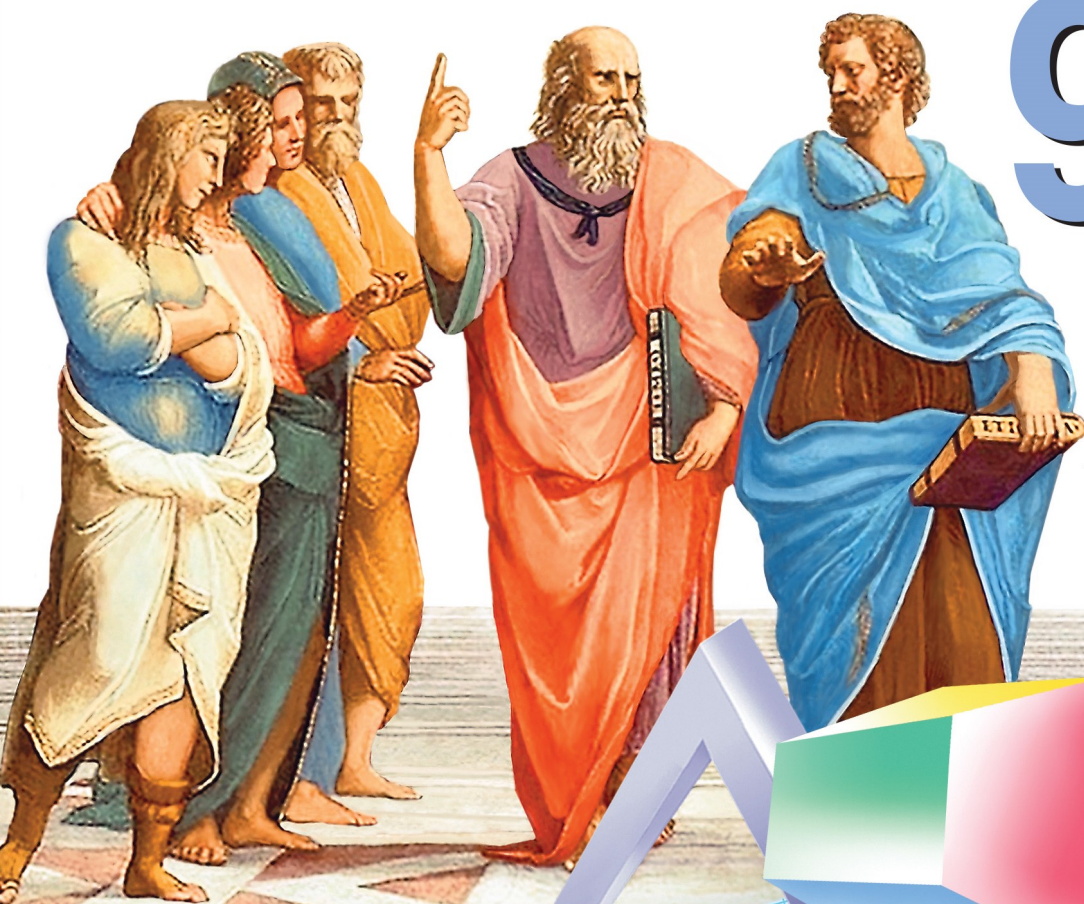




В. У. Казакоў В. А. Казакова

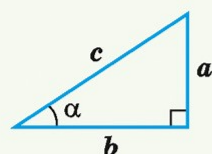
ГЕАМЕТРЫЯ

9



Суадносіны ў прамавугольным трохвугольніку

Востры вугал

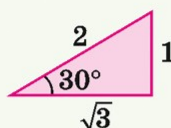


$$\sin \alpha = \frac{a \text{ (проціл. к.)}}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b \text{ (прылег. к.)}}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \text{ (проціл. к.)}}{b \text{ (прылег. к.)}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$



	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Задача

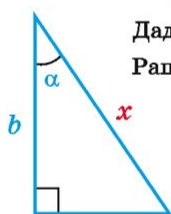
Дадзена: b, α . Знайсці: x .

Рашэнне.

$$1. \cos \alpha = \frac{b}{x}$$

$$2. b = x \cdot \cos \alpha$$

$$3. x = \frac{b}{\cos \alpha}$$



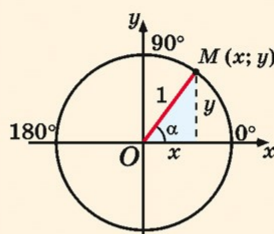
Асноўная

трыганаметрычная тоеснасць

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



$$\sin \alpha = y \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\cos \alpha = x \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

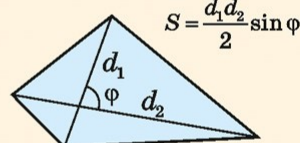
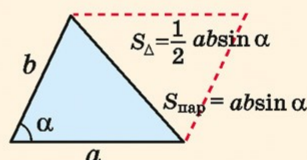
Тупы вугал

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

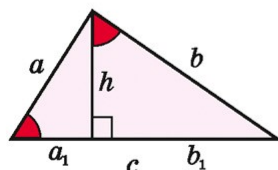
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Сярэдняе геаметрычнае



$$\frac{a_1}{h} = \frac{h}{b_1}$$

(з левага і правага трохвугольніка)

$$h^2 = a_1 b_1$$

$$\frac{a_1}{a} = \frac{a}{c}$$

(з левага і вялікага трохвугольніка)

$$a^2 = c a_1$$

$$\frac{b_1}{b} = \frac{b}{c}$$

(з правага і вялікага трохвугольніка)

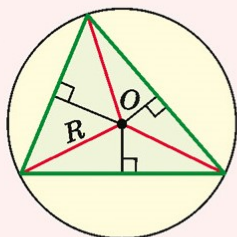
$$b^2 = c b_1$$

1. $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ вострага вугла.
2. Значэнні тр. функцый для вуглоў $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.
3. Рашэнне прамавугольнага трохвугольніка.
4. Асноўная трыганаметрычная тоеснасць.
5. Выражэнне $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ праз $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$.
6. $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ для $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.
7. Змяненне $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$.

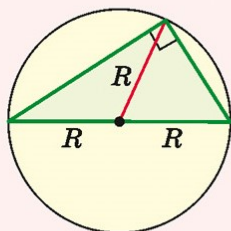
8. Формулы для вуглоў $180^\circ - \alpha$.
9. Значэнні тр. функцый для вуглоў $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$.
10. Формула плошчы трохвугольніка.
11. Формула плошчы паралелаграма.
12. Формула плошчы выпуклага чатырохвугольніка.
13. Сярэдняе геаметрычнае ў прамавугольным трохвугольніку.

Апісаная і ўпісаная акружнасці

1. Апісаная — пасярэдніх $\perp$ -аў

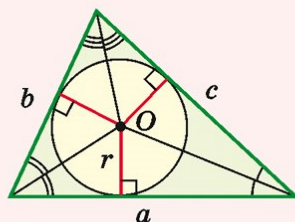


2. Прамавугольны



$$R = \frac{c}{2}$$

3. Упісаная — бісектрыс



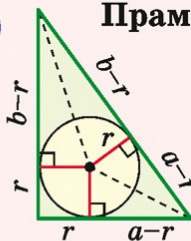
4.

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = pr$$

5.

Прамавугольны

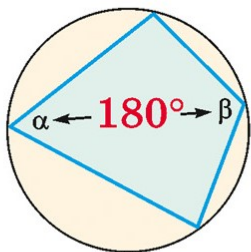
$$c = (a - r) + (b - r)$$



$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

6.

Упісаная

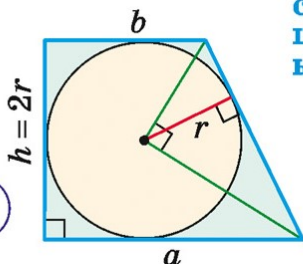
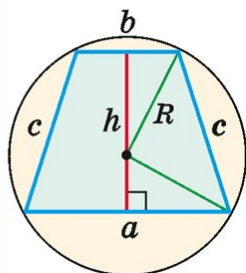


П Р Ы М Е Т А

7.

10.

Упісаная трапецыя — раўнабедраная трапецыя



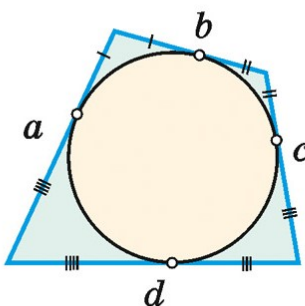
11.

ЧАТЫРОХВУГОЛЬНІКІ

8.

Апісаная

У л а с ц і в а с ц ь



П Р Ы М Е Т А

9.

$$a + c = b + d$$

1. Акружнасць, апісаная каля трохвугольніка.
2. Акружнасць, апісаная каля прамавугольнага трохвугольніка.
3. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік.
4. Формула плошчы $S = pr$.
5. Акружнасць, упісаная ў прамавугольны трохвугольнік.

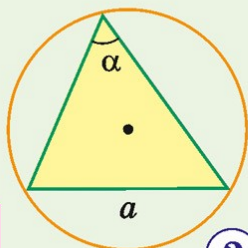
6. Уласцівасць упісанага 4-ка.
7. Прымета ўпісанага 4-ка.
8. Уласцівасць апісанага 4-ка.
9. Прымета апісанага 4-ка.
10. Уласцівасць упісанай трапецыі.
11. Уласцівасць апісанай трапецыі.

Тэарэма сінусаў і тэарэма косінусаў

1 Тэарэма сінусаў

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Стораны тр-ка прапарцыянальны ...



$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

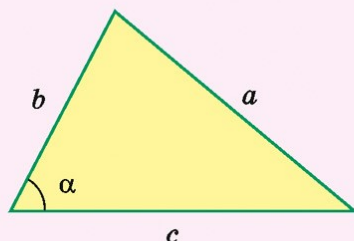
2

$$R = \frac{abc}{4S}$$

3 Тэарэма косінусаў

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Квадрат любой стараны тр-ка роўны ...



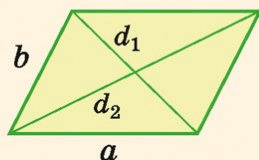
4 Знаходжанне косінуса вугла па трох старанах

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

5

$b^2 + c^2 > a^2$ вугал α востры
 $b^2 + c^2 = a^2$ вугал α прамы
 $b^2 + c^2 < a^2$ вугал α тупы

6 Сума квадратаў дыяганалей паралелаграма роўна ...



$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

7 Формула медыяны

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

Формула Герона

8

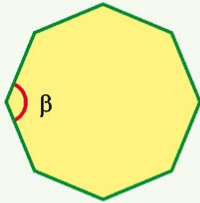
$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

1. Тэарэма сінусаў.
2. Формула знаходжання R праз S .
3. Тэарэма косінусаў.
4. Знаходжанне косінуса вугла трохвугольніка па трох старанах.
5. Вызначэнне віду трохвугольніка па трох старанах.
6. Тэарэма аб суме квадратаў дыяганалей паралелаграма.
7. Формула медыяны трохвугольніка.
8. Формула Герона.

Правильныя многавугольнікі

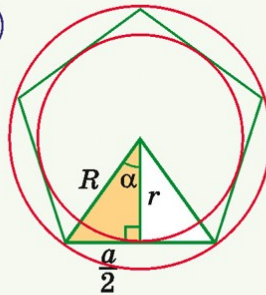
Можна апісаць і ўпісаць
акружнасці з агульным цэнтрам

1



$$\beta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

2

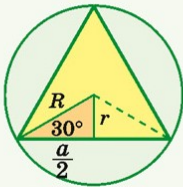


$$\alpha = \frac{180^\circ}{n}$$

$$\frac{a}{2} = R \sin \alpha$$

$$\frac{a}{2} = r \operatorname{tg} \alpha$$

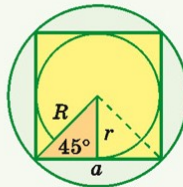
3



$$a = R\sqrt{3}$$

$$r = \frac{R}{2}$$

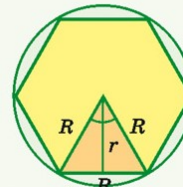
4



$$a = R\sqrt{2}$$

$$r = \frac{a}{2}$$

5



$$a = R$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

6

Даўжыня акружнасці

$$C = 2\pi R$$

7

Плошча круга

$$S = \pi R^2$$

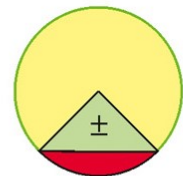
8

$$\frac{l_{\text{дугі}}}{C} = \frac{n^\circ}{360^\circ} = \frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{круга}}}$$

$$\pi \approx 3,14159$$

Это я знаю и помню прекрасно...

9



1. Правільны многавугольнік, яго ўнутраны вугал.
2. Апісаная і ўпісаная акружнасці. Формулы, якія звязваюць a і R , r .
3. Правільны трохвугольнік.
4. Правільны чатырохвугольнік.
5. Правільны шасцівугольнік.
6. Формула даўжыні акружнасці.
7. Формула плошчы круга.
8. Даўжыня дугі. Плошча сектара.
9. Плошча сегмента.

В. У. Казакоў В. А. Казакова

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для 9 класа
ўстаноў адукацыі, якія рэалізуюць
адукацыйныя праграмы агульнай сярэдняй адукацыі,
з беларускай мовай навучання і выхавання

*Даручана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь*

2-е выданне, выпраўленае і дапоўненае

Мінск «Адукацыя і выхаванне» 2025

Праваўладальнік Адукацыя і выхаванне

УДК 514(075.3=161.3)
ББК 22.151я721
К14

Пераклад з рускай *Н. М. Алганавай*

Рэцэнзент

кафедра геаметрыі, тапалогіі і методыкі выкладання матэматыкі
Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта
(кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт *Г. А. Кукрак*)

У афармленні вокладкі выкарыстаны фрагмент фрэскі
Рафаэля Санці «Афінская школа»

Казакоў, В. У.

К14 Геаметрыя : вучэбны дапаможнік для 9-га класа ўстаноў адукацыі, якія рэалізуюць адукацыйныя праграмы агульнай сярэдняй адукацыі, з беларускай мовай навучання і выхавання / В. У. Казакоў, В. А. Казакова ; пераклад з рускай Н. М. Алганавай. — 2-е выданне, выпраўленае і дапоўненае. — Мінск : Адукацыя і выхаванне, 2025. — 232 с. : іл.

ISBN 978-985-34-0191-2.

Папярэдняе выданне было выпушчана ў выдавецтве «Народная асвета» ў 2019 годзе.

УДК 514(075.3=161.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-34-0191-2

© Казакоў В. У., 2019
© Казакоў В. У., Казакова В. А., 2025, са змяненнямі
© Алганавы Н. М., пераклад на беларускую мову, 2025
© Афармленне. Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецтва “Адукацыя і выхаванне”», 2025

ПРАДМОВА

Сябры, у 9-м класе вы скончыце знаёмства з *планіметрыяй* (раздзелам геаметрыі, які вывучае фігуры на плоскасці) і прадэманструеце свае веды на экзамене. Каб атрымаць добры вынік, вам неабходна будзе паўтарыць усё, што было вывучана ў 7-м і 8-м класах, і паспяхова засвойць матэрыял 9-га класа.

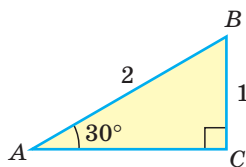
Панарама геаметрыі 9-га класа

У першай главе гэтага дапаможніка вы пазнаёміцеся з такімі паняццямі, як *сінус*, *косінус*, *тангенс* і *катангенс вострага вугла*.

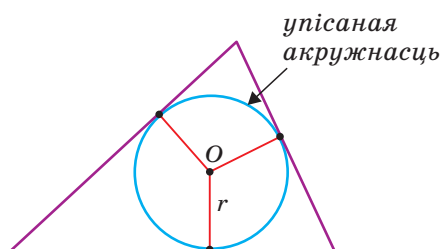
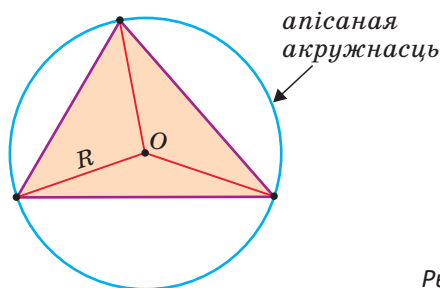
Так, сінусам вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна катэта, процілеглага гэтаму вуглу, да гіпатэнузы.

Напрыклад, калі ў прамавугольным трохвугольніку ACB (рыс. 1) востры вугал A роўны 30° , катэт BC , процілеглы гэтаму вуглу, роўны 1, то гіпатэнуза AB роўна 2 і $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Далей, у другой главе, вы даведаецеся, як знайсці цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, г. зн. акружнасці, якая праходзіць праз усе яго вяршыні, і акружнасці, упісанай у трохвугольнік, г. зн. акружнасці, якая датыкаецца да ўсіх яго старон (рыс. 2).



Рыс. 1



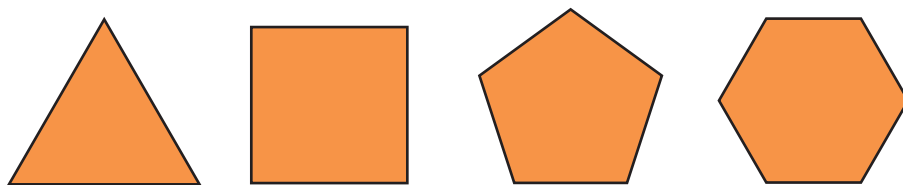
Рыс. 2

Трэцяя глава прысвечана дзвюм найважнейшым тэарэмам: *тэарэме сінусаў* і *тэарэме косінусаў*. Тут геаметрыя інтэгруецца з алгебрай. Мы атрымліваем магчымасць рашаць многія геаметрычныя задачы пры дапамозе ўраўненняў. Тэарэмы сінусаў і косінусаў дазваляюць устанавіць сувязь паміж велічынямі старон і вуглоў трохвугольніка. Пры дапамозе тэарэмы косінусаў мы выведзем знакамітую *формулу Герона* аб знаходжанні плошчы трохвугольніка па трох старанах a , b і c :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

дзе p — паўперыметр трохвугольніка.

У чацвёртай главе разглядаюцца правільныя многавугольнікі. Гэта такія многавугольнікі, у якіх усе стораны роўныя і ўсе вуглы роўныя.



Правільныя многавугольнікі

Рыс. 3

Напрыклад, роўнастаронні трохвугольнік з'яўляецца правільным трохвугольнікам, а квадрат — правільным чатырохвугольнікам (рыс. 3).

У гэтай жа главе будуць абгрунтаваны вядомыя вам формулы даўжыні акружнасці і плошчы круга: $C = 2\pi R$ і $S = \pi R^2$.

Пятая глава «Вектары» змяшчае матэрыял, знаёмы вам з курса фізікі.

Як працаваць з вучэбным дапаможнікам

У вучэбным дапаможніку «Геаметрыя» для 9-га класа пяць глаў. У кожнай главе некалькі параграфіў, кожны з якіх змяшчае:

- а) тэарэтычны матэрыял: азначэнні, тэарэмы і вынікі з іх;
- б) ключавыя задачы;
- в) задачы для самастойнага рашэння.

Ключавыя задачы з'яўляюцца ўзорамі, дзе паказаны прыёмы рашэння і варыянты афармлення задач. Таму яны разбіраюцца настаўнікам разам з класам. Акрамя гэтага, у ключавых задачах разгледжаны дадатковыя ўласцівасці геаметрычных фігур.

Усе ўласцівасці, даказаныя ў ключавых задачах, адносяцца да тэарэтычнай часткі. Пры рашэнні іншых задач можна спасылацца на гэтыя ўласцівасці як на вядомыя геаметрычныя факты.

У пачатку кожнай главы прыводзіцца *карта главы*, дзе паказаны фігуры, вывучаемыя ў дадзенай главе. У кожным параграфі паўтлустым шрыфтам вылучаны фармулёўкі тэарэм і тэрміны, азначэнні якіх неабходна ведаць. Усе главы змяшчаюць дадатковы матэрыял пад рубрыкамі: «Рэальная геаметрыя», «Мадэляванне», «Геаметрыя 3D», «Гімнастыка розуму», з якімі вы ўжо знаёмы.

Увага!

Заданні рубрыкі «Рашаем самастойна» дыферэнцыраваны па пяці ўзроўнях засваення вучэбнага матэрыялу.

Матэрыял, вылучаны знакам , прызначаны для вывучэння матэматыкі на павышаным узроўні.



На вккладцы вучэбнага дапаможніка паказаны фрагмент фрэскі выдатнага італьянскага мастака эпохі Адраджэння Рафаэля «Афінская школа». У цэнтры фрагмента размешчаны Платон (вучань Сакрата) і Арыстоцель (вучань Платона і настаўнік Аляксандра Македонскага). Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, чым знакаміты названыя гістарычныя персанажы.

Жадаем вам поспехаў у засваенні геаметрыі ў 9-м класе!

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Геаметрыя» для 9-га класа можна знайсці на сайце: <http://eior.by> (Адзіны інфармацыйна-адукацыйны рэсурс). Выберыце ў меню «9 клас», «Геаметрыя». У адпаведнай тэме націсніце кнопку «Дадатковыя матэрыялы».



Гэта трэба ведаць (7—8-ы класы)

7-ы клас

1. Прыметы роўнасці трохвугольнікаў.
2. Уласцівасці і прыметы раўнабедранага трохвугольніка.
3. Уласцівасці і прыметы паралельных прамых.
4. Уласцівасць знешняга вугла трохвугольніка.
5. Прыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў.
6. Уласцівасць катэта, які ляжыць насупраць вугла ў 30° .

8-ы клас

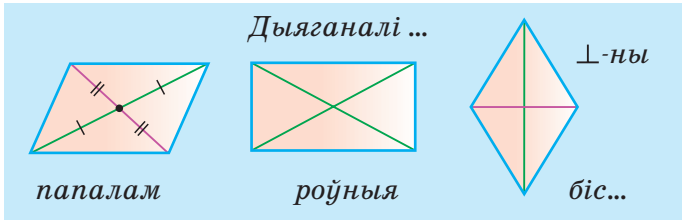
1. Формула сумы вуголоў многавугольніка.
2. Уласцівасці і прыметы паралелаграма, прамавугольніка, ромба.
3. Тэарэма Фалеса. Сярэдняя лінія трохвугольніка і трапецыі.
4. Формулы плошчы квадрата, прамавугольніка, паралелаграма, трохвугольніка, прамавугольнага трохвугольніка, ромба, трапецыі.
5. Уласцівасць медыян трохвугольніка.
6. Тэарэма Піфагора і ёй адваротная.
7. Прыметы падобнасці трохвугольнікаў.
8. Уласцівасць плошчаў падобных трохвугольнікаў.
9. Уласцівасць датычнай да акружнасці.
10. Уласцівасць датычных, праведзеных да акружнасці з аднаго пункта.
11. Тэарэма аб упісаным і адпаведным яму цэнтральным вугле.
12. Уласцівасць упісаных вуголоў, якія абапіраюцца на адну і тую ж дугу. Уласцівасць упісанага вугла, які абапіраецца на дыяметр.
13. Уласцівасць адрэзкаў перасякальных хорд.
14. Уласцівасць адрэзка датычнай і адрэзкаў сякучай, праведзеных да акружнасці з аднаго пункта.

Найбольш важныя пытанні 8-га класа адлюстраваны ў наступным апорным канспекце. Для падрабязнага паўтарэння вучэбнага матэрыялу 7-га і 8-га класаў можна карыстацца апорнымі канспектамі ў канцы дадзенага вучэбнага дапаможніка.

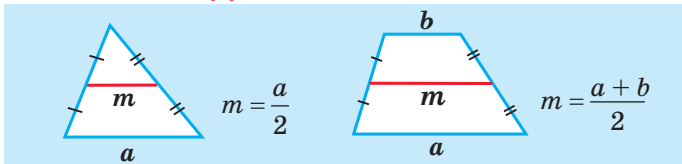
$$180^\circ(n - 2) \text{ — сума вуглоў } n\text{-вугольніка}$$

8 кл.

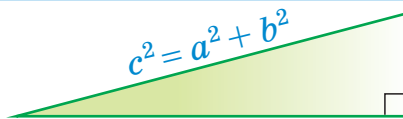
ПАРАЛЕЛАГРАМЫ



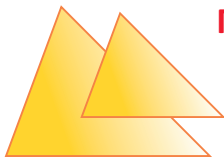
ФАЛЕС. СЯРЭДНЯЯ ЛІНІЯ ... ПАРАЛЕЛЬНА ...



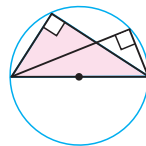
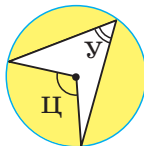
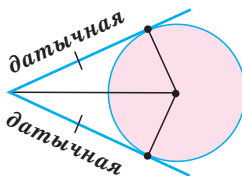
ПІФАГОР



ПРЫМЕТЫ ПАДОБНАСЦІ

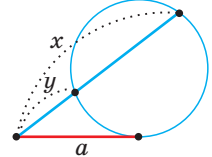
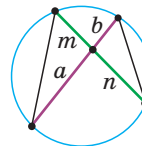


I II III

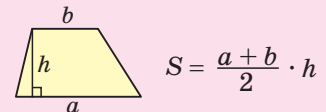
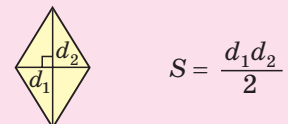
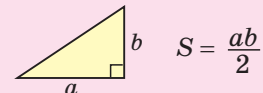
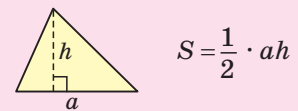
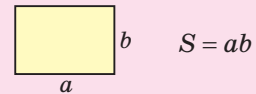
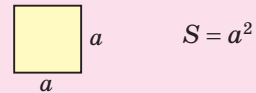
Адносіна плошчаў падобных роўна k^2 Упісаны вугал роўны $\frac{1}{2}$ цэнтральнага

$$ab = mn$$

$$a^2 = xy$$



ПЛОШЧЫ



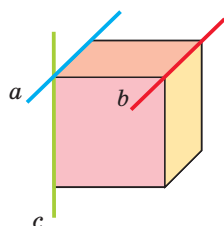
А цяпер праверце ўменне выкарыстоўваць свае веды пры рашэнні задач, выканаўшы наступны тэст. Кожная задача ў ім ацэньваецца ў 10 балаў, агульная колькасць балаў роўна 100. Правільныя адказы можна атрымаць у вашага настаўніка матэматыкі. Паспрабуйце набраць максімальную колькасць балаў. Паспяховага выканання тэста!

Тэст па геаметрыі за 8-ы клас

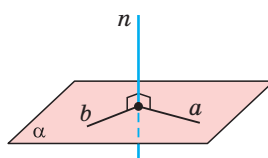
Умовы задач	Адказы на выбар
1. Дадзены паралелаграм $ABCD$, $AC = 12$ см, $BD = 10$ см, $CD = 4$ см, O — пункт перасячэння дыяганалей паралелаграма. Знайдзіце перыметр трохвугольніка AOB .	а) 14 см; б) 15 см; в) 18 см; г) 22 см.
2. Дыяганалі прамавугольніка $ABCD$ перасякаюцца ў пункце O , $\angle ACB = 40^\circ$. Знайдзіце $\angle COD$.	а) 40° ; б) 50° ; в) 80° ; г) 60° .
3. Перыметр ромба роўны 24 см, плошча — 30 см^2 . Знайдзіце вышыню ромба.	а) 5 см; б) 4,5 см; в) 6 см; г) 8 см.
4. У трохвугольніку ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 16$ см, $AB = 20$ см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC .	а) 160 см^2 ; б) 320 см^2 ; в) 48 см^2 ; г) 96 см^2 .
5. Вышыня трапецыі роўна 10 см, меншая аснова — 4 см, плошча — 100 см^2 . Знайдзіце большую аснову трапецыі.	а) 12 см; б) 16 см; в) 20 см; г) 24 см.
6. Дадзены трохвугольнік ABC , пункты K і M належаць старанам AB і BC адпаведна, $KM \parallel AC$. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC , калі $BK = 4$ см, $AK = KM = 6$ см, $MC = 9$ см.	а) 50 см; б) 40 см; в) 52 см; г) 64 см.
7. Дыяганалі трапецыі $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перасякаюцца ў пункце O , $AO = 15$ см, $OC = 5$ см, $BC = 8$ см. Знайдзіце сярэднюю лінію трапецыі.	а) 18 см; б) 24 см; в) 32 см; г) 16 см.
8. AB і AC — датычныя да акружнасці, B і C — пункты дотыку, $\angle BAC = 64^\circ$. Пункты B і C разбіваюць акружнасць на дзве дугі. Знайдзіце градусную меру большай з іх.	а) 128° ; б) 116° ; в) 296° ; г) 244° .
9. У паралелаграме $ABCD$ вышыня $BH = 12$ см праведзена да стараны AD , дыяганалі $AC = 15$ см, $BD = 13$ см. Знайдзіце плошчу паралелаграма, калі $AH < AD$.	а) 84 см^2 ; б) 96 см^2 ; в) 72 см^2 ; г) 108 см^2 .
10. Дзве акружнасці радыусамі $R = 9$ і $r = 4$ з цэнтрамі O_1 і O_2 адпаведна датыкаюцца адна да адной знешнім чынам, а таксама да агульнай знешняй датычнай у пунктах A і B . Знайдзіце плошчу трохвугольніка O_1MO_2 , дзе M — сярэдзіна адрэзка AB .	а) 6; б) 12; в) 24; г) 10.

Экскурс у стэрэаметрыю

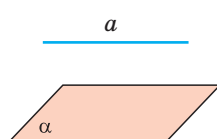
Успомнім, з якімі паняццямі *стэрэаметрыі* (раздзела геаметрыі, які вывучае ўласцівасці фігур у прасторы) вы пазнаёміліся ў 7—8-м класах (рыс. 4). Лічыцца, што прамая не мае таўшчыні і бясконцая ў абодва бакі, плоскасць не мае таўшчыні і бясконцая ва ўсе бакі.



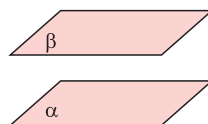
Калі дадзены куб, то прамыя a і b паралельныя, прамыя a і c перасякаюцца, прамыя b і c — скрыжоўваюцца.



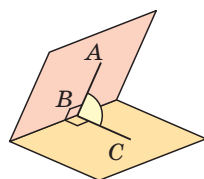
Прамая n называецца перпендыкулярнай плоскасці α , калі яна перпендыкулярна любой прамой гэтай плоскасці.



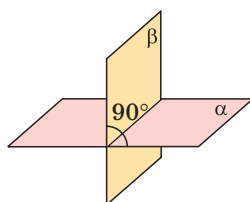
Прамая a называецца паралельнай плоскасці α , калі яна не перасякае гэту плоскасць.



Плоскасці α і β называюцца паралельнымі, калі яны не перасякаюцца.



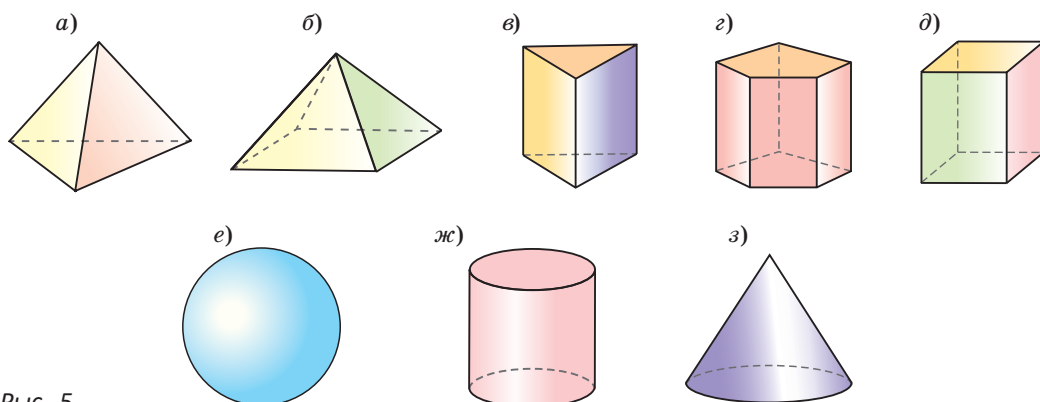
Двухгранны вугал — гэта вугал паміж паўплоскасцямі з агульнай мяжой. Ён вымяраецца велічынёй вугла ABC .



Плоскасці α і β называюцца перпендыкулярнымі, калі яны пры перасячэнні ўтвараюць двухгранны вугал, роўны 90° .

Рыс. 4

На рысунку 5 адлюстраваны восем прасторавых фігур. Пакажыце гэтыя фігуры: пяцівугольная прызма, шар, трохвугольная піраміда, прамавугольны паралелепіпед, трохвугольная прызма, цыліндр, чатырохвугольная піраміда, конус.



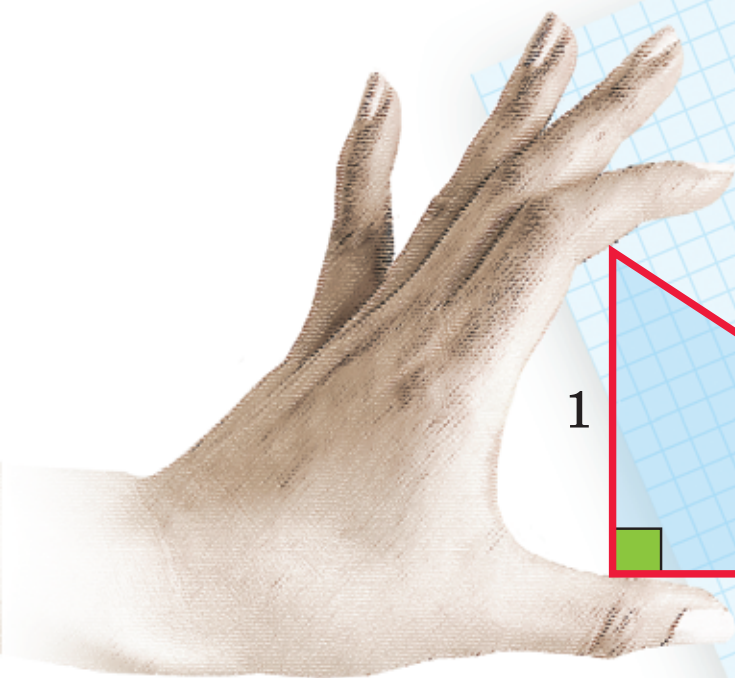
Рыс. 5

Глава I

Суадносіны ў прамавугольным трохвугольніку

У гэтай главе вы даведаецеся:

- Што такое сінус, косінус, тангенс і катангенс
- Чаму сінус 30° роўны $\frac{1}{2}$
- Як знайсці сярэдняе геаметрычнае двух лікаў



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

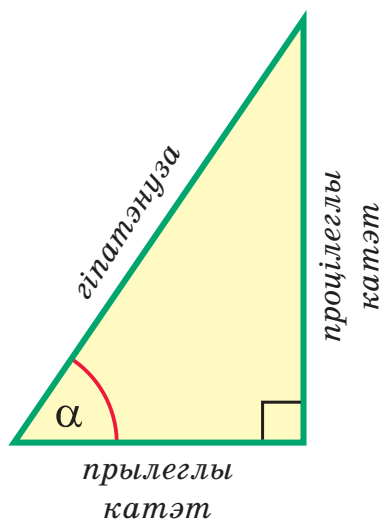
ТРЫГАНАМЕТРЫЯ

СІНУС

КОСІНУС

ТАНГЕНС

КАТАНГЕНС

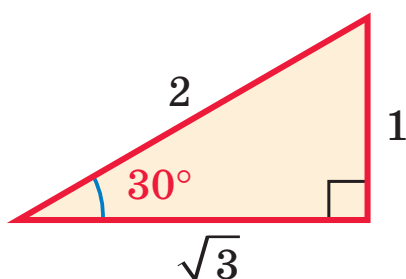


$$\sin \alpha = \frac{\text{процілеглы катэт}}{\text{гіпатэнуза}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{прылеглы катэт}}{\text{гіпатэнуза}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{процілеглы катэт}}{\text{прылеглы катэт}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{прылеглы катэт}}{\text{процілеглы катэт}}$$



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$$

АСНОЎНАЯ ТРЫГАНАМЕТРЫЧНАЯ ТОЕСНАСЦЬ

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

сярэдняе арыфметычнае

сярэдняе геаметрычнае

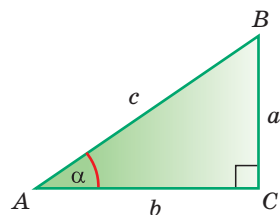
$$\frac{a+b}{2}$$

$$\sqrt{ab}$$

§ 1. Сінус, косінус, тангенс і катангенс вострага вугла

1. Азначэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вострага вугла

Няхай у прамавугольным трохвугольніку гіпатэнуза роўна c , адзін з вострых вуглоў роўны α , *процілеглы* гэтаму вуглу катэт роўны a , *прылеглы* катэт — b (рыс. 6). Адносіны катэтаў да гіпатэнузы $\frac{a}{c}$ і $\frac{b}{c}$, а таксама адносіны катэта да катэта $\frac{a}{b}$ і $\frac{b}{a}$ маюць спецыяльныя назвы: *сінус*, *косінус*, *тангенс* і *катангенс* вострага вугла — і адпаведна абазначаюцца: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.



Рыс. 6

Азначэнне. **Сінусам** вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна *процілеглага* катэта да гіпатэнузы:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Косінусам вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна *прылеглага* катэта да гіпатэнузы:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Азначэнне. **Тангенсам** вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна *процілеглага* катэта да *прылеглага*:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Катангенсам вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна *прылеглага* катэта да *процілеглага*:

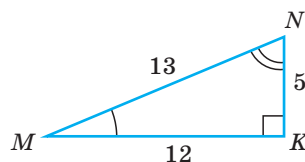
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Прыклад. Вугал K у $\triangle MNK$ роўны 90° (рыс. 7).

Тады:

$$\sin M = \frac{5}{13}, \quad \cos M = \frac{12}{13},$$

$$\operatorname{tg} M = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{ctg} M = \frac{12}{5}.$$



Рыс. 7

Для вугла N катэт MK — процілеглы, а катэт NK — прылеглы (гл. рыс. 7, с. 11). Таму згодна з азначэннямі атрымліваем:

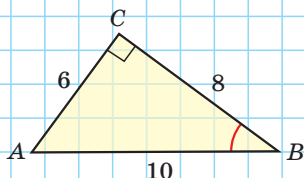
$$\sin N = \frac{MK}{MN} = \frac{12}{13}, \quad \cos N = \frac{NK}{MN} = \frac{5}{13}, \quad \operatorname{tg} N = \frac{MK}{NK} = \frac{12}{5}, \quad \operatorname{ctg} N = \frac{NK}{MK} = \frac{5}{12}.$$

Можна заўважыць, што сінус вострага вугла α прамавугольнага трохвугольніка і косінус другога вострага вугла гэтага трохвугольніка, які змяшчае $90^\circ - \alpha$, роўныя, г. зн. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. Гэтак сама $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$. Напрыклад, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$, $\operatorname{tg} 40^\circ = \operatorname{ctg} 50^\circ$.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

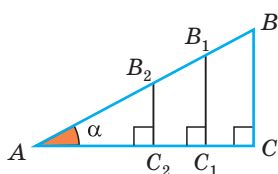
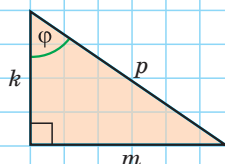
Тэст 1

- а) $\sin B = \dots$
- б) $\cos B = \dots$
- в) $\operatorname{tg} B = \dots$
- г) $\operatorname{ctg} B = \dots$



Тэст 2

- а) $\sin \varphi = \dots$
- б) $\cos \varphi = \dots$
- в) $\operatorname{tg} \varphi = \dots$
- г) $\operatorname{ctg} \varphi = \dots$



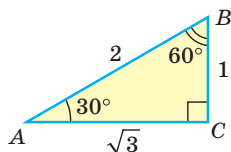
Рыс. 8

Значэнне сінуса вострага вугла, а таксама косінуса, тангенса і катангенса залежыць толькі ад велічыні вугла і не залежыць ад памераў і размяшчэння прамавугольнага трохвугольніка з дадзеным вострым вуглом. Гэта вынікае з таго, што прамавугольныя трохвугольнікі з роўным вострым вуглом падобныя, а ў падобных трохвугольнікаў адпаведныя стораны прапарцыянальныя. Так, у $\triangle ABC$ (рыс. 8) $\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2}$.

2. Значэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вуглоў 30° , 45° , 60°

Разгледзім прамавугольны трохвугольнік ABC , у якога $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 1$ (рыс. 9). Паколькі катэт, які ляжыць насупраць вугла ў 30° , роўны палавіне гіпатэнузы, то $AB = 2$. Па тэарэме Піфагора

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}. \text{ Тады:}$$



Рыс. 9

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Паколькі $\angle B = 90^\circ - \angle A = 60^\circ$ (гл. рыс. 9), то

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Разгледзім раўнабедранны прамавугольны трохвугольнік ABC , у якога $\angle A = 45^\circ$, $AC = BC = 1$ (рыс. 10). Па тэарэме Піфагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

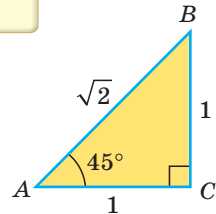
Тады:

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AC} = 1,$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{AC}{BC} = 1.$$



Рыс. 10

Складзём табліцу значэнняў сінусаў, косінусаў, тангенсаў і катангенсаў для вуглоў 30° , 45° і 60° .

