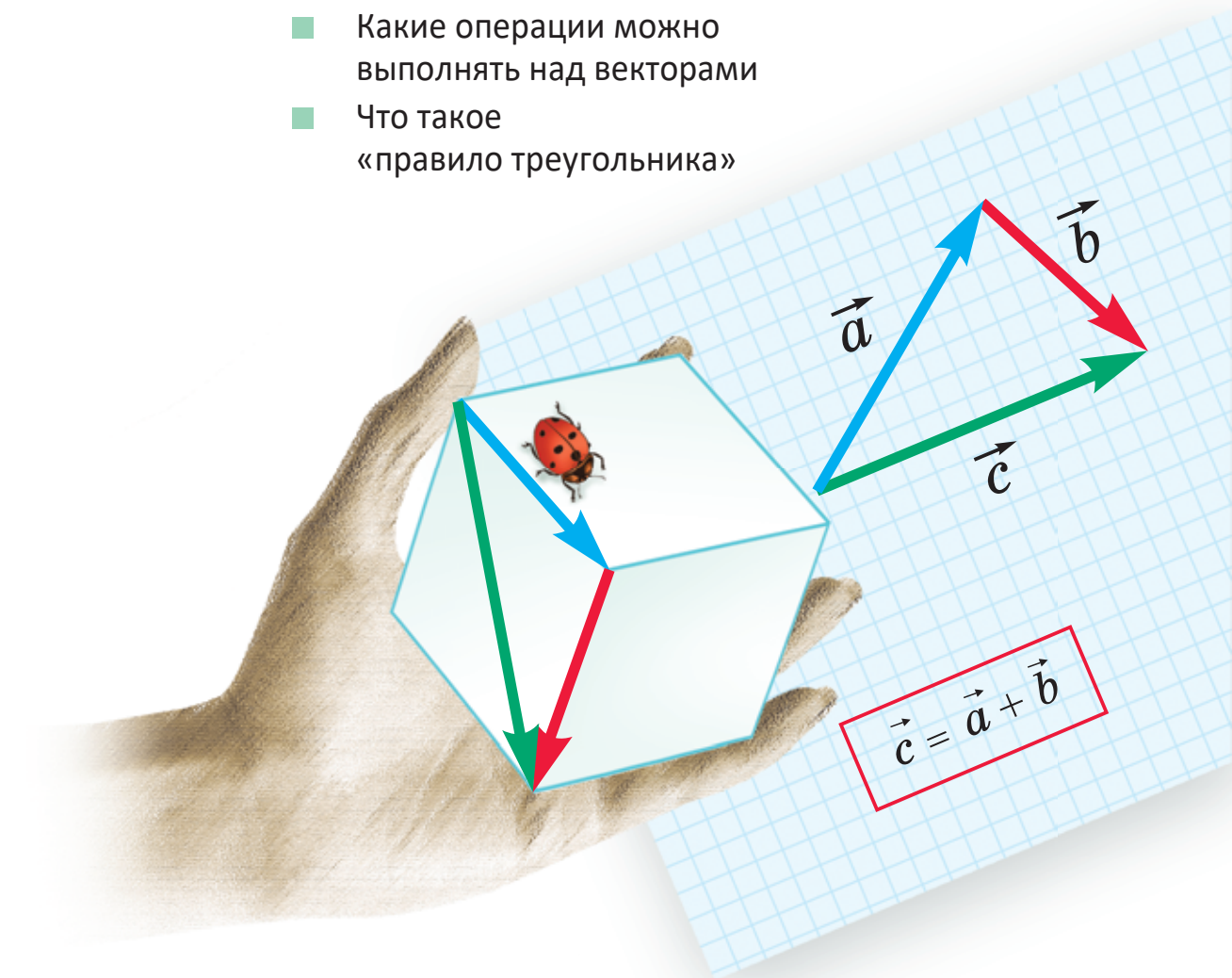
$$\frac{S_{\text{сек}}}{\pi R^2} = \frac{n^\circ}{360^\circ}$$

Глава V

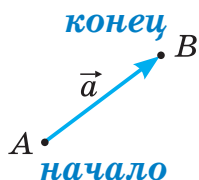
Векторы

В этой главе вы узнаете:

- Что такое вектор в геометрии
- Какие операции можно выполнять над векторами
- Что такое «правило треугольника»



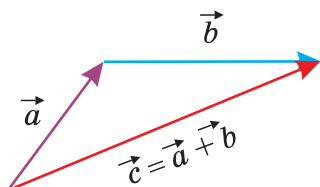
Вектор — направленный отрезок



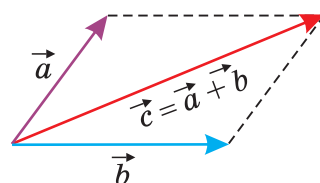
$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

$|\overrightarrow{AB}|$ — длина вектора

СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

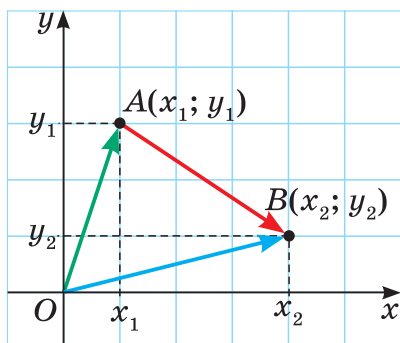


правило треугольника



правило параллелограмма

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА



$\overrightarrow{OA}(x_1; y_1), \overrightarrow{OB}(x_2; y_2)$ — радиус-векторы

$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ — от координат конца отнять координаты начала

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ — длина вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$

**Сложение (вычитание) векторов,
заданных координатами**

$$\vec{a}(a_1; a_2) \pm \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2)$$



§ 21. Вектор. Виды векторов

1. Что такое вектор

Из курса физики вам известно, что физические величины, которые характеризуются не только численным значением, но и направлением, называются векторными величинами или *векторами*. Например, скорость, сила, перемещение — векторные величины. На чертеже векторы изображаются в виде отрезка со стрелкой. Длина этого отрезка показывает относительное численное значение вектора, а стрелка — направление величины. Дадим математическое определение вектора.

Вектором называется направленный отрезок, т. е. отрезок, один конец которого принимается за начало, а другой — за конец вектора.

Различают векторы на плоскости и в пространстве. Мы рассмотрим векторы на плоскости.

Вектор обозначается двумя большими латинскими буквами (первой записывается начало, а второй — конец вектора) либо одной малой латинской буквой, над которой ставится стрелка: $\overline{AB}$ или $\vec{a}$, $\overline{NM}$ или $\vec{m}$ (рис. 258).

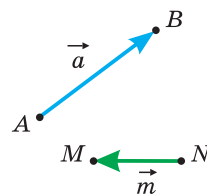


Рис. 258

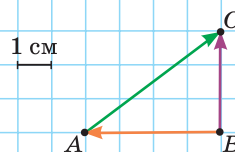
Векторы определяются *длиной* и *направлением*. Длина вектора, а по-другому, *модуль* вектора или *абсолютная величина* вектора, — это длина отрезка, изображающего вектор. В математике длина вектора обозначается знаком модуля: $|\overline{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Нулевым вектором (нуль-вектором) называется вектор, начало и конец которого совпадают. Нулевой вектор обозначается символом $\vec{0}$ или $\overline{AA}$, $\overline{BB}$ и т. д. Длина нулевого вектора считается равной нулю, с ним не связывают никакого направления.

А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

- Назовите векторы, изображенные на рисунке.
- Найдите длину каждого из названных векторов, если сторона клеточки равна 1 см.



2. Коллинеарные векторы

Коллинеарными векторами называются векторы, которые лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то пишут $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Коллинеарные векторы, которые одинаково направлены, называются *сонаправленными*, а коллинеарные векторы, направленные в противоположные стороны, — *противоположно направленными* векторами.

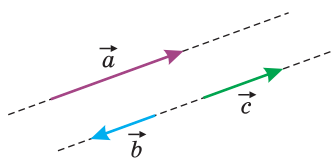


Рис. 259

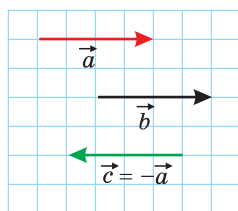


Рис. 260

На рисунке 259 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — коллинеарные, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ сонаправленные, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ противоположно направлены. Это записывают так: $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{c}$, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow \downarrow \vec{c}$.

Равными векторами называются два вектора, которые равны по длине и совпадают по направлению. Противоположными векторами называются два вектора, которые равны по длине, но противоположны по направлению. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают $-\vec{a}$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ противоположен вектору $\overrightarrow{AB}$, т. е. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

На рисунке 260 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ противоположны, т. е. $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{c} = -\vec{a}$.

Замечание. Следует различать понятия «равные векторы» и «векторы, равные по длине». Равные по длине векторы могут отличаться по направлению. Также следует различать понятия «противоположные векторы», которые равны по длине, и «противоположно направленные векторы», которые могут отличаться по длине.

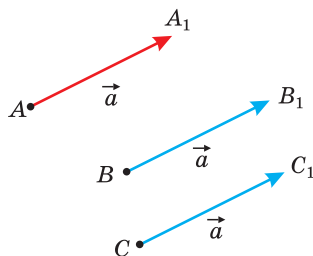


Рис. 261

Если точка A — начало вектора, то говорят, что вектор отложен от точки. От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Равные векторы, отложенные от разных точек, часто обозначают одной и той же буквой. Также говорят, что это один и тот же вектор, но отложенный от разных точек. На рисунке 261 вектор $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$ отложен от точек B и C , т. е. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = \vec{a}$.

3. Угол между векторами

Угол между ненулевыми векторами, отложенными от одной точки, равен углу между лучами, выходящими из общего начала векторов в направлениях, задаваемых каждым вектором, и имеет величину от 0° до 180° .

Углом между векторами называется угол между векторами, коллинеарными данным и отложенными от одной точки.

На рисунке 262 угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен α . Это записывают так: $\angle(\vec{m}; \vec{n}) = \alpha$.

Если векторы сонаправленные, то угол между ними равен 0° (рис. 263, а). Если векторы противоположно направленные, то угол между ними равен 180° (рис. 263, б). Если угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 90° (рис. 263, в), то векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ называются перпендикулярными (или *ортогональными*). Это записывают так: $\vec{m} \perp \vec{n}$. Можно считать, что нулевой вектор перпендикулярен и коллинеарен любому вектору.

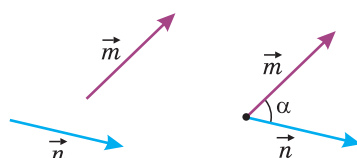


Рис. 262

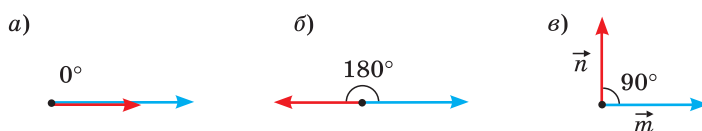


Рис. 263

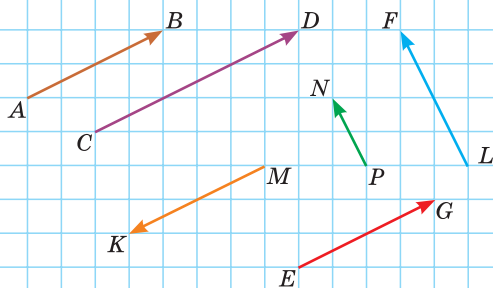
А теперь выполните **Тест 2**.

Тест 2

По рисунку найдите:

- коллинеарные векторы;
- сонаправленные векторы;
- противоположно направленные векторы;
- равные векторы;
- противоположные векторы;
- векторы, равные по длине;
- угол между векторами:

$\vec{AB}$ и $\vec{MK}$; $\vec{EG}$ и $\vec{PN}$.



При помощи **Интернета** выясните, что означает слово «вектор» и кто из математиков ввел понятие вектора.



Задания к § 21

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 264).

а) Доказать, что векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ равны.

б) Найти угол между векторами $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{BC}$, если $\angle ABD = 80^\circ$, $\angle C = 60^\circ$.

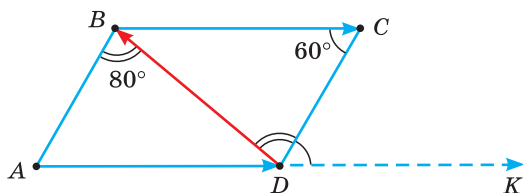


Рис. 264

Решение. а) По свойству параллелограмма стороны AD и BC равны и параллельны. Поэтому векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправленные и равные по длине. Следовательно, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

б) Отложим от точки D вектор $\overrightarrow{DK}$, равный вектору $\overrightarrow{BC}$ (см. рис. 264). Поскольку равные векторы коллинеарны, то $DK \parallel BC$. Угол BDK — искомый. Так как $\angle BDC = \angle ABD = 80^\circ$, $\angle CDK = \angle BCD = 60^\circ$ как накрест лежащие углы при соответствующих параллельных прямых, то $\angle BDK = 80^\circ + 60^\circ = 140^\circ$.

Ответ: 140° .



РЕШАЕМ

САМОСТОЯТЕЛЬНО

310. Отметьте три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой. Изобразите два вектора с началом в точке C и концами в точках A и B . Изобразите вектор с началом в точке B и концом в точке A . Запишите полученные векторы, используя буквы A , B и C .

311. Перенесите векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а также точки A и B в тетрадь (рис. 265).

а) Отложите от точки A векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

б) Отложите от точки B векторы $\vec{c}$ и $-\vec{a}$. Найдите угол между векторами $\vec{c}$ и $-\vec{a}$.

312. Начертите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EG}$ такие, чтобы выполнялись условия:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EG}$ коллинеарны, $|\overrightarrow{AB}| = 2$ см, $|\overrightarrow{CD}| = 3$ см, $|\overrightarrow{EG}| = 3,5$ см;

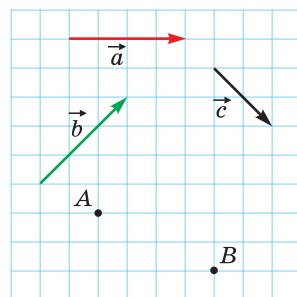


Рис. 265

б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EG}$ не коллинеарны, $|\overrightarrow{AB}| = 1$ см, $|\overrightarrow{CD}| = 4$ см, $|\overrightarrow{EG}| = 4$ см.

313. Начертите вектор $\vec{a}$. Изобразите:

- а) векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$, не равные вектору $\vec{a}$ и такие, что $\vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a}$, $\vec{c} \uparrow \downarrow \vec{a}$;
 б) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ такие, что $\vec{m} = \vec{a}$, а $\vec{n} = -\vec{a}$.

314. Начертите векторы:

- а) $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{NL}$, равные по длине и неколлинеарные;
 б) $\overrightarrow{GE}$ и $\overrightarrow{FH}$, равные по длине и противоположно направленные.

315. а) Начертите два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ произвольной длины. Найдите угол между этими векторами (используйте транспортир).

б) Начертите два вектора $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ произвольной длины, угол между которыми равен:

- 1) 60° ; 2) 135° ; 3) 90° .

316. Начертите квадрат $ABCD$. Используя точки A , B , C и D как начало или конец вектора, запишите:

- а) вектор, равный вектору $\overrightarrow{BC}$;
 б) векторы, противоположные вектору $\overrightarrow{DA}$;
 в) все векторы, перпендикулярные вектору $\overrightarrow{AB}$;
 г) векторы, перпендикулярные вектору $\overrightarrow{AC}$.

317. Начертите произвольный вектор $\overrightarrow{AB}$. На прямой AB отметьте точку C и отложите от нее:

- а) вектор, равный вектору $\overrightarrow{AB}$;
 б) вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{AB}$.

318. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 266).

- а) Запишите вектор, равный вектору $\overrightarrow{CB}$, и векторы, противоположные вектору $\overrightarrow{CD}$.
 б) Используя данные рисунка 266, найдите угол между векторами: $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CD}$.