	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Знаходжанне значэнняў трыганаметрычных функцый

Значэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса дадзенага вугла можна прыбліжана знаходзіць пры дапамозе спецыяльных трыганаметрычных табліц¹ або калькулятара.

¹ Трыганаметрычныя табліцы знаходзяцца на с. 54.

Напрыклад, пры дапамозе калькулятара, камп'ютара або мабільнага тэлефона (смартфона) знаходзім: $\sin 45^\circ = 0,707106\dots$. Прыбліжанае значэнне трыганаметрычных функцый пры рашэнні задач будзем браць з акругленнем да чатырох знакаў пасля коскі: $\sin 45^\circ \approx 0,7071$.

Такім чынам, дакладнае значэнне $\sin 45^\circ$ роўна $\frac{\sqrt{2}}{2}$, а прыбліжанае — 0,7071.

Табліцы і калькулятар таксама дазваляюць знаходзіць велічыню вострага вугла па значэнні сінуса, косінуса або тангенса. Напрыклад, знойдзем востры вугал, сінус якога роўны 0,4175. Выбраўшы на камп'ютары від калькулятара «інжынерны», далей «градусы», трэба ўвесці паслядоўна $0,4175 + \text{Inv} + \sin^{-1}$. На экране з'явіцца адказ: 24,676... . Акруглім яго да дзясятых долей градуса і атрымаем 24,7°. Улічыўшы, што 1° змяшчае 60 вуглавых мінут, атрымаем: $0,7^\circ = 0,7 \cdot 60' = 42'$. Шуканы вугал, сінус якога 0,4175, прыбліжана роўны 24°42'.

А цяпер выканайце **Тэст 3**.

Тэст 3											
Якая роўнасць няправільная:											
а) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$;						б) $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$;					
в) $\lg 45^\circ = 1$;						г) $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$?					

4. Трыганаметрычныя функцыі вострага вугла

Сінус, косінус, тангенс і катангенс з'яўляюцца функцыямі вугла, паколькі кожнаму востраму вуглу x адпавядае адзінае значэнне сінуса, косінуса, тангенса і катангенса. Яны называюцца *трыганаметрычнымі функцыямі* і запісваюцца так: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \lg x$, $y = \text{ctg} x$.

Паколькі ў прамавугольным трохвугольніку катэт меншы за гіпатэнузу, то для вострага вугла x справядліва: $0 < \sin x < 1$, $0 < \cos x < 1$, значыць, **сінус і косінус вострага вугла дадатныя і меншыя за 1**. Тангенс і катангенс могуць прымаць *любое дадатнае значэнне*. Напрыклад, $\lg 85^\circ \approx 11,4$.



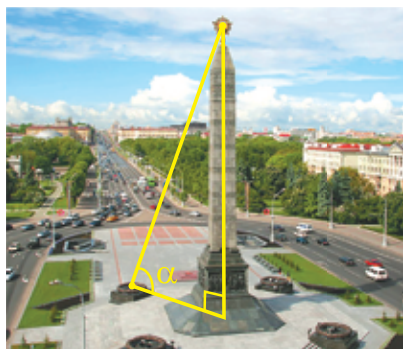
Рыс. 11

З павелічэннем вострага вугла сінус і тангенс нарастаюць, а косінус і катангенс спадаюць (рыс. 11), г. зн. калі $\beta > \alpha$, то $\sin \beta > \sin \alpha$, $\lg \beta > \lg \alpha$, але $\cos \beta < \cos \alpha$, $\text{ctg} \beta < \text{ctg} \alpha$ (гл. с. 28, задачу 2). Гэта гарантуе, што сінус (косінус, тангенс і катангенс) вострага вугла вызначаюць гэты вугал адназначна.

Мадэляванне

Ордэн на вяршыні манумента на плошчы Перамогі ў г. Мінску асвятляецца пражэктарам, які знаходзіцца на адлегласці 10 м ад цэнтра асновы. Вышыня манумента роўна 38 м. Вызначце велічыню вугла, які прамень пражэктара ўтварае з паверхняй зямлі (з прамой, якая злучае пражэктар і аснову манумента).

Высветліце, як называецца ўзгаданы ордэн і якія яго памеры. Капсулы з зямлёй з якіх гарадоў-герояў СССР размешчаны на плошчы Перамогі?

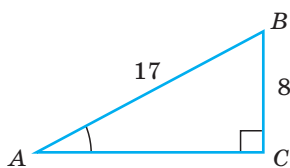


Заданні да § 1

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. У прамавугольным трохвугольніку ABC , дзе $\angle C = 90^\circ$, катэт BC роўны 8 см, гіпатэнуза AB роўна 17 см. Знайсці косінус вугла A (рыс. 12).

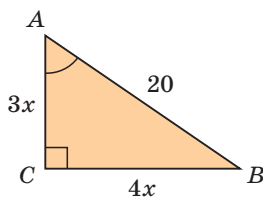


Рыс. 12

Рашэнне. Па тэарэме Піфагора знойдзем катэт AC :
 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см). Косінус вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка роўны адносіне прылеглага катэта да гіпатэнузы. Тады
 $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$.

Адказ: $\frac{15}{17}$.

Задача 2. Гіпатэнуза AB прамавугольнага трохвугольніка ABC роўна 20 см, $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$ (рыс. 13). Знайсці плошчу трохвугольніка.



Рыс. 13

Рашэнне. Паколькі $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, то $\frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$. Абазначым $AC = 3x$ см, $BC = 4x$ см. Па тэарэме Піфагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $(3x)^2 + (4x)^2 = 20^2$, $25x^2 = 400$, $x^2 = 16$, $x = 4$ ($x > 0$). Тады $AC = 3 \cdot 4 = 12$ (см), $BC = 4 \cdot 4 = 16$ (см), $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$ (см²).
 Адказ: 96 см².

Задача 3. Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудаваць вугал, сінус якога роўны $\frac{4}{5}$.

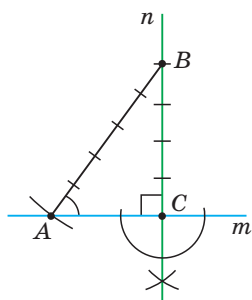


Рис. 14

Рашэнне. Ідэя рашэння. Пабудуем прамавугольны трохвугольнік з катэтам, роўным 4 адзінкам, і гіпатэнузай, роўнай 5 адзінкам. Сінус вугла, процілеглага дадзенаму катэту, будзе роўны $\frac{4}{5}$.

Пабудова. 1) Будуем прамы вугал C (рис. 14), для чаго праводзім адвольную прамую m , адзначаем на ёй пункт C і будуем прамую n , якая праходзіць праз пункт C перпендыкулярна прамой m (успомніце па рысунку алгарытм пабудовы).

2) На прамой n ад пункта C адкладваем паслядоўна чатыры роўныя адрэзкі. Атрымліваем адрэзак BC , які змяшчае 4 адзінкі.

3) Будуем акружнасць з цэнтрам у пункце B радыусам, роўным пяці адзінкам. У перасячэнні гэтай акружнасці і прамой m атрымліваем пункт A . Вугал BAC — шуканы.

Доказ. З $\triangle ABC$ знаходзім $\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

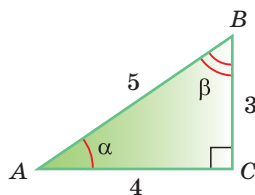


Рис. 15

1. Па рысунку 15 знайдзіце:

- а) $\sin \alpha$; б) $\cos \alpha$; в) $\operatorname{tg} \alpha$; г) $\operatorname{ctg} \alpha$;
д) $\sin \beta$; е) $\cos \beta$; ж) $\operatorname{tg} \beta$; з) $\operatorname{ctg} \beta$.

2. Выкарыстаўшы клеткі ў сшытку, намалюйце прамавугольны трохвугольнік ABC з прамым вуглом C такі, што $\operatorname{tg} A = \frac{4}{5}$. Вызначце на вока велічыню вугла A . Праверце сваё меркаванне пры дапамозе транспарціра.

3. Па даных на рысунках 16, а)–в) вылічыце адпаведна $\sin \alpha$, $\cos \beta$ і $\operatorname{tg} \gamma$.

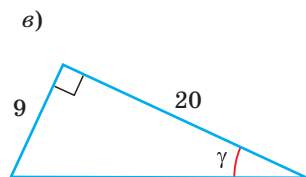
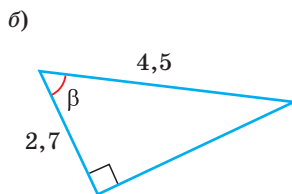
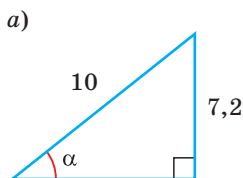


Рис. 16

4. У прамавугольным трохвугольніку ABC гіпатэнуза AB роўна 25 см, катэт AC роўны 24 см. Знайдзіце:

а) $\sin A$; б) $\cos A$; в) $\operatorname{tg} B$;
г) $\operatorname{ctg} B$; д) $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{ctg} B$; е) $\sin^2 A + \cos^2 A$.

5. Пры дапамозе калькулятара або трыганаметрычных табліц знайдзіце, акругліўшы адказ да 0,0001:

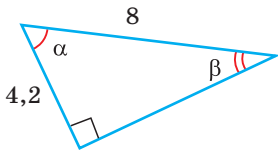
а) $\sin 5^\circ$; б) $\sin 15^\circ$; в) $\cos 40^\circ$;
г) $\cos 72^\circ$; д) $\operatorname{tg} 50^\circ$; е) $\operatorname{tg} 85^\circ$.

6. Пры дапамозе калькулятара або трыганаметрычных табліц знайдзіце, акругліўшы адказ да 1° , велічыню вострага вугла x , калі:

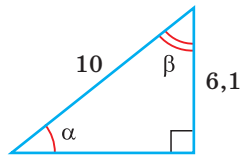
а) $\sin x = 0,4226$; б) $\cos x = 0,6820$; в) $\operatorname{tg} x = 0,5774$.

7. Знайдзіце вострыя вуглы α і β трохвугольнікаў на рысунках 17, а)–в), выкарыстаўшы трыганаметрычныя функцыі і калькулятар (табліцы). Адказы акругліце да 1° .

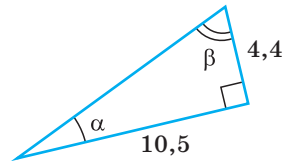
а)



б)



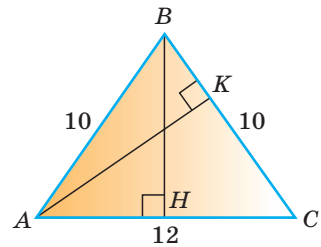
в)



Рыс. 17

8. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC (рыс. 18), $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, BH — вышыня. Вылічыце:

а) сінус вугла BAC ;
б) косінус вугла ACB ;
в) тангенс вугла CBH ;
г) вышыню AK і сінус вугла ABK .



Рыс. 18

9. Знайдзіце сінус меншага вострага вугла паміж дыяганаллю прамавугольніка і яго стараной, калі перыметр прамавугольніка роўны 34 см, а адна з яго старон — 12 см.

10. Запоўніце пропускі ў роўнасцях, перапісаўшы іх у сшытак:

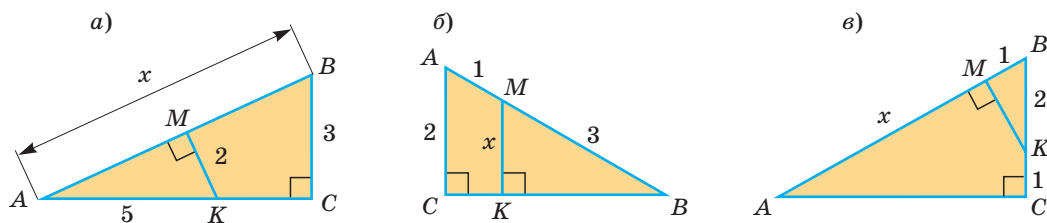
а) $\sin 60^\circ = \dots$; б) $\operatorname{tg} 30^\circ = \dots$;
в) $\sin \dots = \frac{1}{2}$; г) $\cos \dots = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
д) $\sin 45^\circ = \dots$; е) $\operatorname{ctg} \dots = \sqrt{3}$;
ж) $\dots 45^\circ = 1$; з) $\cos \dots = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. Вугал α — востры. Знайдзіце:

- а) вугал α , $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, калі $\cos \alpha = \frac{1}{2}$;
 б) вугал α , $\cos \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, калі $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 в) вугал α , $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, калі $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$;
 г) вугал α , $\cos \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, калі $\sin \alpha = 0,5$.

12. Знайдзіце косінус вострага вугла раўнабедранай трапецыі са старанамі, роўнымі 5 см, 11 см, 6 см, 6 см, і запішыце градусную меру гэтага вугла.

13. Па даных на рысунках 19, а)–в) знайдзіце даўжыню адрэзка x , выкарыстаўшы азначэнне сінуса або косінуса вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка.

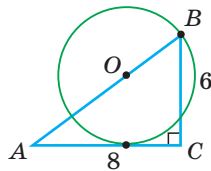


Рыс. 19

14. Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 8 см, тангенс вугла пры аснове роўны 2. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

15. Тангенс вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка роўны $\frac{2}{5}$, адзін з катэтаў на 6 см большы за другі. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

16. Акружнасць з цэнтрам O датыкаецца да катэта AC і праходзіць праз вяршыню B прамавугольнага трохвугольніка ABC з катэтамі $BC = 6$, $AC = 8$; пункт O ляжыць на гіпатэнузе AB (рыс. 20). Знайдзіце радыус гэтай акружнасці, выкарыстаўшы азначэнне сінуса вострага вугла.



Рыс. 20

17. Якія з наступных лікаў не могуць быць значэннямі сінуса вострага вугла: 2 ; $\frac{15}{17}$; $-\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$; $0,75$; $\sqrt{3} - 1$?

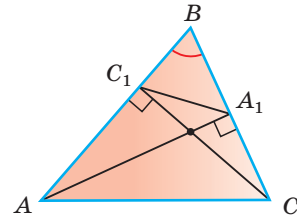
18. Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудуйце вугал α , калі вядома, што:

- а) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; б) $\cos \alpha = 0,6$.

19. Дакажыце, што калі α і β — вострыя вуглы аднаго прамавугольнага трохвугольніка, то:

- а) $\sin \alpha + \sin \beta < 2$; б) $\sin \alpha + \sin \beta > 1$.

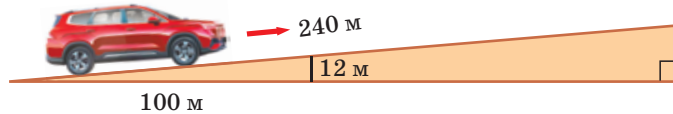
20. а) Перыметр раўнабедранага трохвугольніка роўны 64 см, косінус вугла пры аснове роўны 0,6. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.
 б) Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 10 см, сінус процілеглага аснове вострага вугла роўны $\frac{3}{5}$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.
21. У востравугольным трохвугольніку ABC (рыс. 21) праведзены вышыні AA_1 і CC_1 , $\angle B = 60^\circ$, $A_1C_1 = 4$, $S_{A_1BC_1} = 9$.
 а) Дакажыце, што трохвугольнік A_1BC_1 падобны трохвугольніку ABC з каэфіцыентам падобнасці, роўным $\cos B$.
 б) Знайдзіце даўжыню стараны AC .
 в) Знайдзіце S_{ABC} .



Рыс. 21

Рэальная геаметрыя

На рысунку 22 паказаны дарожны знак «Круты пад'ём 12 %». Ён азначае, што праз кожныя 100 м, якія адлічваюцца па гарызанталі, вышыня знаходжання пункта павялічваецца на 12 м.



Рыс. 22

Заданне 1. Вызначце велічыню вугла пад'ёму пры такім знаку, выкарыстаўшы паняцце тангенса вугла.

Заданне 2. Вылічыце, выкарыстаўшы трыганаметрычныя функцыі, на якую вышыню адносна першапачатковага становішча падымецца аўтамабіль, калі ён прыедзе па дарозе 240 м угору. Праверце атрыманы вынік, рашыўшы гэту задачу з выкарыстаннем падобнасці трохвугольнікаў.

Цікава ведаць. У 2017 г. адбылося ўрачыстае адкрыццё завода «БЕЛДЖЫ» па зборцы легкавых аўтамабіляў. Прадпрыемства размяшчаецца паміж Барысавам і Жодзінам. У 2023 г. СЗАТ «БЕЛДЖЫ» пацвердзіла званне лаўрэата Прэміі Урада і атрымала прэстыжную ўзнагароду за дасягненні ў галіне якасці.



Заданне 3. Выкарыстаўшы дадатковыя крыніцы інфармацыі, высветліце першапачатковую магутнасць завода (колькасць выпускаемых аўтамабіляў у год).

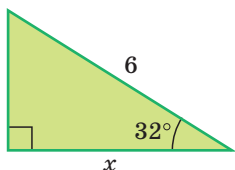
§ 2. Рашэнне прамавугольнага трохвугольніка

1. Алгарытм рашэння прамавугольнага трохвугольніка

Пад рашэннем прамавугольнага трохвугольніка разумеюць знаходжанне яго невядомых старон і вуглоў па некаторых элементах, якія вызначаюць гэты трохвугольнік. Разгледзім тры задачы:

- 1) знаходжанне катэта па гіпатэнузе і вострым вугле;
- 2) знаходжанне катэта па другім катэце і вострым вугле;
- 3) знаходжанне гіпатэнузы па катэце і вострым вугле.

Задача 1. Гіпатэнуза прамавугольнага трохвугольніка роўна 6, востры вугал роўны 32° (рыс. 23). Знайсці катэт, прылеглы да дадзенага вугла. Адказ акругліць да 0,1.



Рыс. 23

Рашэнне. Прымем даўжыню шуканага катэта за x .

$$\left(\text{Вядома: } \cos \alpha = \frac{\text{прылеглы катэт}}{\text{гіпатэнуза}} \right)$$

$$\cos 32^\circ = \frac{x}{6}, \quad x = 6 \cdot \cos 32^\circ, \quad x \approx 6 \cdot 0,8480 \approx 5,1.$$

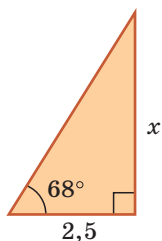
(крок 1)

(крок 2)

(крок 3)

Адказ: 5,1.

Задача 2. Катэт прамавугольнага трохвугольніка роўны 2,5, а прылеглы да яго вугал роўны 68° (рыс. 24). Знайсці другі катэт. Адказ акругліць да 0,1.



Рыс. 24

Рашэнне. Прымем даўжыню шуканага катэта за x .

$$\left(\text{Вядома: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{процілеглы катэт}}{\text{прылеглы катэт}} \right)$$

$$\operatorname{tg} 68^\circ = \frac{x}{2,5}, \quad x = 2,5 \cdot \operatorname{tg} 68^\circ, \quad x \approx 2,5 \cdot 2,4751 \approx 6,2.$$

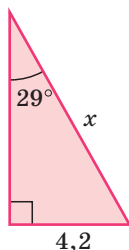
(крок 1)

(крок 2)

(крок 3)

Адказ: 6,2.

Задача 3. Катэт прамавугольнага трохвугольніка роўны 4,2, процілеглы яму вугал роўны 29° (рыс. 25). Знайсці гіпатэнузу трохвугольніка. Адказ акругліць да 0,1.



Рыс. 25

Рашэнне. Прымем даўжыню гіпатэнузы за x .

$$\left(\text{Вядома: } \sin \alpha = \frac{\text{процілеглы катэт}}{\text{гіпатэнуза}} \right)$$

$$\sin 29^\circ = \frac{4,2}{x}, \quad x \cdot \sin 29^\circ = 4,2,$$

$$x = \frac{4,2}{\sin 29^\circ} \approx \frac{4,2}{0,4848} \approx 8,7.$$

Адказ: 8,7.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

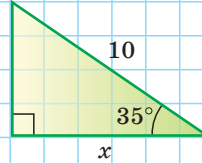
Катэт x роўны:

а) $10 \sin 35^\circ$;

б) $\frac{10}{\cos 35^\circ}$;

в) $10 \cos 35^\circ$;

г) $10 \operatorname{ctg} 35^\circ$.



2. Правілы рашэння прамавугольнага трохвугольніка

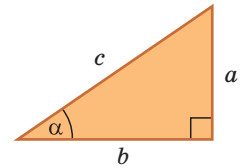
Пераўтварым формулы сінуса, косінуса, тангенса і катангенса і запішам вынікі для трохвугольніка на рысунку 26:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad a = c \cdot \sin \alpha, \quad c = \frac{a}{\sin \alpha};$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad b = c \cdot \cos \alpha, \quad c = \frac{b}{\cos \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad b = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad a = \frac{b}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$



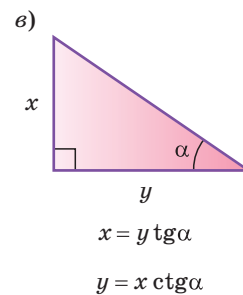
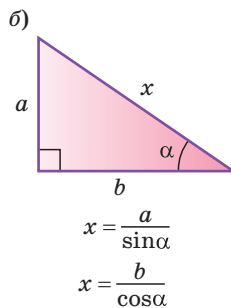
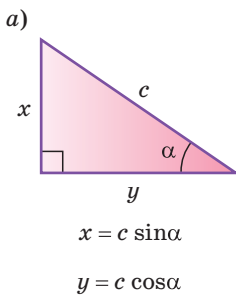
Рыс. 26

Зручна карыстацца наступнымі правіламі:

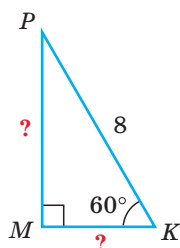
Катэт роўны гіпатэнузе, памножанай на сінус процілеглага або на косінус прылеглага вугла (рыс. 27, а).

Гіпатэнуза роўна катэту, падзеленаму на сінус процілеглага або на косінус прылеглага вугла (рыс. 27, б).

Катэт роўны другому катэту, памножанаму на тангенс процілеглага або на катангенс прылеглага да першага катэта вугла (рыс. 27, в).



Рыс. 27



Рыс. 28

Прыклад.

У $\triangle MPK$ вядома: $\angle M = 90^\circ$, $\angle K = 60^\circ$, $PK = 8$ (рыс. 28).

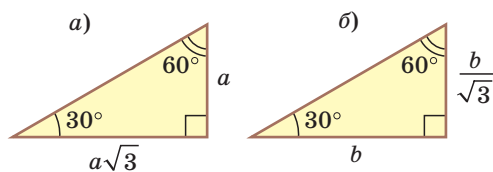
$$MP = PK \cdot \sin K = 8 \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

$$MK = PK \cdot \cos K = 8 \cdot \cos 60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

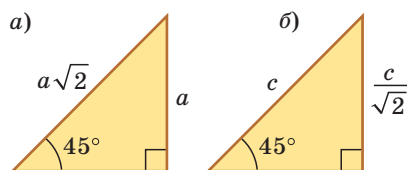
Карысна запамніць!

Калі ў прамавугольным трохвугольніку з вуглом 30° (або 60°) дадзены меншы катэт a , то большы катэт $b = a\sqrt{3}$ (рыс. 29, а). А калі дадзены большы катэт b , то меншы катэт $a = \frac{b}{\sqrt{3}}$ (рыс. 29, б).

Калі ў прамавугольным трохвугольніку з вуглом 45° дадзены катэт a , то гіпатэнуза $c = a\sqrt{2}$ (рыс. 30, а), а калі дадзена гіпатэнуза c , то катэт $a = \frac{c}{\sqrt{2}}$ (рыс. 30, б).



Рыс. 29



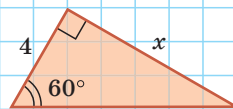
Рыс. 30

А цяпер выканайце **Тэст 2**.

Тэст 2

Даўжыня стараны x роўна:

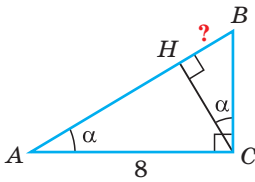
- а) 8; б) $4\sqrt{3}$; в) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; г) 6.



Заданні да § 2

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

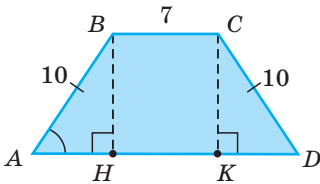
Задача 1. У прамавугольным трохвугольніку ABC вядома: $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $\angle A = \alpha$, CH — вышыня, праведзеная да гіпатэнузы (рыс. 31). Знайсці праекцыю HV катэта BC на гіпатэнузу.



Рыс. 31

Рашэнне. Заўважым, што $\angle BCH = \angle A = \alpha$, паколькі гэтыя вуглы дапаўняюць вугал B да 90° . З $\triangle ABC$ $\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \alpha$, $BC = AC \operatorname{tg} \alpha = 8 \operatorname{tg} \alpha$. З $\triangle BHC$ $\frac{HB}{BC} = \sin \alpha$, $HB = BC \sin \alpha = 8 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha$.
Адказ: $8 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha$.

Задача 2. У раўнабедранай трапецыі $ABCD$ меншая аснова BC роўна 7, бакавая старана AB роўна 10, $\sin A = 0,8$. Знайсці плошчу трапецыі.



Рыс. 32

Рашэнне. Плошчу трапецыі знаходзяць па формуле $S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Знойдзем большую аснову і вышыню трапецыі. Правядзём у трапецыі вышыні BH і CK (рыс. 32). Паколькі $HBCK$ — прамавугольнік (усе вуглы прамыя), то $HK = BC = 7$. З роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў AHB і DKC (па катэце і гіпатэнузе) $AH = KD$. З прамавугольнага трохвугольніка AHB знаходзім: $BH = AB \cdot \sin A = 10 \cdot 0,8 = 8$, адкуль $AH = 6$ (піфагарава тройка 6, 8, 10). Тады $AD = 2AH + HK = 2 \cdot 6 + 7 = 19$, $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = \frac{7 + 19}{2} \cdot 8 = 104$.

Адказ: 104.



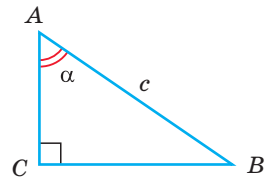
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

22. У прамавугольным трохвугольніку ABC (рыс. 33) $AB = c$, $\angle A = \alpha$. Знайдзіце:

- а) вугал B ; б) катэт BC ; в) катэт AC .

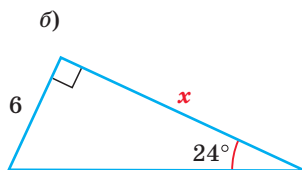
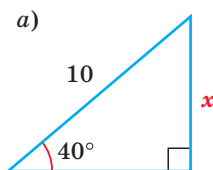
23. Дадзены прамавугольны трохвугольнік ABC , $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $\angle B = \beta$. Знайдзіце:

- а) катэт BC ; б) гіпатэнузу AB ; в) S_{ABC} .

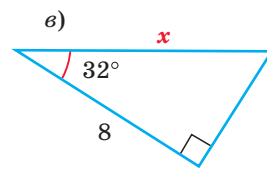


Рыс. 33

24. Знайдзіце старану прамавугольнага трохвугольніка, абазначаную літарай x на рысунках 34, а)–в). Адказы акругліце да 0,1. Пры падліках карыстайцеся калькулятарам або трыганаметрычнымі табліцамі.



Рыс. 34

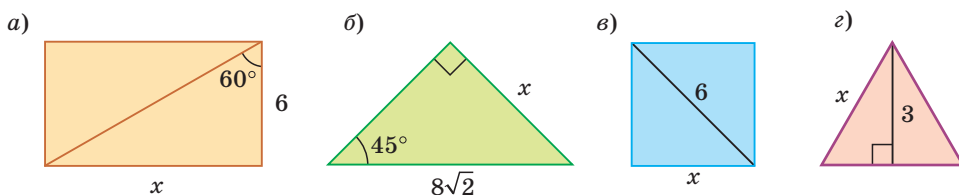


25. Знайдзіце невядомыя стараны трохвугольніка ABC ($\angle C = 90^\circ$), калі:

- а) $AB = 10$, $\sin B = \frac{3}{5}$;
- б) $AB = 8$, $\cos B = 0,75$;
- в) $BC = 4$, $\sin A = \frac{2}{3}$;
- г) $AC = 1,5$, $\operatorname{tg} A = 2$.

26. Па даных на рысунках 35, а)–г) знайдзіце старану x і плошчу S :

- а) прамавугольніка;
- б) раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка;
- в) квадрата;
- г) роўнастаронняга трохвугольніка.



Рыс. 35

27. Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка роўна 15 см, сінус вострага вугла пры вершыні роўны 0,8. Вылічыце плошчу трохвугольніка.

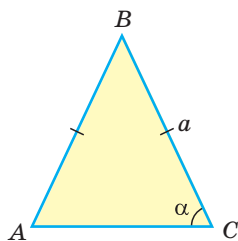
28. У раўнабедранай трапецыі $ABCD$ асновы $BC = 4$ см і $AD = 10$ см. Вядома, што $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$. Знайдзіце плошчу трапецыі.

29. Дадзены паралелаграм $ABCD$. Яго вышыня BK праведзена да стараны AD , $AK : KD = 1 : 2$, $BC = 24$ см. Знайдзіце плошчу паралелаграма, калі $\cos C = \frac{4}{5}$.

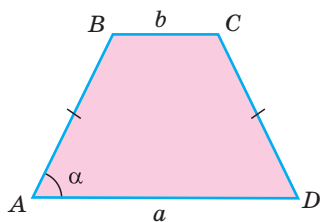
30. У прамавугольным трохвугольніку ABC $\angle C = 90^\circ$, вышыня CH роўна 12, медыяна CM роўна 15. Знайдзіце сінус меншага вострага вугла трохвугольніка ABC .

31. а) Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка ABC ($AB = BC$) роўна a , вугал пры аснове роўны α (рыс. 36). Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC .

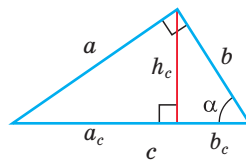
б) Дадзена раўнабедраная трапецыя $ABCD$ з асновамі $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$) і вуглом α пры большай аснове (рыс. 37). Знайдзіце плошчу трапецыі.



Рыс. 36



Рыс. 37

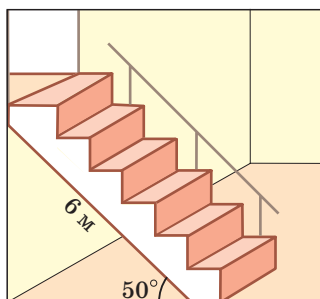


Рыс. 38

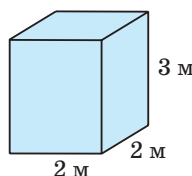
- 32.** У трохвугольніку ABC вышыня BH і медыяна BM дзеляць $\angle ABC$ на тры роўныя вуглы. Дакажыце, што трохвугольнік ABC прамавугольны.
- 33.** У прамавугольным трохвугольніку вядомы гіпатэнуза c і востры вугал α (рыс. 38). Знайдзіце: катэт a , катэт b , вышыню h_c , праекцыі a_c і b_c катэтаў a і b на гіпатэнузу.

Мадэляванне

Вызначце, ці можна размясціць пад лесвіцай даўжынёй 6 м, якая ўтварае з падлогай вугал 50° (рыс. 39), скрыню з памерамі $2 \times 2 \times 3$ (м). Разгледзьце розныя варыянты размяшчэння скрыні (яе можна класці набок).



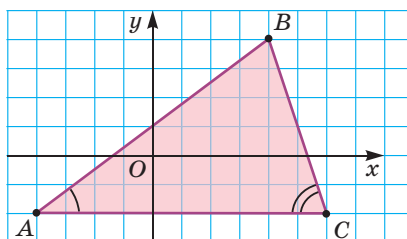
Рыс. 39



Гімнастыка розуму

Па даных на рысунку 40 знайдзіце:

- $\operatorname{tg} C$;
- $\sin A$;
- $\operatorname{ctg} B$.



Рыс. 40



Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, што азначае тэрмін «трыганаметрыя», калі ён узнік. У якіх сферах дзейнасці выкарыстоўваецца трыганаметрыя?

§ 3. Трыганаметрычныя формулы

Ведаючы, што $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$, дзе a і b — катэты, c — гіпатэнуза прамавугольнага трохвугольніка, можна атрымаць формулы, якія звязваюць значэнні трыганаметрычных функцый вострага вугла.

1. Асноўная трыганаметрычная тоеснасць

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Доказ. Па тэарэме Піфагора $a^2 + b^2 = c^2$.

$$\text{Тады } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Так, для вугла 30° атрымаем: $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$. Гэта праўда, паколькі $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

Вынік.

Паколькі сінус і косінус вострага вугла α дадатныя, то

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{і} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

2. Выражэнне тангенса і катангенса праз сінус і косінус

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Доказ. а) } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{б) } \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Вынік. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}.$

3. Асноўная задача

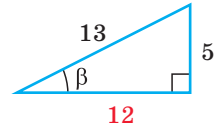
Дадзена: $\sin \beta = \frac{5}{13}$, β — востры вугал.

Знайсці: $\cos \beta$, $\operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{ctg} \beta$.

Рашэнне. *Спосаб 1.* Выкарыстаем асноўную трыганаметрычную тоеснасць: $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \beta = 1$, $\cos^2 \beta = 1 - \frac{25}{169}$, $\cos^2 \beta = \frac{144}{169}$, $\cos \beta = \pm \sqrt{\frac{144}{169}} = \pm \frac{12}{13}$. Паколькі косінус вострага вугла большы за нуль, то

$$\cos \beta = \frac{12}{13}; \quad \text{адкуль } \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{12}{5}.$$

Спосаб 2. Намалюем прамавугольны трохвугольнік з катэтам 5 і гіпатэнузай 13 (рыс. 41). Сінус вугла, процілеглага дадзенаму катэту, роўны $\frac{5}{13}$. Таму гэты вугал роўны β . Па тэарэме Піфагора другі катэт роўны $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Тады $\cos \beta = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{12}{5}$.



Рыс. 41

Спосаб 3. Няхай катэт, процілеглы вуглу β , роўны $5x$, тады гіпатэнуза роўна $13x$. Па тэарэме Піфагора прылеглы катэт роўны $\sqrt{(13x)^2 - (5x)^2} = \sqrt{144x^2} = 12x$. Адсюль $\cos \beta = \frac{12x}{13x} = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{12}{5}$.

Адказ: $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{12}{5}$.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

Няхай α — востры вугал. Калі $\cos \alpha = 0,8$, то $\sin \alpha$ роўны:																			
а) 0,8;	б) 0,6;	в) 0,2;	г) 1,6.																

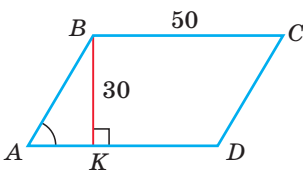


Заданні да § 3

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. У паралелаграме $ABCD$ (рыс. 42) старана $BC = 50$ см, вышыня $BK = 30$ см, $\cos A = \frac{8}{17}$. Знайсці перыметр паралелаграма.



Рыс. 42

Рашэнне. З трохвугольніка ABK знаходзім: $\sin A = \frac{BK}{AB}$, $AB = \frac{BK}{\sin A}$. З асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці вынікае: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $\sin^2 A + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1$, $\sin^2 A = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$, $\sin A = \frac{15}{17}$ (сінус вострага вугла дадатны).

Тады $AB = \frac{BK}{\sin A} = \frac{30}{\frac{15}{17}} = 34$ (см),

$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2 \cdot (34 + 50) = 168$ (см).

Адказ: 168 см.

Задача 2. Даказаць, што пры павелічэнні вугла ад 0° да 90° :

- а) сінус вугла павялічваецца ад 0 да 1, а косінус — памяншаецца ад 1 да 0;
 б) тангенс вугла павялічваецца ад 0 да бясконцасці.

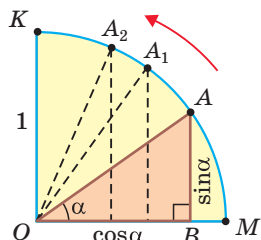


Рис. 43

Рашэнне. а) Разгледзім прамавугольныя трохвугольнікі з гіпатэнузай, роўнай 1. Для гэтага апішам радыусам OM , роўным 1, чвэрць акружнасці — дугу MK (рыс. 43). Няхай $\angle AOM = \alpha$. Апусцім з пункта A перпендыкуляр AB на OM . Тады $\sin \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB$, $\cos \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{1} = OB$. Пры павароце радыуса OM вакол цэнтра O супраць гадзіннікавай стрэлкі, пачынаючы ад OM і заканчваючы OK , вугал α будзе павялічвацца ад 0° да 90° (утвараючы адзначаныя на чарцяжы вуглы: $\angle MOA$, $\angle MOA_1$, $\angle MOA_2$ і г. д.). Велічыня катэта AB , процілеглага вуглу α , будзе павялічвацца ад 0 да 1. А велічыня катэта OB , наадварот, будзе памяншацца ад 1 да 0. Такім чынам, пры павелічэнні вугла ад 0° да 90° яго сінус павялічваецца ад 0 да 1, а косінус памяншаецца ад 1 да 0.

З формулы $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ таксама вынікае (улічыўшы дадатнасць сінуса і косінуса вострага вугла), што з павелічэннем сінуса ад 0 да 1 косінус памяншаецца ад 1 да 0.

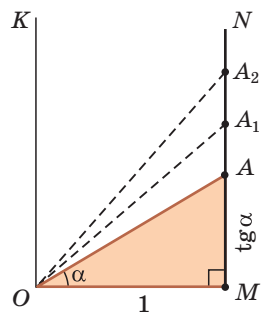


Рис. 44

б) Для вызначэння змянення тангенса вугла зручна разглядаць трохвугольнікі, у якіх прылеглы катэт не змяняецца і застаецца роўным 1, а процілеглы катэт змяняецца. Разгледзім прамавугольны трохвугольнік AOM , у якога адрэзак $OM = 1$, $\angle AOM = \alpha$ (рыс. 44). Па азначэнні $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AM}{OM} = \frac{AM}{1} = AM$. Вугал α станем змяняць, перамяшчаючы пункт A па прамой MN , пачынаючы ад пункта M і праходзячы праз пункты A , A_1 , A_2 і г. д. Пры гэтым вугал α і яго тангенс пачнуць нарастаць. Такім чынам, калі вугал α пры руху пункта A ўверх будзе імкнуцца да вугла KOM , роўнага 90° , то тангенс гэтага вугла будзе неабмежавана нарастаць.

Да такой жа высновы можна прыйсці, разглядаючы формулу $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Пры павелічэнні вугла α ад 0° да 90° лічнік дроби будзе павялічвацца ад 0 да 1, а назоўнік — памяншацца ад 1 да 0, значыць, увесь дроб будзе павялічвацца ад 0 да бясконцасці. Такім чынам, пры павелічэнні вугла ад 0° да 90° яго тангенс павялічваецца ад 0 да бясконцасці.

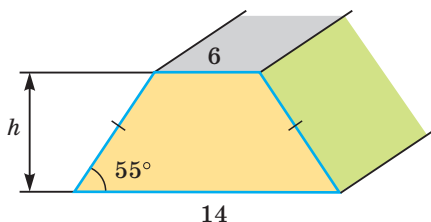


РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 34.** Дадзены востры вугал α .
- Знайдзіце $\cos \alpha$, калі $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.
 - Знайдзіце $\sin \alpha$, калі $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.
 - Знайдзіце $\operatorname{ctg} \alpha$, калі $\operatorname{tg} \alpha = 2$.
 - Знайдзіце $\operatorname{tg} \alpha$, калі $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$.
- 35.** а) Знайдзіце $\operatorname{ctg} \alpha$, калі α — востры вугал і $\sin \alpha = 0,8$.
 б) Знайдзіце $\operatorname{tg} \alpha$, калі α — востры вугал і $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.
- 36.** Запоўніце пропускі ў формулах, перапісаўшы іх у сшытак:
- $\sin^2 \beta + \dots = 1$;
 - $\cos^2 \alpha = 1 - \dots$;
 - $\dots = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;
 - $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\dots}{\dots}$.
- 37.** Знайдзіце:
- сінус, тангенс і катангенс вострага вугла, косінус якога роўны 0,6;
 - косінус, тангенс і катангенс вострага вугла, сінус якога роўны $\frac{7}{25}$.
- 38.** У акружнасці радыусам, роўным 6 см, праведзены дыяметр AB і хорда AC . Знайдзіце даўжыню хорды BC , калі $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{3}$.
- 39.** Параўнайце велічыні вострых вуглоў α і β , калі:
- $\sin \alpha = \frac{1}{3}$; $\sin \beta = \frac{1}{4}$;
 - $\cos \alpha = \frac{3}{5}$; $\cos \beta = \frac{2}{5}$.
- 40.** Высветліце, што больш: $\sin \alpha$ або $\operatorname{tg} \alpha$, дзе α — востры вугал.
- 41.** Дакажыце, што для вострага вугла α справядлівая тоеснасць $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.
- 42.** Выведзіце для вострага вугла α формулы $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ і $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, падзяліўшы пачленна абедзве часткі асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці на $\sin^2 \alpha$ і на $\cos^2 \alpha$.
- 43.** Знайдзіце сінус вострага вугла α , калі яго катангенс роўны $1\frac{1}{3}$.

Рэальная геаметрыя

На рысунку 45 паказаны памеры чыгуначнага насыпу, папярочнае сячэнне якога мае форму раўнабедранай трапецыі. Знайдзіце па пазначаных памерах прыкладную вышыню h насыпу. Адказ акругліце да 0,1 м.



Рыс. 45

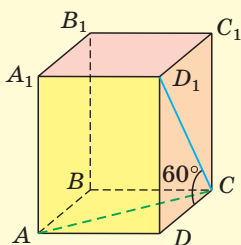


Рыс. 46

Цікава ведаць. Дзіцячая чыгунка імя К. С. Заслонава ў Мінску (мал. 46) — адзіная дзіцячая чыгунка ў Беларусі. На ёй працуюць тры станцыі: «Заслонава», «Піянерская» і «Сасновы Бор». Даўжыня галоўнага пуці складае 3790 м. Штогод 9 мая юныя чыгуначнікі працуюць у форме ваенных гадоў. У гэты дзень на станцыі «Сасновы бор» гасцей чакае святочная канцэртная праграма.

Геаметрыя 3D

Задача. У аснове прамавугольнага паралелепіпеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ ляжыць квадрат, дыяганаль якога $AC = 4\sqrt{6}$ см. Дыяганаль CD_1 бакавой грані ўтварае з кантам асновы DC вугал 60° (рыс. 47). Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.



Рыс. 47

Рашэнне. Аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда можна знайсці па формуле $V = abc$, дзе a , b і c — яго вымярэнні. Паколькі $ABCD$ — квадрат, то $AD = DC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{3}$ (см). З прамавугольнага трохвугольніка D_1DC знаходзім $D_1D = DC \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = DC \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$ (см). Шуканы аб'ём $V = AD \cdot DC \cdot DD_1 = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12 = 576$ (см³).
Адказ: 576 см³.

Плошчу паверхні прамавугольнага паралелепіпеда знайдзіце самастойна.



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка.
2. Значэнні трыганаметрычных функцый вуглоў 30° , 45° , 60° .
3. Формулы, якія звязваюць трыганаметрычныя функцыі аднаго вугла.

Умеем

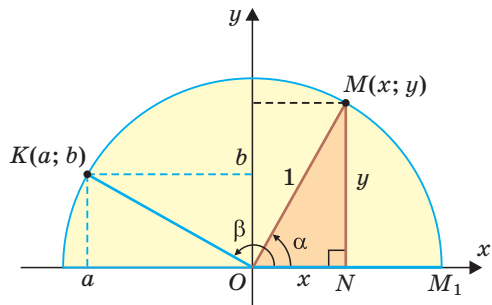
1. Рашаць прамавугольны трохвугольнік.
2. Ведаючы $\sin \alpha$, дзе α — востры вугал, знаходзіць $\cos \alpha$ і выконваць адваротнае дзеянне.
3. Ведаючы $\sin \alpha$ або $\cos \alpha$, дзе α — востры вугал, знаходзіць $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$.
4. Даказваць асноўную трыганаметрычную тоеснасць.

§ 4. Сінус, косінус, тангенс і катангенс тупога вугла

1. Вызначэнне значэнняў $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ для любога вугла α ад 0° да 180°

Раней мы далі азначэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вострага вугла праз адносіны старон прамавугольнага трохвугольніка. Зробім цяпер гэта для вуглоў ад 0° да 180° .

Разгледзім паўакружнасць з цэнтрам у пачатку каардынат і радыусам, роўным 1 (рыс. 48). Ад дадатнай паўвосі Ox у верхнюю паўплоскасць адкладзём востры вугал α , старана якога перасякае паўакружнасць у пункце $M(x; y)$. З прамавугольнага трохвугольніка OMN , дзе $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, атрымліваем: $\sin \alpha = \frac{y}{1} = y$, $\cos \alpha = \frac{x}{1} = x$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$, г. зн.



Рыс. 48

сінус, косінус, тангенс і катангенс вострага вугла α выражаюцца праз каардынаты x і y пункта $M(x; y)$. Такім чынам вызначаюцца значэнні $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ для $\angle MOM_1 = \alpha$ з прамежку $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Сінусам вугла α называецца ардыната y , косінусам — абсцыса x , тангенсам — адносіна ардынаты да абсцысы $\frac{y}{x}$, а катангенсам — адносіна абсцысы да ардынаты $\frac{x}{y}$ пункта M адзінкавай паўакружнасці.

Напрыклад, для тупога $\angle KOM_1 = \beta$ (гл. рыс. 48), дзе $K(a; b)$, атрымаем:

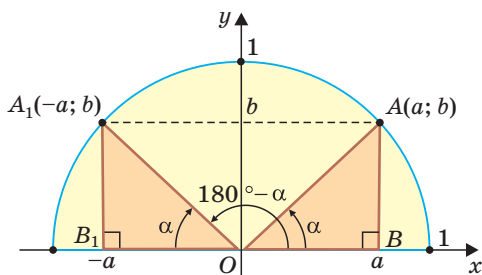
$$\sin \beta = b, \cos \beta = a, \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}, \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}.$$

Для любога становішча пункта $M(x; y)$ на адзінкавай паўакружнасці правільная роўнасць $x^2 + y^2 = 1$ (дакажыце самастойна). Таму для вуглоў α , дзе $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, справядлівая асноўная трыганаметрычная тоеснасць $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Таксама правільныя тоеснасці: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

2. Знаходжанне сіноса, косінуса, тангенса і катангенса тупых вуглоў

Няхай $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = \alpha$, адкуль $\angle A_1OB = 180^\circ - \alpha$ (рыс. 49). Паколькі $\triangle OAB = \triangle OA_1B_1$ па гіпатэнузе і вострым вугле, то $A_1B_1 = AB$, $OB_1 = OB$. Пункты A і A_1 маюць каардынаты: $A(a; b)$ і $A_1(-a; b)$. Тады $\sin \alpha = b$, $\cos \alpha = a$, $\sin(180^\circ - \alpha) = b$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -a$, г. зн. для вуглоў ад 0° да 180° справядлівыя роўнасці:



Рыс. 49

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Можна карыстацца наступным правілам:

Сінус тупога вугла роўны сінусу сумежнага з ім вострага вугла. Косінус тупога вугла роўны косінусу сумежнага з ім вострага вугла, узятamu са знакам «мінус».

Прыклад 1. $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Падзяліўшы пачленна роўнасць $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ на роўнасць $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, а затым наадварот, атрымаем роўнасці:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Можна карыстацца наступным правілам:

Тангенс (катангенс) тупога вугла роўны тангенсу (катангенсу) сумежнага з ім вострага вугла, узятamu са знакам «мінус».

Прыклад 2. $\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 135^\circ = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$.

Атрыманыя формулы і правілы дазваляюць знаходзіць значэнні трыганаметрычных функцый тупога вугла праз значэнні трыганаметрычных функцый вострага вугла, які дапаўняе дадзены тупы вугал да 180° : сінусы вуглоў, якія дапаўняюць адзін аднаго да 180° , роўныя паміж сабой, а косінусы, тангенсы і катангенсы — процілеглыя. Паколькі сінус, косінус, тангенс і катангенс вострага вугла дадатныя, то сінус тупога вугла дадатны, а косінус, тангенс і катангенс — адмоўныя.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

3. Значэнні трыганаметрычных функцый для вуглоў 0° , 90° , 180°

Калі прамень OM супадзе з праменем OM_1 (рыс. 50), то будзем лічыць, што $\alpha = 0^\circ$. Тады:

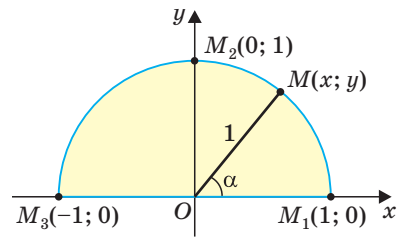
а) $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$; значэнне $\operatorname{ctg} 0^\circ = \frac{1}{0}$ не вызначана, паколькі дзяленне на нуль немагчымае;

б) $\angle M_2OM_1 = 90^\circ$, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{0}{1} = 0$; значэнне $\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{1}{0}$ не вызначана, паколькі дзяленне на нуль немагчымае;

в) $\angle M_3OM_1 = 180^\circ$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0$; значэнне $\operatorname{ctg} 180^\circ = \frac{-1}{0}$ не вызначана, паколькі дзяленне на нуль немагчымае.

Паколькі праекцыі радыуса, роўнага 1, на восі каардынат меншыя або роўныя 1, то для вуглоў $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ справядлівыя няроўнасці: $0 \leq \sin \alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

А цяпер выканайце **Тэст 2**.



Рыс. 50

Тэст 1

Вылічыце:

$$\cos 120^\circ + \sin 150^\circ.$$

а) 0;

б) 1;

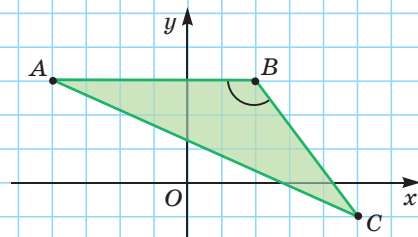
в) -1;

г) $\sqrt{3}$.

Тэст 2

Па даных на рысунку знайдзіце косінус вугла B.

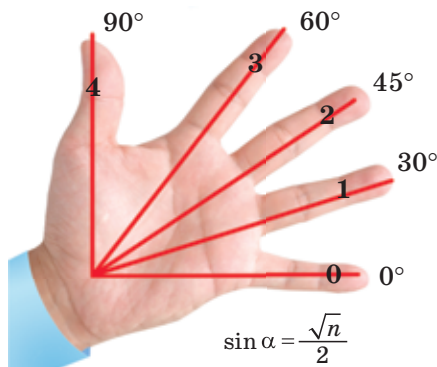
а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $-\frac{3}{5}$; г) $\frac{4}{3}$.



Гімнастыка розуму

Калі максімальна расставіць пальцы рукі, то вуглы паміж мезенцам і астатнімі пальцамі будуць роўны прыкладна 30° , 45° , 60° , 90° (рыс. 51).

Цікава, што калі пальцы пранумараваць лічбамі ад 0 да 4, як на рысунку, то для знаходжання сінуса вуглоў 0° , 30° , 45° , 60° і 90° можна карыстацца формулай $\sin \alpha = \frac{\sqrt{n}}{2}$, дзе α — дадзены вугал, а n — нумар пальца. Праверце самастойна работу гэтай формулы.



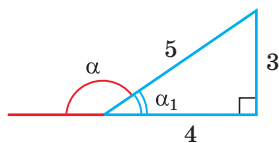
Рыс. 51

**Заданні да § 4****РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы**

Задача. Знайсці $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, калі $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ і α — тупы вугал.

Рашэнне. *Способ 1.* Паколькі $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

Паколькі вугал α — тупы, то яго косінус адмоўны. Таму $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$. Тады $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$.



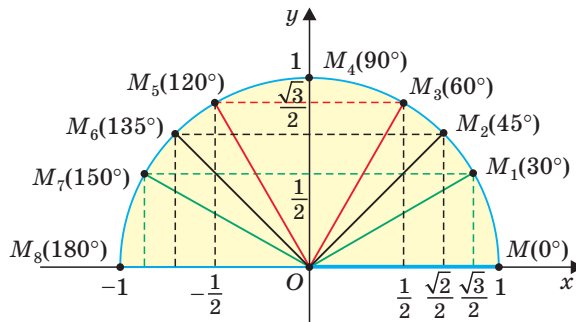
Рыс. 52

Способ 2. Сінус вострага вугла α_1 , сумежнага з дадзеным тупым вуглом α , роўны таксама $\frac{3}{5}$. Пабудуем прамавугольны трохвугольнік са старанамі 3, 4 і 5 (рыс. 52). У ім $\sin \alpha_1 = \frac{3}{5}$, а $\cos \alpha_1 = \frac{4}{5}$. Паколькі косінусы сумежных вуглоў процілеглыя, то $\cos \alpha = -\cos \alpha_1 = -\frac{4}{5}$. Аналагічна, $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{3}{4}$.

Адказ: $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$.

**РАШАЕМ
САМАСТОЙНА**

44. Пункты $M_1, M_2, \dots, M_8$ атрымліваюцца пры павароце радыуса OM адзінкавай паўакружнасці вакол пункта O супраць гадзіннікавай стрэлкі адпаведна на вуглы $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ (рыс. 53).



Рыс. 53

а) Выкарыстаўшы рысунак, знайдзіце каардынаты пунктаў M , M_1 , M_2 , ..., M_8 .

б) Па каардынатах адпаведных пунктаў знайдзіце $\sin 135^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\operatorname{tg} 150^\circ$.



в) Знайдзіце $\sin 0^\circ$, $\cos 0^\circ$, $\sin 90^\circ$, $\cos 90^\circ$.

45. Пры дапамозе формул $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ або правіл знаходжання значэнняў трыганаметрычных функцый тупога вугла знайдзіце:

а) $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\operatorname{tg} 120^\circ$, $\operatorname{ctg} 120^\circ$;

б) $\sin 135^\circ$, $\cos 135^\circ$, $\operatorname{tg} 135^\circ$, $\operatorname{ctg} 135^\circ$;

в) $\sin 150^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\operatorname{tg} 150^\circ$, $\operatorname{ctg} 150^\circ$.

46. Вядома, што вугал α тупы. Знайдзіце $\cos \alpha$, калі:

а) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sin \alpha = 0,6$;

в) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

47. Вядома, што $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Знайдзіце $\sin \alpha$, калі:

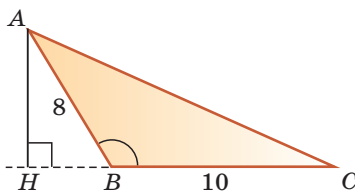
а) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$;

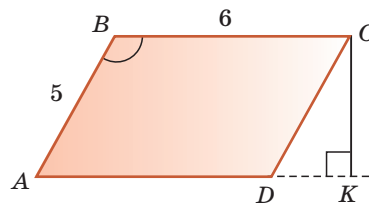
в) $\cos \alpha = -0,2$.

48. а) У трохвугольніку ABC (рыс. 54) стораны $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $\sin \angle ABC = \frac{3}{4}$. Знайдзіце вышыню AH і S_{ABC} .

б) У паралелаграме $ABCD$ (рыс. 55) стораны $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $\cos \angle ABC = -0,6$. Знайдзіце вышыню CK і S_{ABCD} .



Рыс. 54



Рыс. 55

49. Выкарыстаўшы калькулятар (табліцы) і трыганаметрычныя формулы (правілы), знайдзіце, акругліўшы адказ да 0,0001:

- а) $\sin 100^\circ$; б) $\cos 175^\circ$; в) $\operatorname{tg} 115^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 140^\circ$.

50. а) Косінус аднаго з сумежных вуглоў роўны $-0,3$. Знайдзіце косінус другога вугла.

б) Сінус тупога вугла паралелаграма роўны $0,8$. Знайдзіце тангенс вострага вугла паралелаграма.

51. Знайдзіце $\sin \alpha + \cos \alpha$, калі вугал α роўны:

- а) 0° ; б) 90° ; в) 180° .

52. Выкарыстаўшы адзінкавую паўакружнасць, дакажыце, што:

а) пры павелічэнні вугла ад 0° да 90° яго сінус павялічваецца ад 0 да 1, косінус памяншаецца ад 1 да 0;

б) пры павелічэнні вугла ад 90° да 180° яго сінус памяншаецца ад 1 да 0, косінус памяншаецца ад 0 да -1 .

53. Дакажыце, што для вуглоў трохвугольніка ABC правільная роўнасць:

- а) $\sin A = \sin(B + C)$; б) $\cos A = -\cos(B + C)$.

Гімнастыка розуму

1. Знайдзіце значэнне выразу $\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \dots \cdot \cos 180^\circ$.

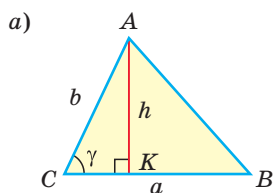
2. Знайдзіце значэнне выразу $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$.

§ 5. Формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма

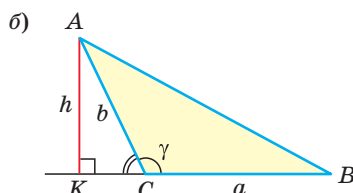
Трыганаметрычныя функцыі дазваляюць атрымаць формулы для вылічэння плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма. Сфармулюем іх у выглядзе дзвюх тэарэм.

Тэарэма. Плошча трохвугольніка роўна палавіне здабытку дзвюх яго старон на сінус вугла паміж імі, г. зн. $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin \gamma$.

Доказ. Няхай у трохвугольніку ABC $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$ — востры, $AK = h$ — вышыня (рыс. 56, а).



Рыс. 56



З прамавугольнага трохвугольніка AKC $\sin \gamma = \frac{h}{b}$, $h = b \sin \gamma$. Тады $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b \sin \gamma$.

Калі вугал γ тупы (рыс. 56, б), то $\angle ACK = 180^\circ - \gamma$ — востры. З прамавугольнага трохвугольніка AKC вынікае, што $h = b \sin(180^\circ - \gamma)$. Паколькі $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b \sin \gamma$.

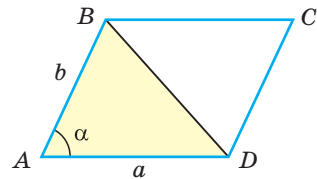
Калі $\gamma = 90^\circ$, то $\triangle ABC$ — прамавугольны з катэтамі a і b . Улічыўшы, што $\sin 90^\circ = 1$, атрымаем: $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab \sin 90^\circ = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

Тэарэма даказана.

Тэарэма. Плошча паралелаграма роўна здабытку дзвюх яго суседніх старон на сінус вугла паміж імі, г. зн. $S_{\text{пар}} = ab \sin \alpha$.

Выкарыстаўшы рысунак 57, дакажыце гэту тэарэму самастойна.

Заўвага. Калі $\alpha = 90^\circ$, то паралелаграм з'яўляецца прамавугольнікам. Яго плошча $S = ab \sin 90^\circ = ab$, паколькі $\sin 90^\circ = 1$. Такім чынам, формула плошчы прамавугольніка $S = ab$ — прыватны выпадак формулы плошчы паралелаграма $S = ab \sin \alpha$.



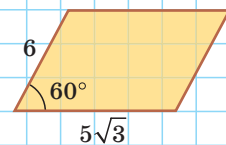
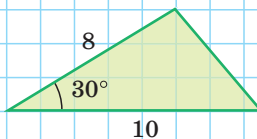
Рыс. 57

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

Знайдзіце суму плошчаў трохвугольніка і паралелаграма, паказаных на рысунку.

а) 65; б) 85; в) $45\sqrt{3}$; г) 107,5.



Вядома, што слова «сінус» у перакладзе з лацінскай мовы мае мноства значэнняў: выгіб, дуга, пазуха, бухта, упадзіна, заліў, хорда, клопат і пяшчотная любоў. Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце:

- якое са значэнняў найбольш блізкае да матэматычнага паняцця «сінус»;
- якія са значэнняў адносяцца да медыцыны і што называюць сінусітам.

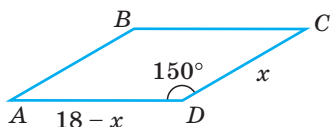


Заданні да § 5

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. Дадзены паралелаграм $ABCD$, плошча якога роўна 40 см^2 , а перыметр — 36 см . Знайсці стораны паралелаграма, калі яго вугал D роўны 150° (рыс. 58).



Рыс. 58

Рашэнне. Паўперыметр паралелаграма роўны 18 см . Калі $CD = x \text{ см}$, то $AD = (18 - x) \text{ см}$.

Тады

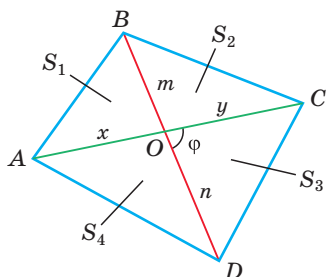
$$S_{ABCD} = CD \cdot AD \cdot \sin D = x(18 - x) \cdot \sin 150^\circ \text{ см}^2.$$

$$\text{Паколькі } \sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ то } S_{ABCD} = \frac{1}{2}x(18 - x) \text{ см}^2.$$

Па ўмове $S_{ABCD} = 40 \text{ см}^2$. Складзём і рэшым ураўненне: $\frac{1}{2}x(18 - x) = 40$, $x^2 - 18x + 80 = 0$. Па тэарэме Віета (адваротнай) $x_1 = 8$, $x_2 = 10$ — карані. Калі $CD = 8 \text{ см}$, то $AD = 10 \text{ см}$, калі $CD = 10 \text{ см}$, то $AD = 8 \text{ см}$.

Адказ: 8 см , 10 см .

Задача 2. Даказаць, што плошча выпуклага чатырохвугольніка роўна палавіне здабытку яго дыяганалей на сінус вугла паміж імі, г. зн. $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$.



Рыс. 59

Доказ. Няхай дыяганалі $AC = d_1$ і $BD = d_2$ чатырохвугольніка $ABCD$ (рыс. 59) перасякаюцца ў пункце O , $\angle COD = \varphi$, $S_1 = S_{AOB}$, $S_2 = S_{BOC}$, $S_3 = S_{COD}$, $S_4 = S_{AOD}$.

Дакажам, што $S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$. Абазначым $AO = x$,

$OC = y$, $BO = m$, $OD = n$. Заўважым, што $\angle AOB = \angle COD$, $\angle BOC = \angle AOD$ як вертыкальныя, $\angle BOC = 180^\circ - \angle COD$ па ўласцівасці сумежных вуглоў. Таму $\sin \angle AOB = \sin \angle COD = \sin \varphi$, $\sin \angle BOC = \sin \angle AOD = \sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$. Па формуле плошчы трохвугольніка $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ атрымаем:

$$S_1 = \frac{1}{2}xm \sin \angle AOB = \frac{1}{2}xm \sin \varphi, \quad S_2 = \frac{1}{2}ym \sin \angle BOC = \frac{1}{2}ym \sin \varphi,$$

$$S_3 = \frac{1}{2}yn \sin \angle COD = \frac{1}{2}yn \sin \varphi, \quad S_4 = \frac{1}{2}xn \sin \angle AOD = \frac{1}{2}xn \sin \varphi.$$

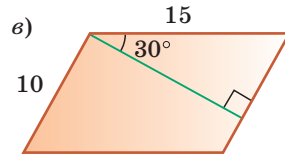
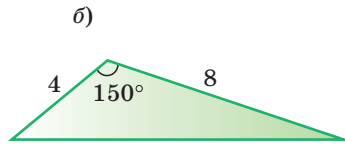
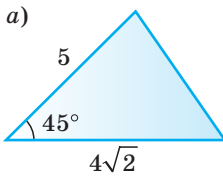
$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2}xm \sin \varphi + \frac{1}{2}ym \sin \varphi + \frac{1}{2}yn \sin \varphi + \frac{1}{2}xn \sin \varphi = \\ &= \frac{1}{2}(m(x + y) + n(x + y)) \sin \varphi = \frac{1}{2}(x + y)(m + n) \sin \varphi = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Сцверджанне даказана.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

54. Выкарыстаўшы формулы $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ і $S_{\text{пар}} = ab \sin \alpha$, знайдзіце плошчы трохвугольнікаў і паралелаграма, паказаных на рысунку 60.



Рыс. 60

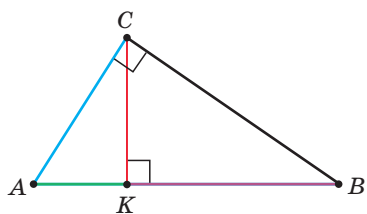
55. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC , калі:
- $AB = 6,5$ см, $BC = 8\sqrt{3}$ см, $\angle B = 120^\circ$;
 - $AC = 16$ см, $BC = 10\sqrt{2}$ см, $\angle A + \angle B = 135^\circ$.
56. Знайдзіце плошчу паралелаграма $ABCD$, калі:
- $AB = 4,2$ см, $AD = 6$ см, $\sin C = \frac{2}{3}$;
 - $P_{ABCD} = 48$ см, $BC = 13$ см, $\cos B = -\frac{12}{13}$.
57. а) Плошча паралелаграма роўна $18\sqrt{3}$ см², адна з яго старон на 5 см большая за другую, а адзін з вуглоў роўны 60° . Знайдзіце перыметр паралелаграма.
- б) Стораны паралелаграма адносяцца як 3 : 5, плошча роўна 30 см², а тупы вугал паралелаграма роўны 150° . Знайдзіце перыметр паралелаграма.
58. а) Знайдзіце плошчу раўнабедранага трохвугольніка з бакавой стараной, роўнай $6\sqrt{2}$ см, і вуглом пры аснове, роўным 75° .
- б) Плошча раўнабедранага трохвугольніка роўна 16 см², вугал пры аснове роўны 15° . Знайдзіце даўжыню бакавой стараны трохвугольніка.
59. Выведзіце формулу плошчы роўнастаронняга трохвугольніка $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, выкарыстаўшы формулу $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.
60. У ромба $ABCD$ $AB = a$, $\angle A = \alpha$. Дакажыце, што $S_{ABCD} = a^2 \sin \alpha$.
61. а) Плошча раўнабедранай трапецыі роўна $36\sqrt{3}$ см², вугал паміж дыяганаллю і асновай роўны 30° . Знайдзіце даўжыню дыяганалі трапецыі.
- б) Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапецыі з дыяганаллю, роўнай 12 см, і вуглом паміж дыяганаллю і стараной асновы, роўным 15° .

62. а) Дзве стараны трохвугольніка маюць даўжыні a і b . Знайдзіце найбольшае магчымае значэнне, якое можа прымаць плошча трохвугольніка.
- б) Дыяганалі выпуклага чатырохвугольніка роўны d_1 і d_2 . Знайдзіце найбольшае магчымае значэнне, якое можа прымаць плошча чатырохвугольніка.
63. У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O . Выкарыстаўшы формулу $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, дакажыце, што $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$.

§ 6. Сярэдняе прапарцыянальнае (сярэдняе геаметрычнае) у прамавугольным трохвугольніку

Калі для дадатных лікаў a , b і c выконваецца прапорцыя $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то лік b называецца *сярэднім прапарцыянальным лікаў a і c* (паміж лікамі a і c). З дадзенай прапорцыі $b^2 = ac$, адкуль $b = \sqrt{ac}$. У такой форме запісу лік b яшчэ называюць *сярэднім геаметрычным лікаў a і c* .

Прыклад. Лік 4 з'яўляецца сярэднім прапарцыянальным, або сярэднім геаметрычным лікаў 2 і 8, паколькі $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, або $4 = \sqrt{2 \cdot 8}$.



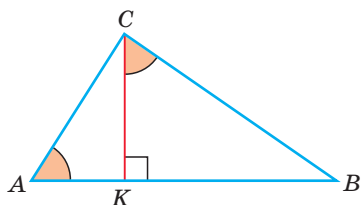
Рыс. 61

У прамавугольным трохвугольніку ABC , дзе $\angle C = 90^\circ$, правядзём вышыню CK (рыс. 61). Адрэзак AK з'яўляецца праекцыяй катэта AC на гіпатэнузу, а адрэзак BK — праекцыяй катэта BC на гіпатэнузу. Катэты, гіпатэнузу, вышыня і праекцыі катэтаў на гіпатэнузу звязаны адносінамі, якія мы сфармулюем у выглядзе наступнай тэарэмы.

Тэарэма (аб сярэднім прапарцыянальным у прамавугольным трохвугольніку).

а) **Вышыня** прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, ёсць **сярэдняе прапарцыянальнае** паміж **праекцыямі** катэтаў на гіпатэнузу, г. зн. $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$ (гл. рыс. 61).

б) Катэт ёсць **сярэдняе прапарцыянальнае** паміж **гіпатэнузай** і **праекцыяй** гэтага катэта на гіпатэнузу, г. зн. $AC = \sqrt{AB \cdot AK}$, $BC = \sqrt{AB \cdot KB}$.



Рыс. 62

Доказ. а) Заўважым, што калі $\angle ACB = 90^\circ$, $CK \perp AB$, то $\angle BCK = \angle A$ (гэтыя вуглы дапаўняюць $\angle B$ да 90°) (рыс. 62). З $\triangle ACK$ $\operatorname{tg} A = \frac{CK}{AK}$, з $\triangle BCK$ $\operatorname{tg} \angle BCK = \frac{BK}{CK}$. Адсюль $\frac{BK}{CK} = \frac{CK}{AK}$, $CK^2 = AK \cdot BK$, $CK = \sqrt{AK \cdot BK}$.

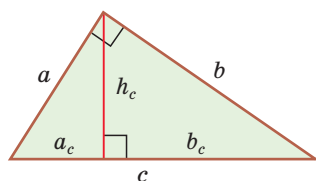
б) З $\triangle ACK$ $\cos A = \frac{AK}{AC}$, з $\triangle ABC$ $\cos A = \frac{AC}{AB}$, адкуль $\frac{AK}{AC} = \frac{AC}{AB}$, $AC^2 = AB \cdot AK$, $AC = \sqrt{AB \cdot AK}$. Аналагічна даказваецца, што $BC = \sqrt{AB \cdot KB}$. Тэарэма даказана.

Абазначыўшы катэты a і b , гіпатэнузу c , вышыню h_c , праекцыі катэтаў на гіпатэнузу a_c і b_c (рыс. 63), атрымаем наступныя формулы:

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c, \text{ або } h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c},$$

$$a^2 = c \cdot a_c, \text{ або } a = \sqrt{c \cdot a_c},$$

$$b^2 = c \cdot b_c, \text{ або } b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$



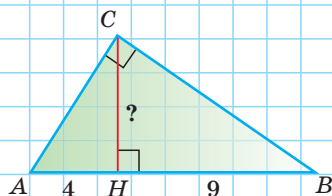
Рыс. 63

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

Тэст 1

Знайдзіце вышыню CH прамавугольнага трохвугольніка ABC .

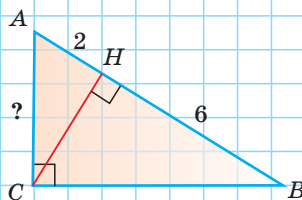
- а) 36;
б) 6;
в) 5;
г) 13.



Тэст 2

Знайдзіце катэт AC прамавугольнага трохвугольніка ABC .

- а) 8;
б) 12;
в) 4;
г) 6.



Заданні да § 6

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. Знайсці плошчу прамавугольнага трохвугольніка, калі праекцыі катэтаў на гіпатэнузу роўны 2 см і 8 см.

Рашэнне. Няхай CH — вышыня прамавугольнага трохвугольніка ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AH = 2$ см — праекцыя катэта AC на гіпатэнузу, $HB = 8$ см —

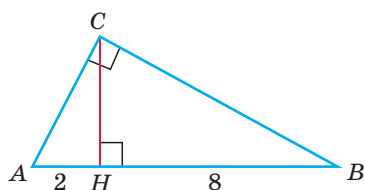


Рис. 64

праекцыя катэта CB на гіпатэнузу (рыс. 64). Паколькі вышыня CH ёсць сярэдняе геаметрычнае паміж праекцыямі катэтаў на гіпатэнузу, то $CH = \sqrt{AH \cdot HB} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$ (см),

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Адказ: 20 см².

Задача 2. У прамавугольным трохвугольніку ABC з вяршыні прамого вугла C праведзена вышыня CK , $BC = 3\sqrt{5}$ см, $AK = 12$ см (рыс. 65). Знайсці гіпатэнузу AB .

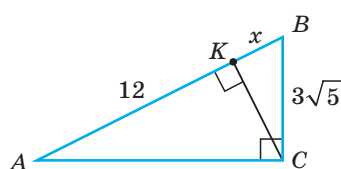


Рис. 65

Рашэнне. Няхай $KB = x$ см, тады $AB = (x + 12)$ см. Катэт ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж гіпатэнузай і праекцыяй катэта на гіпатэнузу.

Таму $BC^2 = AB \cdot KB$, г. зн. $(3\sqrt{5})^2 = (x + 12) \cdot x$, адкуль $x^2 + 12x - 45 = 0$. Па тэарэме Віета (адваротнай) $x_1 = -15$, $x_2 = 3$. Па сэнсе задачы $x > 0$. Значыць, $KB = 3$ см, $AB = 15$ см.

Адказ: 15 см.

Задача 3. Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудавать адрэзак, роўны сярэдняму геаметрычнаму адрэзкаў m і n .

Рашэнне. Няхай дадзены адрэзкі m і n . Неабходна пабудавать адрэзак $x = \sqrt{mn}$.

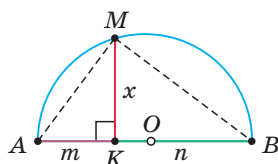
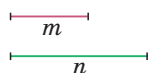


Рис. 66

Пабудова.

1) На адвольнай прамой адкладваем дадзеныя адрэзкі: $AK = m$, $KB = n$.

2) На адрэзку AB як на дзяметры будзем паўакружнасць, для чаго знаходзім сярэдзіну O адрэзка AB , адкуль OA — радыус дадзенай акружнасці.

3) З пункта K узводзім перпендыкуляр да прамой AB да перасячэння з паўакружнасцю ў пункце M (рыс. 66).

Адрэзак $MK = x$ — сярэдняе прапарцыянальнае адрэзкаў $AK = m$ і $KB = n$.

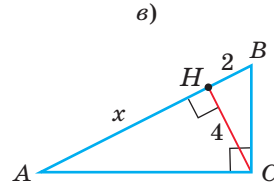
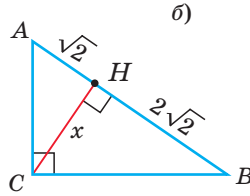
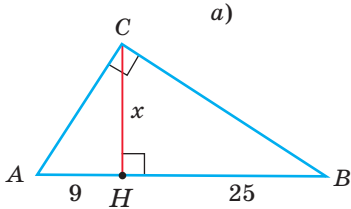
Доказ. $\angle AMB$ — прамы як упісаны вугал, які абаяраецца на дзяметр. У прамавугольным трохвугольніку AMB вышыня MK з'яўляецца сярэднім прапарцыянальным праекцый катэтаў AM і MB на гіпатэнузу AB :

$$MK = \sqrt{AK \cdot KB}, \text{ г. зн. } x = \sqrt{mn}.$$



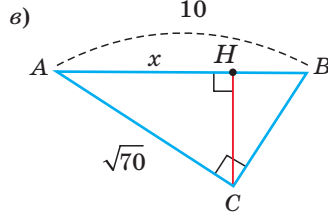
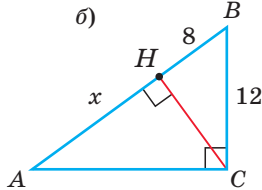
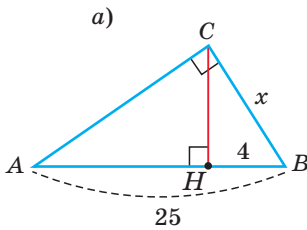
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

64. У прамавугольным трохвугольніку ABC праведзена вышыня CH з вяршыні прамога вугла. Па даных на рысунках 67, а)–в) знайдзіце даўжыню адрэзка x .



Рыс. 67

65. Дадзены прамавугольны трохвугольнік ABC , CH — вышыня, апущаная на гіпатэнузу. Знайдзіце даўжыню адрэзка x (рыс. 68, а)–в)).



Рыс. 68

66. У прамавугольным трохвугольніку ABC катэт BC роўны 8 см, а праекцыя катэта AC на гіпатэнузу AB — 12 см. Знайдзіце даўжыню гіпатэнузы.

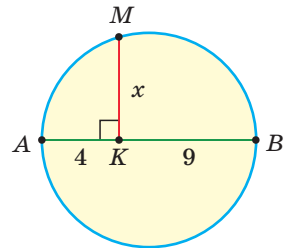
67. AB — дыяметр акружнасці (рыс. 69). Знайдзіце даўжыню перпендыкуляра MK .

68. Дадзены прамавугольнік $ABCD$. Перпендыкуляр BK , апущаны на дыяганаль AC , дзеліць яе на адрэзкі, роўныя 2 см і 6 см. Знайдзіце меншую старану прамавугольніка.

69. Знайдзіце плошчу прамавугольнага трохвугольніка, у якога вышыня дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя 1,2 см і 4,8 см.

70. У прамавугольным трохвугольніку ABC катэт AC роўны праекцыі катэта BC на гіпатэнузу AB . Знайдзіце $\cos A$.

71. У прамавугольным трохвугольніку ABC ($\angle C = 90^\circ$) праведзена вышыня CH , катэт AC роўны 4 см, $BH - AH = 4$ см. Знайдзіце велічыню вугла A .



Рыс. 69

Паўтарэнне

У 8-м класе мы даказалі наступную тэарэму:

Тэарэма (аб датычнай і сякучай). *Калі з аднаго пункта да акружнасці праведзены датычная і сякучая, то квадрат адрэзка датычнай, які злучае дадзены пункт і пункт дотыку, роўны здабытку адрэзкаў сякучай, якія злучаюць дадзены пункт і пункты перасячэння сякучай з акружнасцю, г. зн. $a^2 = bc$ (рыс. 70).*

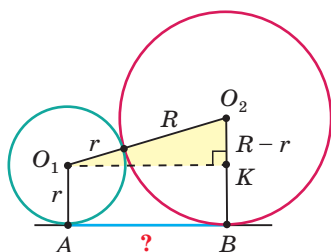
Як мы бачым, адрэзак a з'яўляецца сярэднім прапарцыянальным паміж адрэзкамі b і c сякучай. Гледзячы на рысунак 70, успомніце ідэю доказу тэарэмы.

Задача. Знайдзіце AC (гл. рыс. 70), калі $AB = 4$ см, $AD = 2$ см.

Таксама ў 8-м класе была разгледжана ключавая задача аб знаходжанні адрэзка агульнай датычнай дзвюх акружнасцей, якія датыкаюцца знешнім чынам, з радыусамі, роўнымі R і r (рыс. 71). Быў атрыманы адказ: $AB = 2\sqrt{Rr}$, г. зн. шуканы адрэзак AB — гэта падвоенае сярэдняе геаметрычнае радыусаў акружнасцей.

Аднавіце па рысунку 71 рашэнне гэтай задачы.

Задача. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB , калі $R = 18$ см, $r = 8$ см (гл. рыс. 71).

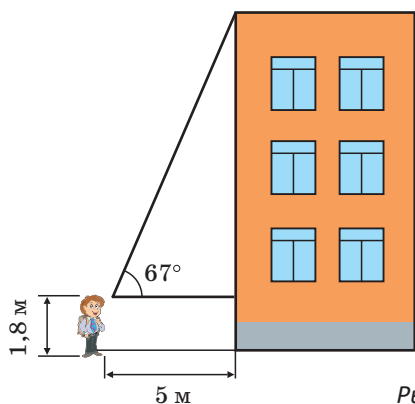


Рыс. 71

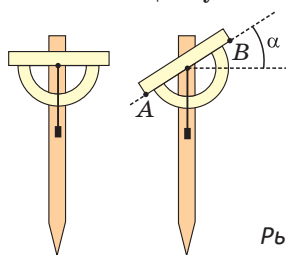
Рэальная геаметрыя

Хлопцы з 9-га класа знайшлі вышыню сваёй школы наступным чынам. Яны вымералі вугал, пад якім бачна кромка даху школы (рыс. 72), і адлегласць ад месца вымярэння да фундаменту школы. Вугал аказаўся роўным 67° , а адлегласць — 5 м. Далей яны прымянілі алгарытм рашэння прамавугольнага трохвугольніка. Улічыўшы, што рост школьніка, які вымяраў вугал, роўны 180 см, хлопцы знайшлі прыкладную вышыню школы — 13,6 м. Правярце, ці не памыліліся вучні ў вылічэннях. Паспрабуйце знайсці падобным чынам вышыню сваёй школы.

Прыбор, пры дапамозе якога вызначаюць вуглы на мясцовасці, называецца *экліметрам*. Такі прыбор можна вырабіць самастойна. Для гэтага спатрэбіцца транспарцір, нітка з грузам і заостраная палка. Заостраную палку ўтыкаюць вертыкальна ў зямлю так, каб нітка з грузам размяшчалася вертыкальна. Паварочваючы транспарцір, назіральнік глядзіць уздоўж прамой AB (рыс. 73). Па адхіленні ніткі ад веса на транспарціры вызначаюць вымяраемы вугал. Растлумачце, як вызначыць шуканы вугал α .



Рыс. 72

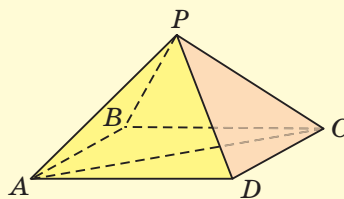


Рыс. 73

Геаметрыя 3D

Напомнім, што ў аснове правільнай чатырохвугольнай піраміды ляжыць квадрат і ўсе яе бакавыя канты роўныя.

На фота паказаны знак нулявога кіламетра Беларусі, усталяваны ў Мінску на Кастрычніцкай плошчы. На рысунку паказана яго геаметрычная мадэль — правільная чатырохвугольная піраміда. Даўжыня канта асновы роўна 120 см, бакавы кант роўны 100 см (рыс. 74). Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды.



Рыс. 74



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Формулы $\sin(180^\circ - \alpha) = \dots$, $\cos(180^\circ - \alpha) = \dots$.
2. Як звязаны сінус і косінус тупога вугла з сінусам і косінусам сумежнага з ім вострага вугла.
3. Формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма, звязаныя з сінусам вугла.
4. Тэарэму аб сярэднім прапарцыянальным (сярэднім геаметрычным) у прамавугольным трохвугольніку.

Умеем

1. Знаходзіць сінус, косінус, тангенс і катангенс вуглоў 120° , 135° , 150° .
2. Выводзіць формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма, звязаныя з сінусам вугла.
3. Даказваць тэарэму аб сярэднім прапарцыянальным у прамавугольным трохвугольніку.