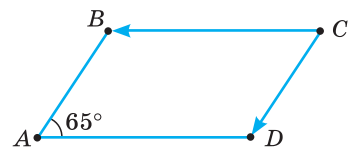


Рис. 266

319. Дан прямоугольник $ABCD$ (рис. 267). Запишите, какими являются следующие векторы, используя только термины «равные», «противоположные», «перпендикулярные»:

- а) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$;
 в) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{DO}$; г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

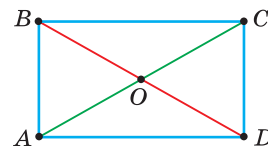


Рис. 267

- 320.** В треугольнике ABC проведены медианы AK и CN , которые пересекаются в точке M (рис. 268). Используя отмеченные точки, запишите:

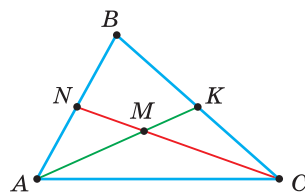


Рис. 268

- а) две пары равных векторов;
 б) какие-либо три сонаправленных вектора;
 в) какие-либо два противоположных вектора.

- 321.** а) В прямоугольнике $ABCD$ $AD = 8$ см, $AB = 6$ см, O — точка пересечения диагоналей. Найдите $|\overrightarrow{DO}|$.

- б) В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 7$ см, M — середина гипотенузы. Найдите $|\overrightarrow{CM}|$.

- 322.** AK — биссектриса равностороннего треугольника ABC . Найдите угол между векторами:

- а) $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{KC}$; в) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$; г) $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{BC}$.

- 323.** Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, если:

- а) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны и не лежат на одной прямой;
 б) векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$ противоположны и не лежат на одной прямой.

- 324.** Докажите, что угол между данными векторами равен углу между векторами, противоположными данным.

-  **325.** а) Векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PK}$ равны и точки M , N и K не лежат на одной прямой. Докажите, что отрезки MK и NP точкой пересечения делятся пополам.

- б) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны по длине, не коллинеарны и не имеют общих точек, векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны. Докажите, что $\angle BAD = \angle CDA$.



§ 22. Действия над векторами

1. Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $k \neq 0$ называется вектор $\vec{b} = k\vec{a}$, который при $k > 0$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$, при $k < 0$ противоположно направлен вектору $\vec{a}$ и по длине отличается от вектора $\vec{a}$ в $|k|$ раз, т. е. $|\vec{b}| = |k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.

Если $k = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{b} = k\vec{a} = \vec{0}$.

Верно утверждение, что если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то существует число k такое, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

На рисунке 269 изображены коллинеарные векторы $\vec{a}$, $2\vec{a}$, $-1,5\vec{a}$.

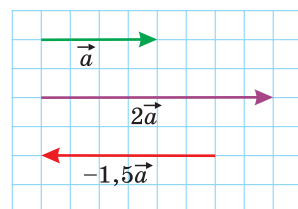


Рис. 269

Свойства умножения вектора на число:

- 1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
- 2) $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;
- 3) $k \cdot (m\vec{a}) = km \cdot \vec{a} = m \cdot (k\vec{a})$, где m и k — некоторые числа.

2. Сложение векторов

Если материальная точка A переместилась в точку B (рис. 270), а затем из точки B в точку C , то в результате она переместилась из точки A в точку C . Если представить первые два перемещения векторами $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$, то результирующее перемещение можно представить вектором $\vec{AC}$. Тогда вектор $\vec{AC}$ можно назвать суммой векторов $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$, т. е. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$. Заметим, что при указанном рассмотрении суммы векторов образован треугольник ABC .

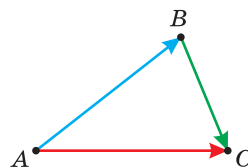


Рис. 270

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, получаемый по правилу треугольника или по правилу параллелограмма.

Правило треугольника. Для нахождения суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 271, а) следует от конца вектора $\vec{a}$ отложить вектор $\vec{b}$ (рис. 271, б). Вектор $\vec{c}$, проведенный из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$, равен $\vec{a} + \vec{b}$.



Правило треугольника

Рис. 271

При сложении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу треугольника можно отложить вектор $\vec{a}$ от некоторой точки, а затем применить указанное правило.

Для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ их сумму можно также найти по правилу параллелограмма.

Правило параллелограмма. Для нахождения суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно от начала вектора $\vec{a}$ отложить вектор $\vec{b}$ (рис. 272), построить на отрезках a и b как на соседних сторонах параллелограмм. Вектор $\vec{c}$, совпадающий с диагональю параллелограмма и выходящий из начала вектора $\vec{a}$, равен $\vec{a} + \vec{b}$.

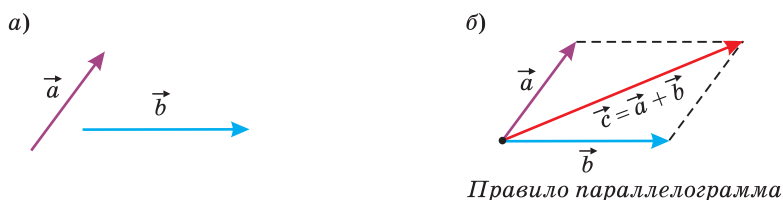


Рис. 272

Из указанных правил следует, что в равенстве $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ любой из векторов можно заменить на равный ему, т. е. если $\vec{d} = \vec{b}$, то $\vec{a} + \vec{d} = \vec{c}$.

Сумма противоположных векторов равна нулевому вектору, т. е. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$. Для любого вектора $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Для любых трех точек A , B и C плоскости справедливо равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены или противоположно направлены, то по правилу треугольника находим вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, как показано на рисунках 273, а, б.



Рис. 273

Если необходимо сложить три и более векторов, то следует от конца первого вектора отложить второй, от конца второго — третий и т. д. до последнего вектора. Затем нужно соединить начало первого вектора с концом последнего отрезком и указать направление результирующего вектора от начала первого к концу последнего вектора. Иногда указанный способ называют *правилом многоугольника*.

Так, на рисунке 274 вектор $\vec{e}$ равен сумме векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

Для n точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ и A_n плоскости верно равенство $\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \dots + \overline{A_{n-1} A_n} = \overline{A_1 A_n}$.

Например, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} = \overline{AF}$.

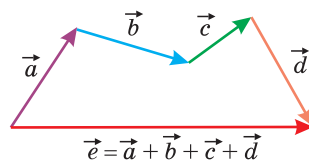


Рис. 274

Справедливы следующие свойства сложения векторов, где k и m — некоторые числа:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- 3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- 4) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$.

Докажем свойство 1). Пусть $\overline{AB} = \vec{a}$ и $\overline{AD} = \vec{b}$ (рис. 275). Найдём сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу параллелограмма, построив параллелограмм $ABCD$. Так как $\overline{DC} = \overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \overline{AD} = \vec{b}$, то по правилу треугольника, с одной стороны, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, с другой стороны, $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \vec{b} + \vec{a}$. Откуда $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

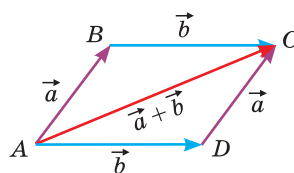


Рис. 275

Доказательство данного свойства для коллинеарных векторов рассмотрите самостоятельно. Свойства 2)—4) докажете самостоятельно.

3. Вычитание векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$, т. е. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$, если $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

Из данного определения вытекает правило вычитания векторов.

Правило вычитания. Для нахождения разности вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ можно от начала вектора $\vec{a}$ отложить вектор $\vec{b}$ (рис. 276), соединить концы этих векторов отрезком и указать на нем направление к концу уменьшаемого вектора $\vec{a}$.



Рис. 276

Разность коллинеарных векторов находится по тому же правилу. Рассмотрите этот случай самостоятельно.

Легко показать, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Отсюда, во-первых, вытекает второй способ нахождения разности векторов как суммы вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{b}$, а во-вторых, следует то, что слагаемые векторы в равенстве можно переносить из одной части в другую, сменив знак перед вектором на противоположный. Например, из равенства $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ следует $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

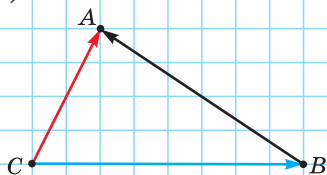
Для любых трех точек A, B и C плоскости справедливо $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

Какое утверждение неверно для рисунка:

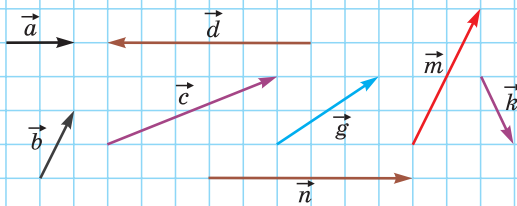
- 1) $\vec{CA} = \vec{CB} + \vec{BA}$;
- 2) $\vec{BA} = \vec{CA} - \vec{CB}$;
- 3) $\vec{CA} + \vec{CB} = \vec{BA}$;
- 4) $\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{CB}$?



Тест 2

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Укажите на рисунке вектор, равный:

- 1) $-3\vec{a}$;
- 2) $2\vec{b}$;
- 3) $\vec{a} + \vec{b}$;
- 4) $\vec{a} - \vec{b}$;
- 5) $2\vec{a} + \vec{b}$.



Задания к § 22

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. Дан параллелограмм $ABCD$, $\vec{AC} = \vec{a}$, $\vec{DB} = \vec{b}$ (рис. 277). Выразить векторы $\vec{AB}$, $\vec{CB}$, $\vec{CD}$ и $\vec{AD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

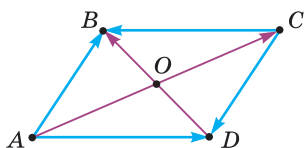


Рис. 277

Решение. Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \vec{OB} = \frac{1}{2}\vec{DB} = \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{a}.$$

$$\text{Тогда } \vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b});$$

$$\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a});$$

$$\vec{CD} = -\vec{AB} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}); \quad \vec{AD} = -\vec{CB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}).$$

$$\text{Ответ: } \vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}); \quad \vec{CB} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}); \quad \vec{CD} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}); \quad \vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}).$$

Задача 2. Дан треугольник ABC , AM — его медиана (рис. 278). Доказать, что $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

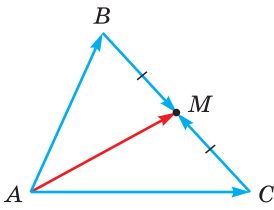


Рис. 278

Доказательство. Способ 1. По правилу треугольника $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$. Сложив почленно левые и правые части данных равенств, получим $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$. Так как векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{CM}$ противоположны, то их сумма равна нуль-вектору. Поэтому $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

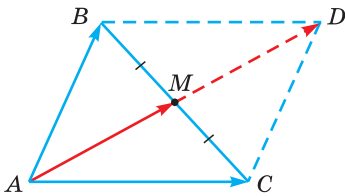


Рис. 279

Способ 2. Продлим вектор $\overrightarrow{AM}$ на его длину (рис. 279). Получим $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM}$. Четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. По правилу параллелограмма $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

326. Перенесите векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, изображенные на рисунке 280, в тетрадь. Постройте вектор:

- | | |
|------------------------------------|--|
| а) $\vec{a} + \vec{b}$; | б) $\vec{b} + \vec{c}$; |
| в) $\vec{a} - \vec{b}$; | г) $\vec{c} - \vec{b}$; |
| д) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; | е) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; |
| ж) $-0,5\vec{c} - \vec{a}$; | з) $\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$. |

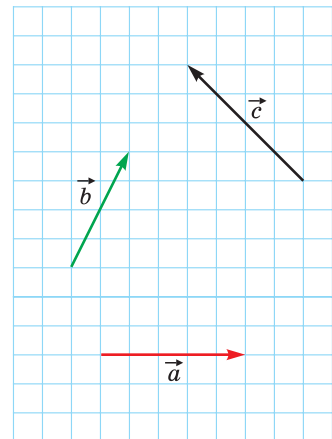


Рис. 280

327. Изобразите произвольный четырехугольник $MNPК$. Докажите, что:

- а) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KP}$;
 б) $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MK}$.

328. A , B , C и D — произвольные точки. Докажите, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

329. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной, равной 4. Найдите:

- | | |
|--|--|
| а) $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} $; | б) $ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} $; |
| в) $ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} $; | г) $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} $. |

330. Дан прямоугольный треугольник ABC , $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$. Найдите:

- а) $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}|$; б) $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}|$;
в) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$; г) $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$.

331. Пользуясь свойствами действий над векторами, упростите выражение:

- а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC}$; б) $(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) - (\overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KA})$.

332. Дан треугольник ABC (рис. 281), M и N — середины сторон AB и AC соответственно, $\overrightarrow{AN} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор:

- а) $\overrightarrow{BM}$; б) $\overrightarrow{MN}$; в) $\overrightarrow{AB}$;
г) $\overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{BN}$; е) $\overrightarrow{AC}$.

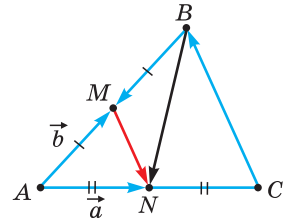


Рис. 281

333. BM — медиана треугольника ABC , $\overrightarrow{BA} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$. Выразите через векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ вектор $\overrightarrow{AM}$.

334. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 282), O — точка пересечения его диагоналей, $\overrightarrow{OC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор:

- а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{DB}$; в) $\overrightarrow{AB}$;
г) $\overrightarrow{AD}$; д) $\overrightarrow{CB}$; е) $\overrightarrow{CD}$.

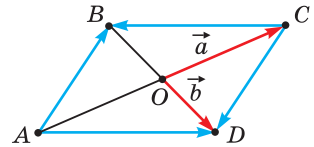


Рис. 282

335. Дан параллелограмм $ABCD$, O — точка пересечения его диагоналей, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор:

- а) $\overrightarrow{OC}$; б) $\overrightarrow{BO}$; в) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{DA}$.

336. а) Дан параллелограмм $ABCD$, M — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

б) $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, M — середина стороны AB , N — середина стороны CD . Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

337. M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что:

- а) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$; б) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

338. Пловец переплывает реку перпендикулярно берегу со скоростью $3\sqrt{3} \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, течение сносит его со скоростью $3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. С какой скоростью и под каким углом к берегу плывет пловец?

 339. Докажите, что:

а) модуль суммы векторов меньше либо равен сумме их модулей:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|;$$

б) модуль суммы векторов больше либо равен разности их модулей:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \geq ||\vec{a}| - |\vec{b}||.$$

 340. Дан треугольник ABC , на стороне BC взята точка K . Выразите вектор $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если:

а) $BK : KC = 2 : 1$;

б) $BK : KC = m : n$.

 341. $A_1A_2A_3A_4A_5$ — правильный многоугольник, O — его центр. Докажите, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} = \vec{0}$.



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение вектора.
2. Определение коллинеарных векторов.
3. Определение равных и противоположных векторов.
4. Правила треугольника и параллелограмма для сложения векторов.
5. Правило вычитания векторов.
6. Правило умножения вектора на число.

Умеем

1. Откладывать вектор, равный данному, от данной точки.
2. Находить сумму двух и более векторов.
3. Находить разность двух векторов.
4. Выполнять умножение вектора на число.



§ 23. Координаты вектора

1. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы и $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, где x и y — некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{c}$ *разложен* по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Числа x и y — коэффициенты разложения.

На рисунке 283 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{b}$, $ABCD$ — параллелограмм, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, коэффициенты разложения $x = 2$, $y = 3$.

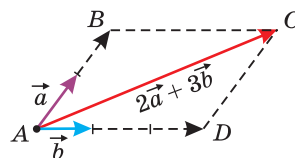


Рис. 283

Справедлива следующая теорема, которую мы примем без доказательства.

Теорема (о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам).

На плоскости любой вектор можно разложить по двум неколлинеарным векторам, причем единственным образом.

2. Координаты вектора в прямоугольной системе координат

Рассмотрим прямоугольную систему координат (рис. 284). На координатных осях от начала координат отложим единичные векторы (длины которых равны единице): на оси абсцисс вектор $\vec{i}$, сонаправленный с осью Ox , на

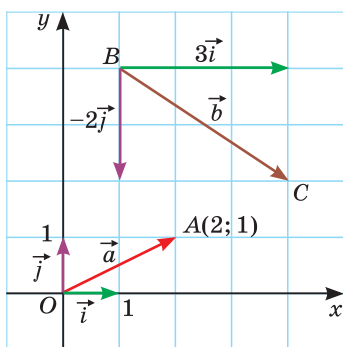


Рис. 284

оси ординат вектор $\vec{j}$, сонаправленный с осью Oy . Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ называются *координатными векторами*. Поскольку $\vec{i}$ и $\vec{j}$ не коллинеарны, то любой вектор $\vec{a}$ плоскости может быть разложен по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, причем единственным образом: $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$. Числа x и y называются координатами вектора $\vec{a}$ в данной системе координат. Договоримся координаты вектора записывать в круглых скобках любым из следующих способов: $\vec{a}(x; y)$, $\vec{a} = (x; y)$, $(\vec{a}; y)$.

На рисунке 284 $\vec{OA} = 2\vec{i} + \vec{j} = (2; 1)$, $\vec{BC} = 3\vec{i} - 2\vec{j} = (3; -2)$. Очевидно, что $\vec{i} = (1; 0)$, $\vec{j} = (0; 1)$. Нулевой вектор можно представить в виде $\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$, поэтому обе его координаты равны нулю: $\vec{0}(0; 0)$.

Вектор, начало которого находится в начале координат, а конец в данной точке, называется *радиус-вектором* этой точки. Заметим, что координаты вектора $\vec{OA}(2; 1)$ и координаты точки $A(2; 1)$ совпадают (см. рис. 284). Можно доказать, что координаты любой точки совпадают с координатами ее радиус-вектора, т. е. совпадают с координатами конца вектора. Например, если дана точка $A(a_1; a_2)$, то $\vec{OA} = (a_1; a_2)$.

Еще раз подчеркнем, что равные векторы имеют равные одноименные координаты, т. е. равные первые и равные вторые координаты. Это объясняется тем, что любой из множества равных векторов, будучи отложенным от начала координат, совпадет с равным ему радиус-вектором (от точки вектор, равный данному, можно отложить единственным способом), т. е. он будет иметь такие же координаты, как и этот радиус-вектор.

Верно и обратное утверждение: если одноименные координаты векторов равны, то и сами векторы равны между собой. Действительно, если даны векторы $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_1; y_1)$, то координаты равных им радиус-векторов будут $(x_1; y_1)$. А это значит, что радиус-векторы совпадают, т. е. равны между собой. Следовательно, равны и сами векторы $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_1; y_1)$.

На рисунке 285 $\vec{EG} = \vec{MN} = \vec{OA} = \vec{a}$, а так как $\vec{OA} = (2; 1)$, то $\vec{EG} = (2; 1)$, $\vec{MN} = (2; 1)$.

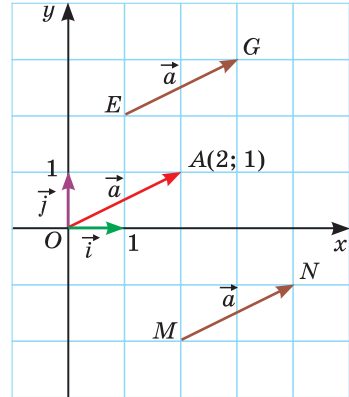


Рис. 285

Для нахождения координат вектора, заданного на координатной плоскости, можно использовать два подхода.

I. От начала данного вектора отложить координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и разложить по ним данный вектор.

II. Отложить от начала координат радиус-вектор, равный данному вектору, и найти координаты точки, являющейся концом этого радиус-вектора.

3. Действия над векторами, заданными координатами

Запишем свойства умножения вектора на число, сложения и вычитания векторов в виде формул:

1) $k\vec{a}(a_1; a_2) = \vec{b}(ka_1; ka_2)$ — координаты произведения вектора на число равны произведению координат вектора на это число;

2) $\vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$ — координаты суммы векторов равны сумме одноименных координат этих векторов;

3) $\vec{a}(a_1; a_2) - \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$ — координаты разности векторов равны разности одноименных координат этих векторов.

Согласно свойству 1) противоположные векторы имеют противоположные координаты и наоборот. Например, векторы $\vec{m}(3; 5)$ и $\vec{n}(-3; -5)$ — противоположны.

Докажем свойство 2). Пусть даны векторы $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$ и $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Тогда $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$, $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j}$. Таким образом, координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ равны $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

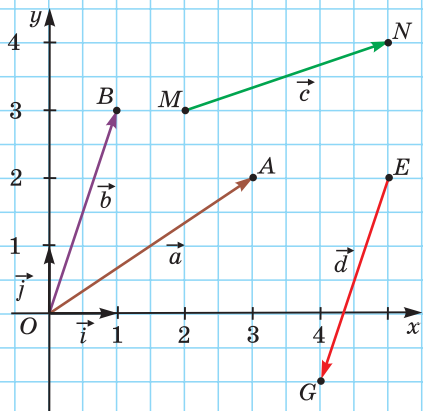
Пример 1. Пусть $\vec{a}(3; -2)$, $\vec{b}(-1; 6)$ и $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b}$. Найдём координаты векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (3; -2) + (-1; 6) = (3 - 1; -2 + 6) = (2; 4)$, $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2 \cdot (3; -2) - (-1; 6) = (6; -4) - (-1; 6) = (6 - (-1); -4 - 6) = (7; -10)$.

А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

По чертежу найдите координаты:

- а) вектора $\vec{a}$;
- б) вектора $\vec{b}$;
- в) вектора $\vec{c}$;
- г) вектора $\vec{d}$;
- д) вектора $\vec{b} + \vec{d}$.



4. Коллинеарность векторов, заданных координатами

Теорема (о коллинеарных векторах).

Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда координаты одного вектора пропорциональны координатам другого.

Доказательство. Если векторы $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ коллинеарны, то существует число k такое, что $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$. Так как $k\vec{b} = (kb_1; kb_2)$, то $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, т. е. координаты коллинеарных векторов пропорциональны. Если же для векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ выполняется $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, то вектор $\vec{a}$ имеет координаты kb_1 и kb_2 , т. е. такие же, как вектор $k\vec{b}$. Поэтому $\vec{a} = k\vec{b}$, и, следовательно, векторы $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ коллинеарны.

Другими словами, если для векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ справедливо, что $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$, то $\vec{a} \parallel \vec{b}$, а если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$.

Замечание. Коллинеарность векторов, не имеющих нулевых координат, удобно устанавливать с помощью пропорции $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

5. Координаты вектора, заданного координатами его начала и конца

Рассмотрим вопрос нахождения координат вектора по координатам его начала и конца. Пусть дан вектор $\vec{AB}$. Точки A и B име-

ют координаты $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ (рис. 286).

Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, а радиус-векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеют координаты $\overrightarrow{OA} = (x_1; y_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2; y_2)$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Таким образом, чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, нужно от координат конца вектора отнять соответствующие координаты начала.

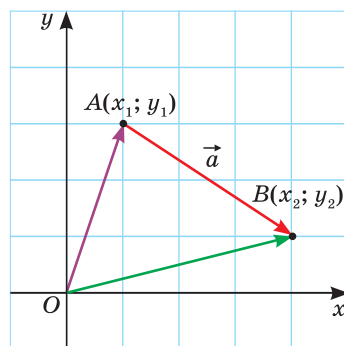


Рис. 286

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, равны разности одноименных координат его конца и начала: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Например, если даны точки $A(4; 9)$, $B(5; 3)$, то $\overrightarrow{AB} = (5 - 4; 3 - 9) = (1; -6)$, $\overrightarrow{BA} = (4 - 5; 9 - 3) = (-1; 6)$.

6. Длина вектора, заданного координатами

Теорема. Длина вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ равна квадратному корню из суммы квадратов его координат: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Доказательство. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна расстоянию между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, которое, как известно из курса алгебры, равно квадратному корню из суммы квадратов разностей одноименных координат: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Для $\vec{a}(a_1; a_2)$ получим $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Пример 2. Пусть $\vec{a}(3; -4)$. Найдём длину вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.



Задания к § 23

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. Доказать, что координаты середины $M(x; y)$ отрезка AB , где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, находятся по формулам: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

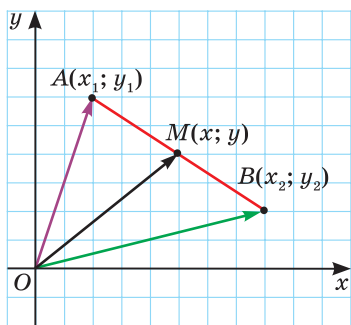


Рис. 287

Доказательство. Пусть в прямоугольной системе координат (рис. 287) даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Нужно найти координаты середины отрезка AB — точки $M(x; y)$.

Обозначим радиус-векторы $\overrightarrow{OA}(x_1; y_1)$, $\overrightarrow{OB}(x_2; y_2)$, $\overrightarrow{OM}(x; y)$. Так как OM — медиана треугольника OAB , то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) =$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2; y_1 + y_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Так как координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ равны $\frac{x_1 + x_2}{2}$ и $\frac{y_1 + y_2}{2}$, то координаты точки $M(x; y)$

$$\text{таковы: } x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Случай, когда точки O , A и B лежат на одной прямой, рассмотрите самостоятельно.

Задача 2. Даны четыре точки: $A(2; 0)$, $B(3; 2)$, $C(-1; 4)$, $D(-2; 2)$. Доказать, что четырехугольник $ABCD$:

а) параллелограмм;

б) прямоугольник.

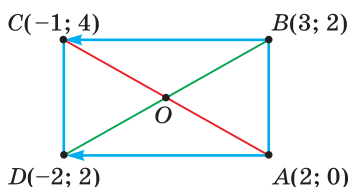


Рис. 288

Доказательство. а) Сделаем схематический чертеж (рис. 288). Для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом, достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ были равны. Найдем координаты этих векторов:

$$\overrightarrow{BC} = (-1 - 3; 4 - 2) = (-4; 2),$$

$$\overrightarrow{AD} = (-2 - 2; 2 - 0) = (-4; 2).$$

Так как координаты векторов равны, то равны и сами векторы, т. е. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ и $ABCD$ — параллелограмм.

б) По формуле расстояния между точками найдем длины диагоналей параллелограмма $ABCD$:

$$AC = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (4 - 0)^2} = 5,$$

$$BD = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (2 - 2)^2} = 5.$$

Так как у параллелограмма $ABCD$ диагонали равны, то он — прямоугольник (по признаку прямоугольника).

Задача 3. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(-2; 2)$, $B(0; 6)$, $C(8; 7)$. Найти координаты вершины $D(x; y)$.

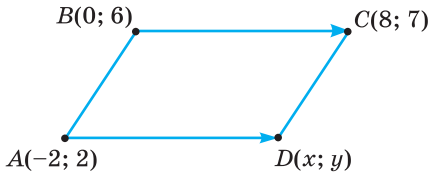


Рис. 289

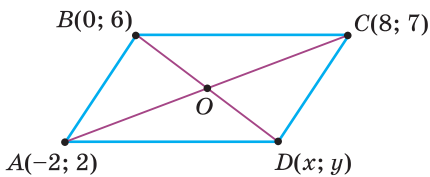


Рис. 290

Решение. Способ 1. Сделаем схематический чертеж (рис. 289). Для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом, достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ были равны. Найдем координаты указанных векторов: $\overrightarrow{AD} = (x - (-2); y - 2) = (x + 2; y - 2)$, $\overrightarrow{BC} = (8 - 0; 7 - 6) = (8; 1)$. Векторы равны, если равны их координаты. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2 = 8, \\ y - 2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 6, \\ y = 3. \end{cases}$$

Способ 2. Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то середины отрезков AC и BD должны совпадать.

На основании ключевой задачи 1 к параграфу 23 координаты середины отрезка

AC (рис. 290) равны $\left(\frac{-2+8}{2}; \frac{2+7}{2}\right) = (3; 4,5)$, координаты середины отрезка

BD равны $\left(\frac{x+0}{2}; \frac{y+6}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}; \frac{y+6}{2}\right)$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = 3, \\ \frac{y+6}{2} = 4,5; \end{cases} \begin{cases} x = 6, \\ y + 6 = 9; \end{cases} \begin{cases} x = 6, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: $D(6; 3)$.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

342. На рисунке 291 векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{EF}$.

343. Начертите прямоугольную систему координат Oxy и координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Постройте векторы с началом в точке O , заданные координатами: $\vec{a}(3; 2)$, $\vec{b}(-1; 2)$, $\vec{c}(-4; 0)$, $\vec{d}(0; 5)$.

344. а) Запишите координаты векторов: $\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{e} = -\vec{i}$, $\vec{f} = 2\vec{j}$.

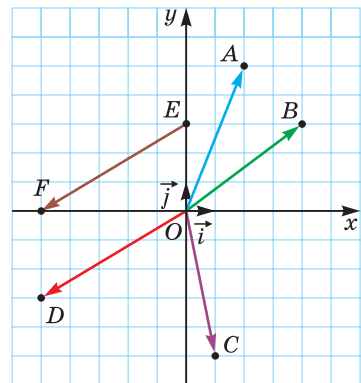


Рис. 291

б) Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ векторов: $\vec{m}(-1; 2)$, $\vec{n}(\frac{1}{2}; -3)$, $\vec{k}(4\frac{1}{3}; -5\frac{4}{5})$, $\vec{l}(\sqrt{2}; 0)$, $\vec{t}(0; -0,2)$.

345. Даны векторы $\vec{a}(-3; 2)$, $\vec{b}(5; 1)$. Найдите координаты вектора, равного:

а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $2\vec{a} + 5\vec{b}$; г) $-\vec{a} + 0,2\vec{b}$.

346. Укажите среди векторов $\vec{a}(-2; 1)$, $\vec{b}(5; 10)$, $\vec{c}(-6; 3)$, $\vec{d}(\frac{1}{2}; 1)$, $\vec{e}(10; -5)$ пары коллинеарных векторов.

347. а) Докажите, что векторы $\vec{a}(4; -8)$ и $\vec{b}(1; -2)$ сонаправленные.

б) Докажите, что векторы $\vec{c}(-1; 2)$ и $\vec{d}(6; -12)$ противоположно направленные.

348. а) Известно, что векторы $\vec{a}(2; -1)$ и $\vec{b}(-4; m)$ коллинеарны. Найдите число m .

б) Известно, что векторы $\vec{c}(9; n)$ и $\vec{d}(n; 4)$ коллинеарны. Найдите число n .

349. Даны три точки $A(-3; 1)$, $B(2; 0)$, $C(1; -2)$. Найдите координаты:

а) векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$; б) вектора $\vec{AB} - \vec{AC}$.

350. Дан треугольник ABC , где $A(2; -1)$, $B(-1; 1)$, $C(4; 2)$. Найдите координаты вектора:

а) $\vec{AB} + \vec{BC}$; б) $\vec{BA} - \vec{BC}$.

351. Найдите длину вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, если:

а) $\vec{a}(-2; 7)$, $\vec{b}(4; -1)$; б) $\vec{a}(-4; 8)$, $\vec{b}(1; -4)$.

352. Даны векторы $\vec{a}(3; 4)$, $\vec{b}(-1; 2)$. Найдите:

а) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$; б) $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.

353. Длина вектора $k\vec{a}$, где $k > 0$, равна 5. Найдите число k , если:

а) $\vec{a}(8; -6)$; б) $\vec{a}(-3; 4)$; в) $\vec{a}(7; 24)$; г) $\vec{a}(1; 1)$.

354. Дан треугольник ABC , где $A(4; -6)$, $B(-2; 0)$, $C(8; 2)$. Найдите:

а) координаты точки K , зная, что K — середина стороны AB ;

б) координаты и длину вектора $\vec{BM}$, зная, что M — середина стороны AC .

 **355.** Найдите координаты точки $M(x; y)$ пересечения медиан треугольника ABC , зная, что $A(-1; 1)$, $B(7; 2)$, $C(3; 0)$.

 **356.** Найдите координаты точки $N(x; y)$, которая делит отрезок AB в отношении $AN : NB = 2 : 3$, зная, что $A(-5; 10)$, $B(0; 15)$.