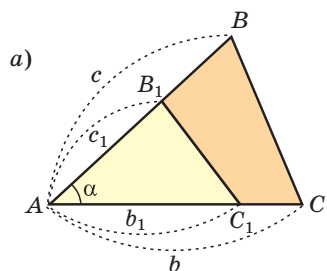


§ 7. Крэатыўная геаметрыя

1. Тэарэма аб плошчах трохвугольнікаў з агульным (роўным) вуглом

Плошчы трохвугольнікаў, якія маюць агульны вугал (або роўны вугал), адносяцца як здабыткі старон, якія змяшчаюць гэты вугал (рыс. 75, а, б),

$$\text{г. зн. } \frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AC_1 \cdot AB_1}{AC \cdot AB} = \frac{b_1 c_1}{bc}.$$



Доказ.
$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}b_1c_1 \sin \alpha}{\frac{1}{2}bc \sin \alpha} = \frac{b_1c_1}{bc}.$$

Вынік.

Праўда, што:
$$S_{AB_1C_1} = \frac{b_1}{b} \cdot \frac{c_1}{c} \cdot S_{ABC}.$$

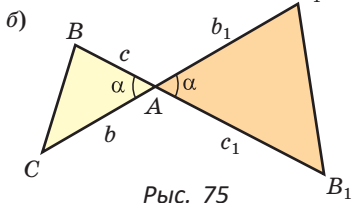
Задача 1. Плошча трохвугольніка ABC роўна 16, $AK : KC = 3 : 1$, $AM : MB = 1 : 2$ (рыс. 76). Знайсці S_{AMK} .

Рашэнне. *Спосаб 1.* Па выніку з тэарэмы аб плошчах трохвугольнікаў з агульным вуглом атрымліваем:

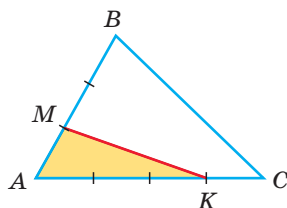
$$\begin{aligned} S_{AMK} &= \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AK}{AC} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot S_{ABC} = \\ &= \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Спосаб 2. } S_{AMK} &= \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AK \cdot \sin A = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} AB\right) \cdot \left(\frac{3}{4} AC\right) \cdot \sin A = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A\right) = \frac{1}{4} S_{ABC} = 4. \end{aligned}$$

Адказ: 4.



Рыс. 75

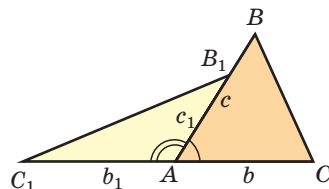


Рыс. 76



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

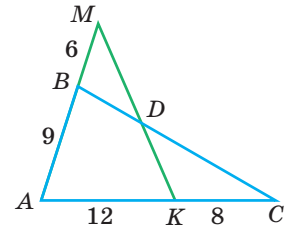
- 72.** Дакажыце, што калі два трохвугольнікі маюць па вугле, сума якіх роўна 180° , то іх плошчы адносяцца як здабыткі старон, якія змяшчаюць гэтыя вуглы, г. зн. калі $\angle C_1AB_1 + \angle CAB = 180^\circ$ (рыс. 77), то
$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{b_1c_1}{bc}.$$



Рыс. 77

- 73.** У трохвугольніку ABC на старане AB адзначаны пункт M , на старане BC — пункт K так, што $AM : MB = 2 : 3$, $BK : KC = 4 : 5$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка BMK , калі $S_{ABC} = 90$.
- 74.** Дадзены паралелаграм $ABCD$, плошча якога роўна 120. На старане AB адзначаны пункт M , на старане AD — пункт K так, што $AM = \frac{1}{2} AB$, $AK = \frac{2}{5} AD$. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $MBDK$.

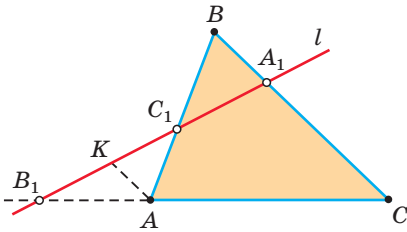
75. Выкарыстаўшы тэарэму аб плошчах трохвугольнікаў з роўным вуглом, дакажыце, што ў трапецыі $ABCD$ ($AD \parallel BC$), дзе O — пункт перасячэння дыяганалей, $S_{ABO} = S_{DCO}$.
76. Выкарыстаўшы даныя рысунка 78, дакажыце, што: а) $S_{ABC} = S_{AMK}$; б) $S_{MBD} = S_{CKD}$.



Рыс. 78

2. Тэарэма Менелая

Калі дадзены трохвугольнік ABC і прамая l перасякае стараны BC , AB і прадаўжэнне стараны AC у пунктах A_1 , C_1 і B_1 адпаведна (рыс. 79), то $\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1$.



Рыс. 79

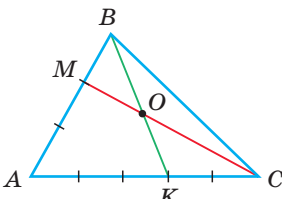
Доказ. Правядзём адрэзак $AK \parallel BC$, $K \in l$. Паколькі $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle KAC_1$ і $\triangle B_1KA \sim \triangle B_1A_1C$ (па двух вуглах), то $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{A_1B}{KA}$ і $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{KA}{CA_1}$.

Памножыўшы пачленна дадзеныя роўнасці, атрымаем $\frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{A_1B}{CA_1}$,

адкуль $\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1$.

Заўвага. Пры састаўленні здабытку трох адносін тэарэмы Менелая можна пачынаць з любога з шасці пунктаў (трох вяршынь трохвугольніка і трох пунктаў перасячэння прамой l з прамымі, якія змяшчаюць стараны трохвугольніка) і рухацца па контуры або па гадзіннікавай, або супраць гадзіннікавай стрэлкі. Пры гэтым вяршыні трохвугольніка і пункты перасячэння павінны чаргавацца.

Задача 2. У трохвугольніку ABC на старанах AB і AC адзначаны адпаведна пункты M і K такія, што $AM : MB = 2 : 1$, $AK : KC = 3 : 2$. Адрэзкі CM і BK перасякаюцца ў пункце O . Знайсці $BO : OK$.

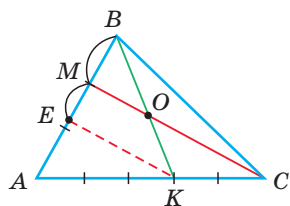


Рыс. 80

Рашэнне. *Спосаб 1* (тэарэма Менелая). Разгледзім $\triangle ABK$ (рыс. 80). Прамая MC перасякае дзве яго стараны AB і BK адпаведна ў пунктах M і O і прадаўжэнне трэцяй стараны AK у пункце C . Па тэарэме Менелая $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BO}{OK} \cdot \frac{KC}{CA} = 1$, адкуль $\frac{2}{1} \cdot \frac{BO}{OK} \cdot \frac{2}{5} = 1$,

$$\frac{BO}{OK} = \frac{5}{4}.$$

Спосаб 2 (тэарэма Фалеса абагульненая). Правядзём $KE \parallel CM$ (рыс. 81). Па тэарэме Фалеса $\frac{AE}{EM} = \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$. Тады AE — тры часткі, EM — дзве



Рыс. 81

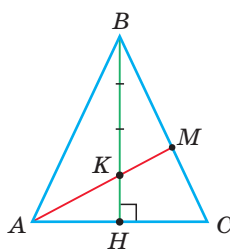
часткі, AM — пяць частак, адкуль $EM = \frac{2}{5} AM = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} AB = \frac{4}{15} AB$. Але $MB = \frac{1}{3} AB$. Адсюль

$$\frac{MB}{EM} = \frac{\frac{1}{3} AB}{\frac{4}{15} AB} = \frac{5}{4}. \text{ Для } \angle KBE \text{ па тэарэме Фалеса}$$

$$\frac{BO}{OK} = \frac{BM}{ME} = \frac{5}{4}.$$

Адказ: $\frac{5}{4}$.

Задача 3. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC ($AB = BC$), плошча якога роўна 80. Пункт K дзеліць вышыню BH у адносіне $1 : 3$, лічачы ад асновы. Прамая AK перасякае старану BC у пункце M . Знайсці плошчу чатырохвугольніка $HKMC$ (рыс. 82).



Рыс. 82

Рашэнне. 1) $S_{HBC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 40$ (BH — вышыня і медыяна трохвугольніка ABC).

2) Прыменім тэарэму Менелая да трохвугольніка HBC . Прамая AM перасякае яго стараны BH і BC адпаведна ў пунктах K і M і прадаўжэнне стараны HC у пункце A . Тады $\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BK}{KH} \cdot \frac{HA}{AC} = 1$,

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad \frac{CM}{MB} = \frac{2}{3}. \text{ Адкуль } \frac{BM}{BC} = \frac{3}{5}.$$

$$3) S_{BMK} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BK}{BH} \cdot S_{HBC} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot 40 = 18.$$

$$4) S_{HKMC} = S_{HBC} - S_{BMK} = 40 - 18 = 22.$$

Адказ: 22.

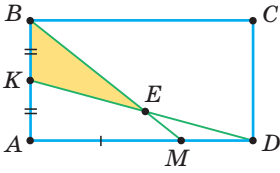


РАШАЕМ САМАСТОЙНА

77. Дакажыце пры дапамозе тэарэмы Менелая, што медыяны трохвугольніка дзеляцца пунктам перасячэння ў адносіне $2 : 1$, лічачы ад вяршыні.
78. У трохвугольніку ABC на старанах AB і AC адзначаны адпаведна пункты M і K такія, што $AM : MB = 3 : 1$, $AK : KC = 2 : 3$. Адрэзкі BK і CM перасякаюцца ў пункце O . Знайдзіце плошчу трохвугольніка OCK , калі плошча трохвугольніка ABC роўна 70.
79. У трохвугольніку ABC праведзены адрэзкі AM і CK , якія перасякаюцца ў пункце O ($M \in BC$, $K \in AB$). Знайдзіце S_{ABC} , калі $S_{AOK} = 2$, $S_{MOC} = 3$, $S_{AOC} = 4$.

Задача 4. На старанах AB і AD прамавугольніка адзначаны адпаведна пункты K і M такія, што $AK = KB$, $AM : MD = 2 : 1$. Адрэзкі DK і BM

перасякаюцца ў пункце E (рыс. 83). Знайсці плошчу трохвугольніка KBE , калі плошча прамавугольніка роўна 240.



Рыс. 83

Рашэнне. $S_{ABCD} = AD \cdot AB$, $S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot AB =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AD \cdot AB = \frac{1}{3} AD \cdot AB = \frac{1}{3} S_{ABCD} = 80.$

Прыменім тэарэму Менелая да трохвугольніка ABM , дзе прамая KD перасякае стараны AB і BM і прадаўжэнне стараны AM . Атрымаем: $\frac{ME}{EB} \cdot \frac{BK}{KA} \cdot \frac{AD}{DM} = 1$,

$$\frac{ME}{EB} \cdot 1 \cdot \frac{3}{1} = 1, \quad \frac{ME}{EB} = \frac{1}{3}. \quad \text{Тады} \quad \frac{BE}{BM} = \frac{3}{4}, \quad \frac{BK}{BA} = \frac{1}{2}.$$

Прыменім уласцівасць плошчаў трохвугольнікаў, якія маюць агульны вугал: $S_{KBE} = \frac{BE}{BM} \cdot \frac{BK}{BA} \cdot S_{ABM} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 80 = 30.$

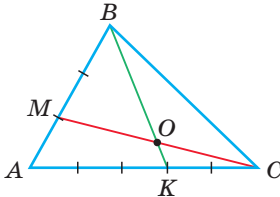
Адказ: 30.



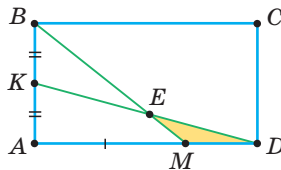
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

80. У трохвугольніку ABC $AK : KC = 3 : 2$, $AM : MB = 1 : 2$, $O = BK \cap CM$ (рыс. 84). Знайдзіце адносіну:

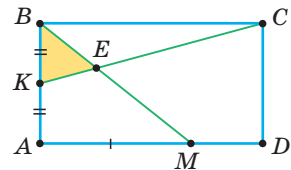
- а) $\frac{KO}{OB}$; б) $\frac{MO}{OC}$; в) $\frac{S_{KOC}}{S_{MOB}}.$



Рыс. 84



Рыс. 85



Рыс. 86

81. $ABCD$ — прамавугольнік, $AK = KB$, $AM = 2MD$, $S_{ABCD} = 240$ (рыс. 85). Знайдзіце S_{MED} .

82. $ABCD$ — прамавугольнік, $AK = KB$, $AM = 2MD$ (рыс. 86). Знайдзіце $\frac{S_{KBE}}{S_{ABCD}}.$

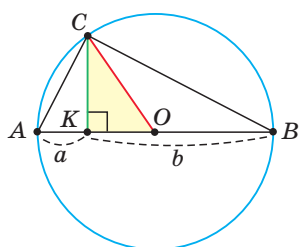
3. Няроўнасць Кашы

Сярэдняе арыфметычнае двух неадмоўных лікаў большае або роўна іх сярэдняму геаметрычнаму, г. зн. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ пры $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Напрыклад, $\frac{9+25}{2} \geq \sqrt{9 \cdot 25}$. Сапраўды, $17 \geq 15$.

Алгебраічны доказ гэтай няроўнасці такі. Разгледзім рознасць левай і правай частак няроўнасці $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Атрымаем: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$. Паколькі $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ пры ўсіх дапушчальных a і b , то $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$. Значыць, няроўнасць $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ правільная.

Няроўнасць $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, дзе $a \geq 0, b \geq 0$, называецца *няроўнасцю Кашы* ў гонар вядомага французскага матэматыка і часта выкарыстоўваецца пры рашэнні алімпіядных задач.



Рыс. 87

Прывядзём геаметрычны доказ гэтай няроўнасці. Пакажам відарыс акружнасці з дыяметрам АВ і цэнтрам у пункце О (рыс. 87). На дыяметры адзначым адвольны пункт К (для пэўнасці лявей за цэнтр О). Няхай $AK = a$, $KB = b$. З пункта К узвядзём перпендыкуляр КС, дзе пункт С належыць акружнасці. Правядзём радыус ОС. Паколькі ўпісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр, прамы, то $\angle ACB = 90^\circ$ і $\triangle ABC$ прамавугольны, СК — яго вышыня, праведзеная да гіпатэнузы. Па тэарэме аб сярэднім прапарцыянальным у прамавугольным трохвугольніку ABC $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$. Але радыус ОС роўны палавіне дыяметра АВ, г. зн. $OC = \frac{AK + KB}{2}$.

У трохвугольніку CKO катэт меншы за гіпатэнузу, г. зн. $OC > CK$. Адсюль $\frac{AK + KB}{2} > \sqrt{AK \cdot KB}$, г. зн. $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Роўнасць левай і правай частак няроўнасці дасягаецца, калі пункт К супадае з пунктам О. У гэтым выпадку трохвугольнік ACB з'яўляецца раўнабедраным і прамавугольным. Таму справядлівая няроўнасць $\frac{AK + KB}{2} \geq \sqrt{AK \cdot KB}$, г. зн. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

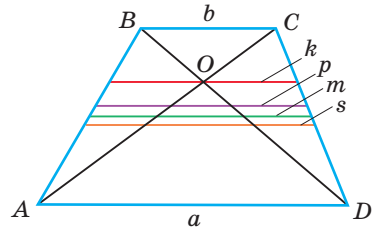


РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 83.** У трапецыі праведзены чатыры адрэзкі з канцамі на бакавых старонах трапецыі, паралельныя яе асновам: k — адрэзак, які праходзіць праз пункт О перасячэння дыяганалей трапецыі; p — адрэзак, які дзеліць трапецыю на дзве падобныя трапецыі (адпаведныя вуглы роўныя, а стораны прапарцыянальныя), m — сярэдняя лінія трапецыі, s — адрэзак, які дзеліць трапецыю на дзве роўнавялікія

трапецыі (рыс. 88). Ведаючы асновы a і b трапецыі, знайдзіце даўжыню кожнага з пералічаных адрэзкаў.

Дакажыце алгебраічна, што $k < p$, $p < m$, $m < s$, і пераканайцеся ў правільнасці рысунка 88.



Рыс. 88

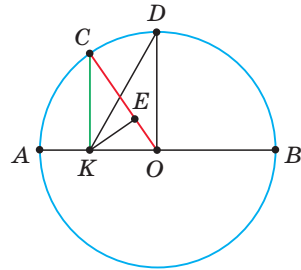
84. Дадзена акружнасць з дыяметрам AB і цэнтрам у пункце O , $AK = a$, $KB = b$, $CK \perp AB$, $DO \perp AB$, $KE \perp OC$ (рыс. 89). Дакажыце, што:

а) $CK = \sqrt{ab}$ — сярэдняе геаметрычнае лікаў a і b ;

б) $DO = \frac{a+b}{2}$ — сярэдняе арыфметычнае лікаў a і b ;

в) $CE = \frac{2ab}{a+b}$ — сярэдняе гарманічнае лікаў a і b ;

г) $KD = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ — сярэдняе квадратычнае лікаў a і b .



Рыс. 89

85. Выкарыстаўшы вынік задачы 84, дакажыце геаметрычна, што $CE \leq CK \leq DO \leq KD$, адкуль $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Вызначце, пры якіх a і b нястрогія няроўнасці ператвараюцца ў роўнасці.

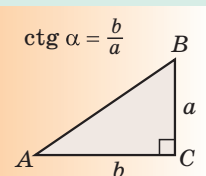
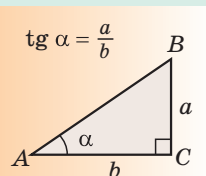
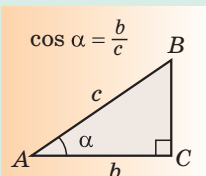
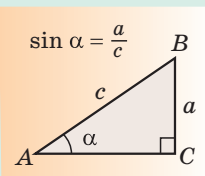
ТЭМЫ ПРАЕКТАЎ



1. Тэарэма Чэвы.
2. Агульная тэарэма Менелая і ёй адваротная.
3. Узнікненне трыганаметрыі, яе роля ў сучаснай матэматыцы.

ЗАПАМІНАЕМ

1.



2. Значэнні трыганаметрычных функцый вуглоў 30° , 45° , 60° :

1) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$;

2) $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, $\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$;

3) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Трыганаметрычныя формулы (тоеснасці):

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Прыклады. $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Формулы плошчы трохвугольніка і паралелаграма:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma, \quad S_{\text{пар}} = ab \sin \alpha.$$

5. Сярэднія прапарцыянальныя ў прамавугольным трохвугольніку:

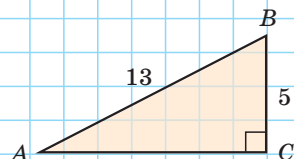
$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}, \quad a = \sqrt{c \cdot a_c}, \quad b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

ПРАВЯРАЕМ СЯБЕ

Тэст 1

Знайдзіце:

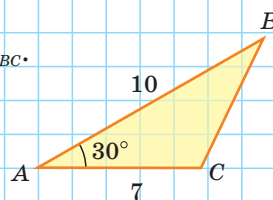
- а) $\sin A$;
 б) $\cos A$;
 в) $\operatorname{tg} A$;
 г) $\sin B$.



Тэст 2

Знайдзіце S_{ABC} .

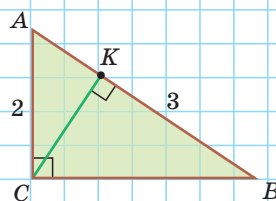
- а) 17,5;
 б) $35\sqrt{3}$;
 в) 35;
 г) $70\sqrt{3}$.



Тэст 3

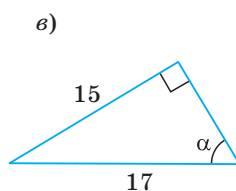
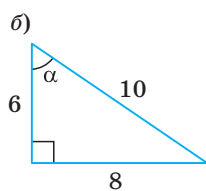
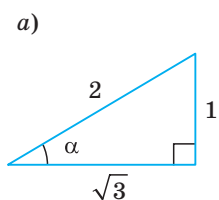
Знайдзіце вышыню CK трохвугольніка ABC , калі $AC = 2$, $KB = 3$.

- а) 2; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}$; г) 2,5.

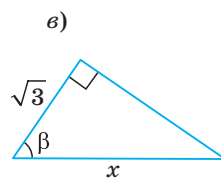
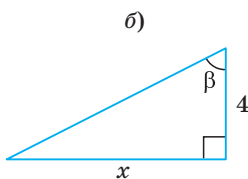
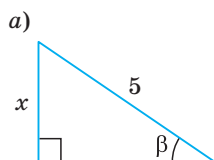


ПАДРЫХОТКА ДА КАНТРОЛЬНАЙ РАБОТЫ 1

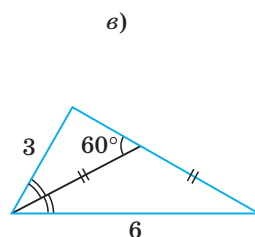
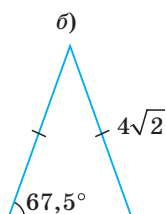
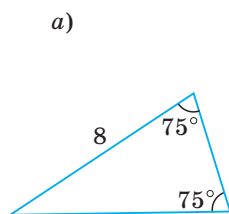
1. Знайдзіце сінус, косінус, тангенс і катангенс вугла α .



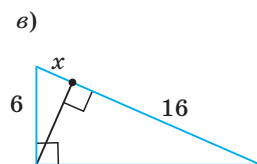
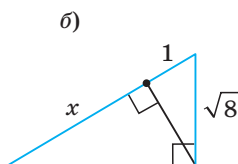
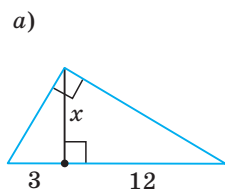
2. Па вугле β і адной са старон знайдзіце старану x .



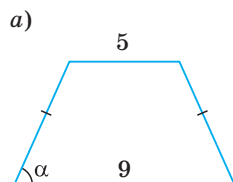
3. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.



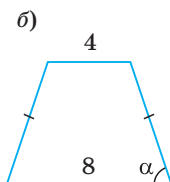
4. Знайдзіце даўжыню адрэзка, абазначанага літарай x .



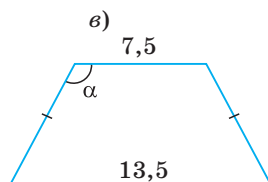
5. Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапецыі.



$$\operatorname{tg} \alpha = 2,5$$



$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$



$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

Трыганаметрычныя табліцы

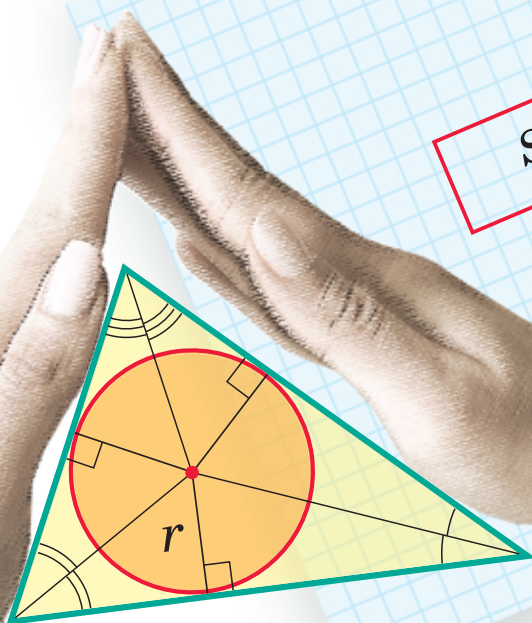
α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	—	90°	1,0000	0,0000	—	0,0000
1°	0175	9998	0175	57,2900	89°	9998	0175	57,2900	0175
2°	0349	9994	0349	28,6363	88°	9994	0349	28,6363	0349
3°	0523	9986	0524	19,0811	87°	9986	0523	19,0811	0524
4°	0698	9976	0699	14,3007	86°	9976	0698	14,3007	0699
5°	0872	9962	0875	11,4301	85°	9962	0872	11,4301	0875
6°	1045	9945	1051	9,5144	84°	9945	1045	9,5144	1051
7°	1219	9925	1228	8,1443	83°	9925	1219	8,1443	1228
8°	1392	9903	1405	7,1154	82°	9903	1392	7,1154	1405
9°	1564	9877	1584	6,3138	81°	9877	1564	6,3138	1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80°	0,9848	0,1736	5,6713	0,1763
11°	1908	9816	1944	5,1446	79°	9816	1908	5,1446	1944
12°	2079	9781	2126	4,7046	78°	9781	2079	4,7046	2126
13°	2250	9744	2309	4,3315	77°	9744	2250	4,3315	2309
14°	2419	9703	2493	4,0108	76°	9703	2419	4,0108	2493
15°	2588	9659	2679	3,7321	75°	9659	2588	3,7321	2679
16°	2756	9613	2867	3,4874	74°	9613	2756	3,4874	2867
17°	2924	9563	3057	3,2709	73°	9563	2924	3,2709	3057
18°	3090	9511	3249	3,0777	72°	9511	3090	3,0777	3249
19°	3256	9455	3443	2,9042	71°	9455	3256	2,9042	3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70°	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
21°	3584	9336	3839	6051	69°	9336	3584	6051	3839
22°	3746	9272	4040	4751	68°	9272	3746	4751	4040
23°	3907	9205	4245	3559	67°	9205	3907	3559	4245
24°	4067	9135	4452	2460	66°	9135	4067	2460	4452
25°	4226	9063	4663	1445	65°	9063	4226	1445	4663
26°	4384	8988	4877	2,0503	64°	8988	4384	2,0503	4877
27°	4540	8910	5095	9626	63°	8910	4540	9626	5095
28°	4695	8829	5317	8807	62°	8829	4695	8807	5317
29°	4848	8746	5543	1,8040	61°	8746	4848	1,8040	5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60°	0,8660	0,5000	1,7321	0,5774
31°	5150	8572	6009	6643	59°	8572	5150	6643	6009
32°	5299	8480	6249	6003	58°	8480	5299	6003	6249
33°	5446	8387	6494	5399	57°	8387	5446	5399	6494
34°	5592	8290	6745	4826	56°	8290	5592	4826	6745
35°	5736	8192	7002	4281	55°	8192	5736	4281	7002
36°	5878	8090	7265	3764	54°	8090	5878	3764	7265
37°	6018	7986	7536	3270	53°	7986	6018	3270	7536
38°	6157	7880	7813	2799	52°	7880	6157	2799	7813
39°	6293	7771	8098	1,2349	51°	7771	6293	1,2349	8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50°	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
41°	6561	7547	8693	1504	49°	7547	6561	1504	8693
42°	6691	7431	9004	1106	48°	7431	6691	1106	9004
43°	6820	7314	9325	0724	47°	7314	6820	0724	9325
44°	6947	7193	9657	0355	46°	7193	6947	0355	9657
45°	7071	7071	1,0000	1,0000	45°	7071	7071	1,0000	1,0000
α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Глава II

Упісаныя і апісаныя акружнасці

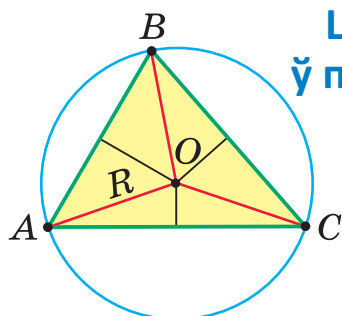
У гэтай главе вы даведаецеся:

- Дзе знаходзіцца цэнтр апісанай, а дзе — цэнтр упісанай акружнасці трохвугольніка
- Аб формуле плошчы трохвугольніка $S = pr$
- Аб уласцівасцях упісанага ў акружнасць і апісанага каля акружнасці чатырохвугольнікаў



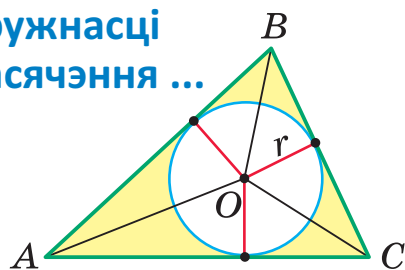
$$S = pr$$

Апісання і ўпісання акружнасці



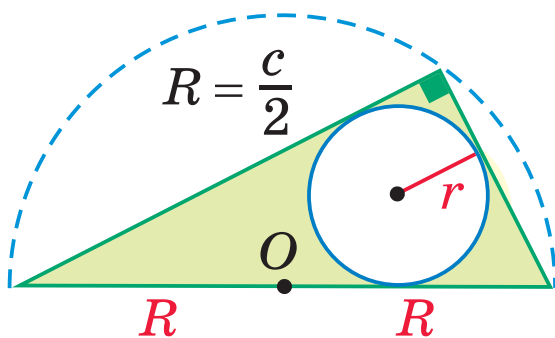
пасярэдніх перпендыкуляраў

Цэнтр ... акружнасці
ў пункце перасячэння ...



бісектрыс

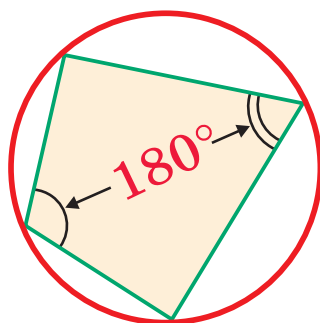
$$S = pr$$



$$R = \frac{c}{2}$$

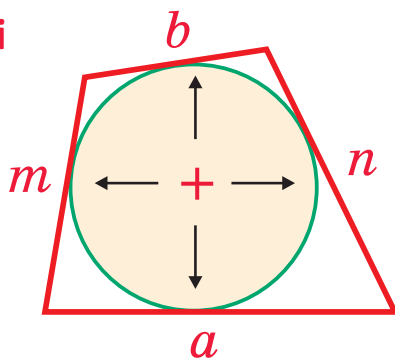
Прамавугольны

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$



Упісаны

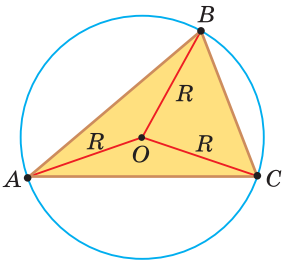
4-вугольнікі



Апісаны

§ 8. Апісаная і ўпісаная акружнасці трохвугольніка

Азначэнне. Акружнасць называецца **апісанай** каля трохвугольніка, калі яна праходзіць праз усе яго вяршыні.



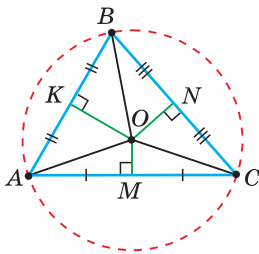
Рыс. 90

На рысунку 90 паказана акружнасць з радыусам R і цэнтрам O , апісаная каля трохвугольніка ABC .

Паколькі $OA = OB = OC = R$, то цэнтр апісанай акружнасці роўнаадалены ад вяршынь трохвугольніка.

Замест слоў «акружнасць, апісаная каля трохвугольніка ABC », таксама гавораць «акружнасць, апісаная вакол трохвугольніка ABC », або «апісаная акружнасць трохвугольніка ABC ».

Тэарэма (аб акружнасці, апісанай каля трохвугольніка). Каля любога трохвугольніка можна апісаць акружнасць, прычым толькі адну, яе цэнтр знаходзіцца ў пункце перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да старон трохвугольніка.



Рыс. 91

Доказ. Разгледзім адвольны трохвугольнік ABC (рыс. 91). Няхай O — пункт перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да яго старон. Правядзём адрэзкі OA , OB і OC . Па ўласцівасці пасярэдняга перпендыкуляра $OA = OC$, $OC = OB$. Паколькі пункт O роўнаадалены ад усіх вяршынь трохвугольніка ABC , то акружнасць з цэнтрам у пункце O і радыусам OA праходзіць праз усе вяршыні трохвугольніка ABC , г. зн. з'яўляецца яго апісанай акружнасцю. Адзінасць апісанай акружнасці дакажыце самастойна.

Заўвага. Паколькі ўсе тры пасярэднія перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, то для знаходжання цэнтра апісанай акружнасці дастаткова пабудаваць пункт перасячэння любых двух з іх.

Азначэнне. Акружнасць называецца **ўпісанай** у трохвугольнік, калі яна датыкаецца да ўсіх яго старон.

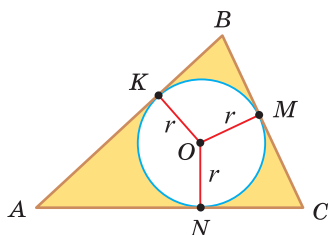


Рис. 92

На рысунку 92 паказана акружнасць з цэнтрам O і радыусам r , упісаная ў трохвугольнік ABC ; K , M і N — пункты яе дотыку да старон трохвугольніка ABC .

Паколькі $OK = OM = ON = r$ і па ўласцівасці датычнай да акружнасці $OK \perp AB$, $OM \perp BC$, $ON \perp AC$, то цэнтр упісанай акружнасці роўнааддалены ад старон трохвугольніка.

Замест слоў «акружнасць, упісаная ў трохвугольнік ABC », таксама гавораць «упісаная акружнасць трохвугольніка ABC ».

Тэарэма (аб акружнасці, упісанай у трохвугольнік).

У любы трохвугольнік можна ўпісаць акружнасць, прычым толькі адну, яе цэнтр знаходзіцца ў пункце перасячэння бісектрыс трохвугольніка.

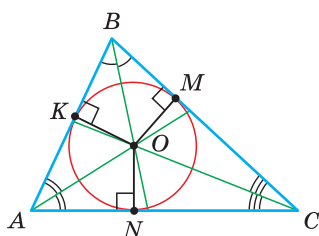


Рис. 93

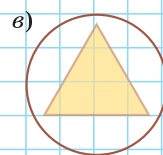
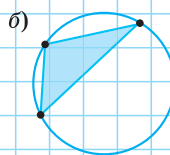
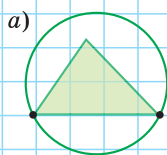
Доказ. Разгледзім адвольны трохвугольнік ABC (рис. 93). Няхай O — пункт перасячэння яго бісектрыс. Правядзём з пункта O перпендыкуляры OK , OM і ON адпаведна да старон AB , BC і AC . Па ўласцівасці бісектрысы вугла $OK = ON$, $ON = OM$. Акружнасць з цэнтрам у пункце O і радыусам OK будзе праходзіць праз пункты K , M і N і датыкацца да старон AB , BC і AC у дадзеных пунктах па прымеце датычнай. Такім чынам, гэта акружнасць з'яўляецца ўпісанай у трохвугольнік ABC . Адзінасць упісанай акружнасці дакажыце самастойна.

Заўвага. Паколькі ўсе тры бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, то для знаходжання цэнтра ўпісанай акружнасці дастаткова пабудаваць пункт перасячэння любых дзвюх з іх.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

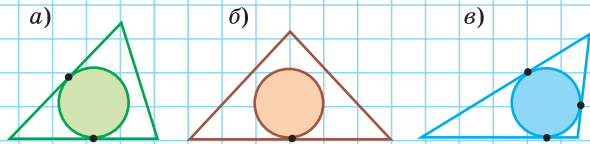
Тэст 1

На якім з рысункаў паказана акружнасць, апісаная каля трохвугольніка?

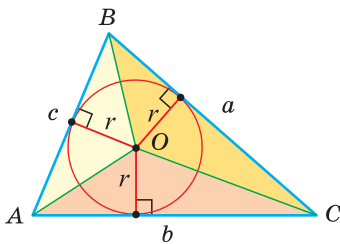


Тэст 2

На якім з рысункаў паказана акружнасць, упісаная ў трохвугольнік?



Тэарэма. Плошчу трохвугольніка можна знайсці па формуле $S = pr$, дзе p — паўперыметр трохвугольніка, r — радыус акружнасці, упісанай у гэты трохвугольнік.



$$S = pr$$

Рыс. 94

Доказ. Няхай дадзены трохвугольнік ABC са старанамі $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, O — цэнтр яго ўпісанай акружнасці (рыс. 94). Злучым адрэзкамі пункт O з вяршынямі A , B і C . Трохвугольнік ABC разаб'ецца на тры трохвугольнікі: $\triangle BOC$, $\triangle AOC$, $\triangle AOB$. Радыусы r , праведзеныя ў пункты дотыку, будуць вышынямі гэтых трохвугольнікаў. Плошча трохвугольніка ABC роўна суме плошчаў названых трохвугольнікаў: $S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a + b + c)r = pr$.

Тэарэма даказана.

Вынік.

Радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік, можна знайсці па формуле

$$r = \frac{S}{p}.$$

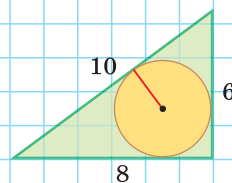
Адной з найважнейшых задач дадзенай тэмы з'яўляецца задача знаходжання радыуса апісанай і радыуса ўпісанай акружнасцей дадзенага трохвугольніка.

А цяпер выканайце **Тэст 3**.

Тэст 3

Выкарыстаўшы формулу $S = pr$, знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік са старанамі, роўнымі 6 см, 8 см, 10 см.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 1,5.



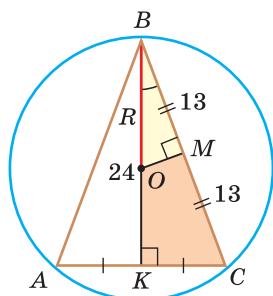


Заданні да § 8

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. Знайсці радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка ABC , у якога $AB = BC = 26$ см, вышыня $BK = 24$ см (рыс. 95).

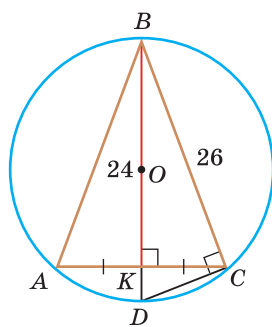


Рыс. 95

Рашэнне. *Спосаб 1* (метада падобнасці). Цэнтр апісанай акружнасці ляжыць на перасячэнні пасярэдніх перпендыкуляраў да старон трохвугольніка. Правядзём пасярэднія перпендыкуляры да старон AC і BC , якія перасякуцца ў пункце O — цэнтры апісанай акружнасці. Паколькі ў раўнабедраным трохвугольніку вышыня, праведзеная да асновы, з'яўляецца медыянай, то BK — пасярэдні перпендыкуляр да стараны AC . Няхай MO — пасярэдні перпендыкуляр да стараны BC . Тады $BM = 13$ см, $BO = R$ — шуканы радыус. Паколькі $\triangle BMO \sim \triangle BKC$ (як прамавугольныя з агульным вострым вуглом CBK),

$$\text{то } \frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}, \quad \frac{13}{R} = \frac{24}{26}, \quad \text{адкуль } R = \frac{13 \cdot 26}{24} = 14\frac{1}{12} \text{ (см).}$$

Спосаб 2 (трыганаметрычны метада). З трохвугольніка OBM (гл. рыс. 95) $\cos \angle OBM = \frac{BM}{BO}$, з трохвугольніка CBK $\cos \angle CBK = \frac{BK}{BC}$, адкуль $\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}$. Далейшае рашэнне супадае з прыведзеным у спосабе 1.



Рыс. 96

Спосаб 3 (сярэдняя прапарцыянальная). Прадоўжым вышыню BK да перасячэння з апісанай акружнасцю ў пункце D (рыс. 96). Паколькі цэнтр апісанай акружнасці раўнабедранага трохвугольніка ляжыць на прамой BK (гл. спосаб 1), то $BD = 2R$ — дыяметр дадзенай акружнасці. У прамавугольным трохвугольніку BCD ($\angle BCD = 90^\circ$ як упісаны, які абпіраецца на дыяметр) катэт BC ёсць сярэдняя прапарцыянальная паміж гіпатэнузай BD і праекцыяй BK катэта BC на гіпатэнузу. Таму $BC^2 = BD \cdot BK$, $26^2 = 2R \cdot 24$. Адкуль $R = 14\frac{1}{12}$ см.

Адказ: $14\frac{1}{12}$ см.

Заўвага. З рашэння ключавой задачы 1 вынікае ўласцівасць: «Цэнтр акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка, ляжыць на яго вышыні, праведзенай да асновы, або на яе прадаўжэнні».

Правільнае і адваротнае сцверджанне: «Калі *цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, ляжыць на вышыні трохвугольніка або на яе прадаўжэнні, то гэты трохвугольнік раўнабедраны*».

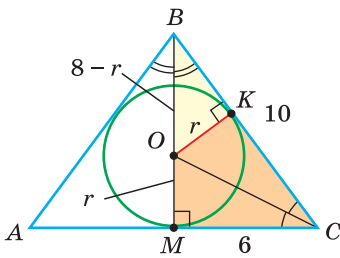
Адваротнае сцверджанне дакажыце самастойна.

Карысна запомніць!

Калі ў ключавой задачы 1 бакавую старану абазначыць b , а вышыню, праведзеную да асновы, — h_a , то атрымаецца прапорцыя $\frac{b}{2} = \frac{h_a}{R}$. Адсюль вынікае зручная формула для знаходжання радыуса акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка:

$$R = \frac{b^2}{2h_a}.$$

Задача 2. Знайсці радыус акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC , у якога $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.