 **357.** Докажите, что точки $A(4; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(-6; 4)$ лежат на одной прямой.



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.
2. Какие векторы называются координатными.
3. Что такое радиус-вектор и чему равны его координаты.
4. Как найти координаты вектора, заданного координатами его начала и конца.
5. Как найти длину вектора, заданного координатами.
6. Как найти координаты произведения вектора на число, координаты суммы и разности векторов, заданных координатами.

Умеем

1. Раскладывать вектор по двум неколлинеарным векторам.
2. Находить координаты радиус-вектора, координаты вектора, заданного координатами его начала и конца, длину вектора, заданного координатами.
3. Выполнять действия умножения вектора на число, сложения и вычитания векторов, заданных координатами.



§ 24. Скалярное произведение векторов

1. Скалярное произведение векторов, заданных направленными отрезками

Известно, что в физике *векторными* называются величины, которые характеризуются численным значением и направлением, а *скалярными* — те, которые характеризуются только численным значением.

При умножении вектора на число, сложении и вычитании векторов мы получаем вектор. Рассмотрим еще одну операцию над двумя векторами, в результате которой мы получим не вектор, а число: *скалярное произведение векторов*, которое для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны нулю, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

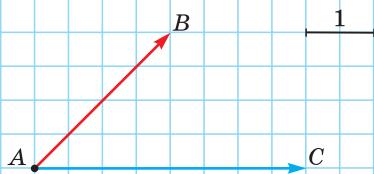
Например, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60° , то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12$.

Скалярное произведение ненулевого вектора $\vec{a}$ на себя называется скалярным квадратом вектора и обозначается $\vec{a}^2$, т. е. $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$. Из определения скалярного произведения векторов $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 \cdot 1 = |\vec{a}|^2$. Говорят, что *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины*.

А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

Найдите скалярное произведение векторов, изображенных на рисунке.



Запишем некоторые свойства скалярного произведения векторов:

- 1) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$;
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;
- 4) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Можно показать, что распределительный закон умножения верен и для большего числа слагаемых: $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d}$.

Теорема (о перпендикулярности векторов).

Ненулевые векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Доказательство. Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = 0$. Отсюда $\cos \alpha = 0$, $\alpha = 90^\circ$, т. е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны. И обратно, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то угол α между ними равен 90° , и так как $\cos 90^\circ = 0$, то $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = 0$, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Итак, нами доказано, что если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, а если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2. Скалярное произведение векторов, заданных координатами

Теорема. Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ равно сумме произведений одноименных координат, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Доказательство. Пусть даны векторы $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$. Тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j})(b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}) = a_1 b_1 \vec{i}^2 + a_1 b_2 \vec{i} \vec{j} + a_2 b_1 \vec{j} \vec{i} + a_2 b_2 \vec{j}^2.$$

Учитывая, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$, где α — угол между векторами, получим:

$$\vec{i}^2 = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{i}|^2 = 1, \quad \vec{j}^2 = |\vec{j}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{j}|^2 = 1,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 90^\circ = 0. \text{ Тогда } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Пример 1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами $\vec{a}(2; 3)$, $\vec{b}(-1; 4)$. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 10$.

Выведем формулу нахождения угла между векторами, заданными координатами (рис. 292).

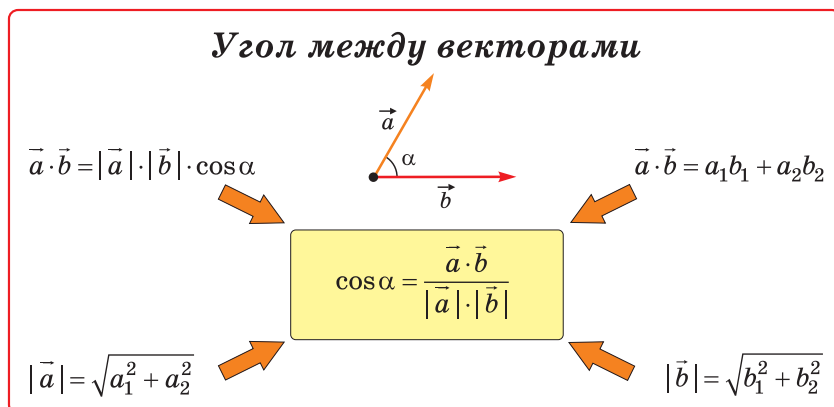


Рис. 292

Из формулы $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ следует, что $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. Так как

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \quad \text{то } \cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Пример 2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами $\vec{a}(4\sqrt{2}; 0)$, $\vec{b}(-4; 4)$. Найдем угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \frac{4\sqrt{2} \cdot (-4) + 0 \cdot 4}{\sqrt{(4\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 4^2}} = \frac{-16\sqrt{2}}{(4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

По формуле приведения $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

Откуда $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\alpha = 135^\circ$.

Если даны ненулевые векторы $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$ и $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$. Верно и обратное утверждение: если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

Пример 3. Пусть даны два вектора $\vec{m}(-2; 5)$, $\vec{n}(10; 4)$. Определим, перпендикулярны ли они. Так как $\vec{m} \cdot \vec{n} = -2 \cdot 10 + 5 \cdot 4 = 0$, то $\vec{m} \perp \vec{n}$.

А теперь выполните **Тест 2**.

Тест 2

Не строя векторы $\vec{a}(-3; 4)$, $\vec{b}(6; 8)$, $\vec{c}(-8; 6)$, $\vec{d}(3; 4)$, укажите среди них:
а) коллинеарные векторы; б) перпендикулярные векторы.



Задания к § 24

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60° . Найти длину вектора, равного:

- а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$.

Решение. а) Так как $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, то $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$. Возведем сумму $\vec{a} + \vec{b}$ в квадрат, используя свойства скалярного произведения векторов:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 = 19. \text{ Тогда } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 19, |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}.$$

$$\text{б) } (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 = 7, |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = 7,$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}.$$

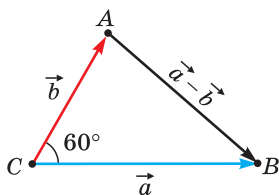


Рис. 293

Замечание. Для решения этой задачи можно использовать теорему косинусов. Решим, например, задачу б). Рассмотрим треугольник ABC (рис. 293), где $\overline{CB} = \vec{a}$, $\overline{CA} = \vec{b}$ и $\overline{AB} = \vec{a} - \vec{b}$.

По теореме косинусов $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos C$. Так как $AB^2 = |\overline{AB}|^2$, $CA^2 = |\overline{CA}|^2$, $CB^2 = |\overline{CB}|^2$, то $|\overline{AB}|^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 7$, $|\overline{AB}| = \sqrt{7}$.

Ответ: а) $\sqrt{19}$; б) $\sqrt{7}$.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 358.** а) Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}| = 2,5$, $|\vec{b}| = 4\sqrt{3}$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$. Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
 б) Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$. Найдите $|\vec{b}|$.
- 359.** В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC = 5$, гипотенуза $AB = 13$. Найдите:
 а) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$; б) $\overline{CB} \cdot \overline{AB}$.
- 360.** В равностороннем треугольнике ABC со стороной, равной 4, проведена биссектриса AK . Найдите скалярное произведение векторов:
 а) $\overline{AB} \cdot \overline{AK}$; б) $\overline{BC} \cdot \overline{AK}$; в) $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$; г) $\overline{CK} \cdot \overline{BA}$.
- 361.** Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны. Докажите, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.
- 362.** а) Даны векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}; \vec{n}) = 60^\circ$. Найдите $|\vec{m} + 2\vec{n}|$.
 б) Даны векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 5$, $\angle(\vec{m}; \vec{n}) = 120^\circ$. Найдите $|2\vec{m} - \vec{n}|$.
- 363.** Докажите, что модуль скалярного произведения векторов меньше либо равен произведению модулей этих векторов: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
- 364.** Найдите скалярное произведение векторов, если:
 а) $\vec{a}(3; 5)$, $\vec{b}(1; 8)$; б) $\vec{c}(-3; 1)$, $\vec{d}(0; 2)$;
 в) $\vec{m}(-2,5; 4)$, $\vec{n}(4; -1)$; г) $\vec{p}(\frac{1}{2}; -5)$, $\vec{k}(6; -2)$.
- 365.** Найдите угол между векторами:
 а) $\vec{a}(6; 2)$, $\vec{b}(2; 4)$; б) $\vec{c}(1; 2)$, $\vec{d}(1; -\frac{1}{2})$.

366. Найдите, при каком значении числа k перпендикулярны векторы:

а) $\vec{a}(-4; 2)$ и $\vec{b}(6; k)$; б) $\vec{c}(k; 3)$ и $\vec{d}(k; -12)$.

 **367.** Докажите, что площадь треугольника ABC можно найти по формуле $S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 \cdot |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$.



§ 25. Координатно-векторный метод решения задач

1. Координатный метод

Введение системы координат при решении геометрических задач позволяет перевести эти задачи на язык алгебры и свести их решение к действиям с алгебраическими выражениями, уравнениями, системами уравнений. Такой метод называется *координатным*.

Координатный метод позволяет значительно сократить решение многих задач, привлекая к решению мощный алгебраический аппарат.

Пример 1. Докажем, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

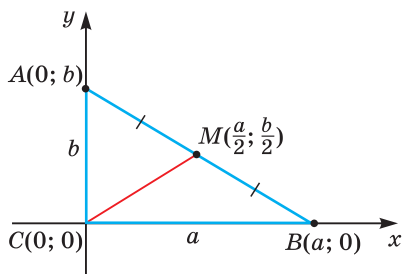


Рис. 294

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , где точка M — середина гипотенузы. Докажем, что медиана $CM = \frac{1}{2} AB$.

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке C (рис. 294). Если $AC = b$, $BC = a$, то вершины треугольника имеют координаты $A(0; b)$, $B(a; 0)$, $C(0; 0)$. По формулам координат середины отрезка точка M имеет следующие координаты: $M = \left(\frac{a+0}{2}; \frac{b+0}{2} \right) = \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2} \right)$. По фор-

муле расстояния между точками $AB = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$,
 $CM = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 0 \right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0 \right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} AB$.

При изучении касательной к окружности в 8-м классе мы утверждали, что существует только три возможных варианта взаимного расположения прямой и окружности: а) они могут иметь две общие точки; б) одну общую точку; в) они могут не иметь общих точек. Докажем это.

Пример 2. Докажем, что если расстояние от прямой до центра окружности меньше ее радиуса, то прямая имеет с окружностью две

общие точки, если это расстояние равно радиусу, то — одну общую точку, если больше радиуса — ни одной.

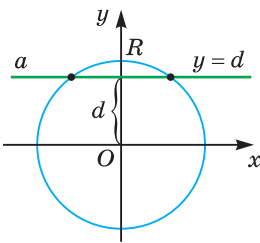


Рис. 295

Доказательство. Пусть дана окружность радиусом R , прямая a и расстояние от центра окружности до прямой равно d . Совместим начало координат с центром окружности и расположим ось Ox параллельно данной прямой a (рис. 295). Известно, что уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$, уравнение прямой a , параллельной оси Ox , имеет вид $y = d$. Объединим эти уравнения в систему и решим ее:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ y = d; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + d^2 = R^2, \\ y = d; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm \sqrt{R^2 - d^2}, \\ y = d. \end{cases}$$

Если $d < R$, то система уравнений имеет ровно два решения: $\begin{cases} x = \sqrt{R^2 - d^2}, \\ y = d \end{cases}$, и $\begin{cases} x = -\sqrt{R^2 - d^2}, \\ y = d. \end{cases}$ В этом случае прямая имеет с окружностью

ровно две общие точки.

Если $d = R$, то решение системы одно: $\begin{cases} x = 0, \\ y = d, \end{cases}$ а значит, прямая и окружность имеют одну общую точку.

Если $d > R$, то подкоренное выражение меньше нуля и система решений не имеет, а следовательно, прямая и окружность не имеют общих точек.

Следствие.

Так как данная система не может иметь трех и более решений, то прямая и окружность имеют не более двух общих точек.

2. Векторный метод

Введение векторов при решении геометрических задач позволяет перевести их решение на язык действий с векторами. Такой метод решения задач называется *векторным*. Иногда векторный метод значительно упрощает решение задачи. Например, доказательство того, что некоторые три точки A , B и C лежат на одной прямой, традиционным способом довольно трудоемкое. Однако оно может быть сведено к доказательству того, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны, т. е. что $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BC}$.

Пример 3. Докажем, что средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

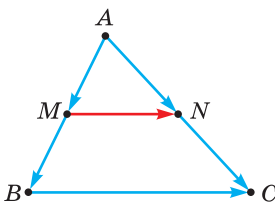


Рис. 296

Доказательство. Пусть MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 296). $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Мы получили, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Это значит, что векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны.

Поэтому $MN \parallel BC$. Кроме того, $|\overline{MN}| = \frac{1}{2}|\overline{BC}|$, а следовательно, $MN = \frac{1}{2}BC$. Утверждение доказано.

Пример 4. Докажем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

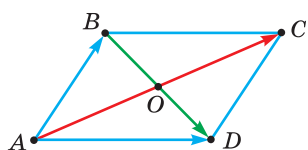


Рис. 297

Доказательство. Пусть дан параллелограмм $ABCD$. Докажем, что $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$. Введем векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ (рис. 297). Тогда $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{AB}$, $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$. Возведя в квадрат эти равенства, получим:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + 2\overline{AD} \cdot \overline{AB} + \overline{AB}^2,$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{AB} + \overline{AB}^2.$$

Сложив почленно последние равенства, получим:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{AB}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2), \text{ откуда } AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2).$$

Утверждение доказано.



Задания к § 25

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача. Дан треугольник ABC со сторонами 6, 8 и 10. Найти расстояние между центром описанной и центром вписанной окружностей этого треугольника.

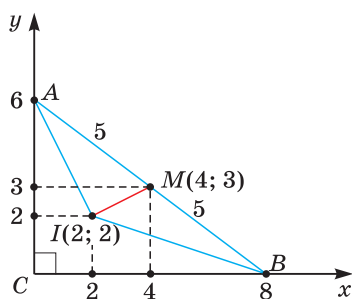


Рис. 298

Решение. Применим координатный метод. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке C и осями, направленными вдоль катетов треугольника: луч CB — ось абсцисс, луч CA — ось ординат (рис. 298).

Найдем координаты центров наших окружностей: $I(2; 2)$, $M(4; 3)$. Используем формулу расстояния между точками $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

$$\text{Получим } IM = \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{5}.$$

Ответ: $\sqrt{5}$.

Замечание. Известна формула Эйлера расстояния d между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника: $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ (см. с. 91). Так как у нас $R = 5$, $r = 2$, то $d = \sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2} = \sqrt{5}$.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 368.** Докажите при помощи векторов, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.
- 369.** Докажите при помощи векторов, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям трапеции и равен их полуразности.
- 370.** В остроугольном треугольнике ABC проведена высота $BH = 4$, $AH = 4$, $HC = 6$. Используя координатный метод, найдите медиану AM треугольника ABC .
- 371.** Докажите координатно-векторным методом, что если диагонали параллелограмма равны, то он является прямоугольником.
- 372.** Пусть дан прямоугольник $ABCD$ и произвольная точка M плоскости. Докажите, что $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.

Моделирование

Задача. Пусть в басне Д. И. Крылова про лебедя, рака и щуку силы персонажей составляют друг с другом углы в 120° и известно, что сила, с которой тянет воз лебедь, в 2 раза больше силы щуки, а сила щуки в 2 раза больше силы рака. Причем все три силы направлены в одной горизонтальной плоскости (лебедь, взмахивая крыльями, бежит по земле, щука плывет по поверхности воды, рак ползет по земле). В каком направлении будет двигаться воз (рис. 299)?

Составьте математическую модель и примените для решения задачи правила сложения векторов.

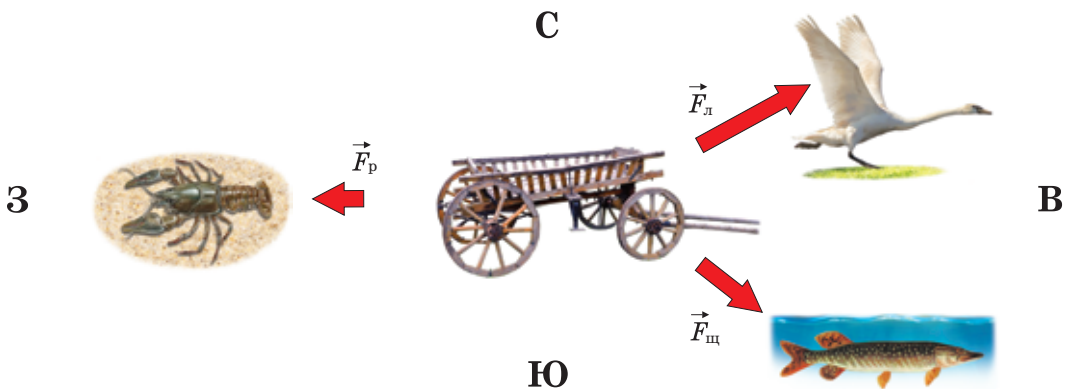


Рис. 299



§ 26. Преобразование фигур на плоскости

1. Виды движений

Если каждую точку фигуры F переместить по какому-то общему алгоритму, то получится новая фигура F_1 . Говорят, что фигура F_1 получена преобразованием из фигуры F (рис. 300).

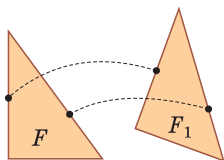
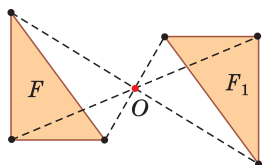
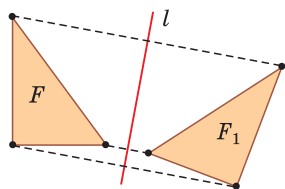


Рис. 300



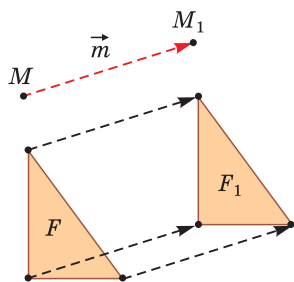
Центральная симметрия

Рис. 301



Осевая симметрия

Рис. 302



Параллельный перенос

Рис. 303

В качестве фигуры F можно рассматривать и всю плоскость. Тогда каждая точка плоскости будет подвергаться заданному на плоскости преобразованию, и речь будет идти о преобразовании плоскости.

Вы уже знаете некоторые преобразования фигур. Это центральная и осевая симметрия.

Центральная симметрия относительно некоторой точки O (центра симметрии) — это такое преобразование, при котором все точки фигуры F переходят в симметричные им относительно точки O . В результате фигура F переходит в симметричную ей фигуру F_1 относительно точки O (рис. 301).

Осевая симметрия относительно некоторой прямой l (оси симметрии) — это такое преобразование, при котором все точки фигуры F переходят в симметричные им относительно прямой l . В результате фигура F переходит в симметричную ей фигуру F_1 относительно прямой l (рис. 302).

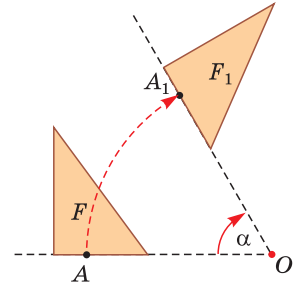
Приведем еще примеры преобразований.

Параллельный перенос — это такое преобразование, при котором все точки фигуры перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. задается либо парой точек M и M_1 , либо вектором $\vec{m}$. На рисунке 303 фигура F_1 получена из фигуры F путем параллельного переноса на вектор $\vec{m}$.

Поворот относительно некоторого центра поворота O на заданный угол α — это такое преобразование, при котором все точки фигуры F поворачиваются вокруг точки O (центра поворота)

в одном и том же направлении на один и тот же угол α . В результате фигура F переходит в фигуру F_1 , которая повернута вокруг точки O на угол α (рис. 304).

При повороте каждая точка A перемещается по дуге окружности, центр которой находится в точке O , радиус которой равен OA , до положения A_1 , где $\angle AOA_1 = \alpha$. Все точки фигуры при данном преобразовании перемещаются либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки в зависимости от того, что указано в условии.



Поворот

Рис. 304

Можно доказать, что все указанные преобразования сохраняют расстояние между точками, т. е. переводят любые две точки A и B одной фигуры в точки A_1 и B_1 другой фигуры так, что $AB = A_1B_1$. Такие преобразования в геометрии называются *движениями*. Движение сохраняет размеры фигуры, т. е. переводит фигуру в равную ей фигуру.

В 8-м классе мы доказали, что при центральной симметрии отрезок переходит в равный ему отрезок. Следовательно, центральная симметрия является движением. Докажем, что осевая симметрия и параллельный перенос также являются движениями.

Теорема. Осевая симметрия сохраняет расстояние между точками.

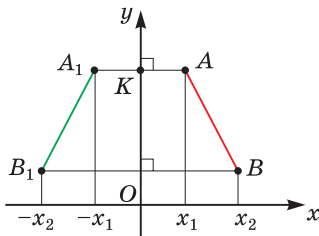


Рис. 305

Доказательство. Пусть ось симметрии — это ось Oy . Возьмем две произвольные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ и симметричные им относительно оси Oy точки A_1 и B_1 (рис. 305). Так как по определению симметрии $AA_1 \perp Oy$ и $AK = KA_1$, то абсциссы точек A и A_1 противоположны, а ординаты равны. То же касается любых точек, симметричных относительно оси Oy . Тогда $A_1(-x_1; y_1)$, $B_1(-x_2; y_2)$.

По формуле расстояния между точками

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Очевидно, что $AB = A_1B_1$.

Таким образом, осевая симметрия есть движение.

Теорема. Параллельный перенос сохраняет расстояние между точками.

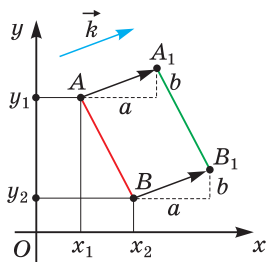


Рис. 306

Доказательство. Пусть параллельный перенос задан вектором $\vec{k}(a; b)$. Рассмотрим две произвольные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ и векторы $\overrightarrow{AA_1} = \vec{k}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{k}$ (рис. 306). При данном параллельном переносе точки A и B перейдут в точки $A_1(x_1 + a; y_1 + b)$ и $B_1(x_2 + a; y_2 + b)$.

По формуле расстояния между точками

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Получили, что $AB = A_1B_1$.

Таким образом, параллельный перенос есть движение.

Следствия.

1. Параллельный перенос, при котором точка $A(x; y)$ переходит в точку $A_1(x_1; y_1)$, можно задать системой $\begin{cases} x_1 = x + a, \\ y_1 = y + b. \end{cases}$

2. Учитывая, что $\vec{k}(a; b) = \vec{m}(a; 0) + \vec{n}(0; b)$, любой параллельный перенос на вектор $\vec{k}(a; b)$ можно представить как результат последовательного выполнения двух параллельных переносов вдоль осей координат: одного — вдоль оси Ox , другого — вдоль оси Oy .

2. Свойства движений

1) При движении точки прямой переходят в точки прямой в том же порядке.

Доказательство. Если точки A, B, C , которые лежат на одной прямой, причем точка B лежит между A и C , переходят при некотором движении соответственно в точки A_1, B_1, C_1 , которые не лежат на одной прямой, или точка B_1 лежит не между A_1 и C_1 , то нарушается равенство $AB + BC = AC$.

Следствие.

При движении прямая переходит в прямую, луч — в луч, отрезок — в равный отрезок.

2) Два движения, выполненные последовательно (композиция движений), дают снова движение.

Например, если мы совершим центральную симметрию фигуры F относительно точки O , то получим фигуру F_1 . А если затем совершим параллельный перенос фигуры F_1 на вектор $\vec{a}$, то получим фигуру F_2 , которая будет равна исходной фигуре F .

3) Преобразование, обратное движению, является движением.

Если преобразование фигуры F в фигуру F_1 переводит различные точки фигуры F в различные точки фигуры F_1 , то произвольная точка X фигуры F перейдет в точку X_1 фигуры F_1 . Преобразование фигуры F_1 в фигуру F , при котором точка X_1 переходит в точку X , — это преобразование, обратное данному.

Так как при движении отрезок переходит в равный ему отрезок, треугольник — в равный ему треугольник и, вообще, любая фигура переходит в равную ей, то мы можем уточнить понятие равенства фигур, которое мы сформулировали в 7-м классе. Две фигуры называются *равными*, если они совмещаются движением.

3. Гомотетия и подобие

Рассмотрим преобразования, которые не сохраняют расстояния между точками, а изменяют их в одно и то же число раз.

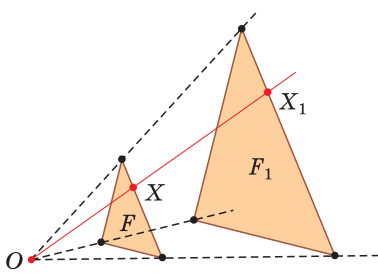


Рис. 307

Пусть F — данная фигура, O — фиксированная точка. Преобразование фигуры F , при котором каждая точка X фигуры F переходит в точку X_1 фигуры F_1 так, что точка X_1 лежит на луче OX и $OX_1 = k \cdot OX$, где $k > 0$ (рис. 307), называется **гомотетией** относительно центра O . Число k называется **коэффициентом гомотетии**, а фигуры F и F_1 — **гомотетичными**.

Теорема. При гомотетии расстояния между точками изменяются в k раз.

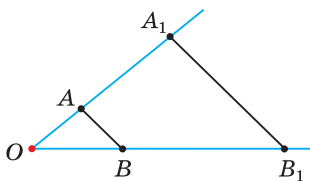


Рис. 308

Доказательство. Рассмотрим две произвольные точки A и B , которые не лежат на одной прямой, и подвергнем их гомотетии с центром в точке O и некоторым коэффициентом k (рис. 308).

Точка A перейдет в гомотетичную ей точку A_1 , точка B — в точку B_1 . По определению гомотетии $OA_1 = k \cdot OA$, $OB_1 = k \cdot OB$, откуда

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = k.$$

Тогда $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OAB$ по 2-му признаку подобия. Отсюда следует, что $\frac{A_1B_1}{AB} = k$.

Случай, когда точки O , A и B лежат на одной прямой, рассмотрите самостоятельно.

Следствие.

Гомотетия переводит прямые в параллельные им прямые.

Подобие — это такое преобразование, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз. Иными словами, если A и B — произвольные точки фигуры F — переходят в точки A_1 и B_1 фигуры F_1 , то $A_1B_1 = k \cdot AB$, где $k > 0$ — одно и то же число для всех пар точек A и B (рис. 309).

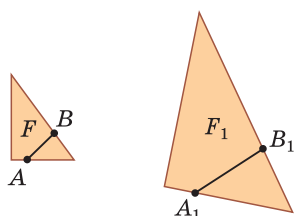


Рис. 309

Число k называется *коэффициентом подобия*. При $k = 1$ преобразование подобия является движением.

Гомотетия является частным случаем подобия. Композиция движения и подобия является подобием.

Преобразование подобия переводит прямые в прямые, лучи в лучи, отрезки в отрезки.

Теорема. Преобразование подобия сохраняет углы между прямыми.

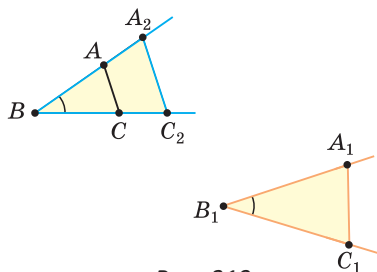


Рис. 310

Доказательство. Пусть угол B преобразованием подобия с коэффициентом k переводится в угол B_1 и точки A и C переводятся в точки A_1 и C_1 (рис. 310). Применим к углу B преобразование гомотетии с центром в точке B и коэффициентом k , при котором точки A и C перейдут в точки A_2 и C_2 . Так как $\triangle A_2BC_2 = \triangle A_1B_1C_1$ по 3-му признаку (при гомотетии и подобии все расстояния изменились в k раз), то $\angle B = \angle B_1$, что и требовалось доказать.



Задания к § 26

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача. Вписать в угол A окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M , взятую внутри угла.

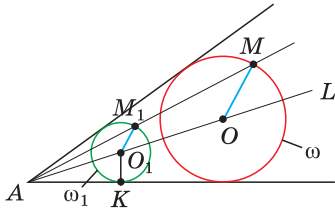


Рис. 311

Решение. Идея построения заключается в том, чтобы построить произвольную окружность, вписанную в данный угол, а затем построить гомотетичную ей относительно вершины угла окружность, которая пройдет через точку M .

1) Строим биссектрису AL угла A . Из произвольной точки O_1 , взятой на этой биссектрисе, опускаем перпендикуляр O_1K на сторону угла A . Радиусом, равным O_1K , строим окружность ω_1 , вписанную в угол A (рис. 311).

2) Проводим луч AM и находим точку M_1 (соответствующую точке M), в которой этот луч пересекает построенную окружность ω_1 .

3) Строим отрезок O_1M_1 . Строим прямую, проходящую через точку M и параллельную прямой M_1O_1 , которая пересечет биссектрису AL в точке O .

4) Радиусом, равным OM , строим искомую окружность ω .

То, что построенная окружность ω действительно искомая, следует из того, что она гомотетична окружности ω_1 при гомотетии с центром в точке A и коэффициентом $k = \frac{AM}{AM_1}$.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

373. Докажите, что при симметрии относительно некоторой точки — центра симметрии — треугольник переходит в равный ему треугольник.
374. Докажите, что при симметрии относительно некоторой прямой — оси симметрии — треугольник переходит в равный ему треугольник.
375. Докажите, что при движении угол преобразуется в равный ему угол.

- 376.** Докажите, что при движении параллелограмм преобразуется в равный ему параллелограмм.
- 377.** Докажите, что при движении окружность преобразуется в равную ей окружность.
- 378.** Определите, в результате какого преобразования или комбинации преобразований фигура F перешла в фигуру F_1 (рис. 312).

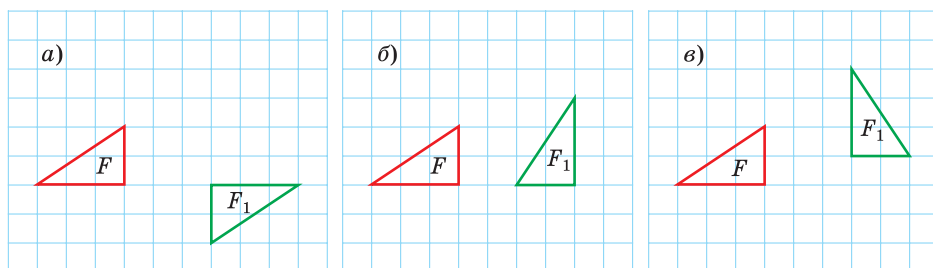


Рис. 312

- 379.** Начертите треугольник ABC и некоторый вектор $\overrightarrow{MM_1}$. Постройте фигуру, в которую перейдет треугольник ABC при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MM_1}$.
- 380.** Начертите квадрат $ABCD$ и фигуру, в которую перейдет квадрат при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AC}$.
- 381.** Начертите прямую a , отметьте на ней точку O . Постройте фигуру, в которую перейдет прямая a при повороте ее на 45° против часовой стрелки около точки O .
- 382.** Начертите равносторонний треугольник ABC . Постройте фигуру, в которую перейдет этот треугольник при повороте его на 60° по часовой стрелке около точки A .
- 383.** Докажите, что при повороте квадрата около точки пересечения диагоналей на 90° он перейдет сам в себя.
- 384.** Докажите, что при повороте равностороннего треугольника около точки пересечения медиан на 120° он перейдет сам в себя.
- 385.** Составьте алгоритм, позволяющий при помощи циркуля и линейки вписать в данный треугольник квадрат, как показано на рисунке 313.