Рыс. 97

Рашэнне. *Спосаб 1* (метада падобнасці). Цэнтр упісанай акружнасці знаходзіцца ў пункце перасячэння бісектрыс трохвугольніка. Правядзём у трохвугольніку ABC бісектрысы з вяршынь B і C , якія перасякуцца ў пункце O — цэнтры ўпісанай акружнасці (рыс. 97). Бісектрыса BM , праведзеная да асновы раўнабедранага трохвугольніка ABC , будзе яго вышыняй і медыянай, адрэзак CO — бісектрыса вугла C , $OM = r$ — шуканы радыус упісанай акружнасці. Паколькі $AM = MC = 6$ см,

то з трохвугольніка BMC па тэарэме Піфагора $BM = \sqrt{BC^2 - MC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см), адкуль $BO = BM - OM = 8 - r$. Правядзём радыус OK у пункт дотыку акружнасці са стараной BC , $OK \perp BC$. З падобнасці прамавугольных трохвугольнікаў BKO і BMC ($\angle MBC$ — агульны) вынікае: $\frac{OK}{OB} = \frac{MC}{BC}$. Тады $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$, $\frac{r}{8-r} = \frac{3}{5}$, $5r = 3(8-r)$, $8r = 24$, $r = 3$. Шуканы радыус OM роўны 3 см.

Спосаб 2 (трыганаметрычны метада). З трохвугольніка OBK (гл. рыс. 97) $\sin \angle OBK = \frac{OK}{OB}$, з трохвугольніка MBC $\sin \angle MBC = \frac{MC}{BC}$, адкуль $\frac{OK}{OB} = \frac{MC}{BC}$. Далейшае рашэнне супадае з прыведзеным у спосабе 1.

Спосаб 3 (уласцівасць бісектрысы трохвугольніка). CO — бісектрыса трохвугольніка BMC . Вядома, што бісектрыса трохвугольніка дзеліць процілеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам. Таму $\frac{OM}{OB} = \frac{MC}{BC}$, $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$, адкуль $r = 3$. Шуканы радыус роўны 3 см.

Спосаб 4 (формула $S = pr$). $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48 \text{ (см}^2\text{)}$;
 $p = \frac{1}{2} P_{ABC} = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16 \text{ (см)}$. З формулы плошчы трохвугольніка $S = pr$ вынікае: $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3 \text{ (см)}$.

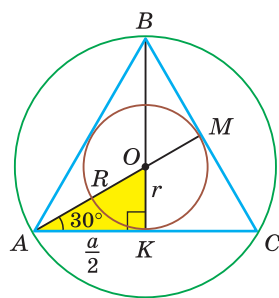
Адказ: 3 см.

Заўвага. З рашэння ключавой задачы 2 вынікае ўласцівасць: «*Цэнтр акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік, ляжыць на яго вышыні, праведзенай да асновы*».

Правільнае і адваротнае сцверджанне: «*Калі цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік, ляжыць на вышыні трохвугольніка, то гэты трохвугольнік раўнабедраны*».

Адваротнае сцверджанне дакажыце самастойна.

Задача 3. Дадзены роўнастаронні трохвугольнік са стараной a . Знайсці радыус R яго апісанай і радыус r яго ўпісанай акружнасцей.



Рыс. 98

Рашэнне. Спосаб 1 (трыганаметрычны метад). Паколькі ў роўнастароннім трохвугольніку бісектрысы з'яўляюцца і вышынямі, і медыянамі, то яго бісектрысы ляжаць на пасярэдніх перпендыкулярах да старон трохвугольніка. Таму ў роўнастароннім трохвугольніку цэнтры апісанай і ўпісанай акружнасцей супадаюць.

Разгледзім роўнастаронні трохвугольнік ABC са стараной a , у якога вышыні AM і BK перасякаюцца ў пункце O — цэнтры апісанай і ўпісанай акружнасцей (рыс. 98). Тады $OA = OB = R$ — радыусы апісанай, $OK = OM = r$ — радыусы ўпісанай акружнасці. Паколькі AM — бісектрыса і $\angle BAC = 60^\circ$, то $\angle OAK = 30^\circ$. Паколькі BK — вышыня і ме-

дыяна, то $AK = \frac{a}{2}$. З трохвугольніка AKO $\cos 30^\circ = \frac{AK}{AO}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, адкуль $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. У трохвугольніку AKO катэт OK ляжыць насупраць вугла ў 30° , таму $OK = \frac{1}{2} AO$, $r = \frac{1}{2} R = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Спосаб 2 (уласцівасць медыян). Паколькі AM і BK — медыяны трохвугольніка ABC (гл. рыс. 98), то па ўласцівасці медыян $BO : OK = 2 : 1$. Вышыню роўнастаронняга трохвугольніка можна знайсці па формуле $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Адкуль $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $R = BO = \frac{2}{3} BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$r = OK = \frac{1}{3} BK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Адказ: $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Карысна запомніць!

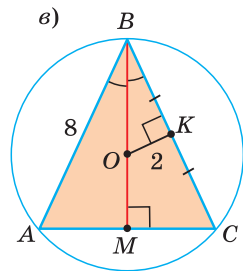
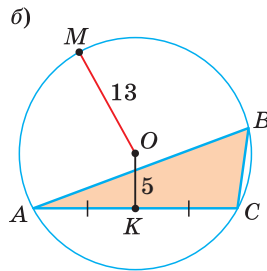
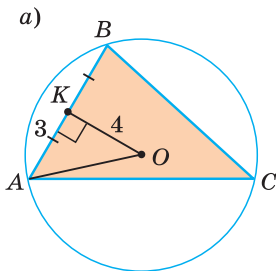
Паколькі радыус апісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, то $a = R\sqrt{3}$. Значыць, старана роўнастаронняга

трохвугольніка ў $\sqrt{3}$ раза большая за радыус яго апісанай акружнасці. Каб знайсці радыус R апісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка, трэба старану a падзяліць на $\sqrt{3}$, а каб знайсці яго старану a , трэба радыус R памножыць на $\sqrt{3}$. Радыус упісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка $r = \frac{1}{2}R$.

**РАШАЕМ
САМАСТОЙНА**

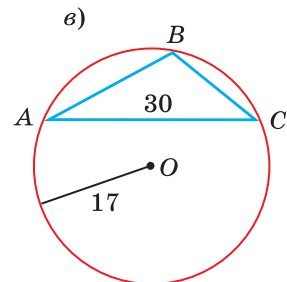
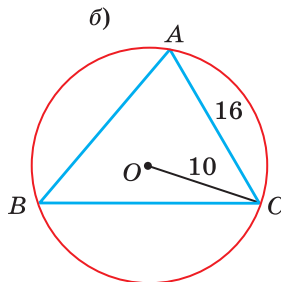
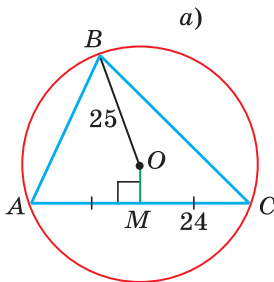
86. Каля трохвугольніка ABC апісана акружнасць з цэнтрам у пункце O .

- Знайдзіце радыус апісанай акружнасці (рыс. 99, а).
- Знайдзіце старану AC , калі K — яе сярэдзіна, $K = 5$ (рыс. 99, б).
- Знайдзіце радыус апісанай акружнасці (рыс. 99, в).



Рыс. 99

87. Каля трохвугольніка ABC апісана акружнасць. Па даных на рысунках 100, а)—в) знайдзіце адлегласць ад цэнтра O акружнасці да прамой AC .

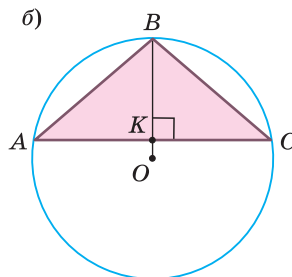
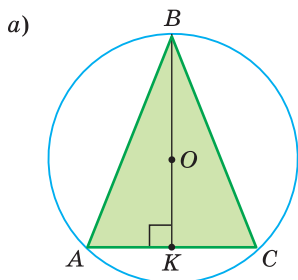


Рыс. 100

88. Выкарыстаўшы ключавую задачу 1 (с. 60), знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай AC і вышынёй BK , калі:

а) $AB = 12$ см, $BK = 10$ см (рыс. 101, а);

б) $AB = 30$ см, $BK = 18$ см (рыс. 101, б).



Рыс. 101

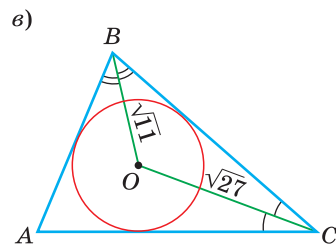
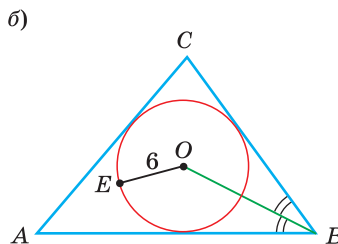
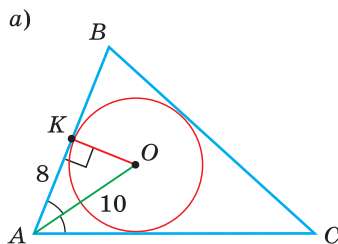
89. Радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка, роўны 5 см, вышыня, праведзеная да яго асновы, роўна 8 см. Знайдзіце плошчу дадзенага трохвугольніка.

90. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам у пункце O .

а) Па рысунку 102, а) вызначце радыус упісанай акружнасці.

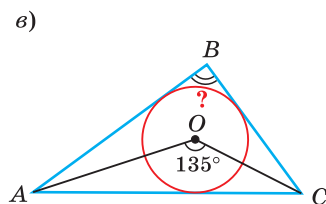
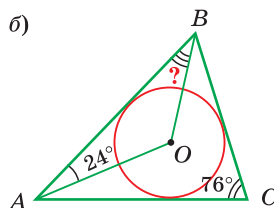
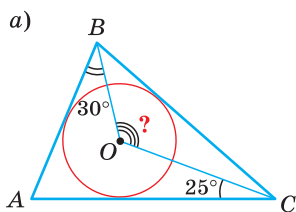
б) Па рысунку 102, б) вызначце даўжыню адрэзка OB , калі $\angle ABC = 60^\circ$.

в) Па рысунку 102, в) вызначце даўжыню стараны BC , калі дыяметр упісанай акружнасці роўны $\sqrt{8}$.



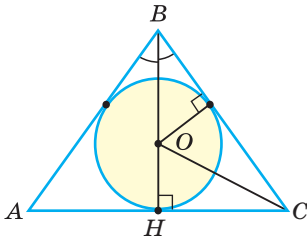
Рыс. 102

91. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам у пункце O . Па даных на рысунках 103, а)–в) вызначце велічыню вугла, абазначанага пыталнікам.

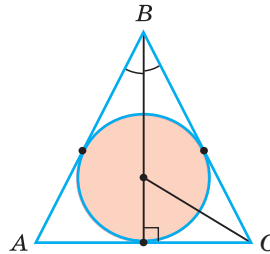


Рыс. 103

92. а) Выкарыстаўшы ключавую задачу 2 (с. 61), знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай $AC = 6$ см і вышынёй $BH = 4$ см, праведзенай да асновы (рыс. 104).
 б) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай $AC = 10$ см і бакавой старонай $AB = 13$ см (рыс. 105).



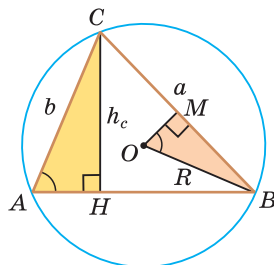
Рыс. 104



Рыс. 105

93. Дадзены роўнастаронні трохвугольнік са старонай, роўнай $4\sqrt{3}$ см. Вылічыце:
 а) радыус апісанай акружнасці гэтага трохвугольніка;
 б) радыус упісанай акружнасці гэтага трохвугольніка.
94. а) Знайдзіце радыус R апісанай і радыус r упісанай акружнасцей роўнастаронняга трохвугольніка, калі яго вышыня $h = 12$ см.
 б) Знайдзіце плошчу роўнастаронняга трохвугольніка, калі радыус R яго апісанай акружнасці роўны 2 см.
95. а) Пры дапамозе цыркуля і лінейкі апішыце акружнасць каля тупавугольнага трохвугольніка.
 б) Пры дапамозе цыркуля і лінейкі ўпішыце акружнасць у прамавугольны трохвугольнік.
96. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC , $AB = BC = 8$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Вывядзіце:
 а) радыус яго апісанай акружнасці;
 б) радыус яго ўпісанай акружнасці.
97. а) Знайдзіце плошчу трохвугольніка, у якога перыметр роўны 24 см, а радыус упісанай акружнасці — 2 см.
 б) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік, плошча якога роўна 48 см^2 , а перыметр — 32 см.
98. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай AC , O_1 — цэнтр апісанай, O_2 — цэнтр упісанай акружнасці. Знайдзіце даўжыню адрэзка O_1O_2 , калі $AB = 20$ см, вышыня $BH = 16$ см.

99. а) Акружнасць, упісаная ў раўнабедраны трохвугольнік, дзеліць пунктамі дотыку яго бакавую старану на адрэзкі, роўныя 6 см і 4 см, лічачы ад асновы. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік.
 б) Цэнтр акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік, дзеліць яго вышыню, праведзеную да асновы, у адносіне 4 : 5, лічачы ад асновы. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі яго бакавая старана роўна 20 см.
100. Косінус вугла пры аснове раўнабедранага трохвугольніка роўны 0,8, перыметр трохвугольніка роўны 54 см. Знайдзіце:
 а) радыус яго ўпісанай акружнасці;
 б) радыус яго апісанай акружнасці.
101. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам O , якая датыкаецца да яго старон AB , BC і AC адпаведна ў пунктах M , N і K . Знайдзіце:
 а) $\angle MNK$, калі $\angle A = 70^\circ$;
 б) $\angle AOB$, калі $\angle KMN = 64^\circ$.



Рыс. 106

102. Акружнасць з цэнтрам у пункце O апісана каля трохвугольніка ABC (рыс. 106), $OB = R$ — радыус акружнасці, $BC = a$, $AC = b$, $CH = h_c$ — вышыня, $OM \perp BC$. Дакажыце, што:

а) $\angle MOB = \angle A$; б) $\frac{CH}{AC} = \frac{MB}{OB}$; в) $R = \frac{ab}{2h_c}$.

103. а) У трохвугольніку ABC $\angle A = 30^\circ$, $BC = 6$ см. Знайдзіце дыяметр акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка.
 б) У трохвугольніку ABC $AB = 10$ см, $BC = 16$ см, вышыня $BH = 8$ см. Знайдзіце радыус R апісанай акружнасці.
104. У трохвугольніку ABC $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік, датыкаецца да названых старон адпаведна ў пунктах M , N , K . Знайдзіце:
 а) даўжыню адрэзка AK ;
 б) $AK + MB + NC$.
105. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам у пункце O (рыс. 107), вышыня AM праходзіць праз пункт O , $AM : BC = 2 : 3$, $P_{ABC} = 64$. Знайдзіце радыус упісанай акружнасці.
106. У роўнастаронні трохвугольнік ABC упісана акружнасць, радыус якой роўны 24. Адрэзак MK датыкаецца да гэтай акружнасці

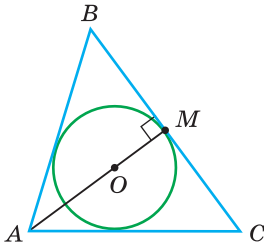


Рис. 107

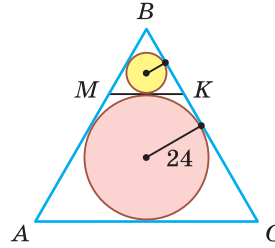


Рис. 108

і паралельны старане AC (рис. 108). Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік MBK .

- 107.** Дакажыце, што калі цэнтры апісанай і ўпісанай акружнасцей трохвугольніка супадаюць, то гэты трохвугольнік роўнастаронні.
- 108.** а) Дакажыце, што каля дадзенага трохвугольніка можна апісаць толькі адну акружнасць.
б) Дакажыце, што ў дадзены трохвугольнік можна ўпісаць толькі адну акружнасць.
- 109.** Дадзены востравугольны трохвугольнік ABC , H — пункт перасячэння яго вышынй (артацэнтр), O — цэнтр апісанай акружнасці. Пункты O , H , A і C ляжаць на адной акружнасці. Знайдзіце велічыню вугла B .

Гімнастыка розуму

Радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC (рис. 109), роўны 2 см, плошча трохвугольніка $S = 2025 \text{ см}^2$. Знайдзіце вусна перыметр P трохвугольніка ABC .

Якую ўласцівасць, на ваш погляд, мае трохвугольнік, у якога радыус упісанай акружнасці роўны 2? Абгрунтуйце ваша меркаванне.

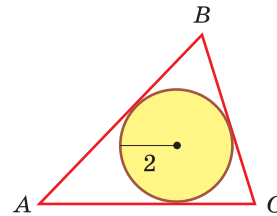


Рис. 109

Геаметрыя 3D

Загатоўка ўяўляе сабой правільную трохвугольную прызму вышынёй 2 см, у аснове якой ляжыць роўнастаронні трохвугольнік са стараной 6 см (рис. 110). У цэнтры загатоўкі трэба зрабіць цыліндрычную адтуліну. Адлегласць ад акружнасці адтуліны да стараны асновы роўна 0,2 см.

Заданне 1. Знайдзіце (акругліўшы вынік да 1 мм) дыяметр свердла для свідравання патрэбнай адтуліны.

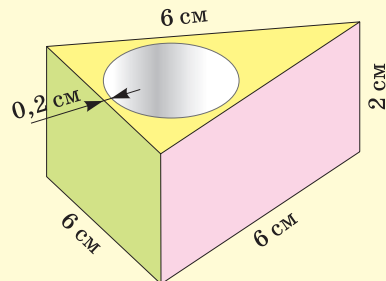


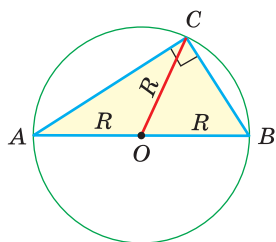
Рис. 110

Заданне 2. Па формуле аб'ёму цыліндра $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H$, дзе R — радыус асновы, H — вышыня цыліндра, знайдзіце аб'ём цыліндрычнай адтуліны. Прыміце $\pi \approx 3,14$. Адказ акругліце да 1 см^3 .

Заданне 3. Улічыўшы, што аб'ём прызмы роўны здабытку яе плошчы асновы на вышыню, г. зн. $V_{\text{пр}} = S_{\text{асн}} \cdot H$, вылічыце, колькі працэнтаў складае аб'ём цыліндрычнай адтуліны ад аб'ёму прызмы. Адказ акругліце да 1% .

§ 9. Прамавугольны трохвугольнік і яго апісаная і ўпісаная акружнасці

Тэарэма. Цэнтр акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, ляжыць на сярэдзіне гіпатэнузы, а яе радыус роўны палавіне гіпатэнузы, г. зн. $R = \frac{c}{2}$, дзе c — гіпатэнуза.



$$R = \frac{c}{2}$$

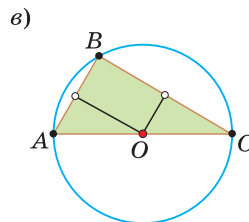
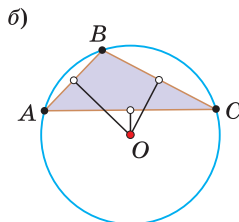
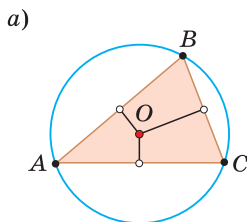
Рыс. 111

Доказ. Правядзём у прамавугольным трохвугольніку ABC медыяну CO да гіпатэнузы AB (рыс. 111). Паколькі медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палавіне гіпатэнузы, то $OC = OA = OB$. Тады сярэдзіна гіпатэнузы — пункт O — роўнаадалены ад пунктаў A , B і C і таму з'яўляецца цэнтрам апісанай акружнасці трохвугольніка ABC . Радыус гэтай акружнасці $R = OA = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$, дзе c — гіпатэнуза.

Тэарэма даказана.

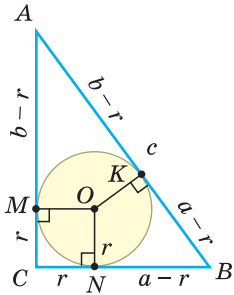
Заўвага. Спосаб 2. Можна даказаць, што пасярэднія перпендыкуляры да катэтаў прамавугольнага трохвугольніка перасякаюцца на сярэдзіне гіпатэнузы.

Адзначым, што ў востравугольнага трохвугольніка цэнтр апісанай акружнасці ляжыць унутры трохвугольніка (рыс. 112, а), у тупавугольнага — па-за трохвугольнікам (рыс. 112, б), у прамавугольнага — на сярэдзіне гіпатэнузы (рыс. 112, в). Абгрунтуйце першыя два сцверджанні самастойна.



Рыс. 112

Тэарэма. Радывус акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік, можна знайсці па формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, дзе r — шуканы радывус, a і b — катэты, c — гіпатэнуза трохвугольніка.



$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Рыс. 113

Доказ. Разгледзім прамавугольны трохвугольнік ABC з катэтамі $BC = a$, $AC = b$ і гіпатэнузай $AB = c$. Няхай упісаная ў трохвугольнік акружнасць з цэнтрам O і радыусам r датыкаецца да старон трохвугольніка ў пунктах M , N і K (рыс. 113). Правядзём радыусы ў пункты дотыку і атрымаем: $OM \perp AC$, $ON \perp BC$, $OK \perp AB$. Чатырохвугольнік $CMON$ — квадрат, паколькі ў яго ўсе вуглы прамыя і $OM = ON = r$. Тады $CM = CN = r$, $NB = a - r$, $MA = b - r$. Паколькі адрэзкі датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, роўныя паміж сабой, то $BK = BN = a - r$, $AK = AM = b - r$. Але $BK + AK = AB$, г. зн. $(a - r) + (b - r) = c$, $a + b - 2r = c$, адкуль $r = \frac{a+b-c}{2}$. Тэарэма даказана.

Вынік. $r = p - c$, дзе p — паўперыметр трохвугольніка.

Доказ. Пераўтварым формулу радыуса ўпісанай акружнасці:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = p - c.$$

Формула $r = p - c$ у спалучэнні з формуламі $S = pr$ і $R = \frac{c}{2}$ дае

магчымасць рашаць многія задачы, звязаныя з прамавугольным трохвугольнікам, алгебраічным метадам.

Прыклад. Дадзены прамавугольны трохвугольнік, $S = 24$, $R = 5$. Знайсці r .

Рашэнне. Паколькі $r = p - c$, а $R = \frac{c}{2}$, то $p = r + c = r + 2R = r + 10$. З формулы $S = pr$ вынікае $24 = (r + 10)r$, $r^2 + 10r - 24 = 0$. Па тэарэме Віета (адваротнай) $r_1 = 2$, $r_2 = -12$ — пабочны карань, тады $r = 2$.

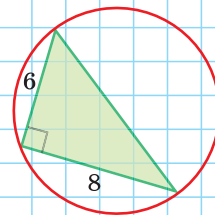
Адказ: 2.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

Тэст 1

Знайдзіце радывус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка.

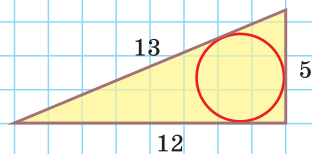
а) 7; б) 10; в) 5; г) 4.



Тэст 2

Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік.

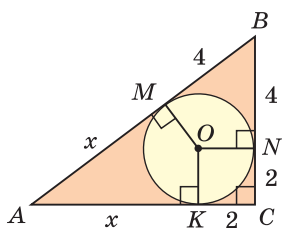
а) 2; б) 3; в) 5; г) 4,5.



Заданні да § 9

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. Знайсці радыус акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, у якога адзін з катэтаў роўны 6, а радыус упісанай акружнасці роўны 2.



Рыс. 114

Рашэнне. *Способ 1* (геаметрычны). Няхай у трохвугольніку ABC , дзе $\angle C = 90^\circ$, $BC = 6$, $r = 2$ — радыус упісанай акружнасці (рыс. 114). Правядзём з цэнтра O ўпісанай акружнасці перпендыкуляры OK , OM і ON да старон трохвугольніка, якія будуць радыусамі ўпісанай акружнасці. Паколькі $KONC$ — квадрат, то $NC = KC = r = 2$, $BN = 6 - 2 = 4$.

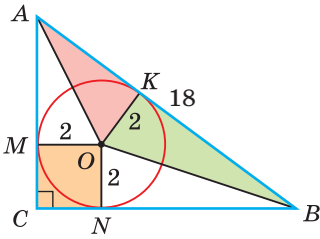
Па ўласцівасці датычных $BM = BN = 4$, $AM = AK = x$. Тады $AC = x + 2$, $AB = x + 4$. Па тэарэме Піфагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $(x + 2)^2 + 6^2 = (x + 4)^2$, $x^2 + 4x + 4 + 36 = x^2 + 8x + 16$, $4x = 24$, $x = 6$. Такім чынам, $AB = x + 4 = 6 + 4 = 10$.
Радыус апісанай акружнасці $R = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Способ 2 (алгебраічны). Падставіўшы ў формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$ значэнні $r = 2$ і $a = 6$, атрымаем $c = b + 2$. Па тэарэме Піфагора $c^2 = a^2 + b^2$, г. зн. $(b + 2)^2 = 6^2 + b^2$, $b^2 + 4b + 4 = 36 + b^2$, $b = 8$. Тады $c = 10$, $R = \frac{c}{2} = 5$.

Адказ: 5.

Задача 2. Гіпатэнуза прамавугольнага трохвугольніка $c = 18$, радыус упісанай у яго акружнасці $r = 2$. Знайсці плошчу трохвугольніка.

Рашэнне. *Способ 1* (геаметрычны). Няхай у трохвугольніку ABC гіпатэнуза $AB = c = 18$, O — цэнтр упісанай акружнасці, OK , OM , ON — яе радыусы, праведзеныя ў пункты дотыку (рыс. 115). Паколькі $OM \perp AC$,



Рыс. 115

$ON \perp BC$, $OK \perp AB$ і $OM = ON$, то $CMON$ — квадрат са стараной, роўнай радыусу r упісанай акружнасці, $OK = r$ — вышыня трохвугольніка AOB . Паколькі адрэзкі датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, роўныя паміж сабой, то $AK = AM$, $BK = BN$. Адсюль $\triangle AKO = \triangle AMO$, $\triangle BKO = \triangle BNO$ па катэце і гіпатэнузе. Плошча трохвугольніка ABC роўна суме падвоенай плошчы трохвугольніка AOB і плошчы квадрата $CMON$, г. зн. $S_{ABC} = 2S_{AOB} + S_{CMON} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OK + MO^2 = c \cdot r + r^2 = 18 \cdot 2 + 2^2 = 40$.

Спосаб 2 (алгебраічны). З формулы $r = \frac{a+b-c}{2}$ вынікае $2 = \frac{a+b-18}{2}$,

$a + b = 22$. Узвядзём абедзве часткі роўнасці ў квадрат: $(a + b)^2 = 22^2$, $a^2 + 2ab + b^2 = 484$. Паколькі $a^2 + b^2 = c^2$ і $S_{ABC} = \frac{ab}{2}$, то $c^2 + 4S = 484$, $324 + 4S = 484$, $S = 40$.

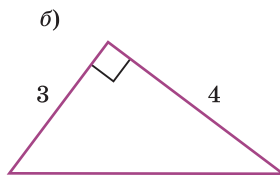
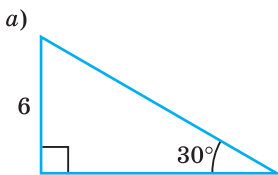
Спосаб 3 (алгебраічны). З формулы $r = p - c$ вынікае, што $p = r + c$. З формулы $S = pr$ вынікае, што $S_{ABC} = (r + c)r = (2 + 18) \cdot 2 = 40$.

Адказ: 40.

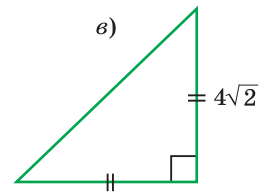


РАШАЕМ САМАСТОЙНА

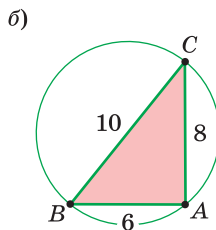
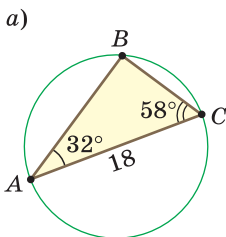
110. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 116, а)–в), знайдзіце радыус апісанай акружнасці трохвугольніка.



Рыс. 116

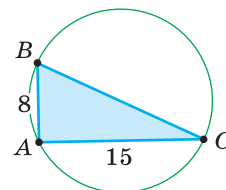


111. Па даных на рысунках 117, а)–в) знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC .



Рыс. 117

в) $S_{ABC} = 60$



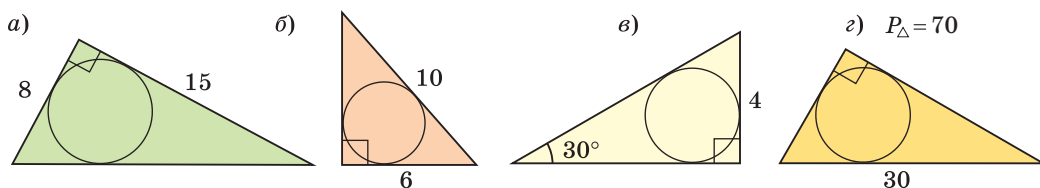
- 112.** Знайдзіце радыус апісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі, роўнымі:
 а) 12 см і 16 см; б) 18 м і 24 м;
 в) 14 дм і 48 дм; г) 1 км і 2 км.

- 113.** а) Знайдзіце плошчу прамавугольнага трохвугольніка ABC , калі ў яго адзін з катэтаў роўны 6 см, а радыус апісанай акружнасці — 5 см.
 б) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, адзін з катэтаў якога роўны 8 см, а сінус процілеглага яму вугла роўны $\frac{2}{3}$.

- 114.** Выкарыстаўшы формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$, знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік з катэтамі a і b і гіпатэнузай c , калі:

- а) $a = 3$ см, $b = 4$ см; б) $a = 5$ дм, $b = 12$ дм;
 в) $a = 7$ см, $c = 25$ см; г) $a = 4$ м, $c = 4\sqrt{2}$ м.

- 115.** Выкарыстаўшы даныя рысункаў 118, а)–г), знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік.



Рыс. 118

- 116.** Адлегласць ад цэнтра акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік, да гіпатэнузы роўна 6 см. Знайдзіце адлегласць ад гэтага цэнтра да вяршыні прамога вугла.

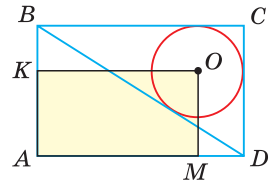
- 117.** Знайдзіце катэты прамавугольнага трохвугольніка, калі ўпісаная акружнасць пунктам дотыку дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя 5 см і 12 см.

- 118.** Радыус апісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка роўны 13 см, упісанай — 4 см. Знайдзіце перыметр і плошчу трохвугольніка.

-  **119.** а) Плошча прамавугольнага трохвугольніка роўна 24 см^2 , радыус яго ўпісанай акружнасці роўны 2 см. Знайдзіце дыяметр апісанай акружнасці трохвугольніка.
 б) Плошча прамавугольнага трохвугольніка роўна 30 см^2 , радыус яго апісанай акружнасці роўны 6,5 см. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у гэты трохвугольнік.

-  **120.** Знайдзіце перыметр прамавугольнага трохвугольніка, у якога гіпатэнуза $c = 14$ см, а радыус упісанай акружнасці $r = 1$ см.

121. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі апісанай і ўпісанай акружнасцей трохвугольніка са старанамі, роўнымі 12 см, 16 см і 20 см.
122. Вышыня прамавугольнага трохвугольніка дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя 9 см і 16 см. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у дадзены трохвугольнік.
123. а) У прамавугольным трохвугольніку пункт дотыку ўпісанай акружнасці дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя 3 см і 4 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.
б) Дакажыце, што калі пункт дотыку ўпісанай акружнасці дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя m і n , то плошчу трохвугольніка можна знайсці па формуле $S = mn$.
124. $ABCD$ — прамавугольнік (рыс. 119), у трохвугольнік BCD упісана акружнасць з цэнтрам O . Дакажыце, што плошча прамавугольніка $AKOM$ роўна палавіне плошчы прамавугольніка $ABCD$.



Рыс. 119



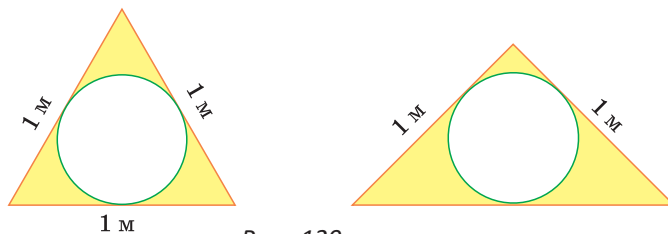
Пры дапамозе **Інтэрнэту** знайдзіце *формулу Эйлера*, якая звязвае адлегласць паміж цэнтрамі ўпісанай і апісанай акружнасцей з іх радыусамі.

Рэальная геаметрыя

З двух лістоў МДФ, адзін з якіх мае форму роўнастаронняга трохвугольніка са стараной 1 м, другі — форму прамавугольнага раўнабедранага трохвугольніка з катэтамі, роўнымі 1 м (рыс. 120), трэба вырабіць круглую сталёную для часопіснага стала. Для гэтага з кожнага ліста неабходна выразаць па адным крузе найбольшага дыяметра.

Правядзіце разлікі і высветліце:

- а) з якога ліста будзе выразаны круг большага дыяметра;
б) якім у кожным выпадку будзе працэнт адходаў, калі вядома, што плошчу круга можна знайсці па формуле $S = \pi R^2$, дзе $\pi \approx 3,14$.



Рыс. 120

Цікава ведаць. ААТ «Рэчыцадрэў» — дрэваапрацоўчае прадпрыемства ў Гомельскай вобласці Рэспублікі Беларусь, якое вырабляе розную прадукцыю з драўніны, драўняна-стружкавыя пліты, у тым ліку пліты МДФ (драўняна-валакністыя пліты з вельмі дробнага драўнянага пілавіння), паліўныя брыкеты, сінтэтычныя смолы. Доля экспартных паставак прадпрыемства дасягае 85 %.



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне апісанай і ўпісанай акружнасцей трохвугольніка.
2. Дзе знаходзіцца цэнтр апісанай, а дзе — цэнтр упісанай акружнасці трохвугольніка.
3. Дзе знаходзіцца цэнтр апісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка і чаму роўны яе радыус R .
4. Формулу радыуса r акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік.
5. Формулу плошчы трохвугольніка, звязаную з радыусам r упісанай акружнасці.

Умеем

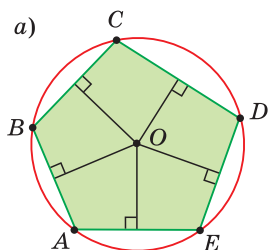
1. Знаходзіць цэнтр апісанай акружнасці трохвугольніка.
2. Знаходзіць цэнтр упісанай акружнасці трохвугольніка.
3. Выводзіць формулу $S = pr$.
4. Даказваць, што $R = \frac{c}{2}$ для прамавугольнага трохвугольніка.
5. Выводзіць формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$ для прамавугольнага трохвугольніка.

§ 10. Упісаныя і апісаныя чатырхвугольнікі

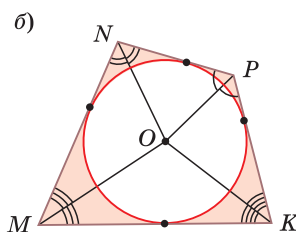
Азначэнне. Акружнасць называецца **апісанай** каля многавугольніка, калі яна праходзіць праз усе яго вяршыні. Пры гэтым многавугольнік называецца **ўпісаным у акружнасць**.

Акружнасць называецца **ўпісанай** у многавугольнік, калі яна датыкаецца да ўсіх яго старон. Пры гэтым многавугольнік называецца **апісаным каля акружнасці**.

Пяцівугольнік $ABCDE$ (рыс. 121, а) з'яўляецца ўпісаным у акружнасць, а чатырхвугольнік $MNPK$ (рыс. 121, б) — апісаным каля акружнасці.



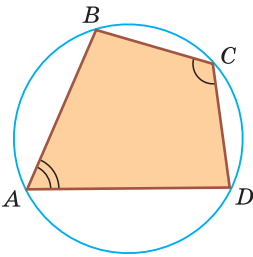
Рыс. 121



Цэнтр апісанай акружнасці многавугольніка знаходзіцца ў пункце перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да яго старон, а цэнтр упісанай — у пункце перасячэння бісектрыс яго вуглоў.

Абрунтуйце гэтыя сцверджанні самастойна.

Тэарэма (уласцівасць упісанага чатырохвугольніка).
Сума процілеглых вуглоў чатырохвугольніка, упісанага ў акружнасць, роўна 180° .

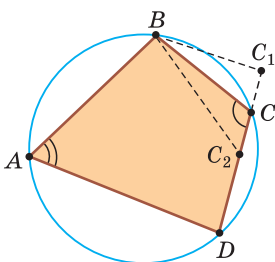


Калі $ABCD$ упісаны,
то $\angle A + \angle C = 180^\circ$

Рыс. 122

Доказ. Няхай $ABCD$ — чатырохвугольнік, упісаны ў акружнасць (рыс. 122). Яго вуглы A , B , C і D з'яўляюцца ўпісанымі ў акружнасць. Паколькі ўпісаны вугал роўны палавіне дугі, на якую ён абавіраецца, то $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$, $\angle C = \frac{1}{2} \cup BAD$. Дугі BCD і BAD дапаўняюць адна адну да акружнасці, і таму сума іх градусных мер роўна 360° . Адсюль $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$. Аналагічна даказваецца, што $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Тэарэма даказана.

Тэарэма (прымета ўпісанага чатырохвугольніка).
Калі сума процілеглых вуглоў чатырохвугольніка роўна 180° , то каля яго можна апісаць акружнасць.



Калі $\angle A + \angle C = 180^\circ$,
то $ABCD$ упісаны

Рыс. 123

Доказ. Разгледзім чатырохвугольнік $ABCD$, у якога $\angle A + \angle C = 180^\circ$ (рыс. 123). Праз вяршыні A , B і D правядзём акружнасць (каля любога трохвугольніка можна апісаць акружнасць). Калі б вяршыня C не ляжала на дадзенай акружнасці, а знаходзілася па-за ёй у становішчы C_1 або ўнутры яе ў становішчы C_2 , то ў першым выпадку вугал C быў бы меншы, а ў другім — большы за палавіну градуснай меры дугі BAD (па ўласцівасцях вугла паміж сякучымі і вугла паміж перасякальнымі хордамі). Тады сума $\angle A + \angle C$ не была б роўна 180° . Такім чынам, вяршыня C ляжыць на дадзенай акружнасці. Тэарэма даказана.

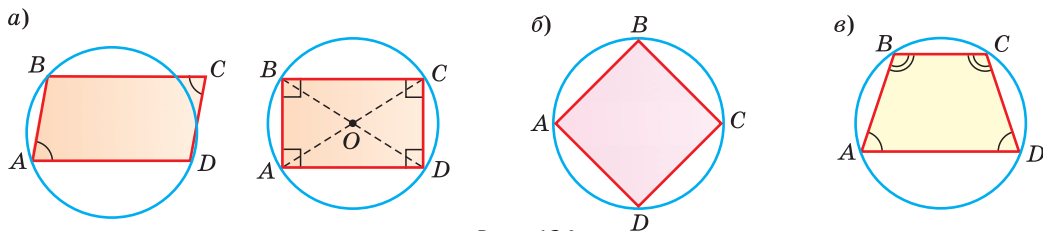
Заўвага. Паколькі сума вуглоў чатырохвугольніка роўна 360° , то для таго каб каля чатырохвугольніка можна было апісаць акружнасць, дастаткова, каб сума любой пары яго процілеглых вуглоў была роўна 180° .

Вынікі.

1. Каля паралелаграма можна апісаць акружнасць, толькі калі гэты паралелаграм — прамавугольнік (рыс. 124, а). Цэнтр гэтай акружнасці ляжыць у пункце перасячэння дыяганалей прамавугольніка.

2. Каля ромба можна апісаць акружнасць, толькі калі гэты ромб — квадрат (рыс. 124, б).

3. Каля трапецыі можна апісаць акружнасць, толькі калі яна раўнабедраная (рыс. 124, в).



Рыс. 124

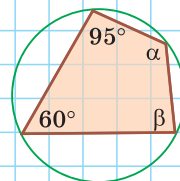
Дакажыце гэтыя вынікі самастойна.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

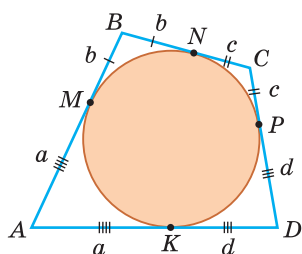
Каля чатырохвугольніка апісана акружнасць.
Знайдзіце градусную меру вугла α і вугла β .

- а) 120° , 75° ; б) 60° , 95° ;
в) 120° , 85° ; г) 100° , 95° .



Тэарэма (уласцівасць апісанага чатырохвугольніка).

Сумы процілеглых старон апісанага чатырохвугольніка роўныя паміж сабой.



Калі $ABCD$ апісаны, то
 $AB + CD = BC + AD$

Рыс. 125

Доказ. Няхай $ABCD$ — апісаны чатырохвугольнік, M , N , P і K — пункты дотыку яго старон да акружнасці (рыс. 125). Паколькі адрэзкі датычных, праведзеных да акружнасці з аднаго пункта, роўныя паміж сабой, то $AM = AK = a$, $BM = BN = b$, $CP = CN = c$, $DP = DK = d$.