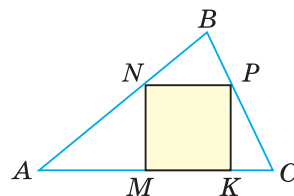


Рис. 313

ЗАПОМИНАЕМ

1. Коллинеарные векторы — векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой.
2. Равные векторы — векторы, равные по длине и совпадающие по направлению.
3. Противоположные векторы — векторы, равные по длине и противоположные по направлению.
4. Сложение векторов: правило треугольника и правило параллелограмма.
5. Вычитание векторов: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$, где вектор $\vec{c}$ направляют от конца вектора $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$.
6. Умножение вектора на число k : $\vec{a}$ и $k \cdot \vec{a}$ — коллинеарные векторы.
7. Скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha.$$
8. Координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ совпадают с координатами точки A .
9. Нахождение координат вектора по координатам его конца и начала: нужно от координат конца вектора отнять координаты начала.
10. Длина вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ находится по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
11. Умножение вектора на число:

$$k \cdot \vec{a}(a_1; a_2) = \vec{b}(ka_1; ka_2), \quad \vec{a} \parallel \vec{b}.$$
12. Сложение и вычитание векторов:

$$\vec{a}(a_1; a_2) \pm \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2).$$
13. Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$:

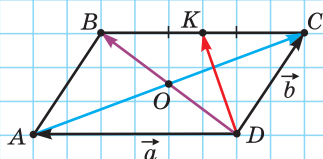
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$
14. Угол между векторами:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$
15. Признак коллинеарности векторов:
соответствующие координаты векторов пропорциональны.
16. Признак перпендикулярности векторов:
скалярное произведение векторов равно нулю.

ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

Тест 1

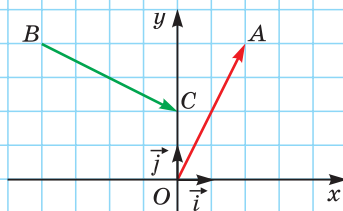
Используя рисунок, выразите векторы $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DK}$ через векторы $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$.



Тест 2

Найдите:

- а) координаты $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC}$;
- б) $|\overrightarrow{BC}|$;
- в) $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC})$.



Тест 3

Для $\vec{a}(-3; 4)$ и $\vec{b}(0; -1)$ найдите:

- а) $|\vec{a}|$; $|\vec{b}|$;
- б) $-2\vec{a}$;
- в) $\vec{a} + \vec{b}$;
- г) $2\vec{a} - 3\vec{b}$;
- д) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
- е) $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Повторение геометрии 7–9 классов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

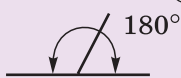
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

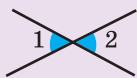
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

7 класс

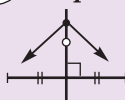
1 Смежные



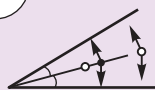
2 Вертикальные



3 Серединный перпендикуляр

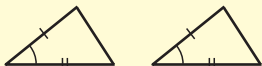


4 Биссектриса

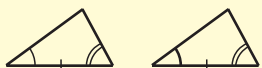


5 Признаки равенства треугольников

1



2



3



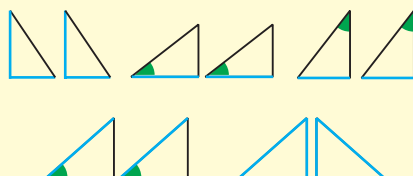
6 Равнобедренный

Свойства

Признаки



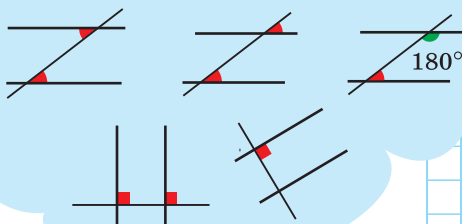
1
2
3
4



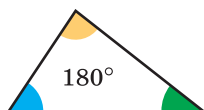
7 Параллельные прямые



Признаки-свойства



8 Сумма углов треугольника



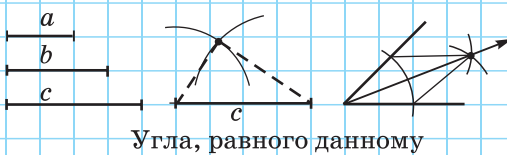
Внешний угол
равен $\angle 1 + \angle 2$



11 Задачи на построение

Треугольника

Биссектрисы



Угла, равного данному

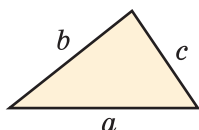
Середины отрезка

Перпендикуляра

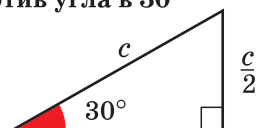


9 Неравенство треугольника

$$\begin{aligned} a &< b + c \\ b &< a + c \\ c &< a + b \end{aligned}$$



10 Катет, лежащий против угла в 30°



Дополните предложения, произнеся вслух пропущенные фрагменты

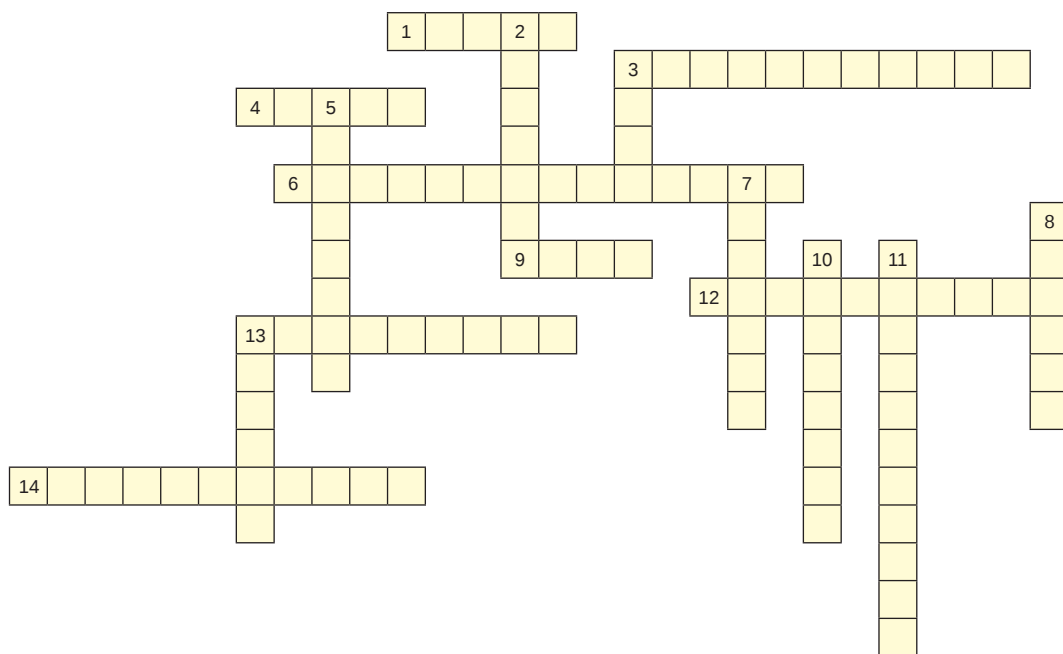
1. Сумма смежных углов равна
2. Вертикальные углы
3. Любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов
4. Любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон
5. Признаки равенства треугольников:
 - 1) по двум сторонам и ...;
 - 2) по стороне и двум ... углам;
 - 3) по трем

Признаки равенства прямоугольных треугольников:

- 1) по двум ...;
 - 2) по катету и прилежащему ...;
 - 3) по катету и противолежащему ...;
 - 4) по гипотенузе и ... углу;
 - 5) по катету и
6. В равнобедренном треугольнике углы при основании ..., а биссектриса, проведенная из вершины к основанию, является его ... и
7. Если две прямые пересечены третьей и накрест лежащие углы равны, или соответственные углы равны, или сумма односторонних углов равна 180° , то прямые И наоборот, если ..., то
8. На плоскости две прямые, перпендикулярные третьей,
9. Прямая, перпендикулярная одной из параллельных прямых, ... и другой прямой.
10. Сумма углов треугольника равна
11. Внешний угол треугольника — это угол, смежный с его
12. Внешний угол треугольника равен сумме двух ... углов, не ... с ним.
13. Неравенство треугольника: любая сторона треугольника меньше суммы
14. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине
15. В треугольнике против большей стороны лежит больший ..., а против большего угла лежит

-  16. Биссектрисы смежных углов взаимно
-  17. Любая точка плоскости, равноудаленная от концов отрезка, лежит на
-  18. Геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, — это
-  19. Геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от сторон угла (и находящихся внутри угла), — это
-  20. Внешний угол треугольника больше любого ... угла треугольника, не смежного с ним.
-  21. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в центре ... окружности.
-  22. Если у треугольника высота является биссектрисой, или высота является медианой, или медиана является биссектрисой, то треугольник
-  23. Биссектрисы треугольника пересекаются
-  24. Катет прямоугольного треугольника меньше
-  25. Для перпендикуляра и двух наклонных, проведенных из одной точки к данной прямой, и проекций наклонных на эту прямую справедливо: «Перпендикуляр меньше наклонной. Проекция наклонной меньше самой Большей наклонной соответствует большая ..., равным ... — равные ...».
-  26. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник —
-  27. Основные задачи на построение при помощи циркуля и линейки:
 - 1) построение треугольника по трем сторонам;
 - 2) построение биссектрисы угла;
 - 3) построение угла, равного данному;
 - 4) деление отрезка пополам;
 - 5) построение прямой, перпендикулярной данной.

Ваш замечательный кроссворд



Перенесите кроссворд в тетрадь и решите его.

По горизонтали:

1. Отрезок, соединяющий две точки окружности.
3. Прямая, которая имеет только одну общую точку с окружностью.
4. Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против его острого угла.
6. Четырехугольник, противоположные стороны которого параллельны.
9. Параллелограмм, у которого диагонали перпендикулярны.
12. Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против его прямого угла.
13. Угол с вершиной на окружности, стороны которого пересекают окружность.
14. Луч, выходящий из вершины угла и делящий его пополам.

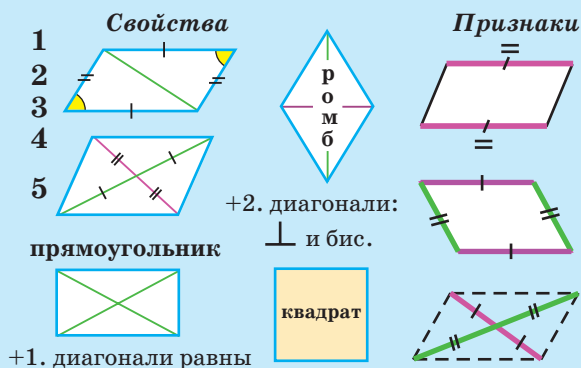
По вертикали:

2. Хорда окружности, проходящая через ее центр.
3. Часть плоскости, ограниченная окружностью.
5. Четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие — нет.
7. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.
8. Единица измерения углов.
10. Два треугольника, углы которых соответственно равны, а соответствующие стороны пропорциональны.
11. Угол с вершиной в центре окружности.
13. Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к противоположной стороне треугольника или ее продолжению.

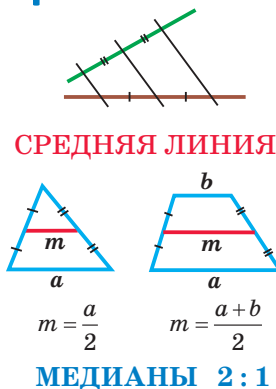
8 класс

Сумма углов многоугольника $180^\circ(n - 2)$

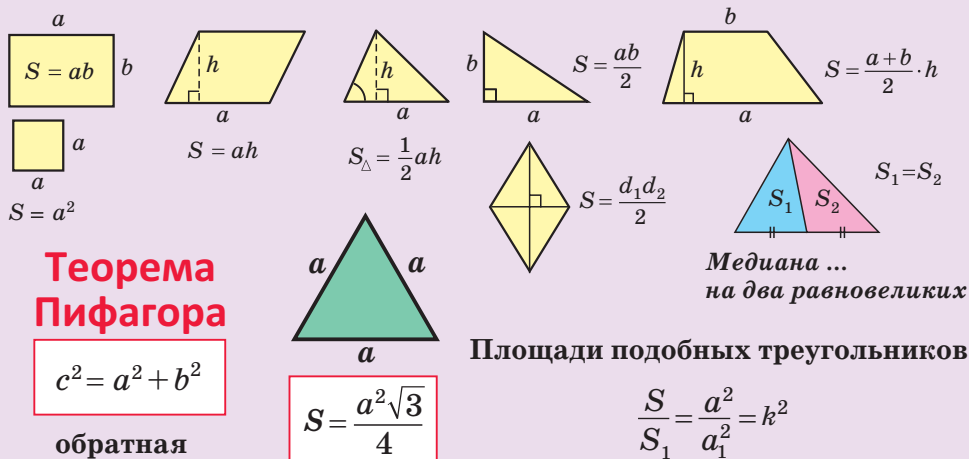
Параллелограмм



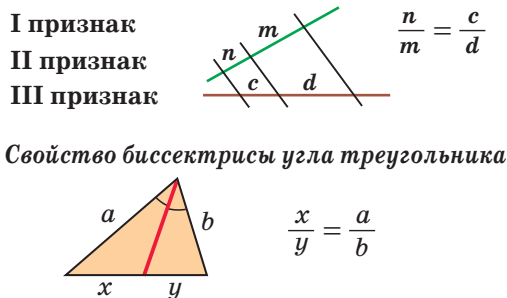
Теорема Фалеса



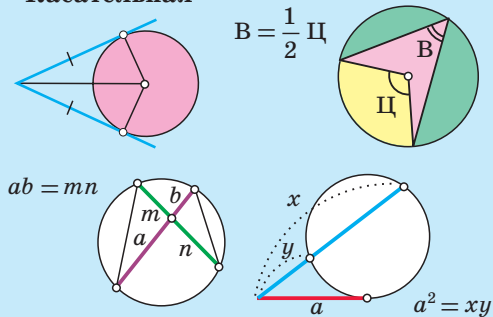
Площади



Подобие



Касательная



**Дополните предложения,
произнеся вслух пропущенные фрагменты**

1. Сумма внутренних углов n -угольника равна
2. Свойства параллелограмма.
В параллелограмме:
1) сумма соседних углов равна ...;
2) диагональ делит его на ...;
3)—4) противоположные стороны ... и противоположные углы ...;
5) диагонали точкой пересечения делятся
3. Признаки параллелограмма.
Четырехугольник является параллелограммом, если у него:
1) две стороны ... и ...;
2) противоположные стороны ...;
3) диагонали точкой пересечения делятся
4. Диагонали прямоугольника
5. Признаки прямоугольника:
1) если у параллелограмма диагонали ..., то это прямоугольник;
2) если у параллелограмма один угол прямой, то это ...;
3) если у четырехугольника все углы прямые, то это
6. Диагонали ромба взаимно ... и лежат на биссектрисах его углов.
7. Признаки ромба:
1) если у параллелограмма диагонали ..., то это ромб;
2) если у параллелограмма диагональ лежит на биссектрисе его угла, то это
8. Теорема Фалеса: если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону, то на другой стороне угла отложатся
9. Средняя линия треугольника ... основанию и равна
10. Средняя линия трапеции ... основаниям и равна их
11. Медианы треугольника пересекаются ... и делятся этой точкой в отношении $2 : 1$, считая от вершины.
12. Площадь квадрата $S = a^2$; прямоугольника $S = ab$; параллелограмма $S = ah$; треугольника $S = \frac{1}{2}ah$; трапеции $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; ромба $S = \frac{d_1 d_2}{2}$;
... треугольника $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.
13. Теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату ...:
 $a^2 + b^2 = c^2$.