Тады

$$AB + CD = a + b + c + d,$$

$$AD + BC = a + d + b + c,$$

$$\text{адкуль } AD + BC = AB + CD.$$

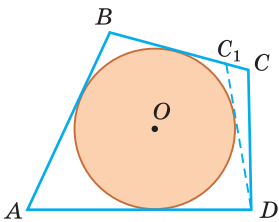
Тэарэма даказана.

Вынік.

Перыметр апісанага чатырохвугольніка роўны падвоенай суме даўжынь любой пары яго процілеглых старон: $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + CD) = 2 \cdot (BC + AD)$.

Тэарэма (прымета апісанага чатырохвугольніка).

Калі сумы процілеглых старон выпуклага чатырохвугольніка роўныя, то ў яго можна ўпісаць акружнасць.



Калі $AB + CD = BC + AD$,
то $ABCD$ апісаны

Рыс. 126

Доказ. Няхай для выпуклага чатырохвугольніка $ABCD$ справядліва, што

$$AB + CD = AD + BC. \quad (1)$$

Правядзём акружнасць, якая датыкаецца да прамых AD , AB і BC (рыс. 126). Такая акружнасць існуе, яе цэнтр знаходзіцца ў пункце перасячэння бісектрыс вуглоў A і B . Калі акружнасць не датыкаецца да стараны CD , то або прамая CD не мае з акружнасцю агульных пунктаў, або з'яўляецца сякучай. Разгледзім першы выпадак. Правядзём адрэзак DC_1 , які датыкаецца да акружнасці. Па ўласцівасці апісанага чатырохвугольніка

$$AB + C_1D = AD + BC_1. \quad (2)$$

Адняўшы пачленна ад роўнасці (1) роўнасць (2), атрымаем $CD - C_1D = BC - BC_1$, $CD - C_1D = C_1C$, $CD = C_1C + C_1D$, што супярэчыць няроўнасці трохвугольніка.

Разгледзеўшы выпадак, калі прамая DC — сякучая, таксама прыйдзем да супярэчнасці (зробіце гэта самастойна). Такім чынам, дадзеная акружнасць датыкаецца да стараны CD і ў чатырохвугольнік $ABCD$ можна ўпісаць акружнасць. Тэарэма даказана.

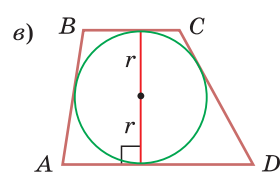
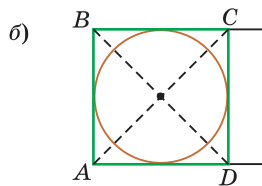
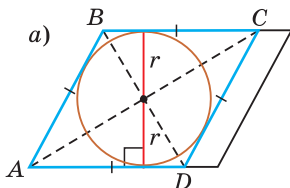
Вынікі.

1. У паралелаграм можна ўпісаць акружнасць, толькі калі гэты паралелаграм — ромб. Цэнтр гэтай акружнасці ляжыць у пункце перасячэння дыяганалей ромба, а яе дыяметр роўны вышыні ромба (рыс. 127, а).

2. У прамавугольнік можна ўпісаць акружнасць, толькі калі гэты прамавугольнік — квадрат (рыс. 127, б).

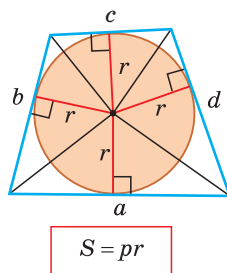
3. Калі ў трапецыю можна ўпісаць акружнасць, то дыяметр гэтай акружнасці роўны вышыні трапецыі (рыс. 127, в).

Дакажыце гэтыя вынікі самастойна.



Рыс. 127

Для апісанага многавугольнага справядлівая формула $S = pr$, дзе S — яго плошча, p — паўперыметр, r — радыус упісанай акружнасці. Доказ аналагічны прыведзенаму ў параграфу 8 для трохвугольніка. Выканайце яго самастойна, выкарыстаўшы рысунак 128.



Рыс. 128

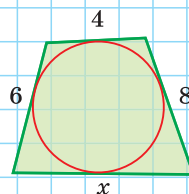
А цяпер выканайце **Тэст 2**.

Тэст 2

У чатырохвугольнік упісана акружнасць.

Знайдзіце даўжыню стараны x .

а) 9; б) 8; в) 6; г) 10.

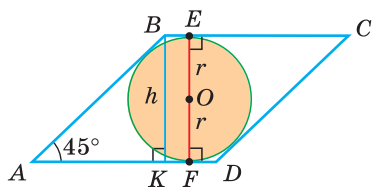


Заданні да § 10

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. Знайсці радыус акружнасці, упісанай у ромб з перыметрам 24 см і вострым вуглом, роўным 45° .



Рыс. 129

Рашэнне. *Спосаб 1* (рашэнне прамавугольнага трохвугольніка). Няхай $ABCD$ — ромб (рыс. 129), O — цэнтр упісанай у ромб акружнасці. Вядома, што вышыня BK ромба роўна дыяметру EF упісанай акружнасці, г. зн. $h = 2r$. Паколькі ў ромба ўсе стараны роўныя, то $AB = \frac{24}{4} = 6$ (см).

З прамавугольнага трохвугольніка ABK знаходзім, што $\frac{BK}{AB} = \sin A$, адкуль $BK = AB \cdot \sin 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ (см). Шуканы радыус упісанай акружнасці $r = \frac{BK}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (см).

Спосаб 2 (метада плошчаў). Ромб — паралелаграм. Па формуле плошчы паралелаграма ($S = ab \sin \gamma$) знойдзем плошчу дадзенага ромба: $S = a \cdot a \cdot \sin \gamma = 6 \cdot 6 \cdot \sin 45^\circ = 36 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$ (см²). З другога боку, плошчу ромба можна знайсці па формуле плошчы апісанага многавугольніка

$S = pr$. Паколькі $p = \frac{24}{2} = 12$ (см), то $S = 12r$. Адсюль $18\sqrt{2} = 12 \cdot r$,
 $r = \frac{18\sqrt{2}}{12} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (см).

Адказ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см.

Задача 2. Акружнасць, упісаная ў прамавугольную трапецыю $ABCD$, дзе $\angle A = 90^\circ$, дзеліць пунктам дотыку большую бакавую старану CD на адрэзкі $CK = 1$, $KD = 4$. Знайсці плошчу трапецыі (рыс. 130).

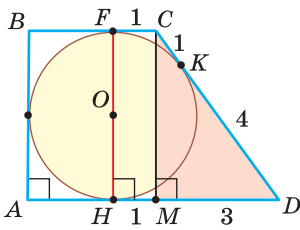


Рис. 130

Рашэнне. *Спосаб 1.* Плошчу трапецыі знаходзяць па формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Неабходна знайсці суму асноў і вышыню трапецыі. Правядзём вышыню $FH = h$ трапецыі, якая праходзіць праз цэнтр O ўпісанай акружнасці. Па ўласцівасці датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, $CF = CK = 1$, $DH = DK = 4$. Правядзём вышыню CM . Паколькі $HFCM$ — прамавугольнік (усе вуглы прамыя), то $HM = FC = 1$, $MD = 3$. У прамавугольным трохвугольніку CMD па тэарэме Піфа-

гора $CM = \sqrt{CD^2 - MD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Тады $AB = CM = h = 4$. Па ўласцівасці апісанага чатырохвугольніка $AD + BC = AB + CD = 4 + 5 = 9$. Адсюль $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{AD+BC}{2} \cdot CM = \frac{9}{2} \cdot 4 = 18$.

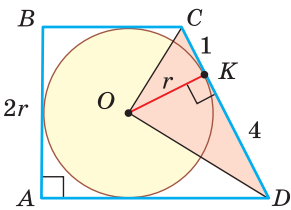


Рис. 131

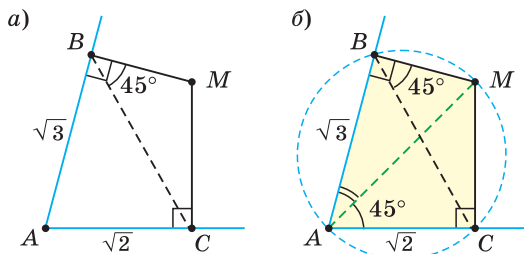
 *Спосаб 2.* Цэнтр O ўпісанай акружнасці ляжыць на перасячэнні бісектрыс вуглоў BCD і ADC . Паколькі $\angle BCD + \angle ADC = 180^\circ$ як унутраныя аднастароннія вуглы пры $BC \parallel AD$ і сякучай CD , то $\angle OCD + \angle ODC = 90^\circ$ (рыс. 131). Тады $\angle COD = 90^\circ$, $\triangle COD$ — прамавугольны, радыус $OK = r$ з'яўляецца яго вышынёй, праведзенай да гіпатэнузы CD . Вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, —

ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж праекцыямі катэтаў на гіпатэнузу. Таму $OK = \sqrt{CK \cdot KD}$, або $r = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$. Вышыня h апісанай трапецыі роўна дыяметру ўпісанай акружнасці, адкуль $AB = h = 2r = 4$. Паколькі па ўласцівасці апісанага чатырохвугольніка $AD + BC = AB + CD = 9$, то $S_{ABCD} = pr = (AB + CD) \cdot r = 9 \cdot 2 = 18$.

Адказ: 18.

Заўвага. Карысна запомніць уласцівасць: «Бакавая старана апісанай трапецыі бачна з цэнтра ўпісанай акружнасці пад вуглом 90° ».

Задача 3. Унутры вострага вугла A адзначаны пункт M , з якога апущаны перпендыкуляры MB і MC на стораны вугла A , $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$, $\angle MBC = 45^\circ$. Знайсці велічыню вугла BAC (рыс. 132, а).



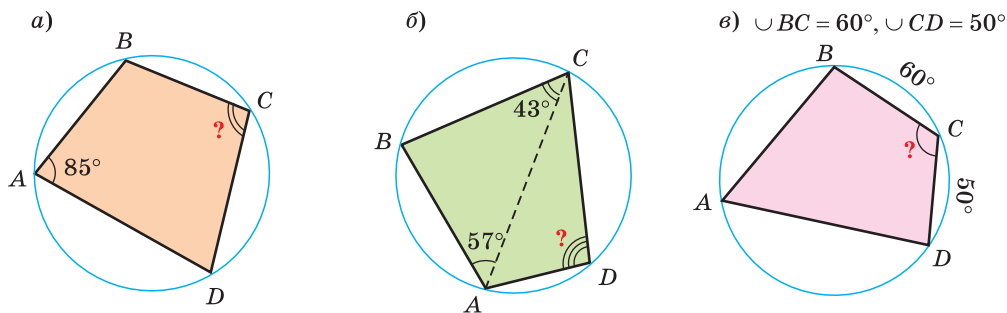
Рыс. 132

Рашэнне. Паколькі ў чатырохвугольніку $ABMC$ сума вуглоў B і C роўна 180° , то каля яго можна апісаць акружнасць. Правядзём у ёй хорду AM (рыс. 132, б). Паколькі $\angle MAC = \angle MBC$ як упісаныя вуглы, якія абাপіраюцца на адну і тую ж дугу MC , то $\angle MAC = 45^\circ$ і прамавугольны трохвугольнік AMC з'яўляецца раўнабедраным, $AM = AC\sqrt{2} = 2$. У прамавугольным трохвугольніку ABM $\cos \angle BAM = \frac{AB}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, адкуль $\angle BAM = 30^\circ$, $\angle BAC = \angle BAM + \angle MAC = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.
Адказ: 75° .



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

125. Каля чатырохвугольніка $ABCD$ апісана акружнасць. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 133, а)–в), знайдзіце велічыню вугла, абазначанага пыталнікам.



Рыс. 133

126. $ABCD$ — упісаны чатырохвугольнік. Ведаючы, што:

- $\angle A$ на 20° большы за $\angle C$, знайдзіце $\angle C$;
- $\angle B : \angle D = 2 : 3$, знайдзіце $\angle D$;
- $\angle A + \angle B + \angle C = 284^\circ$, знайдзіце $\angle B$;
- $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 5 : 6$, знайдзіце $\angle D$.

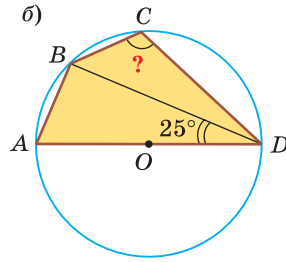
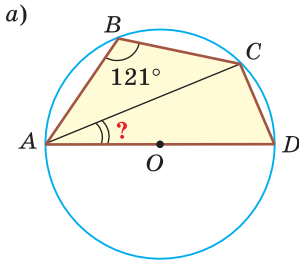
127. Чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны ў акружнасць.

а) Знайдзіце $\angle BCD$, калі $\angle BAC = 26^\circ$, $\angle CBD = 24^\circ$.

б) Знайдзіце $\angle CAD$, калі $\angle ABD = 34^\circ$, $\angle ADC = 116^\circ$.

128. Цэнтр акружнасці, апісанай каля чатырохвугольніка $ABCD$, ляжыць на старане AD . Па даных на рысунках 134, а), б) знайдзіце:

а) $\angle CAD$; б) $\angle BCD$.



Рыс. 134

129. а) $ABCD$ — упісаная трапецыя ($AD \parallel BC$), $\angle A = 68^\circ$. Знайдзіце градусную меру дугі ABC .

б) $ABCD$ — упісаная трапецыя, сярэдняя лінія якой роўна 7 см, а бакавая старана — 6 см. Знайдзіце перыметр трапецыі.

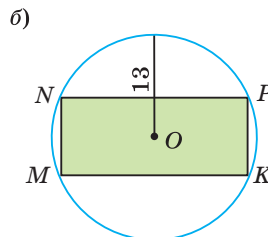
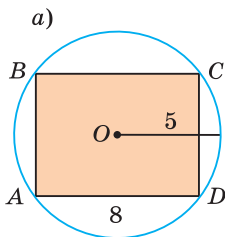
130. У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Дакажыце, што $\angle BAC = \angle BDC$.

131. У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$, O — пункт перасячэння дыяганалей, $AO = 3$ см, $BO = 6$ см, $DO = 4$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка CO .

132. Па даных на рысунках 135, а), б) знайдзіце плошчу прамавугольніка:

а) $ABCD$, калі $AD = 8$ см, $R = 5$ см;

б) $MNPK$, калі $MK : MN = 12 : 5$, $R = 13$ см.

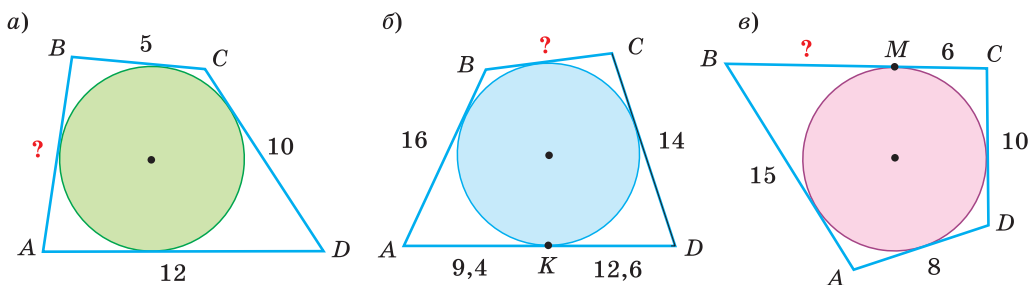


Рыс. 135

133. а) Дадзена раўнабедраная трапецыя, у якой дыяганаль перпендыкулярна бакавой старане. Меншая аснова трапецыі роўна 6 см, а радыус апісанай акружнасці — 5 см. Знайдзіце плошчу трапецыі.

б) Трапецыя $ABCD$ упісана ў акружнасць, большая аснова трапецыі з'яўляецца дыяметрам, меншая аснова роўна 12 см, вышыня трапецыі роўна 8 см. Знайдзіце сярэднюю лінію трапецыі.

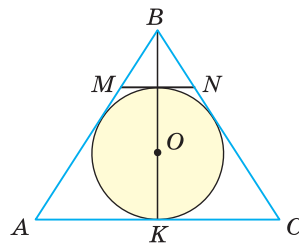
- 134.** У чатырохвугольнік $ABCD$ упісана акружнасць. Па даных на рысунках 136, а)–в) знайдзіце даўжыню адрэзка, абазначанага пыталнікам.



Рыс. 136

- 135.** а) Перыметр апісанага чатырохвугольніка $ABCD$ роўны 48 см. Знайдзіце $BC + AD$.
 б) У трапецыю $ABCD$ з асновамі AD і BC упісана акружнасць. Знайдзіце сярэднюю лінію трапецыі, калі $AB + CD = 16$ см.
- 136.** а) Каля паралелаграма са старанамі 4 см і 5 см апісана акружнасць. Знайдзіце плошчу гэтага паралелаграма.
 б) У паралелаграм з перыметрам 48 см і вострым вуглом 30° упісана акружнасць. Знайдзіце дыяметр гэтай акружнасці.
- 137.** Сума дзвюх процілеглых старон чатырохвугольніка, апісанага каля акружнасці, роўна 15 см, а радыус упісанай у яго акружнасці — 3 см. Знайдзіце плошчу дадзенага чатырохвугольніка.
- 138.** а) Дадзена апісаная прамавугольная трапецыя $ABCD$ ($\angle A = 90^\circ$), сярэдняя лінія яе роўна 12,5, бакавая старана CD роўна 13. Знайдзіце аснову трапецыі.
 б) Дадзена апісаная раўнабедраная трапецыя з асновамі, роўнымі 4 і 16. Знайдзіце плошчу гэтай трапецыі.
- 139.** $ABCD$ — апісаны чатырохвугольнік, старана BC меншая за AB на 1 см, AD большая за AB на 7 см, CD большая за AB у 2 разы. Знайдзіце AB .
- 140.** O — цэнтр акружнасці, упісанай у чатырохвугольнік $ABCD$, $\angle BAO = 32^\circ$, $\angle CDO = 24^\circ$. Знайдзіце $\angle AOD$.
- 141.** а) Радыус акружнасці, упісанай у ромб, роўны 4,5 см, востры вугал ромба роўны 30° . Знайдзіце перыметр ромба.
 б) Дыяганалі ромба роўны 30 см і 40 см. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у ромб.

142. У раўнабедраны трохвугольнік ABC , у якога $AB = BC = 5$ см, $AC = 6$ см, упісана акружнасць. Датычная MN паралельна AC (рыс. 137). Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $AMNC$.



Рыс. 137

143. У раўнабедранай трапецыі $ABCD$ асновы $AD = 25$ см, $BC = 7$ см, дыяганаль $AC = 20$ см. Знайдзіце дыяметр акружнасці, апісанай каля трапецыі.

144. а) Акружнасць радыусам 3 см упісана ў прамавугольную трапецыю, меншая аснова якой роўна 4 см. Знайдзіце бакавыя стораны і большую аснову трапецыі.

б) У прамавугольную трапецыю ўпісана акружнасць. Адлегласці ад цэнтра гэтай акружнасці да канцоў большай бакавой стараны роўны 15 см і 20 см. Знайдзіце плошчу трапецыі.

145. Цэнтр акружнасці, апісанай каля трапецыі $ABCD$, ляжыць унутры трапецыі. Асновы трапецыі роўны 6 см і 8 см, вышыня роўна 7 см. Знайдзіце дыяметр апісанай акружнасці.

146. Дадзена раўнабедраная трапецыя $ABCD$, $AB = CD = 6$ см, $AD = 8$ см, $BC = 4$ см. Бісектрысы вуглоў A і B перасякаюцца ў пункце K . Знайдзіце даўжыню адрэзка AK .

147. Дакажыце, што каля чатырохвугольніка $ABCD$ можна апісаць акружнасць, калі:

а) $\angle ABD = \angle ACD$;

б) $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, дзе O — пункт перасячэння дыяганалей.

148. У трохвугольніку ABC праведзены бісектрысы AK і BN , якія перасякаюцца ў пункце I . Вядома, што пункты K , I , N і C ляжаць на адной акружнасці. Знайдзіце велічыню вугла C .

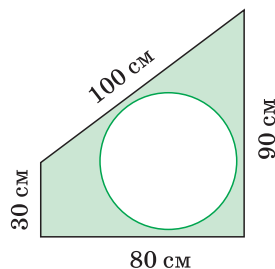
Мадэляванне

З абрэзка льяноўнай тканіны, які мае форму прамавугольнай трапецыі, было вырашана вырабіць сурвэтку круглай формы. Для гэтага закройшчыку з дадзенага кавалка неабходна выразаць круг найбольшага дыяметра.

Выкарыстаўшы памеры, пазначаныя на рысунку 138, складзіце алгарытм знаходжання:

а) цэнтра круга найбольшага дыяметра;

б) радыуса круга найбольшага дыяметра.



Рыс. 138

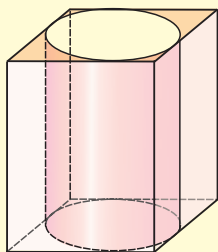
Цікава ведаць. Лён з'яўляецца візітнай карткай Рэспублікі Беларусь. Найбуйнейшае экспертна арыентаванае прадпрыемства «Аршанскі льнокамбінат» — адзіны ў Рэспубліцы Беларусь комплексны перапрацоўшчык ільнова-лакна. Прадукцыя пад гандлёвай маркай «Беларускі лён» экспартуецца больш як у 40 краін свету.

Геаметрыя 3D

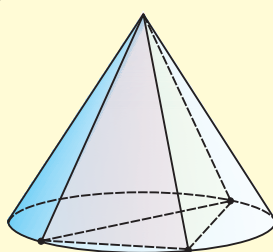
Мнагаграннікі (прызма, піраміда) і целы вярчэння (цыліндр, конус, шар) могуць быць упісаны адзін у аднаго.

Заданне 1. У правільную чатырохвугольную прызму ўпісаны цыліндр так, што яго асновы ўпісаны ў асновы прызмы (рыс. 139, а). радыус асновы цыліндра роўны 4 см, вышыня цыліндра — 10 см. Знайдзіце памеры прызмы.

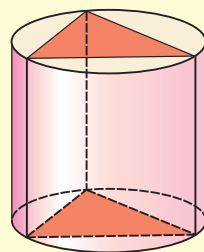
а)



б)



в)



Рыс. 139

Заданне 2. У конус упісана трохвугольная піраміда так, што яе аснова ўпісана ў аснову конуса, а вяршыня супадае з вяршыняй конуса (рыс. 139, б). Знайдзіце радыус асновы конуса, калі стораны асновы піраміды роўны 10 см, 24 см, 26 см.

Заданне 3. У цыліндр упісана правільная трохвугольная прызма так, што асновы прызмы ўпісаны ў асновы цыліндра, а бакавыя канты належаць бакавой паверхні цыліндра (рыс. 139, в). Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы, калі радыус асновы цыліндра роўны $2\sqrt{3}$ см, а яго вышыня — 8 см.



Пры дапамозе **Інтэрнэту** ўдакладніце паняцце *правільнай прызмы*.

ПАДВОДЗІМ
ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне ўпісанага чатырохвугольніка.
2. Азначэнне апісанага чатырохвугольніка.
3. Уласцівасць і прымету ўпісанага чатырохвугольніка.
4. Уласцівасць і прымету апісанага чатырохвугольніка.

Умеем

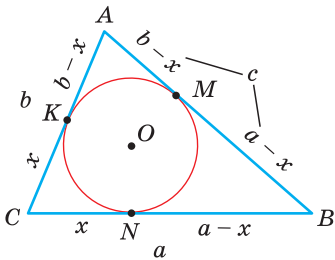
1. Даказваць тэарэму аб уласцівасці вуглоў упісанага чатырохвугольніка.
2. Даказваць тэарэму аб уласцівасці старон апісанага чатырохвугольніка.



§ 11. Крэатыўная геаметрыя

1. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік

Задача 1. Акружнасць упісана ў трохвугольнік ABC са старанамі $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Вывесці формулу для знаходжання даўжынь адрэзкаў, на якія пункты дотыку акружнасці да старон дзеляць кожную старану трохвугольніка.



Рыс. 140

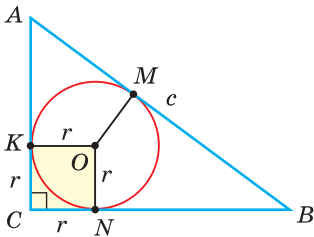
Рашэнне. Няхай K , M і N — пункты дотыку ўпісанай акружнасці адпаведна да старон AC , AB і BC трохвугольніка ABC (рыс. 140). Вядома, што адрэзкі датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, роўныя паміж сабой. Тады, калі $CK = CN = x$, то $BN = BM = a - x$, $AK = AM = b - x$. Паколькі $AB = AM + MB$, то $c = (a - x) + (b - x)$, адкуль $x = \frac{a+b-c}{2}$, г. зн.

$CN = CK = \frac{a+b-c}{2}$. Пасля пераўтварэнняў атрымаем: $CN = CK = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = p - c$.

Аналагічна: $BN = BM = \frac{a+c-b}{2} = p - b$, $AK = AM = \frac{b+c-a}{2} = p - a$.

Адказ: $CN = CK = p - c$, $BN = BM = p - b$, $AK = AM = p - a$.

Заўвага. Калі $\angle C = 90^\circ$ (рыс. 141), то $CN = CK = r = p - c$ (гл. с. 69). Формула радыуса акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік, $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$ — прыватны выпадак выніку задачы 1.



Рыс. 141



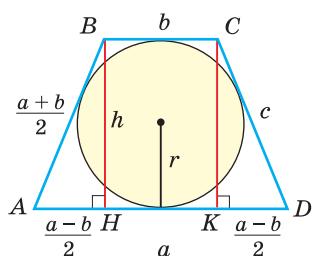
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 149.** Дадзены трохвугольнік ABC са старанамі $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 8$. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік ABC , датыкаецца да стараны AC у пункце K . Знайдзіце адносіну плошчаў трохвугольнікаў ABK і CBK .
- 150.** У трохвугольнік ABC , у якога $AB = 8$, упісана акружнасць. Датычная да акружнасці перасякае стараны BC і AC у пунктах M і K адпаведна. Перыметр трохвугольніка $МСК$ роўны 12. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC .

- 151.** У трохвугольнік са старанамі 7, 9 і 10 упісана акружнасць. Да акружнасці праведзена датычная, якая перасякае дзве меншыя стараны трохвугольніка. Знайдзіце перыметр трохвугольніка, адсечанага ад дадзенага гэтай датычнай.

2. Апісаная трапецыя

Задача 2. Знайсці плошчу апісанай раўнабедранай трапецыі з асновамі a і b .



Рыс. 142

Рашэнне. Плошчу трапецыі можна знайсці па формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Няхай у трапецыі $ABCD$ асновы $AD = a$ і $BC = b$, $AB = CD = c$ — бакавыя стараны, $BH = h$ — вышыня (рыс. 142). Па ўласцівасці апісанага чатырохвугольніка $AB + CD = AD + BC$, адкуль $2AB = a + b$, $AB = c = \frac{a+b}{2}$. Вядома, што ў раўнабедранай трапецыі $AH = \frac{a-b}{2}$ (можна апусціць вышыню CK і пераканацца ў гэтым). З прававугольнага трохвугольніка AHB атрымліваем:

$$h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab, \quad h = \sqrt{ab}.$$

$$\text{Адсюль } S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}.$$

$$\text{Адказ: } \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}.$$

Заўвага. Плошча апісанай раўнабедранай трапецыі роўна здабытку сярэдняга арыфметычнага і сярэдняга геаметрычнага яе асноў.

Карысна запомніць!

Для апісанай раўнабедранай трапецыі з асновамі a і b , бакавой стараной c , вышынёй h , сярэдняй лініяй m і радыусам r упісанай акружнасці (гл. рыс. 142) справядлівыя роўнасці:

$$1) \quad c = \frac{a+b}{2} = m;$$

$$2) \quad P = 4c = 4m = 2(a+b);$$

$$3) \quad h = \sqrt{ab};$$

$$4) \quad S = ch;$$

$$5) \quad r = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{2};$$

$$6) \quad S = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}.$$



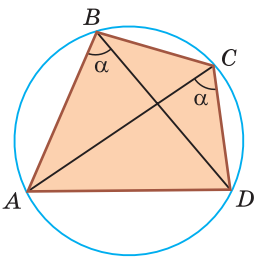
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 152.** а) У раўнабедраную трапецыю з асновамі 2 см і 8 см упісана акружнасць. Знайдзіце плошчу трапецыі.
б) Знайдзіце плошчу апісанай раўнабедранай трапецыі, большая аснова якой роўна 18 см, бакавая старана — 13 см.
- 153.** У раўнабедраную трапецыю плошчай 32 см^2 з вуглом 30° упісана акружнасць. Знайдзіце радыус гэтай акружнасці.
- 154.** Дакажыце, што калі ў прамавугольную трапецыю з асновамі a і b можна ўпісаць акружнасць, то плошча трапецыі $S = ab$.
- 155.** У прамавугольную трапецыю, меншая аснова якой роўна 4 см, упісана акружнасць. Знайдзіце радыус упісанай акружнасці, калі плошча трапецыі роўна 48 см^2 .

3. Дадатковыя ўласцівасці і прыметы ўпісанага чатырохвугольніка

Тэарэма.

Каля чатырохвугольніка можна апісаць акружнасць тады і толькі тады, калі вугал паміж яго стараной і дыяганаллю роўны вуглу паміж процілеглай стараной і другой дыяганаллю.



Рыс. 143

Доказ. 1) Калі чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны ў акружнасць (рыс. 143), то $\angle ABD = \angle ACD$ як упісаныя вуглы, якія абапіраюцца на адну і тую ж дугу.

2) Дакажам, што калі ў некаторым чатырохвугольніку $ABCD$ $\angle ABD = \angle ACD$, то каля яго можна апісаць акружнасць. Апішам каля трохвугольніка ABD акружнасць.

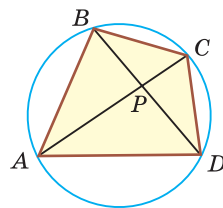
У 8-м класе (В. У. Казакоў. «Геаметрыя, 8», с. 193) была даказана ўласцівасць: «Геаметрычным месцам пунктаў плоскасці, з якіх дадзены адрэзак AD бачны пад вуглом α , з'яўляецца аб'яднанне дзвюх дуг акружнасцей: дугі ABD і ёй сіметрычнай адносна прамой AD , за выключэннем пунктаў A і D ». Дадзеная ўласцівасць гарантуе, што вяршыні ўсіх вуглоў, якія роўны вуглу ABD і ляжаць з аднаго боку ад прамой AD , размешчаны на дузе ABD акружнасці. Таму акружнасць, апісаная каля трохвугольніка ABD , пройдзе і праз вяршыню C .

Тэарэма даказана.



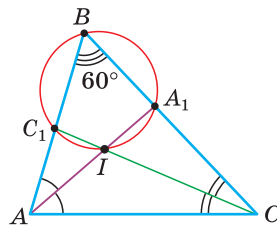
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 156.** Дакажыце тэарэму: «Каля чатырохвугольніка можна апісаць акружнасць тады і толькі тады, калі здабыткі адрэзкаў дыяганалей, на якія яны разбіваюцца пунктам перасячэння, роўныя», г. зн. калі чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны, то $AP \cdot PC = BP \cdot PD$ (рыс. 144), і наадварот.



Рыс. 144

- 157.** а) O — пункт перасячэння дыяганалей выпуклага чатырохвугольніка $ABCD$, $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, $\angle BAD = 42^\circ$. Знайдзіце $\angle BCD$.
б) Дыяганалі чатырохвугольніка $ABCD$ перасякаюцца ў пункце P , $AP = 12$, $PC = 3$, $BP = 4$, $PD = 9$, $\angle CAD = 40^\circ$. Знайдзіце $\angle CBD$.
- 158.** У трапецыі $ABCD$ асновы $AD = 12$, $BC = 4$, бакавая старана $AB = 5$, $\angle BAC = \angle CDB$. Знайдзіце плошчу трапецыі.
- 159.** а) У чатырохвугольніку $ABCD$ $\angle ADB = 45^\circ$, $\angle BDC = 70^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$. Знайдзіце $\angle ABC$.
б) У чатырохвугольніку $ABCD$ $\angle BAD = 78^\circ$, $\angle BCD = 102^\circ$, $\angle CBD = 52^\circ$. Знайдзіце $\angle CAD$.
- 160.** У трохвугольніку ABC (рыс. 145) $\angle B = 60^\circ$, бісектрысы AA_1 і CC_1 перасякаюцца ў пункце I . Дакажыце, што каля чатырохвугольніка C_1BA_1I можна апісаць акружнасць.



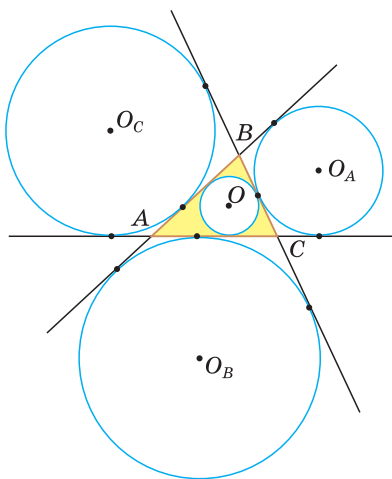
Рыс. 145

4. Пазаўпісаня акружнасці

Акружнасць, якая датыкаецца да стараны трохвугольніка і прадаўжэнняў дзвюх іншых яго старон, называецца *пазаўпісанай* акружнасцю трохвугольніка. На рысунку 146 паказаны трохвугольнік ABC і тры яго пазаўпісаня акружнасці з цэнтрамі O_A , O_B , O_C і радыусамі r_a , r_b , r_c . Цэнтр кожнай такой акружнасці ляжыць у пункце перасячэння бісектрыс двух знешніх вуглоў пры вершынях трохвугольніка.

Пазаўпісаня акружнасці валодаюць шэрагам цікавых уласцівасцей:

1. Цэнтры ўпісанай і пазаўпісанай акружнасцей ляжаць на бісектрысе адпаведнага ўнутранага вугла трохвугольніка.



Рыс. 146

2. $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$, дзе r — радыус упісанай акружнасці трохвугольніка.

3. $4R + r = r_a + r_b + r_c$, дзе R — радыус апісанай акружнасці трохвугольніка ABC .

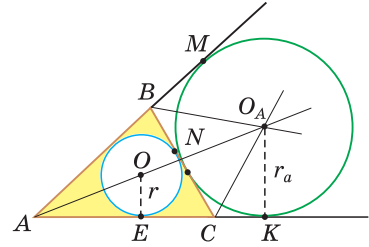
Паспрабуйце даказаць некаторыя з гэтых уласцівасцей самастойна.

Знойдзем радыус r_a пазаўпісанай акружнасці трохвугольніка ABC са старанамі a , b і c (рыс. 147). Для гэтага правядзём радыусы OE і O_AK . Па ўласцівасці датычнай $OE \perp AC$, $O_AK \perp AC$.

З падобнасці прамавугольных трохвугольнікаў AOE і AO_AK (па вострым вугле) вынікае $\frac{OE}{AE} = \frac{O_AK}{AK}$. Паколькі $AK = \frac{1}{2}P_{ABC} = p$, $AE = p - a$

і $r = \frac{S}{p}$, дзе $OE = r$, то $\frac{\frac{S}{p}}{p - a} = \frac{r_a}{p}$, адкуль

$S = r_a(p - a)$,



Рыс. 147

$$r_a = \frac{S}{p - a}.$$

Прыклад. Вылічым, выкарыстаўшы дадзеную формулу, радыус пазаўпісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі 3 і 4,

якая датыкаецца да гіпатэнузы: $r_c = \frac{S}{p - c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4}{\frac{3 + 4 + 5}{2} - 5} = \frac{6}{1} = 6$.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

161. Няхай у трохвугольніку ABC $\angle A = 40^\circ$. Знайдзіце $\angle BO_A C$, дзе O_A — цэнтр пазаўпісанай акружнасці трохвугольніка, якая датыкаецца да стараны BC .

162. Знайдзіце радыус пазаўпісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка са стараной, роўнай a .

163. Дакажыце, што для трохвугольніка $O_A O_B O_C$ (гл. рыс. 146) адрэзкі $O_A A$, $O_B B$, $O_C C$ з'яўляюцца вышынямі.

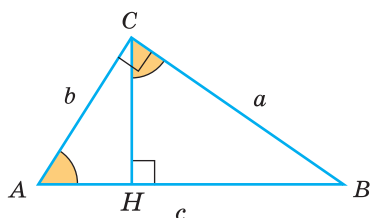
164. Пазаўпісаная акружнасць трохвугольніка ABC датыкаецца да стараны BC у пункце M , прадаўжэнняў старон AB і AC — у пунктах N і P адпаведна. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік ABC , датыкаецца да стараны AC у пункце K , а да стараны AB — у пункце L . Дакажыце, што:

а) $AN = \frac{1}{2}P_{ABC}$; б) $NL = BC$.

- 165.** Дакажыце, што адрэзак, які злучае цэнтр упісанай і цэнтр пазаўпісанай акружнасці трохвугольніка, дзеліцца апісанай акружнасцю гэтага трохвугольніка папалам.

5. Абагульненая тэарэма Піфагора

У прамавугольным трохвугольніку ABC ($\angle C = 90^\circ$) праведзена вышыня CH , якая дзеліць яго на трохвугольнікі ACH і CBH , падобныя паміж сабой і падобныя трохвугольніку ABC ($\angle A = \angle BCH$) (рыс. 148). Тады тэарэма Піфагора $a^2 + b^2 = c^2$ можа гучаць так: сума квадратаў гіпатэнуз a і b



Рыс. 148

трохвугольнікаў CBH і ACH роўна квадрату гіпатэнузы трохвугольніка ABC . І наогул, калі m , n і l — адпаведныя лінейныя элементы трохвугольнікаў CBH , ACH і ABC , то можна сфармуляваць абагульненую тэарэму Піфагора: $m^2 + n^2 = l^2$.

Сапраўды, з падобнасці названых трохвугольнікаў $\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \frac{l}{c} = k$, адкуль $m = ka$,

$$n = kb, \quad l = kc, \quad m^2 + n^2 = k^2(a^2 + b^2) = (kc)^2 = l^2.$$

Прыклад. Няхай $P_{ACH} = 15$ см, $P_{CBH} = 36$ см (гл. рыс. 148). Знойдзем P_{ABC} . Па абагульненай тэарэме Піфагора $P_{ACH}^2 + P_{CBH}^2 = P_{ABC}^2$, адсюль $P_{ABC}^2 = 15^2 + 36^2 = 1521$; $P_{ABC} = 39$ см.

Адказ: 39 см.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 166.** У прамавугольным трохвугольніку з катэтамі 15 і 20 да гіпатэнузы праведзена вышыня. Яна разбівае дадзены трохвугольнік на два прамавугольныя трохвугольнікі. У кожны з атрыманых трохвугольнікаў упісана акружнасць. Знайдзіце:

- адлегласць паміж пунктамі дотыку гэтых акружнасцей з названай вышынёй;
- адлегласць паміж цэнтрамі гэтых акружнасцей.

- 167.** Вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, дзеліць прамавугольны трохвугольнік на два трохвугольнікі, плошчы якіх роўны 1 см^2 і 4 см^2 . Знайдзіце гіпатэнузу дадзенага прамавугольнага трохвугольніка.

- 168.** Дакажыце, што для прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі a і b і вышынёй h , праведзенай да гіпатэнузы, справядлівая роўнасць

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

- 169.** Няхай $CH = h$ — вышыня прамавугольнага трохвугольніка ABC з гіпатэнузай AB , r — радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC , r_1 — радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік ACH , r_2 — радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік BCH .

- а) Дакажыце, што $r_1 + r_2 + r = h$.
 б) Знайдзіце r , калі $r_1 = 3$, $r_2 = 4$.

6. Формула Эйлера для акружнасцей

Для ўпісанай і апісанай акружнасцей трохвугольніка з радыусамі r і R і адлегласцю d паміж іх цэнтрамі (рыс. 149) справядлівая формула Эйлера

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

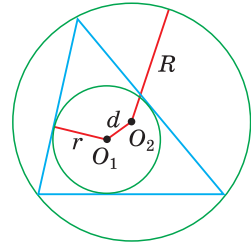
Пакажам эфектыўнасць гэтай формулы на прыкладзе раўнабедранага трохвугольніка ABC , у якога $AB = BC = 10$, $AC = 12$ (рыс. 150).

Спачатку знойдзем адлегласць паміж цэнтрамі дадзеных акружнасцей традыцыйным спосабам. Правядзём вышыню BH , даўжыня якой будзе роўна 8 (піфагорава тройка 6, 8, 10). Цэнтры апісанай і ўпісанай акружнасцей — адпаведна пункты O_1 і O_2 — ляжаць на прамой BH (уласцівасць раўнабедранага трохвугольніка). Тады $BO_1 = R$, $O_2H = r$, $d = O_1O_2$ — адлегласць паміж названымі цэнтрамі. Для знаходжання радыуса апісанай акружнасці выкарыстаем формулу $R = \frac{b^2}{2h_a}$, дзе b — бакавая старана, h_a — вышыня, праведзеная да асновы раўнабедранага трохвугольніка. Атрымаем

$R = \frac{10^2}{2 \cdot 8} = 6\frac{1}{4}$. Радыус упісанай акружнасці $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$. Паколькі

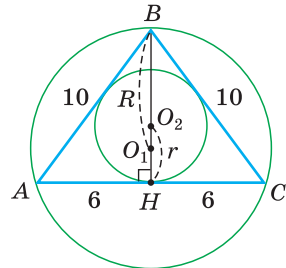
$BO_1 = R = 6\frac{1}{4}$ і $O_1H = 8 - 6\frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$, то $O_1H < O_2H$. Шуканая адлегласць $d = O_1O_2 = O_2H - O_1H = 3 - 1\frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$.

А цяпер знойдзем d па формуле Эйлера: $d^2 = R^2 - 2Rr = \left(6\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot 6\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{625}{16} - \frac{150}{4} = \frac{25}{16}$, адкуль $d = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. Як бачым, формула Эйлера дастаткова эфектыўная.



$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

Рыс. 149



Рыс. 150

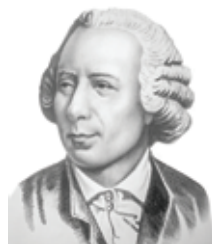


РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 170.** Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі апісанай і ўпісанай акружнасцей прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі 12 і 16 двума спосабамі: традыцыйным і з дапамогай формулы Эйлера.
- 171.** Дакажыце, што для радыуса R апісанай і радыуса r упісанай акружнасцей трохвугольніка справядлівая няроўнасць $\frac{R}{r} \geq 2$.
- 172.** Пры дапамозе формулы Эйлера дакажыце, што ў роўнастароннім трохвугольніку $R = 2r$.

Цікава ведаць. Леанард Эйлер (1707—1783) — выдатны матэматык, які ўнёс значны ўклад у развіццё гэтай навукі. Нарадзіўся ў Швейцарыі, доўгі час працаваў у Расіі, быў акадэмікам Пецярбургскай акадэміі навук.

У 1775 г. Леанард Эйлер апублікаваў тэарэму: «*Асновы вышынь, асновы медыян і сярэдзіны адрэзкаў, якія злучаюць пункт перасячэння вышынь з вяршынямі трохвугольніка, ляжаць на адной акружнасці*». Гэту акружнасць называюць акружнасцю Эйлера або акружнасцю дзевяці пунктаў. Яе радыус у 2 разы меншы за радыус апісанай акружнасці трохвугольніка.



Пры дапамозе **Інтэрнэту** знайдзіце інфармацыю аб акружнасці Эйлера, а таксама аб *прамой Эйлера*. Высветліце, як звязаны прамая Эйлера і акружнасць Эйлера.

ТЭМЫ ПРАЕКТАЎ



1. Акружнасць дзевяці пунктаў.
2. Прамая Эйлера.
3. Пункт Нагеля, пункт Жэргона, пункт Тарычэлі.

ЗАПАМІНАЕМ

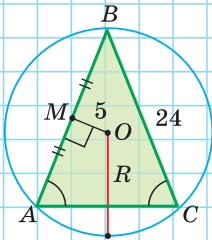
1. Цэнтр апісанай акружнасці трохвугольніка (многовугольніка) ляжыць у пункце перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да яго старон.
2. Цэнтр упісанай акружнасці трохвугольніка (многовугольніка) ляжыць у пункце перасячэння бісектрыс яго вуглоў.
3. Цэнтр апісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка ляжыць на сярэдзіне гіпатэнузы, а яе радыус роўны палавіне гіпатэнузы: $R = \frac{c}{2}$.
4. Радыус упісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка знаходзяць па формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$.
5. Калі чатырохвугольнік упісаны ў акружнасць, то сумы яго процілеглых вуглоў роўны 180° . Правільнае і адваротнае сцверджанне.
6. Калі чатырохвугольнік апісаны каля акружнасці, то сумы яго процілеглых старон роўныя паміж сабой. Правільнае і адваротнае сцверджанне.
7. Плошчу трохвугольніка і любога іншага апісанага многовугольніка можна знайсці па формуле $S = pr$, дзе p — паўперыметр, r — радыус упісанай акружнасці.

ПРАВЯРАЕМ СЯБЕ

Тэст 1

Па даных на рысунку знайдзіце радыус R .

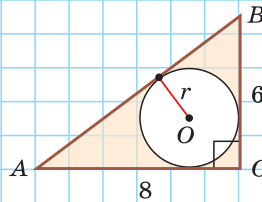
- а) 12;
б) 10;
в) 13;
г) 8.



Тэст 2

Па даных на рысунку знайдзіце радыус r .

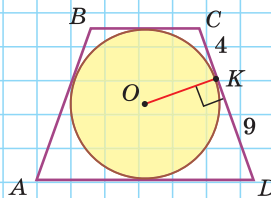
- а) 2;
б) 3;
в) 4;
г) 5.



Тэст 3

Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапецыі $ABCD$.

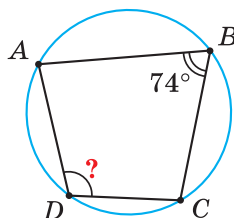
- а) 78; б) 312; в) 156; г) 124.



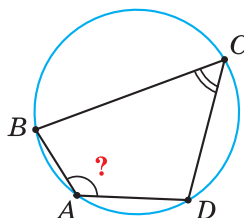
ПАДРыхтоўка да кантрольнай работы 2

1. Знайдзіце велічыню вугла, абазначанага пыталнікам.

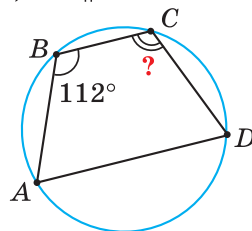
а)



б) $\angle C : \angle A = 1 : 3$

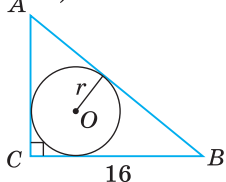


в) $BC \parallel AD$

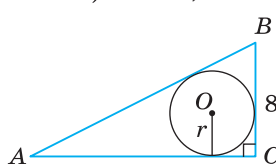


2. Знайдзіце радыус r упісанай акружнасці.

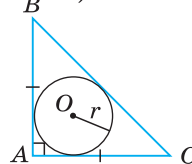
а) $R = 10$



б) $R = 8,5$

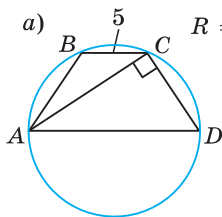


в) $R = 4$

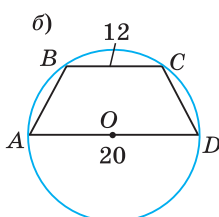


3. Знайдзіце вышыню трапецыі, упісанай у акружнасць.

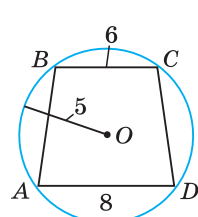
а) $R = 6,5$



б) $R = 8,5$

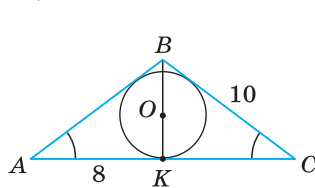


в) $R = 5$

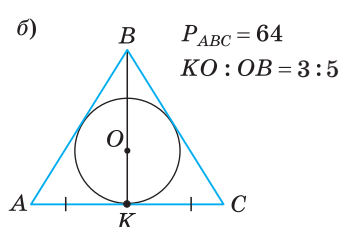


4. Знайдзіце радыус упісанай і радыус апісанай ($R = \frac{a^2}{2h}$) акружнасцей $\triangle ABC$.

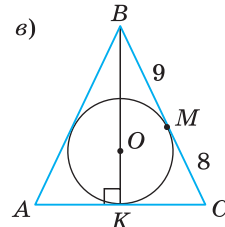
а)



б)

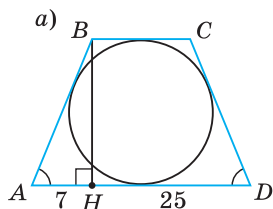


в)

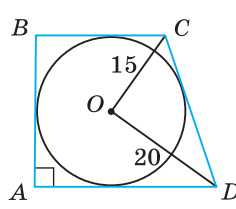


5. Знайдзіце плошчу апісанай трапецыі.

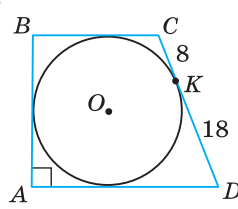
а)



б)



в)



Паўтарэнне главы I

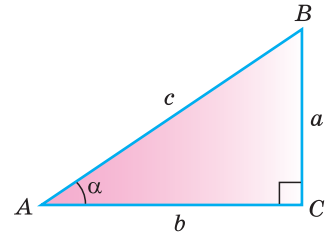
1. Рашэнне прамавугольнага трохвугольніка

Дадзена: a, α .

Знайсці: b, c .

Рашэнне. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad b = a \operatorname{ctg} \alpha;$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$



2. Значэнні трыганаметрычных функцый вуглоў $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

3. Трыганаметрычныя формулы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

4. Знаходжанне значэнняў трыганаметрычных функцый тупога вугла

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Прыклады. $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$

5. Формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma, \quad S_{\text{пар}} = ab \sin \alpha.$$

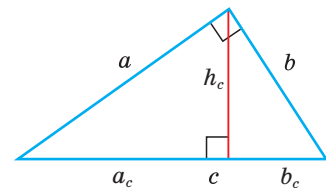
6. Сярэдняе геаметрычнае ў прамавугольным трохвугольніку

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c},$$

$$a = \sqrt{c \cdot a_c},$$

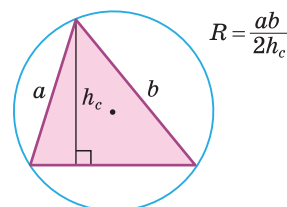
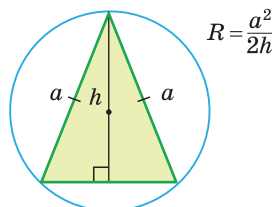
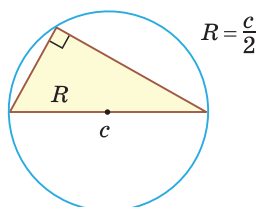
$$b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

$$h_c = \frac{ab}{c}, \quad a_c = \frac{a^2}{c}, \quad b_c = \frac{b^2}{c}.$$

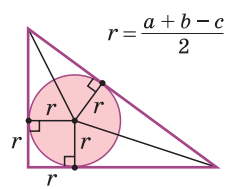
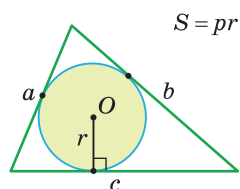
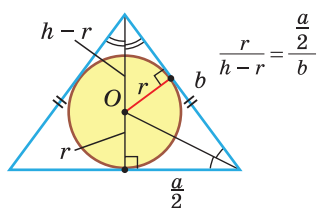


Паўтарэнне главы II

1. Знаходжанне радыуса апісанай акружнасці трохвугольніка

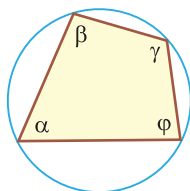


2. Знаходжанне радыуса r упісанай акружнасці трохвугольніка

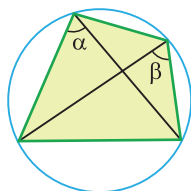


3. Упісаны чатырохвугольнік і яго апісаная акружнасць

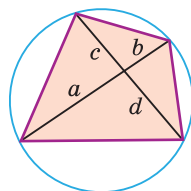
$$\alpha + \gamma = \beta + \varphi = 180^\circ$$



$$\alpha = \beta$$

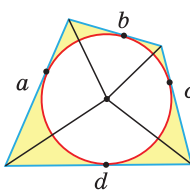


$$ab = cd$$

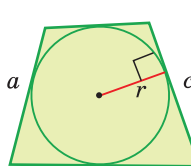


4. Апісаны чатырохвугольнік. Раўнабедраная апісаная трапецыя

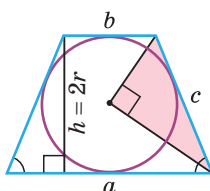
$$a + c = b + d$$



$$S = (a + c)r = pr$$

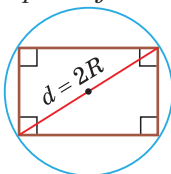


$$S = ch \quad h = \sqrt{ab}$$

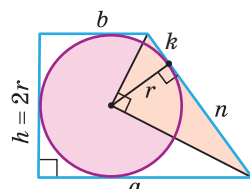
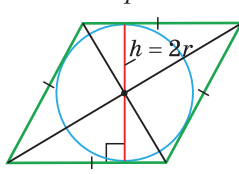


5. Паралелаграм і акружнасць. Прамавугольная апісаная трапецыя

прамавугольнік



ромб

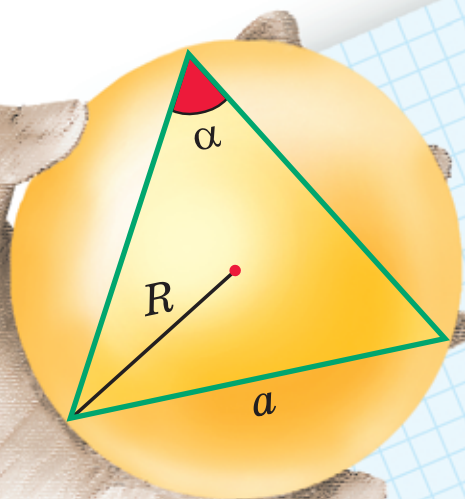


Глава III

Тэарэма сінусаў, тэарэма косінусаў

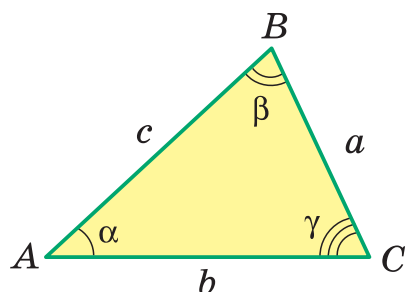
У гэтай главе вы даведаецеся:

- Што сцвярджаюць тэарэма сінусаў і тэарэма косінусаў
- Як знайсці велічыню вугла трохвугольніка, ведаючы даўжыні ўсіх яго старон
- Пра формулу Герона аб плошчы трохвугольніка



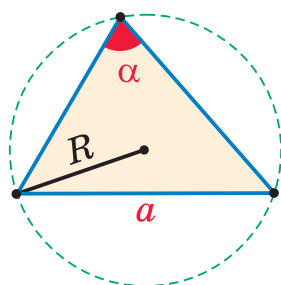
$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

Тэарэма сінусаў і тэарэма косінусаў



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

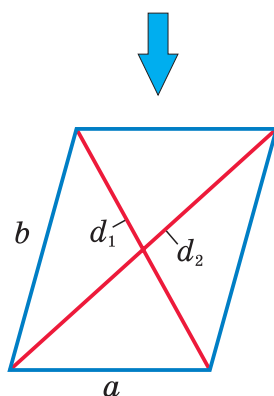
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

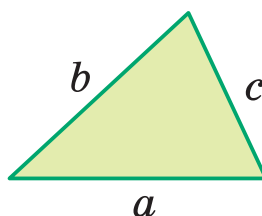
R



Уласцівасці дыяганалей
паралелеграма

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

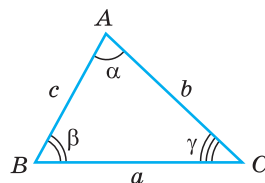
**Формула
Герона**



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

§ 12. Тэарэма сінусаў

Вы ўжо ведаеце, што ў трохвугольніку насупраць большай стараны ляжыць большы вугал, а насупраць большага вугла — большая старана. Няхай a , b , c — стараны, α , β , γ — процілеглыя ім вуглы трохвугольніка ABC адпаведна (рыс. 151). Калі старана a — найбольшая, b — сярэдняя, c — найменшая, то вугал α — найбольшы, β — сярэдні, γ — найменшы. Устаноўім дакладную сувязь паміж даўжынёй стараны трохвугольніка і велічынёй процілеглага ёй вугла.

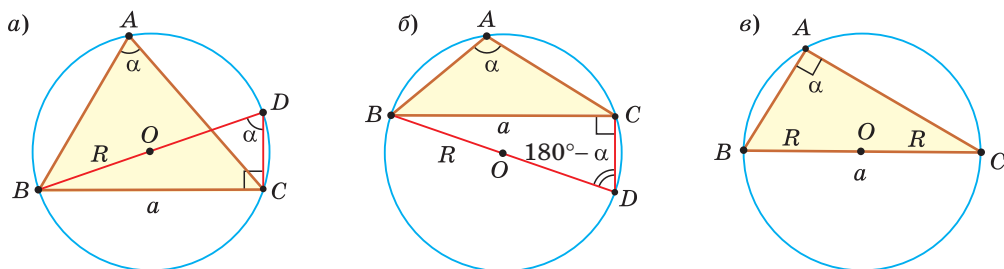


Рыс. 151

Тэарэма сінусаў. Стараны трохвугольніка прапарцыянальны сінусам процілеглых вуглоў. Адносіна стараны трохвугольніка да сінуса процілеглага вугла роўна падвоенаму радыусу акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, г. зн.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Доказ. Няхай дадзены трохвугольнік ABC , $BC = a$, $\angle A = \alpha$, R — радыус яго апісанай акружнасці. Вугал α можа быць вострым, тупым або прамым. Разгледзім гэтыя выпадкі асобна.



Рыс. 152

1) Вугал α востры (рыс. 152, а). Правёўшы дыяметр BD і адрэзак DC , атрымаем прамавугольны трохвугольнік BCD , у якім $\angle BCD = 90^\circ$ як упісаны вугал, які абাপіраецца на дыяметр. Заўважым, што $\angle D = \angle A = \alpha$ як упісаныя вуглы, якія абাপіраюцца на адну і тую ж дугу BC . З прамавугольнага $\triangle BCD$ знаходзім $\sin D = \frac{BC}{BD}$, г. зн. $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$, адкуль $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

2) Вугал α тупы (рыс. 152, б). Правядзём дыяметр BD і адрэзак DC . У чатырохвугольніку $ABDC$ па ўласцівасці ўпісанага чатырохвугольніка $\angle D = 180^\circ - \alpha$. З прамавугольнага трохвугольніка BCD ($\angle BCD = 90^\circ$ як упісаны вугал, які абাপіраецца на дыяметр) $\sin D = \frac{BC}{BD}$, $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{a}{2R}$.

Паколькі $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, то $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$, адкуль $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

3) Для $\alpha = 90^\circ$ справядлівасць роўнасці $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ дакажыце самастойна.

З прычыны даказанага $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$, $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, адкуль $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.

Тэарэма даказана.

Тэарэма сінусаў дае магчымасць рашаць шырокае кола задач.

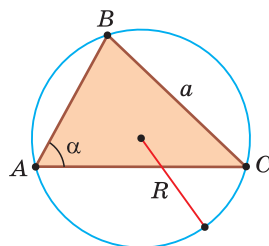
Так, прапорцыя $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ дазваляе рашыць *дзве* наступныя задачы:

- ведаючы *дзве* стараны трохвугольніка і вугал, процілеглы адной з іх, знайсці сінус вугла, процілеглага другой старане;
- ведаючы *два* вуглы трохвугольніка і старану, процілеглую аднаму з гэтых вуглоў, знайсці старану, процілеглую другому вуглу.

Пры дапамозе формулы $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ можна рашыць яшчэ *тры* задачы (рыс. 153):

- ведаючы старану трохвугольніка і процілеглы ёй вугал, знайсці радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка;
- ведаючы вугал трохвугольніка і радыус апісанай акружнасці, знайсці старану трохвугольніка, процілеглую дадзенаму вуглу;
- ведаючы старану трохвугольніка і радыус яго апісанай акружнасці, знайсці сінус вугла, процілеглага дадзенай старане.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$



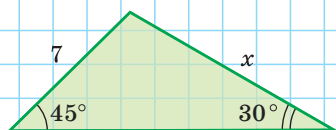
Рыс. 153

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

Тэст 1

Знайдзіце старану x трохвугольніка на рысунку, выкарыстаўшы тэарэму сінусаў: $\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{7}{\sin 30^\circ}$.

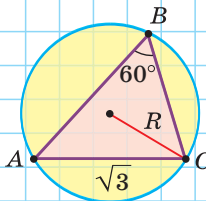
а) 14; б) 21; в) $7\sqrt{2}$; г) 10.



Тэст 2

Знайдзіце велічыню радыуса R на рысунку, выкарыстаўшы формулу $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

а) 1; б) 2; в) $\sqrt{3}$; г) 3.



Паўтарэнне

$$1) \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

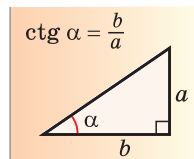
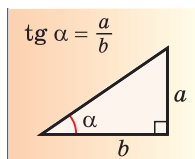
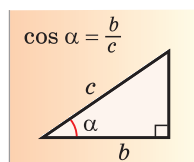
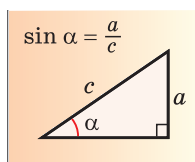
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$$

$$2) \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$3) \quad \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

$$4) \quad \sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

**Заданні да § 12****РАШАЕМ РАЗАМ****ключавыя задачы**

Задача 1. У востравугольным трохвугольніку вядомы стораны $a = 8$, $b = 9$ і вугал $\alpha = 60^\circ$. Знайсці два іншыя вуглы β і γ , акругліўшы іх значэнні да 1° , і трэцюю старану трохвугольніка, акругліўшы яе даўжыню да $0,1$.

Рашэнне. Па тэарэме сінусаў $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, адкуль $\frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{9}{\sin \beta}$,

$$\sin \beta = \frac{9 \cdot \sin 60^\circ}{8} \approx \frac{9 \cdot 0,8660}{8} \approx 0,9743. \text{ Пры дапамозе калькулятара (таб-}$$

ліц) знаходзім $\beta \approx 77^\circ$. Тады $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 43^\circ$. Па тэарэме сінусаў

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}, \text{ адкуль } \frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 43^\circ}, \quad c = \frac{8 \cdot \sin 43^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 8 \cdot \frac{0,6820}{0,8660} \approx 6,3.$$

Адказ: $\beta \approx 77^\circ$, $\gamma \approx 43^\circ$, $c \approx 6,3$.

Заўвага. Калі б па ўмове трохвугольнік быў тупавугольным з тупым вуглом β , то, ведаючы $\sin \beta \approx 0,9743$, спачатку мы знайшлі б востры вугал $\beta_1 \approx 77^\circ$. А затым, выкарыстаўшы формулу $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, атрымалі б, што $\beta = 180^\circ - \beta_1 \approx 180^\circ - 77^\circ \approx 103^\circ$.

Задача 2. Даказаць справядлівасць формулы плошчы трохвугольніка

$$S = \frac{abc}{4R}, \text{ дзе } a, b, c \text{ — яго стораны, } R \text{ — радыус апісанай акружнасці.}$$

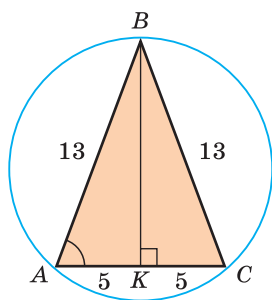
Доказ. Выкарыстаем вядомую формулу плошчы трохвугольніка:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma. \text{ Па тэарэме сінусаў } \frac{c}{\sin \gamma} = 2R, \text{ адкуль } \sin \gamma = \frac{c}{2R}. \text{ Тады}$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}. \text{ Што і трэба было даказаць.}$$

Заўвага. Выведзеная формула дазваляе знайсці радыус апісанай акружнасці трохвугольніка: $R = \frac{abc}{4S}$.

Задача 3. Знайсці радыус R акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай $AC = 10$ і бакавой старонай $BC = 13$ (рыс. 154).



Рыс. 154

Рашэнне. *Спосаб 1.* З формулы $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ вынікае, што $\frac{BC}{\sin A} = 2R$. Знойдзем $\sin A$. Для гэтага ў трохвугольніку ABC правядзём вышыню BK , якая будзе і медыянай, адкуль $AK = \frac{1}{2}AC = 5$. З $\triangle ABK$ па тэарэме Піфагора $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, адкуль $\sin A = \frac{BK}{AB} = \frac{12}{13}$. Тады $2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{13}{\frac{12}{13}} = \frac{169}{12}$, $R = \frac{169}{2 \cdot 12} = 7\frac{1}{24}$.

Спосаб 2. Выкарыстаем формулу $S = \frac{abc}{4R}$, з якой $R = \frac{abc}{4S}$. Паколькі $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$, то $R = \frac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60} = \frac{169}{24} = 7\frac{1}{24}$.

Адказ: $7\frac{1}{24}$.

 *Заўвага.* Напомнім, што ў главе II мы знаходзілі радыус R апісанай акружнасці раўнабедранага трохвугольніка, праводзячы пасярэднія перпендыкуляры да яго старон і выкарыстоўваючы падобнасць атрыманых прамавугольных трохвугольнікаў.

Таксама мы маглі карыстацца формулай $R = \frac{b^2}{2h_a}$, дзе b — бакавая старана,

h_a — вышыня, праведзеная да асновы a . Замяніўшы S у формуле $R = \frac{abc}{4S}$ на $\frac{1}{2}ch_c$, атрымаем $R = \frac{ab}{2h_c}$ — формулу радыуса апісанай акружнасці для адвольнага трохвугольніка. Такім чынам, мы маем чатыры формулы для знаходжання радыуса R апісанай акружнасці трохвугольніка:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R,$$

$$R = \frac{abc}{4S},$$

$$R = \frac{ab}{2h_c},$$

$$R = \frac{b^2}{2h_a}.$$

Адвольны трохвугольнік

Раўнабедраны
трохвугольнік

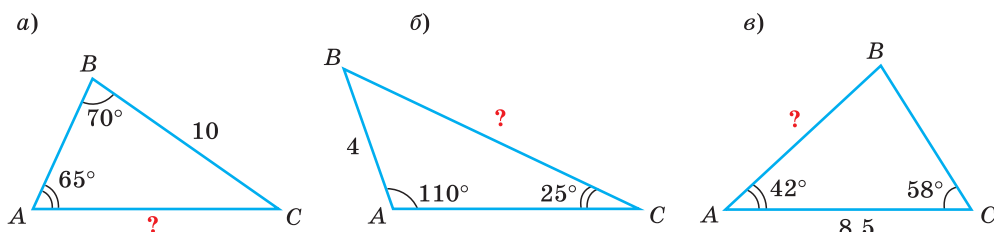


РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 173.** Начарціце ў сшытку і запоўніце табліцу, у якой α і β — вуглы, a і b — адпаведныя гэтым вуглам стараны трохвугольніка. Для знаходжання невядомых значэнняў карыстайцеся прапарцыяй $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$.

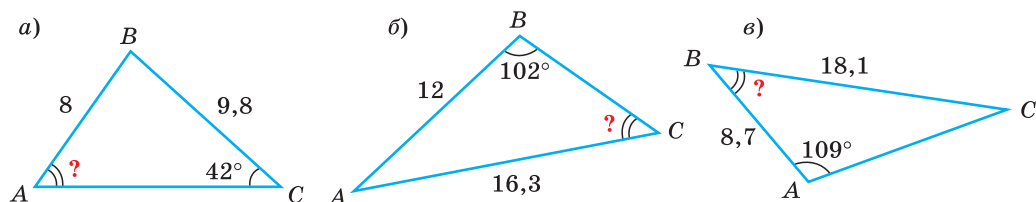
a	4		$\sqrt{6}$
b		6	2
α	30°	45°	120°
β	45°	60°	

- 174.** Па даных на рысунках 155, а)–в) вылічыце даўжыню стараны трохвугольніка, абазначанай пыталнікам. Пры разліках карыстайцеся калькулятарам (табліцамі), вынік акругліце да 0,1.



Рыс. 155

- 175.** Па даных на рысунках 156, а)–в) вылічыце пры дапамозе калькулятара (табліц) вугал трохвугольніка, абазначаны пыталнікам. Адказ акругліце да 1° .



Рыс. 156

- 176.** Зрабіце схематычны чарцёж трохвугольніка ABC . Пры дапамозе тэарэмы сінусаў знайдзіце даўжыню стараны b (акругліўшы адказ да 0,1), калі:

- а) $a = 4$, $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 70^\circ$;
 б) $a = 6,5$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

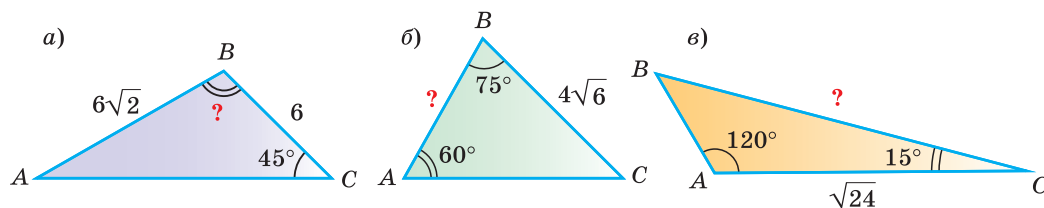
- 177.** Зрабіце схематычны чарцёж трохвугольніка ABC . Знайдзіце велічыню вугла B трохвугольніка ABC (акругліўшы адказ да 1°), калі:

- а) $BC = 6$, $AC = 3$, $\angle A = 62^\circ$;
 б) $AB = 4,6$, $AC = 4,3$, $\angle C = 26^\circ$.

178. У трохвугольніку ABC вядома: $\sin A = 0,8$, $\sin B = 0,6$, $AC + BC = 28$ см. Знайдзіце даўжыні старон AC і BC .

179. Па даных на рысунках 157, а)–в) вылічыце:

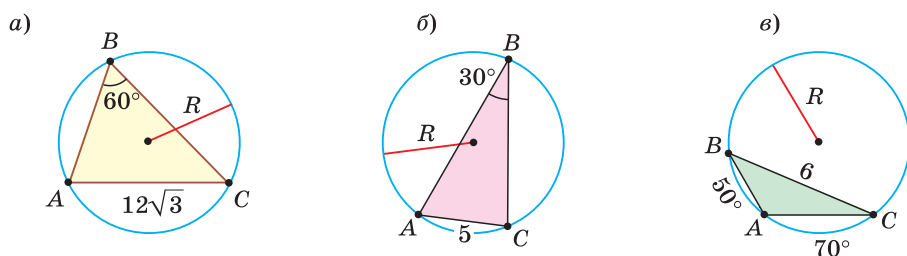
а) $\angle B$; б) AB ; в) BC .



Рыс. 157

180. У паралелаграме $ABCD$ $\angle A$ востры, $\sin \angle DAC = \frac{1}{2}$, $\sin \angle BAC = \frac{3}{4}$. Знайдзіце перыметр паралелаграма, калі $AB = 6$ см.

181. Па даных на рысунках 158, а)–в) знайдзіце радыус R акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC .

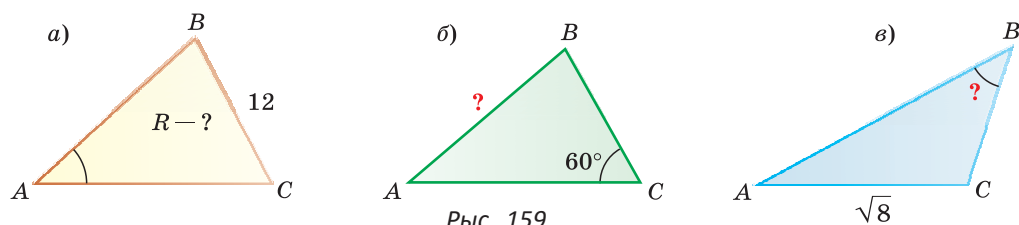


Рыс. 158

182. а) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC (рыс. 159, а), калі $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $BC = 12$ см.

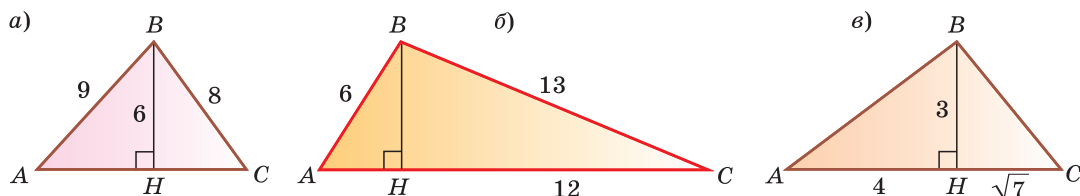
б) Знайдзіце даўжыню стараны AB трохвугольніка ABC (рыс. 159, б), калі $\angle C = 60^\circ$, а радыус яго апісанай акружнасці $R = 2\sqrt{3}$ см.

в) Знайдзіце велічыню вострага вугла B трохвугольніка ABC (рыс. 159, в), калі $AC = \sqrt{8}$ см, а радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC , роўны 2 см.



Рыс. 159

- 183.** Каля трохвугольніка ABC апісана акружнасць з цэнтрам у пункце O і дыяметрам $16\sqrt{2}$ см. Знайдзіце даўжыню стараны AB трохвугольніка ABC , калі $\angle BOC = 160^\circ$, $\angle ABC - \angle ACB = 10^\circ$ і $\angle A$ — востры.
- 184.** Па даных на рысунках 160, а)–в) вылічыце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC .



Рыс. 160

- 185.** а) У трохвугольніку ABC $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 105^\circ$, $BC = 6$ см. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка.
 б) Трохвугольнік ABC раўнабедраны, аснова $AC = 8$ см, вугал пры аснове роўны 15° . Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка.
 в) Дакажыце, што калі адзін з вуглоў трохвугольніка роўны 30° або 150° , то даўжыня стараны трохвугольніка, процілеглай гэтаму вуглу, роўна радыусу акружнасці, апісанай каля трохвугольніка.
- 186.** Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка са старанамі:
 а) 10 см, 10 см, 12 см;
 б) $2\sqrt{5}$ см, $2\sqrt{5}$ см, 8 см.
- 187.** У трохвугольніку дадзена старана a і вуглы β , γ . Выкарыстаўшы тэарэму сінусаў, знайдзіце стараны b і c .
- 188.** Выкарыстаўшы формулу $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля роўнастаронняга трохвугольніка са стараной a .
- 189.** У прамавугольніку $ABCD$ $BC = 8$ см, $AB = 6$ см, M — сярэдзіна стараны AD . Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ACM .
- 190.** а) Дадзена раўнабедраная трапецыя $ABCD$ з асновамі AD і BC , дыяганаль $AC = 8\sqrt{3}$ см. Прамень AC з'яўляецца бісектрысай вугла BAD , $\angle ACB = 30^\circ$. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трапецыі.
 б) Асновы BC і AD упісанай трапецыі $ABCD$ роўны 11 см і 21 см адпаведна, бакавая старана AB роўна 13 см. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трапецыі.

191. а) Пункт M ляжыць на аснове AC раўнабедранага трохвугольніка ABC . Дакажыце, што радыусы апісаных акружнасцей трохвугольнікаў ABM і CBM роўныя паміж сабой і не залежаць ад месцазнаходжання пункта M .
- б) Дадзены трохвугольнік ABC . На яго старане AC адзначаны пункт M . Дакажыце, што адносіна радыусаў акружнасцей, апісаных каля трохвугольнікаў ABM і CBM , не залежыць ад месцазнаходжання пункта M .
192. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC , калі:
- а) $A(1; 1)$, $B(4; 4)$, $C(4; 0)$; б) $A(-2; 0)$, $B(6; 6)$, $C(6; -4)$.
193. Дакажыце, што радыус акружнасці, якая праходзіць праз артацэнтр непрамавугольнага трохвугольніка і дзве любыя яго вяршыні, роўны радыусу акружнасці, апісанай каля трохвугольніка.
194. Дадзены востравугольны трохвугольнік ABC , дзе $AB < BC$; BM — медыяна, BK — бісектрыса трохвугольніка. Дакажыце, выкарыстаўшы тэарэму сінусаў, што $AK < AM$.
195. Дакажыце, што радыус апісанай акружнасці трохвугольніка большы або роўны палавіне любой стараны трохвугольніка.

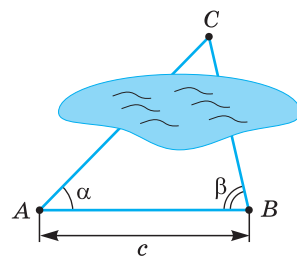
Мадэляванне

Заданне 1.

1) Складзіце алгарытм знаходжання пры дапамозе тэарэмы сінусаў адлегласці ад пункта A да недаступнага пункта C (рыс. 161), калі вядома, што $AB = c$, $\angle A = \alpha$ і $\angle B = \beta$.

2) Выразіце $AC = b$ праз c , α і β .

3) Знайдзіце AC пры ўмове, што $AB = 30$ м, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 80^\circ$. Адказ акругліце да 1 м.

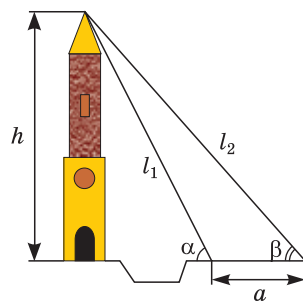


Рыс. 161

Заданне 2.

1) Гледзячы на рысунак 162, складзіце матэматычную мадэль знаходжання вышыні h вежы, даўжынь l_1 і l_2 тросаў, якія ідуць ад вяршыні вежы да зямлі. Адлегласць ад назіральніка да вежы вымераць рулеткай нельга, паколькі вежу акружае роў, але можна вымераць вуглы α і β і адлегласць a .

2) Знайдзіце вышыню вежы і даўжыні тросаў пры ўмове, што $a = 4$ м, $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 48^\circ$. Адказ акругліце да 1 м.



Рыс. 162



Рыс. 163

Васількавіча. Яе вышыня складае 29,4 м. З 1960 г. вежа з'яўляецца філіялам Брэсцкага абласнога краязнаўчага музея.

Цікава ведаць. Прыборы для вымярэння вуглоў на мясцовасці называюцца *вугламерамі*. Яны бываюць лазернымі і электроннымі. Інжынеры-будаўнікі карыстаюцца *тэадалітамі* (рыс. 163).

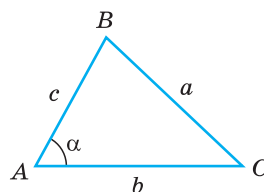
На рысунку 164 паказаны адзін з сімвалаў Беларусі — Камянецкая вежа, размешчаная ў Брэсцкай вобласці (г. Камянец). Гэта найбольш добра захаваная абарончая вежа, пабудаваная ў 1276—1288 гадах па загадзе князя Уладзіміра



Рыс. 164

§ 13. Тэарэма косінусаў

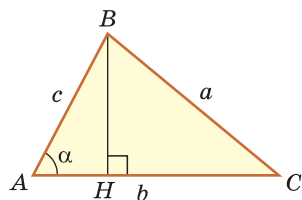
Тэарэма косінусаў дазваляе выразіць даўжыню любой стараны трохвугольніка праз даўжыні дзвюх іншых яго старон і косінус вугла паміж імі (напрыклад, даўжыню стараны a трохвугольніка ABC (рыс. 165) праз даўжыні старон b і c і $\cos \alpha$). Тэарэму косінусаў можна назваць самай «працуючай» у геаметрыі. Яна мае шматлікія вынікі, якія часта выкарыстоўваюцца пры рашэнні задач.



Рыс. 165

Тэарэма косінусаў. Квадрат любой стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон мінус падвоены здабытак гэтых старон на косінус вугла паміж імі, г. зн.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$



Рыс. 166

Доказ. Дакажам тэарэму для выпадку, калі ў трохвугольніку ABC вуглы A і C вострыя (рыс. 166). Правядзём вышыню BH да стараны AC .

З $\triangle ABH$ знаходзім $BH = c \sin \alpha$, $AH = c \cos \alpha$, адкуль $HC = b - c \cos \alpha$.

З $\triangle BHC$ па тэарэме Піфагора

$$a^2 = HC^2 + BH^2 = (b - c \cos \alpha)^2 + (c \sin \alpha)^2 = b^2 - 2bc \cos \alpha + c^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha).$$

Па асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\text{Тады } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Справядлівасць тэарэмы для выпадкаў, калі $\angle A$ або $\angle C$ тупы або прамы, дакажыце самастойна. Тэарэма даказана.

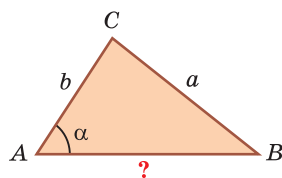
Для старон b і c тэарэма косінусаў запішацца так:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

Заўвага. Паколькі пры $\gamma = 90^\circ$ па тэарэме косінусаў $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 90^\circ = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$, то тэарэма Піфагора — прыватны выпадак тэарэмы косінусаў.

Пры дапамозе тэарэмы косінусаў можна рашыць наступныя задачы:

- ведаючы дзве стараны і вугал паміж імі, знайсці трэцюю старану трохвугольніка;
- ведаючы дзве стараны і вугал, процілеглы адной з гэтых старон, знайсці трэцюю старану (рыс. 167) (у гэтым выпадку магчымы два рашэнні).



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Рыс. 167

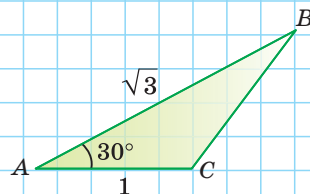
А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

Пры дапамозе тэарэмы косінусаў знайдзіце BC :

1) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = \dots$

2) $BC = \dots$



Разгледзім вынікі з тэарэмы косінусаў, якія даюць магчымасць рашыць яшчэ шэраг задач.

Вынік 1.

Тэарэма косінусаў дазваляе, ведаючы тры стараны трохвугольніка, знайсці яго вуглы (косінусы вуглоў). З роўнасці $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ вынікае формула

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Для вуглоў β і γ атрымаем:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

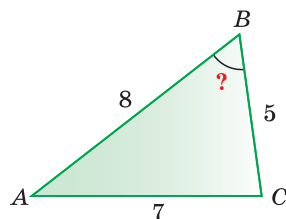
Прыклад 1. У трохвугольніку ABC стораны $AB = 8$, $BC = 5$, $AC = 7$. Знойдзем $\angle B$ (рыс. 168).

Па тэарэме косінусаў

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B,$$

$$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos B,$$

$$49 = 64 + 25 - 80 \cos B, \cos B = \frac{1}{2}, \angle B = 60^\circ.$$



Рыс. 168

Выкарыстаўшы запісаную вышэй формулу, мож-
на адразу атрымаць: $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2}.$

Вынік 2.