14. Обратная теорема Пифагора: если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то этот треугольник
15. Медиана делит треугольник на два равновеликих
16. Отношение площадей подобных треугольников равно отношению квадратов соответствующих сторон и равно квадрату коэффициента
17. Треугольники называются подобными, если у них соответствующие ... равны, а ... пропорциональны.
18. Три признака подобия треугольников.
Треугольники подобны, если:
1) два ... одного треугольника соответственно равны двум ... другого треугольника;
2) две ... одного треугольника соответственно пропорциональны двум ... другого треугольника, а углы между ними равны;
3) три ... одного треугольника соответственно пропорциональны трем ... другого треугольника.
19. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, ... прилежащим сторонам.
20. Теорема Фалеса обобщенная: параллельные прямые отсекают на сторонах угла ... отрезки.
21. Касательная ... радиусу, проведенному в точку
22. Вписанный угол равен ... соответствующего центрального угла.
23. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу,
24. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, —
25. Угол между пересекающимися хордами равен ... градусных мер дуг, одна из которых заключена внутри данного угла, а другая — внутри ему вертикального.
26. Угол между секущими, выходящими из точки вне окружности, равен ... градусных мер дуг, заключенных внутри угла.
27. Произведения отрезков пересекающихся хорд
-  28. Угол между хордой и касательной, имеющими общую точку на окружности, равен ... градусной меры дуги, заключенной внутри угла.
-  29. Для касательной и секущей, проведенных из одной точки к окружности, квадрат отрезка касательной равен произведению большего отрезка секущей на его ... часть.

-  30. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна
-  31. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный
-  32. Биссектрисы соседних углов параллелограмма взаимно
-  33. Биссектрисы противоположных углов параллелограмма
-  34. Угол между высотами параллелограмма, проведенными из одной вершины, равен углу при соседней
-  35. Середины сторон четырехугольника являются вершинами
-  36. Площадь трапеции равна произведению средней линии на ..., т. е. $S_{\text{тр}} = mh$.
-  37. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника: треугольники, прилежащие к боковым сторонам, ..., а прилежащие к основаниям —
-  38. Высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины меньшего основания, делит большее основание на части, равные полусумме и ... оснований.
-  39. Середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной
-  40. Площади треугольников с общей высотой относятся как соответствующие

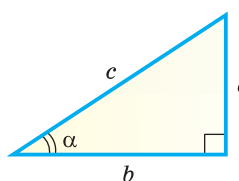
9 класс

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

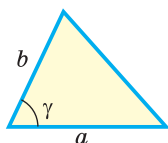
	30°	60°	45°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

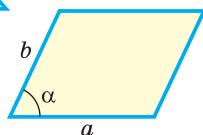
$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$$



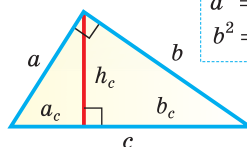
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$S_{\text{пар}} = ab \sin \alpha$$

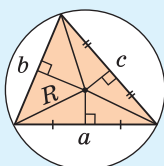


среднее геометрическое

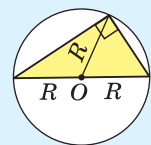
$$\begin{aligned} h_c^2 &= a_c \cdot b_c \\ a^2 &= c \cdot a_c \\ b^2 &= c \cdot b_c \end{aligned}$$



Описанная

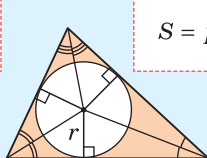


$$S = \frac{abc}{4R}$$

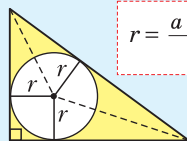


$$R = \frac{c}{2}$$

Вписанная

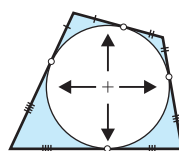
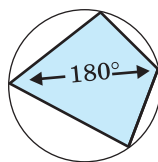


$$S = pr$$



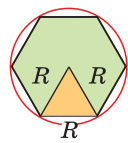
$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

Свойства-признаки



Теорема синусов

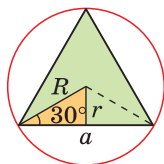
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



$$a = R$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

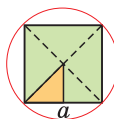
Правильные



$$a = R\sqrt{3}$$

$$r = \frac{R}{2}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



$$r = \frac{a}{2}$$

$$C = 2\pi R$$

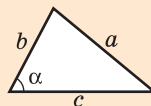
длина окружности

$$S = \pi R^2$$

площадь круга

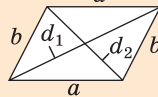
Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



$$1. \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2. d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$



$$3. m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

$$4. S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Формула Герона

Дополните предложения, произнеся вслух пропущенные фрагменты

1. Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе, косинусом — отношение прилежащего катета к гипотенузе, тангенсом — отношение противолежащего катета к прилежащему, котангенсом — отношение прилежащего катета к

2. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \dots$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$;
 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \dots$, $\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
 $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = \dots$.

3. Формулы для нахождения значений тригонометрических функций тупого угла:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \dots, \quad \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = \dots.$$

4. Синус тупого угла равен синусу смежного с ним острого угла, косинус тупого угла равен косинусу смежного с ним острого угла, взятому со знаком

5. Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \dots$.

6. Тангенс и котангенс угла α равны:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\dots}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\dots}{\sin \alpha}.$$

7. Площадь треугольника и площадь параллелограмма можно найти по формулам:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab \dots, \quad S_{\text{пар}} = ab \dots.$$

8. Высота прямоугольного треугольника — есть среднее пропорциональное между ... катетов на гипотенузу:

$$h_c = \sqrt{a_c b_c}.$$

Катет — есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на ...:

$$a = \sqrt{c \cdot a_c}, \quad b = \sqrt{\dots}.$$

9. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит в точке пересечения ..., проведенных к его сторонам.

10. Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит в точке пересечения его

11. Площадь треугольника (описанного многоугольника) можно найти по формуле $S = pr$, где r — радиус ... окружности, p — полупериметр.

12. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на ..., а радиус равен половине

13. Радиус окружности, вписанной в ... треугольник, находится по формуле

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

14. У четырехугольника, вписанного в окружность, сумма его противоположных углов равна И обратно, если

15. У четырехугольника, описанного около окружности, суммы противоположных ... равны между собой. И обратно, если

16. Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу ... окружности треугольника:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

17. Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на ... между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

18. Площадь треугольника можно найти по формуле ... :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

19. В правильном (равностороннем) треугольнике сторона a , радиус R описанной окружности, радиус r вписанной окружности, высота h и площадь S связаны формулами:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \dots, \quad a = R\sqrt{3}, \quad r = \frac{1}{2}R.$$

20. В правильном шестиугольнике сторона a равна радиусу ... окружности.

21. Длина окружности радиусом R находится по формуле $C = \dots$.

22. Площадь круга радиусом R находится по формуле $S = \dots$.

-  23. В правильном треугольнике сторона a , радиус R описанной окружности, радиус r вписанной окружности связаны формулами:

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

-  24. Площадь ... можно найти по формуле

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

-  25. Косинус угла ... со сторонами a , b и c можно найти по формуле

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

-  26. Сумма квадратов диагоналей ... равна сумме квадратов всех его сторон:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Ответы

Глава I

4. д) 1; е) 1.
7. а) $\alpha = 58^\circ$, $\beta = 32^\circ$; б) $\alpha = 38^\circ$, $\beta = 52^\circ$; в) $\alpha = 23^\circ$, $\beta = 67^\circ$.
8. а) $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$; б) $\cos \angle ACB = \frac{3}{5}$; в) $\operatorname{tg} \angle CBH = \frac{3}{4}$;
г) $AK = 9,6$ см; $\sin \angle ABK = 0,96$.
9. $\frac{5}{13}$.
12. $\frac{1}{2}$ и 60° .
13. а) 7,5; б) 1,5; в) 5.
14. 32 см^2 .
15. 20 см^2 .
16. 3,75.
17. 2; $-\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$.
19. У к а з а н и я. а) Используйте свойство: синус и косинус острого угла меньше 1; б) используйте определения $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\sin \beta = \frac{b}{c}$ и неравенство треугольника.
20. а) 192 см^2 ; б) 75 см^2 .
21. а) У к а з а н и е. $\cos \angle BAA_1 = \frac{A_1B}{AB} = \frac{C_1B}{CB}$; б) 8; в) 36.
22. а) $\angle B = 90^\circ - \alpha$; б) $BC = c \sin \alpha$; в) $AC = c \cos \alpha$.
23. а) $BC = \frac{4}{\operatorname{tg} \beta}$ или $BC = 4 \operatorname{ctg} \beta$; б) $AB = \frac{4}{\sin \beta}$ или $AB = 4\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta}$;
в) $S = \frac{8}{\operatorname{tg} \beta}$ или $S = 8 \operatorname{ctg} \beta$.
24. а) 6,4; б) 13,5; в) 9,4.
25. а) $AC = 6$; $BC = 8$; б) $BC = 6$, $AC = 2\sqrt{7}$; в) $AB = 6$, $AC = 2\sqrt{5}$;
г) $BC = 3$, $AB = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.
26. а) $x = 6\sqrt{3}$, $S = 36\sqrt{3}$; б) $x = 8$, $S = 32$; в) $x = 3\sqrt{2}$, $S = 18$;
г) $x = 2\sqrt{3}$, $S = 3\sqrt{3}$.
27. 90 см^2 .
28. 14 см^2 .
29. 144 см^2 .
30. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

31. а) $S = a^2 \sin \alpha \cos \alpha$; б) $S = \frac{a^2 - b^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$.
32. Угол $ABC = 90^\circ$. У к а з а н и е. Поскольку $\triangle ABM$ равнобедренный (докажите), то $AH = HM = x$. Тогда $MC = AM = 2x$. К $\triangle HBC$ примените свойство биссектрисы треугольника и найдите $\sin C$, затем $\angle C$, $\angle HBC$.
33. $a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$, $h_c = c \sin \alpha \cos \alpha$, $b_c = c \cos^2 \alpha$, $a_c = c \sin^2 \alpha$.
35. а) $\frac{3}{4}$; б) $2\sqrt{2}$.
37. а) 0,8; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$; б) $\frac{24}{25}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{24}{7}$.
38. 8 см.
39. а) $\alpha > \beta$. У к а з а н и е. Рассмотрите прямоугольные треугольники с общим катетом, равным 1; б) $\alpha < \beta$. У к а з а н и е. Рассмотрите прямоугольные треугольники с общей гипотенузой, равной 5. Либо воспользуйтесь результатом *ключевой задачи 2* (с. 28).
40. $\operatorname{tg} \alpha > \sin \alpha$. У к а з а н и е. В прямоугольном треугольнике $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$. Сравните $\frac{a}{c}$ и $\frac{a}{b}$, учитывая, что c — гипотенуза, a и b — катеты.
43. $\frac{3}{5}$. У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ (см. предыдущую задачу) или рассмотрите прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4.
46. а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-0,8$; в) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
47. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.
48. а) 6 см и 30 см^2 ; б) 4 см и 24 см^2 .
49. а) 0,9848; б) $-0,9962$; в) $-2,1445$; г) $-1,1918$.
50. а) 0,3; б) $1\frac{1}{3}$.
51. а) 1; б) 1; в) -1 .
54. а) 10; б) 8; в) $75\sqrt{3}$.
55. а) 39 см^2 ; б) 80 см^2 .
56. а) $16,8 \text{ см}^2$; б) 55 см^2 .
57. а) 26 см; б) 32 см.
58. а) 18 см^2 ; б) 8 см.
61. а) 12 см; б) 36 см^2 .
62. а) $\frac{ab}{2}$; б) $\frac{d_1 d_2}{2}$.
64. а) 15; б) 2; в) 8.
65. а) 10; б) 10; в) 7.

66. 16 см.
 67. 6.
 68. 4 см.
 69. $7,2 \text{ см}^2$.
 70. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
 71. 60° .
 73. 24.
 74. 48.
 75. У к а з а н и е. $\frac{S_{ABO}}{S_{DCO}} = \frac{BO \cdot AO}{CO \cdot DO} = \frac{BO}{DO} \cdot \frac{AO}{CO}$. Далее используйте то, что $\triangle BOC \sim \triangle DOA$.
 76. а) У к а з а н и е. $\frac{S_{ABC}}{S_{AMK}} = \frac{9 \cdot (12+8)}{(9+6) \cdot 12}$.
 78. 27.
 79. 16,8.
 80. а) $\frac{KO}{OB} = \frac{1}{5}$; б) $\frac{MO}{OC} = 1$; в) $\frac{S_{KOC}}{S_{MOB}} = \frac{1}{5}$.
 81. 10.
 82. $\frac{1}{16}$.

Глава II

86. а) 5; б) 24; в) $2\sqrt{5}$.
 87. а) 7; б) 6; в) 8.
 88. а) 7,2 см; б) 25 см.
 89. 32 см^2 .
 90. а) 6; б) 12; в) 8.
 91. а) 125° ; б) 28° ; в) 90° .
 92. а) 1,5 см; б) $3\frac{1}{3}$ см.
 93. а) 4 см; б) 2 см. У к а з а н и е. Используйте ключевую задачу 3 (с. 62).
 94. а) 8 см и 4 см; б) $3\sqrt{3} \text{ см}^2$.
 96. а) 8 см; б) $(8\sqrt{3} - 12)$ см.
 97. а) 24 см^2 ; б) 3 см. У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой $S = pr$.
 98. 2,5 см.
 99. а) 3 см; б) 192 см^2 .
 100. а) 4 см; б) 12,5 см. У к а з а н и е. Используйте для задания а) формулу $S = pr$, для задания б) формулу $R = \frac{b^2}{2h_a}$.

101. а) 55° ; б) 116° .
103. а) 12 см. Указание. Проведите диаметр BK и рассмотрите $\triangle BCK$;
 б) 10 см. Указание. См. п. а) или воспользуйтесь формулой $R = \frac{ab}{2h_c}$.
104. а) 2; б) 10.
105. 6.
106. 8. Указание. Найдите коэффициент подобия треугольников MBK и ABC , для чего проведите высоту BH , которая пересекает отрезок $МК$ в точке N , и найдите отношение $\frac{BN}{BH}$.
109. 60° .
110. а) 6; б) 2,5; в) 4.
111. а) 9; б) 5; в) 8,5.
112. а) 10 см; б) 15 м; в) 25 дм; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ км.
113. а) 24 см^2 ; б) 6 см.
114. а) 1 см; б) 2 дм; в) 3 см; г) $(4 - 2\sqrt{2})$ м.
115. а) 3; б) 2; в) $2\sqrt{3} - 2$; г) 5.
116. $6\sqrt{2}$ см.
117. 8 см и 15 см. Указание. Смотрите ключевую задачу 1 (с. 70).
118. 60 см и 120 см^2 .
119. а) 10 см; б) 2 см.
120. 30 см.
121. $2\sqrt{5}$ см.
122. 5 см.
123. а) 12 см^2 . б) Указание. Из ключевой задачи 2 (с. 70—71) $S = (r + c)r$. С другой стороны, катеты треугольника равны $m + r$, $n + r$ и $S = \frac{(m+r)(n+r)}{2}$. Отсюда $S = mn$.
125. а) 95° ; б) 100° ; в) 125° .
126. а) 80° ; б) 108° ; в) 104° ; г) 80° .
127. а) 130° ; б) 30° .
128. а) 31° ; б) 115° .
129. а) 136° ; б) 26 см.
131. 8 см. Указание. Воспользуйтесь свойством: произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой.
132. а) 48 см^2 ; б) 240 см^2 .
133. а) 32 см^2 ; б) 16 см. Указание. В $\triangle BOC$ проведите высоту $ОН$.
134. а) 7; б) 8; в) 11.

135. а) 24 см; б) 8 см.
136. а) 20 см^2 ; б) 6 см.
137. 45 см^2 . Указание. Воспользуйтесь формулой $S = pr$.
138. а) 10 и 15; б) 80. Указание. См. с. 86.
139. 6 см.
140. 124° .
141. а) 72 см; б) 12 см.
142. 15 см. Указание. Найдите диаметр вписанной окружности, высоту $\triangle MBN$, проведенную к MN , и воспользуйтесь подобием треугольников MBN и ABC .
143. 25 см. Указание. Проведите высоты BH и CK , найдите длины отрезков AK , KD , CK , CD . Докажите, что $\triangle ACD$ — прямоугольный.
144. а) 6 см; 10 см; 12 см; б) 588 см^2 .
145. 10 см. Указание. Рассмотрите две параллельные хорды длинами 6 см и 8 см с расстоянием 7 см между ними. Из центра описанной окружности проведите перпендикуляры к этим хордам.
146. $2\sqrt{6}$ см. Указание. Поскольку $AB + CD = BC + AD$, то трапеция описанная, центр K вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис и $r = \frac{S}{p}$. Далее рассмотрите $\triangle AKB$.
148. 60° .
149. 3 : 5.
150. 28.
151. 6.
152. а) 20 см^2 ; б) 156 см^2 .
153. 2 см.
155. 3 см.
157. а) 138° ; б) 40° .
158. 24.
159. а) 65° ; б) 52° .
161. 70° .
162. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.
166. а) 1; б) $5\sqrt{2}$.
167. 5 см.
169. б) 5.
170. $2\sqrt{5}$.

Глава III

173. $b = 4\sqrt{2}$; $a = 2\sqrt{6}$; $\beta = 45^\circ$.
174. а) 10,4; б) 8,9; в) 7,3.
175. а) 55° ; б) 46° ; в) 44° .
176. а) 4,9; б) 21,8.
177. а) 26° ; б) 24° .
178. 12 см и 16 см.
179. а) 105° ; б) 8; в) 6.
180. 30 см.
181. а) 12; б) 5; в) $2\sqrt{3}$.
182. а) 9 см; б) 6 см; в) 45° .
183. 16 см.
184. а) 6. Указание. Найдите $\sin A$ и воспользуйтесь тем, что $\frac{BC}{\sin A} = 2R$ или используйте замечание к ключевой задаче 3 (с. 102); б) 7,8; в) $3\frac{1}{3}$.
185. а) 6 см; б) 8 см. в) Указание. Воспользуйтесь формулой $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.
186. а) 6,25 см; б) 5 см. Указание. Используйте формулу $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.
187. $b = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}$, $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$.
188. $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
189. $\frac{5\sqrt{13}}{3}$ см.
190. а) 8 см; б) $10\frac{5}{6}$ см. Указание. Можно найти радиус окружности, описанной около треугольника ACD .
192. а) $\sqrt{5}$; б) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.
194. Указание. Из $\triangle ABM$ и $\triangle CBM$ выразите $\sin \angle ABM$ и $\sin \angle CBM$ соответственно и докажите, что $\angle ABM > \angle CBM$.
195. Указание. $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, $\sin \alpha \leq 1$, $2R \sin \alpha \leq 2R$, $a \leq 2R$. Также можно воспользоваться тем, что диаметр — наибольшая хорда.
196. а) 7; б) 14.
197. а) 7,8 см; б) 4,6 см.
198. $2\sqrt{5}$ см.
199. $3\sqrt{2}$ см.

200. а) $2\sqrt{19}$ см; б) $\sqrt{21}$ см.
201. 32 см.
202. $2\sqrt{19}$ см.
203. а) $AB = 7$ см, $BC = 11$ см; б) $AB = 2$ см, $AC = 4$ см. Указание. Выразите неизвестные стороны треугольника через x и примените теорему косинусов.
204. 1 см. Указание. Примите неизвестную сторону за x и примените теорему косинусов к $\triangle ABC$.
205. а) $\sqrt{17}$; б) $\sqrt{37}$.
206. а) 60° ; б) 120° .
207. а) $\frac{7}{8}$; б) $\frac{1}{5}$.
208. а) Остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный.
209. а) $6\sqrt{3}$; б) 16.
210. а) $\sqrt{14}$ см; б) 4 см.
211. а) 8 см и 14 см; б) 16 см и 18 см.
212. а) $\sqrt{10}$ см; б) $\sqrt{7,5} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ см.
213. 36 см. Указание. Примените свойство касательных к окружности, проведенных из одной точки, и теорему косинусов к $\triangle ABC$.
214. 7 см.
215. а) 6 см. Указание. Проведите отрезок CK , параллельный BD ($K \in AD$), и рассмотрите $\triangle ACK$; б) 25 см.
216. 18 см.
217. $\sqrt{7}$.
218. $\sqrt{7}$, $\sqrt{19}$.
220. Тупоугольным. Указание. Так как $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, то $ah_a = bh_b$, $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$, т. е. стороны треугольника обратно пропорциональны высотам: $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 20 : 15 : 12$, $a = 20x$, $b = 15x$, $c = 12x$.
223. а) 42 см^2 ; б) $8\sqrt{6} \text{ м}^2$.
224. а) 96 см^2 ; б) 72 см^2 .
225. а) 12 см; б) 12 см.
226. а) 72 см^2 ; б) 84 см^2 .
227. 24 см^2 и 8,125 см.
228. а) $c \approx 2,5$, $\alpha \approx 53^\circ$, $\beta \approx 97^\circ$; б) $c \approx 1,5$, $\alpha \approx 29^\circ$, $\beta \approx 106^\circ$; в) $\alpha \approx 70^\circ$, $b \approx 7,4$, $c \approx 6,5$; г) $\alpha \approx 48^\circ$, $a \approx 7,5$, $c \approx 5,4$; д) $\alpha \approx 41^\circ$, $\beta \approx 56^\circ$, $\gamma \approx 83^\circ$; е) $\alpha \approx 108^\circ$, $\beta \approx 50^\circ$, $\gamma \approx 22^\circ$.

229. $24\sqrt{5}$ см².
230. а) 2 см; б) 12,5 см.
231. 6. Указание. Соедините центр окружности с противоположной вершиной. Найдите сумму площадей полученных при этом треугольников $\left(\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot r\right)$ и площадь данного треугольника по формуле Герона.
232. 7 см, 15 см, 20 см. Указание. Смотрите *ключевую задачу 4* к § 15 (с. 124).
234. 8 см².
235. 42.
237. $\sqrt{43}$.
239. $b = \frac{2m_a \sin \gamma_1}{\sin(\beta_1 + \gamma_1)}, c = \frac{2m_a \sin \beta_1}{\sin(\beta_1 + \gamma_1)}.$
240. а) $a = \frac{P \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$; б) $a = \sqrt{\frac{2S \sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}}.$
241. а) 6; б) 6.
244. а) $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}; d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha};$
 $\sin \varphi = \frac{2ab \sin \alpha}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 \alpha}};$ б) $\sqrt{3}; \sqrt{7}; \sin \varphi = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$
245. Указание. Рассмотрите углы со сторонами 60° и 120° и теорему косинусов.

Глава IV

246. 60 см.
247. 135°.
248. а) 108°; б) 144°; в) 160°.
249. 12.
250. 14 см.
251. 80 см.
252. $36\sqrt{3}$ см².
253. а) 108°, 36°, 36°; б) 36°, 72°, 72°.
254. 45°.
255. а) 75°; б) 0°.
257. а) 4 см; б) $4\sqrt{2}$ см.
258. $R = 5$ см, $r = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ см.
259. а) 9,7 см; б) 44,8 см.

260. $\beta = 36^\circ$; $R = \frac{10}{\sin 36^\circ}$; $r = \frac{10}{\operatorname{tg} 36^\circ}$.
261. а) $a = 2R \sin 20^\circ$; б) $r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 10^\circ} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} 10^\circ$.
262. 108 см^2 .
263. г) $22,5^\circ$; $67,5^\circ$; 90° . д) У к а з а н и е. Проведите диагонали прямоугольника $A_1A_2A_5A_6$ и выясните, какую часть площади прямоугольника и какую часть площади восьмиугольника занимает площадь треугольника A_1OA_2 , где O — центр многоугольника.
266. а) 9 см; б) 4 см.
267. а) $24\sqrt{3} \text{ см}^2$; б) 72 см.
268. 180 см^2 .
269. а) 4 см и $2\sqrt{3} \text{ см}$.
271. а) $12\sqrt{3} - 18$; б) $3 + \sqrt{3}$.
272. а) $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$; б) $3\sqrt{3}r^2$.
275. а) 62,8 см; б) 9,42 дм; в) 0,314 м; г) 21,98 км.
276. а) 9,6 см; б) 47,8 мм; в) 1,0 дм; г) 0,2 м.
277. а) 150 см; б) 100 см; в) 200 см; г) 40 см.
278. а) 15,3 см; б) 5,7 см.
279. а) 86° ; б) 19° .
280. 57° .
281. 2,8 см.
282. 30° .
283. а) На 6,28 см; б) в 4 раза.
285. а) $78,5 \text{ см}^2$; б) 314 м^2 ; в) $19,625 \text{ дм}^2$; г) $3,14 \text{ км}^2$.
286. а) 1,1 см; б) 10 дм.
287. 80 см.
288. а) $3,14 \text{ см}^2$; б) 13,73 см.
289. а) $39\pi \text{ см}^2$; б) $16\pi \text{ см}^2$.
290. 2 : 1.
291. а) $\frac{Q}{12}$; б) $\frac{Q}{6}$; в) $\frac{Q}{3}$; г) $\frac{3Q}{4}$.
292. а) 80° ; б) 70 см^2 ; в) 270 см^2 .
293. $40\pi \text{ см}^2$.
294. а) 1 : 4; б) 3 : 4.
295. а) $\frac{2\pi}{3} \text{ см}^2$; б) $\frac{3\pi}{2} \text{ м}^2$.
296. а) 12; б) 32π .

297. 59 %.
298. а) $\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$; б) $\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\right)R^2$.
299. а) $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)R^2$; б) $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)R^2$.
300. а) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$; б) 8. У к а з а н и е. Соедините концы радиусов и проведите биссектрису угла сектора, поменяйте желтые и красные сегменты местами.
301. 6 см².
302. $R^2\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
303. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.
305. 30.
309. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Глава V

311. а) 45°; б) 135°.
316. а) $\overline{AD}$; б) $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$; в) $\overline{BC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DA}$; г) $\overline{DB}$ и $\overline{BD}$.
318. а) $\overline{DA} = \overline{CB}$, $\overline{AB} = -\overline{CD}$ и $\overline{DC} = -\overline{CD}$;
б) $(\overline{CB}; \overline{CD}) = 65^\circ$, $\angle(\overline{CB}; \overline{BA}) = 65^\circ$, $\angle(\overline{AD}; \overline{CD}) = 115^\circ$.
319. а) Противоположные; б) равные; в) противоположные; г) перпендикулярные.
320. а) $\overline{AN}$ и $\overline{NB}$, $\overline{BK}$ и $\overline{KC}$; б) например, $\overline{AM}$, $\overline{MK}$, $\overline{AK}$;
в) $\overline{AN}$ и $\overline{BN}$ или $\overline{KC}$ и $\overline{KB}$.
321. а) 5 см; б) 7 см.
322. а) 30°; б) 60°; в) 120°; г) 90°.
329. а) 4; б) 4; в) 0; г) $4\sqrt{3}$.
330. а) 10; б) 10; в) 6; г) 10.
331. а) $\overline{AM}$; б) $\overline{0}$.
332. а) $-\vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $2\vec{b}$; г) $2\vec{b} - 2\vec{a}$; д) $\vec{a} - 2\vec{b}$; е) $2\vec{a}$.
333. $\frac{1}{2}\vec{y} - \frac{1}{2}\vec{x}$.

- 334.** а) $2\vec{a}$; б) $-2\vec{b}$; в) $\vec{a} - \vec{b}$; г) $\vec{a} + \vec{b}$; д) $-\vec{a} - \vec{b}$; е) $\vec{b} - \vec{a}$.
- 335.** а) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$; в) $\vec{b} - \vec{a}$; г) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.
- 338.** $6 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 60° .
- 340.** а) $\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$; б) $\frac{n}{m+n}\vec{AB} + \frac{m}{m+n}\vec{AC}$.
- 342.** $\vec{OA}(2; 5)$; $\vec{OB}(4; 3)$; $\vec{OC}(1; -5)$; $\vec{OD}(-5; -3)$; $\vec{EF}(-5; -3)$.
- 344.** а) $\vec{a}(4; -5)$; $\vec{b}(-3; 1)$; $\vec{d}(1; -1)$; $\vec{e}(-1; 0)$; $\vec{f}(0; 2)$;
 б) $\vec{m} = -\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{k} = 4\frac{1}{3}\vec{i} - 5\frac{4}{5}\vec{j}$; $\vec{l} = \sqrt{2}\vec{i}$; $\vec{t} = -0,2\vec{j}$.
- 345.** а) $\vec{a} + \vec{b} = (2; 3)$; б) $\vec{a} - \vec{b} = (-8; 1)$; в) $2\vec{a} + 5\vec{b} = (19; 9)$;
 г) $-\vec{a} + 0,2\vec{b} = (4; -1,8)$.
- 346.** $\vec{a}$ и $\vec{c}$; $\vec{a}$ и $\vec{e}$; $\vec{c}$ и $\vec{e}$; $\vec{b}$ и $\vec{d}$.
- 348.** а) $m = 2$; б) $n = \pm 6$.
- 349.** а) $\vec{AB}(5; -1)$; $\vec{AC}(4; -3)$; б) $\vec{AB} - \vec{AC} = (1; 2)$.
- 350.** а) $\vec{AB} + \vec{BC} = (2; 3)$; б) $\vec{BA} - \vec{BC} = (-2; -3)$.
- 351.** а) 10; б) 13.
- 352.** а) $|\vec{a}| = 5$; $|\vec{b}| = \sqrt{5}$; б) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{10}$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{5}$.
- 353.** а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $\frac{1}{5}$; г) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.
- 354.** а) $K(1; -3)$; б) $\vec{BM}(8; -2)$; $|\vec{BM}| = 2\sqrt{17}$.
- 355.** $M(3; 1)$.
- 356.** $N(-3; 12)$.
- 358.** а) 15; б) 6.
- 359.** а) 25; б) 144.
- 360.** а) 12; б) 0; в) -8; г) -4.
- 362.** а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{91}$.
- 365.** а) 45° ; б) 90° .
- 366.** а) 12; б) ± 6 .
- 370.** $\sqrt{53}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

Глава I. Соотношения в прямоугольном треугольнике

§ 1. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла 11

§ 2. Решение прямоугольного треугольника 20

§ 3. Тригонометрические формулы 26

§ 4. Синус, косинус, тангенс и котангенс тупого угла 31

§ 5. Формулы площади треугольника и площади параллелограмма 36

§ 6. Среднее пропорциональное (среднее геометрическое) в прямоугольном треугольнике 40

 § 7. Креативная геометрия 45

Глава II. Вписанные и описанные окружности

§ 8. Описанная и вписанная окружности треугольника 57

§ 9. Прямоугольный треугольник и его описанная и вписанная окружности 68

§ 10. Вписанные и описанные четырехугольники 74

 § 11. Креативная геометрия 85

Повторение главы I 95

Повторение главы II 96

Глава III. Теорема синусов, теорема косинусов

§ 12. Теорема синусов 99

§ 13. Теорема косинусов 107

§ 14. Формула Герона. Решение треугольников 117

 § 15. Креативная геометрия 122

Глава IV. Правильные многоугольники

§ 16. Правильные многоугольники 133

§ 17. Формулы радиусов описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника 136

§ 18. Правильный треугольник, четырехугольник, шестиугольник 139

§ 19. Нахождение длины окружности и площади круга 146

 § 20. Креативная геометрия 158

Повторение главы III 165

Повторение главы IV 166

Глава V. Векторы

 § 21. Вектор. Виды векторов	169
 § 22. Действия над векторами	174
 § 23. Координаты вектора	181
 § 24. Скалярное произведение векторов	189
 § 25. Координатно-векторный метод решения задач	194
 § 26. Преобразование фигур на плоскости	198
Повторение геометрии 7—9-х классов	207
Ответы	219

(Название учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Казаков Валерий Владимирович
Казакова Ольга Олеговна

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 9 класса
учреждений образования, реализующих
образовательные программы общего среднего образования,
с русским языком обучения и воспитания

2-е издание, исправленное и дополненное

Зав. редакцией Г. А. Бабаева. Редактор Н. М. Алганова.

Художник Е. А. Ждановская.

Художественный редактор Е. А. Ждановская.

Техническое редактирование и компьютерная верстка Г. А. Дудко.

Корректор О. С. Козицкая.

Подписано в печать 11.02.2025. Формат 70×100¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 18,85 + 0,33 форз. Уч.-изд. л. 13,5 + 0,5 форз.

Тираж 117 500 экз. Заказ .

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Адукацыя і выхаванне”».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/19 от 02.08.2013.

Ул. Буденного, 21, 220070, Минск, Республика Беларусь.

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/3 от 04.10.2013.

Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск, Республика Беларусь.