Пры дапамозе тэарэмы косінусаў можна па трох старанах вызначыць від трохвугольніка: *востравугольны*, *прамавугольны* або *тупавугольны*.

Так, з формулы $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ з улікам таго, што $2bc > 0$, вынікае:

1) калі $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, то $\cos \alpha > 0$ і вугал α востры;

2) калі $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, то $\cos \alpha < 0$ і вугал α тупы;

3) калі $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, то $\cos \alpha = 0$ і вугал α прамы.

Пры вызначэнні віду трохвугольніка дастаткова вызначыць знак косінуса вугла, процілеглага найбольшай старане, паколькі толькі найбольшы вугал трохвугольніка можа быць прамым або тупым.

Прыклад 2. Высветлім, якім з'яўляецца трохвугольнік са старанамі $a = 2$, $b = 3$ і $c = 4$. Для гэтага знойдзем знак косінуса вугла γ , процілеглага найбольшай старане c . Паколькі $a^2 + b^2 - c^2 = 2^2 + 3^2 - 4^2 = 4 + 9 - 16 < 0$, то $\cos \gamma < 0$, вугал γ тупы і дадзены трохвугольнік тупавугольны.

Сфармулюем правіла вызначэння віду трохвугольніка (адносна вуглоў).
Трохвугольнік з'яўляецца:

1) *востравугольным*, калі квадрат яго найбольшай стараны меншы за суму квадратаў дзвюх іншых яго старон: $a^2 < b^2 + c^2$;

2) *тупавугольным*, калі квадрат яго найбольшай стараны большы за суму квадратаў дзвюх іншых яго старон: $a^2 > b^2 + c^2$;

3) *прамавугольным*, калі квадрат яго найбольшай стараны роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон: $a^2 = b^2 + c^2$.

А цяпер выканайце **Тэст 2**.

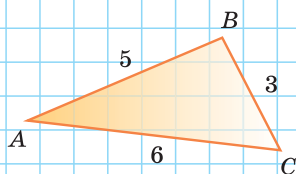
Тэст 2

Высветліце, якім з'яўляецца трохвугольнік ABC :

а) востравугольным;

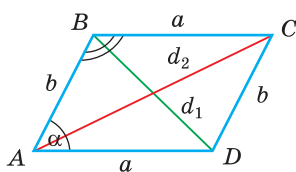
б) тупавугольным;

в) прамавугольным.



Вынік 3.

Сума квадратаў дыяганалей паралелаграма роўна суме квадратаў усіх яго старон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.



$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Рыс. 169

Доказ. Няхай у паралелаграме $ABCD$ $AD = a$, $AB = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$ і $\angle A = \alpha$ — востры, адкуль $\angle B = 180^\circ - \alpha$ — тупы (рыс. 169). Па тэарэме косінусаў з трохвугольніка ABD :

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha. \quad (1)$$

З трохвугольніка ABC : $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha)$. Паколькі $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, то

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha. \quad (2)$$

Склаўшы пачленна роўнасць (1) і роўнасць (2), атрымаем $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$, што і трэба было даказаць.

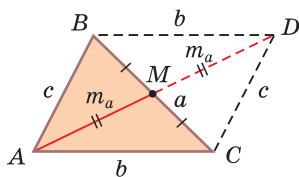
Для прамавугольнага трохвугольніка дакажыце вынік 3 самастойна.

Дадзеная формула дае магчымасць:

- ведаючы дзве суседнія стараны і адну з дыяганалей паралелаграма, знайсці другую дыяганаль;
- ведаючы дзве дыяганалі і адну са старон паралелаграма, знайсці суседнюю з ёй старану.

**Вынік 4.**

Медыяну m_a трохвугольніка са старанамі a , b і c можна знайсці па формуле $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.



$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Рыс. 170

Доказ. Разгледзім трохвугольнік ABC , $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AM = m_a$ — медыяна трохвугольніка (рыс. 170). Прадоўжым медыяну AM за пункт M на яе даўжыню: $MD = AM = m_a$. Правядзём адрэзкі BD і DC . Паколькі ў чатырохвугольніка $ABDC$ дыяганалі AD і BC пунктамі перасячэння дзеляцца папалам, то ён — паралелаграм. Па ўласцівасці дыяганалей паралелаграма $AD^2 + BC^2 = 2AC^2 + 2AB^2$, $(2m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$, $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Адсюль

вынікае, што $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Сцверджанне даказана.

Аналагічна: $m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Формула медыяны дазваляе:

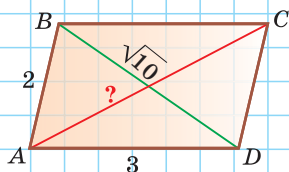
- ведаючы тры стараны трохвугольніка, знайсці любую з яго медыян;
- ведаючы дзве стараны і медыяну, праведзеную да трэцяй стараны, знайсці трэцюю старану;
- ведаючы тры медыяны, знайсці любую са старон трохвугольніка.

А цяпер выканайце **Тэст 3** і **Тэст 4**.

Тэст 3

Знайдзіце дыяганаль AC паралелаграма, ведаючы, што $BD = \sqrt{10}$.

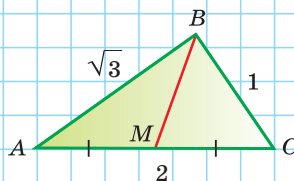
а) 4; б) 5; в) 6; г) $\sqrt{12}$.



Тэст 4

Знайдзіце медыяну BM трохвугольніка ABC па формуле медыяны.

а) 2; б) 1,5; в) 1; г) $\sqrt{2}$.



Заданні да § 13

РАШАЕМ РАЗАМ

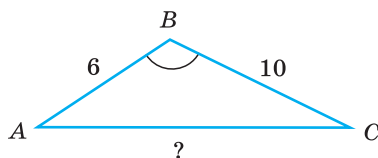
ключавыя задачы

Задача 1. а) Дадзены трохвугольнік ABC , $a = 5$, $b = 3$, $\gamma = 120^\circ$. Знайсці старану c . б) Дадзены трохвугольнік ABC , $a = 7$, $c = 8$, $\alpha = 60^\circ$. Знайсці старану b .

Рашэнне. а) Па тэарэме косінусаў $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 25 + 9 - 2 \cdot 15 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$. Адсюль $c = \sqrt{49} = 7$.

б) Няхай $b = x$. Па тэарэме косінусаў $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$, г. зн. $7^2 = x^2 + 8^2 - 2 \cdot x \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$, $49 = x^2 + 64 - 2 \cdot x \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$, $x^2 - 8x + 15 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Адсюль $b = 3$ або $b = 5$, паколькі для набору даўжынь адрэзкаў 7, 3, 8 і 7, 5, 8 выконваецца няроўнасць трохвугольніка. Адказ: а) 7; б) 3 або 5.

Задача 2. Дзве стараны трохвугольніка роўны 6 і 10, яго плошча — $15\sqrt{3}$. Знайсці трэцюю старану трохвугольніка пры ўмове, што процілеглы ёй вугал — тупы.



Рыс. 171

Рашэнне. Няхай у трохвугольніку ABC стараны $AB = 6$, $BC = 10$ і $S_{ABC} = 15\sqrt{3}$ (рыс. 171).

Паколькі $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B$, то

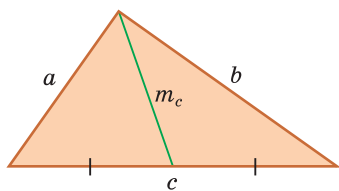
$$15\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin B, \text{ адкуль } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Паколькі $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і па ўмове $\angle B$ —

тупы, то $\angle B = 120^\circ$, $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$. Для знаходжання стараны AC выкарыстаем тэарэму косінусаў: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$, $AC^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 196$, $AC = 14$.

Адказ: 14.

Задача 3. Знайсці плошчу трохвугольніка, дзве стараны якога роўны 6 і 8, а медыяна, праведзеная да трэцяй стараны, роўна 5.



Рыс. 172

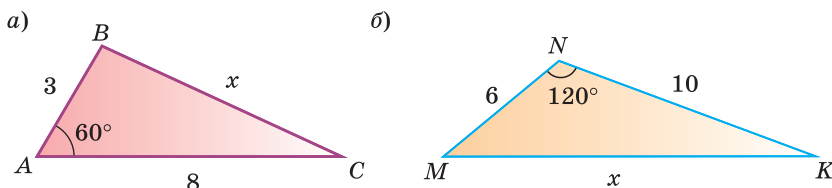
Рашэнне. Абазначым стараны трохвугольніка a , b , c (рыс. 172). Няхай $a = 6$, $b = 8$, $m_c = 5$ — медыяна. Па формуле медыяны $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, адкуль $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, $4 \cdot 25 = 72 + 128 - c^2$, $c^2 = 100$, $c = 10$. Па адваротнай тэарэме Піфагора дадзены трохвугольнік са старанамі 6, 8 і 10 — прамавугольны, яго плошча роўна палавіне здабытку катэтаў: $S_{\triangle} = \frac{ab}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

Адказ: 24.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

196. Выкарыстаўшы тэарэму косінусаў, знайдзіце старану x трохвугольніка (рыс. 173, а, б).



Рыс. 173

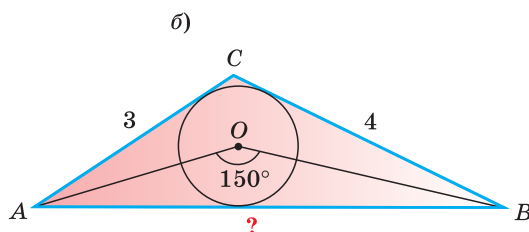
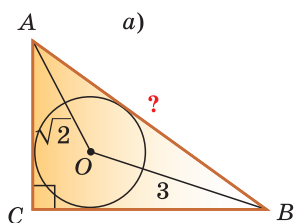
197. Выкарыстаўшы калькулятар (табліцы), знайдзіце старану c трохвугольніка, акругліўшы вынік да 0,1 см, калі:

- а) $a = 10$ см, $b = 8$ см, $\gamma = 50^\circ$;
б) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $\gamma = 132^\circ$.

198. У трохвугольніку MNK стараны $MK = 4$ см, $NK = 6$ см, $\cos K = \frac{2}{3}$. Знайдзіце даўжыню стараны MN .

199. У трохвугольніку ABC ($\angle C$ — востры) стараны $AC = 5$ см, $BC = 7$ см, $\sin C = 0,6$. Знайдзіце даўжыню стараны AB .

- 200.** а) Старана роўнастаронняга трохвугольніка ABC роўна 10 см. На старане BC адзначаны пункт M так, што $BM : MC = 2 : 3$. Знайдзіце даўжыню адрэзка AM .
 б) На гіпатэнузе AB прамавугольнага трохвугольніка ABC адзначаны пункт M так, што $AM : MB = 2 : 1$. Знайдзіце даўжыню адрэзка CM , калі $AB = 9$ см, $BC = 6$ см.
- 201.** Дыяганалі паралелаграма роўны 8 см і 14 см, косінус вострага вугла паміж імі роўны $\frac{2}{7}$. Знайдзіце перыметр паралелаграма.
- 202.** У трохвугольніку ABC праведзены медыяны $AM = 9$ см і $BK = 6$ см, якія перасякаюцца ў пункце E , $\angle MEK = 120^\circ$. Знайдзіце старану AB трохвугольніка ABC .
- 203.** а) У трохвугольніку ABC старана $AC = 8\sqrt{3}$ см, $\angle C = 30^\circ$, $BC - AB = 4$ см. Вылічыце даўжыні старон AB і BC .
 б) У трохвугольніку ABC старана $BC = 2\sqrt{3}$ см, $\angle A = 60^\circ$, $AB : AC = 1 : 2$. Вылічыце даўжыні старон AB і AC .
- 204.** У трохвугольніку ABC стараны $AB = 5$ см, $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45^\circ$. Знайдзіце найменшае магчымае значэнне даўжыні стараны AC .
- 205.** У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам O . Знайдзіце даўжыню стараны AB , калі:
- а) $\angle C = 90^\circ$, $OA = \sqrt{2}$, $OB = 3$ (рыс. 174, а);
 б) $\angle AOB = 150^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$ (рыс. 174, б).



Рыс. 174

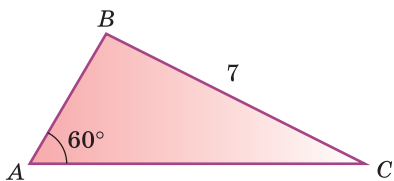
- 206.** а) У трохвугольніку ABC стараны $AB = 2$ см, $BC = \sqrt{7}$ см, $AC = 3$ см. Знайдзіце градусную меру вугла A .
 б) У трохвугольніку ABC стараны $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $AC = 7$ см. Знайдзіце градусную меру вугла B .
- 207.** а) Знайдзіце косінус найменшага вугла трохвугольніка са старанамі, роўнымі 2 см, 3 см і 4 см.
 б) Знайдзіце косінус найбольшага вугла трохвугольніка са старанамі, роўнымі 5 см, 6 см, 7 см.

208. Высветліце, якім з'яўляецца трохвугольнік (востравугольным, прамавугольным або тупавугольным), калі яго стораны роўны:

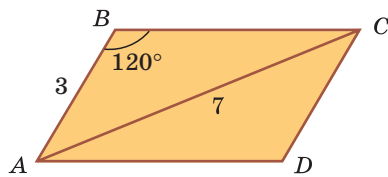
- а) 10, 8 і 7;
- б) 20, 21 і 29;
- в) 5, 6 і 8.

209. а) Перыметр трохвугольніка ABC роўны 18. Вылічыце яго плошчу па даных на рысунку 175.

б) Вугал ABC паралелаграма $ABCD$ роўны 120° . Вылічыце перыметр паралелаграма па даных на рысунку 176.



Рыс. 175



Рыс. 176

210. а) У паралелаграме $ABCD$ стораны $AB = 3$ см, $AD = 4$ см, дыяганаль $AC = 6$ см. Знайдзіце даўжыню дыяганалі BD .

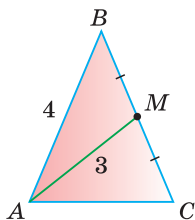
б) У паралелаграме $ABCD$ старана $AB = 2\sqrt{6}$ см, дыяганалі $AC = 4$ см, $BD = 8$ см. Знайдзіце даўжыню стараны AD .

211. а) У паралелаграме стораны роўны 7 см і 9 см, а дыяганалі адносяцца як 4 : 7. Знайдзіце дыяганалі паралелаграма.

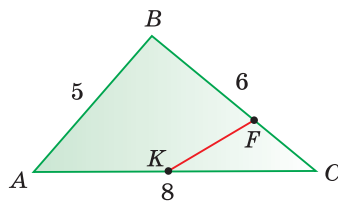
б) У паралелаграме адна з дыяганалей на 2 см большая за другую, а стораны роўны 11 см і 13 см. Знайдзіце дыяганалі паралелаграма.

212. а) У раўнабедраным трохвугольніку ABC стораны $AB = BC = 4$ см, $AM = 3$ см — медыяна (рыс. 177). Знайдзіце аснову AC трохвугольніка.

б) У трохвугольніку ABC стораны $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 8$ см. На старанах BC і AC адзначаны пункты F і K адпаведна такія, што $BF = 2FC$, $AK = KC$ (рыс. 178). Знайдзіце даўжыню адрэзка KF .



Рыс. 177



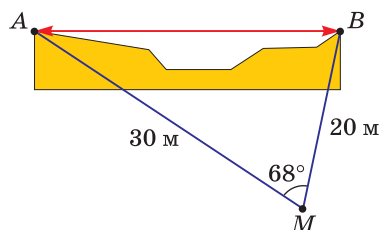
Рыс. 178

- 213.** Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік ABC , датыкаецца да стараны AC у пункце K . Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC , калі $AK = 5$ см, $KC = 10$ см, $\angle A = 60^\circ$.
- 214.** Знайдзіце даўжыню медыяны трохвугольніка са старанамі 7 см, 11 см, 12 см, праведзеную з вяршыні найбольшага вугла трохвугольніка.
- 215.** а) У трапецыі $ABCD$ ($AD \parallel BC$) дыяганалі $AC = 6$ см, $BD = 9$ см, O — пункт перасячэння дыяганалей, $\cos \angle COD = \frac{1}{4}$. Знайдзіце сярэднюю лінію трапецыі.
б) Дадзена раўнабедраная трапецыя $ABCD$ ($AD \parallel BC$), дыяганаль AC роўна 9 см, $AD - CD = 3$ см, $\cos \angle CAD = \frac{5}{6}$. Знайдзіце перыметр трапецыі.
- 216.** Дзве стараны трохвугольніка роўны 8 см і 14 см, а медыяна, праведзеная да трэцяй стараны, роўна 7 см. Знайдзіце трэцюю старану трохвугольніка.
- 217.** Чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны ў акружнасць, $AB = BC = 1$, $CD = 2$, $AD = 3$. Знайдзіце дыяганаль BD .
- 218.** У выпуклым чатырохвугольніку адрэзкі, якія злучаюць сярэдзіны процілеглых старон, роўны 2 і 3, а вугал паміж імі роўны 60° . Знайдзіце дыяганалі чатырохвугольніка.
- 219.** У трохвугольніку ABC $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, $\angle A = \alpha$. Дакажыце, што з павелічэннем вугла A старана a павялічваецца.
- 220.** Высветліце, якім з'яўляецца трохвугольнік з вышынямі, роўнымі 3, 4 і 5: востравугольным, прамавугольным ці тупавугольным.
- 221.** Дакажыце, што плошчу паралелаграма (які не з'яўляецца прамавугольнікам) можна вылічыць па формуле $S = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$, дзе d_1 , d_2 — дыяганалі ($d_2 > d_1$), α — востры вугал паралелаграма.

Рэальная геаметрыя

Заданне 1. Растлумачце, як можна знайсці адлегласць паміж пунктамі A і B (рыс. 179), калі вядомы адлегласці ад пункта M , дзе знаходзіцца назіральнік, да пунктаў A і B і вугал AMB . Знайдзіце гэту адлегласць пры ўмове, што $MA = 30$ м, $MB = 20$ м, $\angle AMB = 68^\circ$. Адказ акругліце да метраў.

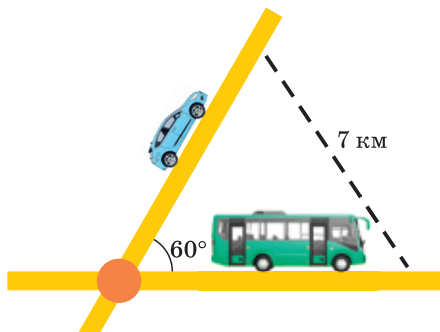
(Для самакантролю. Адказ: шуканы лік у метрах роўны колькасці дзён у лютым высакоснага года.)



Рыс. 179

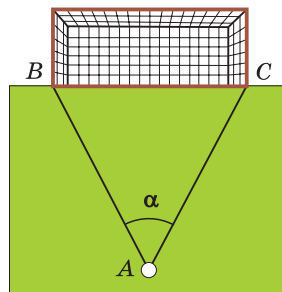
Заданне 2. З аднаго населенага пункта выходзяць дзве дарогі, вугал паміж якімі роўны 60° (рыс. 180). Адначасова па адной дарозе выязджае аўтамабіль са скорасцю 80 км/г, па другой — аўтобус са скорасцю 50 км/г. Вызначце ў мінутах, праз які час адлегласць паміж аўтобусам і аўтамабілем стане роўнай 7 км.

(Для самакантролю. Адказ: шуканы лік роўны n , дзе 1) — Меркурый; 2) — Венера; 3) — Зямля; ...; n) — Сатурн.)



Рыс. 180

Заданне 3. Вызначце вугал «абстрэлу» футбольных варот з 11-метровай адзнакі (рыс. 181). Для гэтага дастаткова вымераць крокамі адлегласці ад пункта A да пунктаў B і C і шырыню варот на школьным футбольным полі. Пры рашэнні карыстайцеся тэарэмай косінусаў.



Рыс. 181

Цікава ведаць. На фота паказаны фрагмент гульні аднаго з найлепшых беларускіх футбольных клубаў БАТЭ. БАТЭ — самы тытулаваны беларускі прафесійны клуб з горада Барысава, заснаваны ў 1996 г.

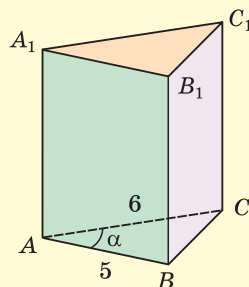
Адкажыце, як расшыфроўваецца БАТЭ.

Геаметрыя 3D

Заданне. Дадзена прамая трохвугольная прызма (яе бакавыя грані — прамавугольнікі), у аснове якой ляжыць трохвугольнік са старанамі 5 см і 6 см. Косінус вугла α паміж імі роўны 0,6 (рыс. 182). Большая па плошчы бакавая грань прызмы з'яўляецца квадратам.

Знайдзіце:

- плошчу бакавой паверхні прызмы;
- плошчу поўнай паверхні прызмы.



Рыс. 182



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Тэарэму сінусаў.
2. Асноўныя задачы, якія дазваляе рашыць тэарэма сінусаў.
3. Тэарэму косінусаў.
4. Алгарытм знаходжання косінуса вугла трохвугольніка па трох старанах.
5. Формулу, якая звязвае стараны і дыяганалі паралелаграма.
6. Як па трох старанах трохвугольніка вызначыць яго від: востравугольны, прамавугольны, тупавугольны.
7. Формулу медыяны трохвугольніка.

Умеем

1. Даказваць тэарэму сінусаў.
2. Па дзвюх старанах і вугле, процілеглым адной з гэтых старон, знаходзіць вугал, процілеглы другой старане.
3. Па двух вуглах і старане, процілеглай аднаму з вуглоў, знаходзіць старану, процілеглую другому вуглу.
4. Па старане трохвугольніка і процілеглым ёй вугле знаходзіць радыус апісанай акружнасці.
5. Даказваць тэарэму косінусаў.
6. Знаходзіць косінус вугла трохвугольніка, ведаючы тры яго стараны.
7. Знаходзіць дыяганаль паралелаграма, ведаючы дзве яго суседнія стараны і другую дыяганаль.
8. Знаходзіць медыяну трохвугольніка, ведаючы тры яго стараны.

§ 14. Формула Герона.

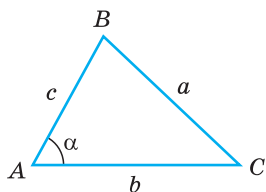
Рашэнне трохвугольнікаў

1. Формула Герона

Мы ведаем, як знайсці плошчу трохвугольніка па аснове і вышыні, праведзенай да гэтай асновы: $S = \frac{1}{2}ah$, а таксама па дзвюх старанах і вугле паміж імі: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Цяпер мы выведзем формулу знаходжання плошчы трохвугольніка па трох старанах.

Тэарэма (формула Герона).

Плошчу трохвугольніка са старанамі a , b і c можна знайсці па формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, дзе $p = \frac{a+b+c}{2}$ — паўперыметр трохвугольніка.



Рыс. 183

Доказ. $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$ (рыс. 183). З асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ вынікае, што $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. Для $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ сінус дадатны.

Таму $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. З тэарэмы косінусаў

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \text{адкуль} \quad \cos^2 \alpha = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2. \quad \text{Тады}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2} = \frac{1}{2}bc \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)} =$$

$$= bc \cdot \frac{1}{bc} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2}} = \sqrt{\frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}.$$

Паколькі $\frac{b+c-a}{2} = \frac{b+c+a-2a}{2} = p-a$, $\frac{a-b+c}{2} = \frac{a+c+b-2b}{2} = p-b$,

$$\frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = p-c, \quad \text{то} \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad \text{Тэарэма даказана.}$$

2. Рашэнне трохвугольнікаў

Рашэннем трохвугольніка называецца знаходжанне яго невядомых старон і вуглоў (часам іншых элементаў) па даных, якія вызначаюць трохвугольнік. Такая задача часта сустракаецца на практыцы, напрыклад у геадэзіі, астраноміі, будаўніцтве, навігацыі.

Разгледзім алгарытмы рашэння трох задач.

Задача А (рашэнне трохвугольніка па дзвюх старанах і вугле паміж імі).

Дадзена: a, b, γ (рыс. 184).

Знайсці: c, α, β .

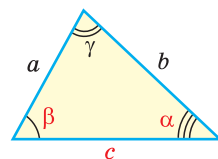
Рашэнне.

1) Па тэарэме косінусаў $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$.

2) Па выніку з тэарэмы косінусаў $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

3) Вугал α знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц.

4) Вугал $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$.



Рыс. 184

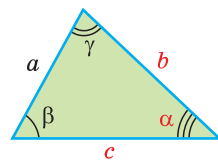
Зайвага. Знаходжанне вугла α па тэарэме сінусаў $\left(\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}, \quad \sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \gamma}{c} \right)$

патрабуе высвятлення таго, востры ці тупы вугал α .

Задача В (рашэнне трохвугольніка па старане і двух прылеглых да яе вуглах).

Дадзена: a, β, γ (рыс. 185).

Знайсці: α, b, c .



Рыс. 185

Рашэнне.

1) Вугал $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$.

2) Па тэарэме сінусаў $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ ($\sin \alpha$ і $\sin \beta$ знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц).

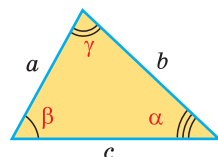
3) Старану c можна знайсці пры дапамозе тэарэмы косінусаў або тэарэмы сінусаў: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$ або $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$, $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ ($\cos \gamma$ і $\sin \gamma$ знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц).

Задача С (рашэнне трохвугольніка па трох старанах).

Дадзена: a, b, c (рыс. 186).

Знайсці: α, β, γ і радыус R апісанай акружнасці.

Рашэнне.



Рыс. 186

1) Па выніку з тэарэмы косінусаў $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

2) Ведаючы $\cos \alpha$, вугал α знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц.

3) Аналагічна знаходзім вугал β .

4) Вугал $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$.

5) Радыус R апісанай акружнасці трохвугольніка можна знайсці па формуле $R = \frac{abc}{4S}$, дзе $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Заўвага. Другім спосабам знаходжання R будзе пошук косінуса любога вугла пры дапамозе тэарэмы косінусаў $\left(\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$, затым знаходжанне па косінусе вугла яго сінуса $(\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha)$ і, нарэшце, выкарыстанне тэарэмы сінусаў $\left(\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \right)$ для знаходжання R .



Заданні да § 14

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. Знайсці плошчу S і радыус R апісанай акружнасці трохвугольніка са старанамі 9, 12 і 15.

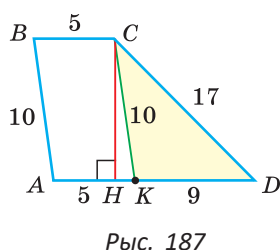
Рашэнне. *Спосаб 1.* Выкарыстаем формулу Герона. Абазначым $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$. Атрымаем: $p = \frac{9+12+15}{2} = 18$, $p - a = 18 - 9 = 9$, $p - b =$

$= 18 - 12 = 6$, $p - c = 18 - 15 = 3$. Тады $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = 9 \cdot 6 = 54$. Радыус R апісанай акружнасці знойдзем з формулы $S = \frac{abc}{4R}$. Маем: $R = \frac{abc}{4S} = \frac{9 \cdot 12 \cdot 15}{4 \cdot 54} = 7,5$.

Спосаб 2. Паколькі $9^2 + 12^2 = 15^2$, г. зн. $(3 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 4)^2 = (3 \cdot 5)^2$, то трохвугольнік — прамавугольны па адваротнай тэарэме Піфагора. Яго плошча роўна палавіне здабытку катэтаў: $S = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$, а радыус апісанай акружнасці роўны палавіне гіпатэнузы: $R = \frac{15}{2} = 7,5$.

Адказ: $S = 54$, $R = 7,5$.

Задача 2. Знайсці плошчу трапецыі з асновамі, роўнымі 5 і 14, і бакавымі старонамі, роўнымі 10 і 17.



Рашэнне. Няхай у трапецыі $ABCD$ асновы $AD = 14$ і $BC = 5$, бакавыя стораны $AB = 10$ і $CD = 17$. Правядзём $CK \parallel AB$ (рыс. 187). Паколькі $ABCK$ — паралелаграм, то $CK = AB = 10$, $AK = BC = 5$, адкуль $KD = AD - AK = 9$. Знойдзем вышыню CH трохвугольніка KCD , якая роўна вышыні трапецыі. Плошчу трохвугольніка KCD знойдзем па формуле Герона, абазначыўшы яго стораны $a = 10$, $b = 17$, $c = 9$. Атрымаем:

$$p = \frac{10 + 17 + 9}{2} = 18, \quad p - a = 18 - 10 = 8,$$

$$p - b = 18 - 17 = 1, \quad p - c = 18 - 9 = 9,$$

$$S_{KCD} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 9} = 36. \quad \text{Паколькі } S_{KCD} = \frac{1}{2} KD \cdot CH, \text{ то } \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot CH = 36,$$

$$CH = 8. \quad \text{Плошча трапецыі } S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = \frac{14 + 5}{2} \cdot 8 = 76.$$

Адказ: 76.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

222. Стораны трохвугольніка $a = 20$, $b = 13$, $c = 11$. Знайдзіце:

а) паўперыметр трохвугольніка $p = \frac{a+b+c}{2}$;

б) значэнні выразаў $p - a$, $p - b$, $p - c$;

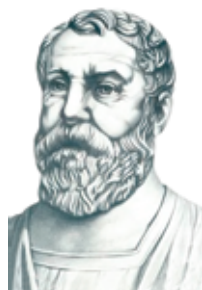
в) плошчу трохвугольніка па формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

- 223.** Пры дапамозе формулы Герона знайдзіце плошчу трохвугольніка са старанамі:
а) 7 см, 15 см, 20 см;
б) 10 м, 10 м, 4 м.
- 224.** а) Знайдзіце плошчу паралелаграма, адна старана якога роўна 15 см, а дыяганалі — 8 см і 26 см.
б) Знайдзіце плошчу паралелаграма, дзве стараны якога роўны 9 см і 10 см, а адна з дыяганалей — 17 см.
- 225.** а) Знайдзіце найбольшую вышыню трохвугольніка са старанамі 20 см, 13 см, 11 см.
б) Знайдзіце найменшую вышыню трохвугольніка са старанамі 40 см, 37 см, 13 см.
- 226.** а) Знайдзіце плошчу трапецыі, у якой асновы роўны 5 см і 15 см, а бакавыя стораны — 9 см і 17 см.
б) Знайдзіце плошчу трапецыі, у якой асновы роўны 3 см і 12 см, а дыяганалі — 13 см і 14 см.
- 227.** Знайдзіце плошчу трохвугольніка і радыус апісанай акружнасці трохвугольніка са старанамі 15 см, 13 см і 4 см.
- 228.** Рашыце трохвугольнік, у якога вядомы:
а) $a = 4$, $b = 5$, $\gamma = 30^\circ$; б) $a = 1$, $b = 2$, $\gamma = 45^\circ$;
в) $a = 8$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 50^\circ$; г) $b = 10$, $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 32^\circ$;
д) $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$; е) $a = 50$, $b = 40$, $c = 20$.
-  **229.** Медыяны, праведзеныя да дзвюх старон трохвугольніка, роўны 12 см і 9 см, трэцяя старана трохвугольніка роўна 6 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.
-  **230.** а) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік са старанамі, роўнымі 29 см, 25 см і 6 см.
б) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка са старанамі, роўнымі 20 см, 15 см, 7 см.
-  **231.** Знайдзіце радыус акружнасці, якая датыкаецца да старон трохвугольніка, роўных 13 і 15, цэнтр якой ляжыць на трэцяй старане, роўнай 14.
-  **232.** Цэнтр O акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC , злучаны з яго вяршынямі адрэзкамі. Плошчы трохвугольнікаў, на якія разбіваецца трохвугольнік ABC , роўны 7 см^2 , 15 см^2 , 20 см^2 . Знайдзіце стораны трохвугольніка.

Цікава ведаць. Герон Александрыіскі — адзін з выдатных інжынераў антычнага свету. Многія яго вынаходніцтвы да гэтага часу выклікаюць захапленне. Вось толькі некаторыя з іх: адомер — механізм для знаходжання адлегласцей на мясцовасці, аўтамат па продажы вады, устравы для аўтаматычнага адкрывання дзвярэй і інш.

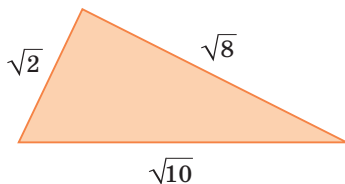


Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, чым яшчэ знакаміты матэматык Герон. Якія трохвугольнікі называюцца *геронавымі трохвугольнікамі*? Устанавіце пры дапамозе Вікіпедыі, чаму гэтага вучонага звалі Геронам Александрыіскім і ці мог ён сустракацца з Піфагорам.



Гімнастыка розуму

Прыдумайце «прыгожы» (рацыянальны) спосаб знаходжання плошчы пака-занага на рысунку 188 трохвугольніка.



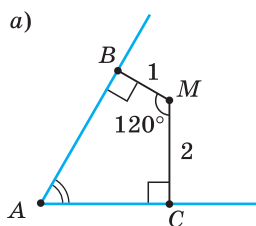
Рыс. 188



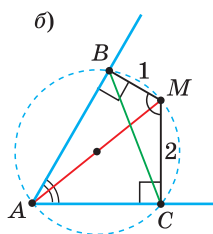
§ 15. Крэатыўная геаметрыя

1. Прыклады рашэння задач з выкарыстаннем тэарэмы сінусаў і тэарэмы косінусаў

Задача 1. Унутры вугла A , роўнага 60° , адзначаны пункт M , які знаходзіцца на адлегласці 1 ад адной стараны вугла і на адлегласці 2 ад другой стараны. Знайсці адлегласць ад пункта M да вяршыні вугла A (рыс. 189, а).



Рыс. 189



Рашэнне. Няхай $MB = 1$, $MC = 2$, $MB \perp AB$, $MC \perp AC$. Знайдзем даўжыню адрэзка AM . Сума вуглоў чатырохвугольніка $ABMC$ роўна 360° . Таму $\angle BMC = 120^\circ$.

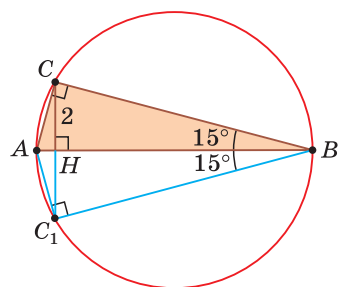
Паколькі ў чатырохвугольніку $ABMC$ $\angle B + \angle C = 180^\circ$, то каля яго можна апісаць акружнасць па прымеце ўпісанага чатырохвугольніка (рыс. 189, б). Паколькі прамы ўпісаны вугал абаяіраецца на дыяметр, то

адрэзак AM — дыяметр гэтай акружнасці, г. зн. $AM = 2R$, дзе R — радыус. З $\triangle BMC$ па тэарэме косінусаў $BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2 \cdot MB \cdot MC \cdot \cos 120^\circ = 1 + 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$, $BC = \sqrt{7}$. З $\triangle ABC$ па тэарэме сінусаў $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, адкуль $\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = AM$, $AM = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Адказ: $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Заўвага. Другім спосабам рашэння будзе прадаўжэнне адрэзка BM да перасячэння з праменем AC і выкарыстанне ўласцівасцей утвораных прамавугольных трохвугольнікаў. Разгледзьце гэты спосаб самастойна.

Задача 2. У прамавугольным трохвугольніку ABC вядома: $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 15^\circ$, вышыня $CH = 2$ (рыс. 190). Знайсці гіпатэнузу AB .

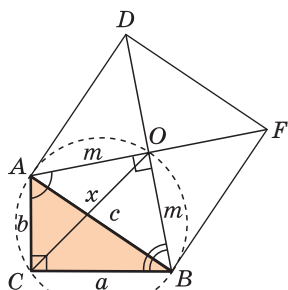


Рыс. 190

Рашэнне. Пабудуем $\triangle ABC_1$, сіметрычны $\triangle ABC$ адносна прамой AB (гл. рыс. 190). Паколькі $\angle ACB + \angle AC_1B = 180^\circ$, то каля чатырохвугольніка $ACBC_1$ можна апісаць акружнасць, дзе AB — дыяметр гэтай акружнасці (прамы ўпісаны вугал абапіраецца на дыяметр). Трохвугольнік C_1CB упісаны ў гэту акружнасць, $\angle CBC_1 = 30^\circ$, $CC_1 = 4$. Па тэарэме сінусаў $\frac{CC_1}{\sin \angle CBC_1} = 2R$, $\frac{4}{\sin 30^\circ} = AB$, адкуль $AB = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$.

Адказ: 8.

Задача 3. Дадзены прамавугольны трохвугольнік ABC з катэтамі $BC = a$ і $AC = b$. На гіпатэнузе AB як на старане пабудаваны квадрат $ADFB$ (рыс. 191). Знайсці адлегласць ад цэнтра O гэтага квадрата да вяршыні C прамого вугла, г. зн. адрэзак CO .



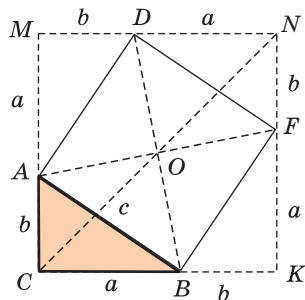
Рыс. 191

Рашэнне. *Спосаб 1.* Паколькі $\angle AOB = 90^\circ$ (дыяганалі квадрата $ADFB$ узаемна перпендыкулярныя), то $\angle AOB + \angle ACB = 180^\circ$, таму чатырохвугольнік $AOCB$ з'яўляецца ўпісаным у акружнасць, яе дыяметр $AB = c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тады $AO = OB = m = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Няхай $CO = x$. Па тэарэме косінусаў з $\triangle AOC$ знаходзім $\cos \angle OAC = \frac{b^2 + m^2 - x^2}{2bm}$, з $\triangle BOC$ знаходзім $\cos \angle OBC = \frac{a^2 + m^2 - x^2}{2am}$.

Па ўласцівасці ўпісанага чатырохвугольніка $\angle OAC + \angle OBC = 180^\circ$. Паколькі $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, то $\frac{b^2 + m^2 - x^2}{2bm} = -\frac{a^2 + m^2 - x^2}{2am}$, адкуль знаходзім $x^2 = ab + m^2 = ab + \frac{c^2}{2} = \frac{2ab + a^2 + b^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$. Тады $x = CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Спосаб 2. Выкарыстаем тэарэму Пталемея, якая гаворыць: «Здабытак дыяганалей упісанага чатырохвугольніка роўны суме здабыткаў яго процілеглых старон». Для нашай задачы атрымліваем (гл. рыс. 191):

$$CO \cdot AB = CB \cdot AO + AC \cdot OB, \quad CO \cdot c = a \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} + b \cdot \frac{c}{\sqrt{2}}, \quad \text{адкуль} \quad CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

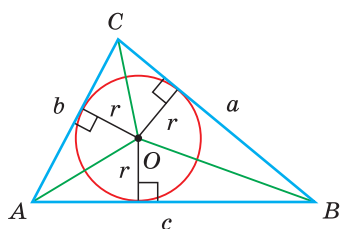


Рыс. 192

Спосаб 3. Дабудуем $\triangle ABC$ да квадрата $CMNK$, як паказана на рысунку 192. Можна паказаць, што цэнтр квадрата $CMNK$ супадае з цэнтрам квадрата $ADFB$, г. зн. з пунктам O (пункты B і D сіметрычныя адносна цэнтраў абодвух квадратаў). Тады $CN = (a+b)\sqrt{2}$, $CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Адказ: } CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Задача 4. Пункт O — цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC , $S_{AOB} = 7$, $S_{BOC} = 15$, $S_{AOC} = 20$. Знайсці стораны трохвугольніка (гл. задачу 232).



Рыс. 193

Рашэнне. Няхай $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ і r — радыус упісанай акружнасці (рыс. 193). Тады $S_{BOC} = \frac{1}{2}ar$, $S_{AOB} = \frac{1}{2}cr$, $S_{AOC} = \frac{1}{2}br$.

$$\text{Адсюль } a = \frac{2S_{BOC}}{r} = \frac{30}{r}, \quad b = \frac{2S_{AOC}}{r} = \frac{40}{r}, \quad c = \frac{2S_{AOB}}{r} = \frac{14}{r}.$$

Выкарыстаем формулу Герона:

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{30}{r} + \frac{40}{r} + \frac{14}{r} \right) = \frac{42}{r}, \quad p - a = \frac{12}{r}, \quad p - b = \frac{2}{r},$$

$$p - c = \frac{28}{r}; \quad S_{ABC} = \sqrt{\frac{42}{r} \cdot \frac{12}{r} \cdot \frac{2}{r} \cdot \frac{28}{r}} = \frac{168}{r^2}.$$

З другога боку, $S_{ABC} = 7 + 15 + 20 = 42$.

$$\text{З ураўнення } \frac{168}{r^2} = 42 \text{ знаходзім } r = 2.$$

$$\text{Адкуль } a = \frac{30}{2} = 15, \quad b = \frac{40}{2} = 20, \quad c = \frac{14}{2} = 7.$$

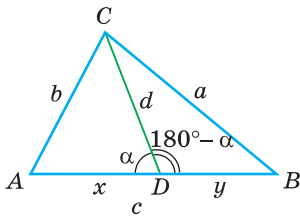
Адказ: 15; 20; 7.

2. Тэарэма Сцюарта

Наступная тэарэма дазваляе знайсці даўжыню адрэзка, які злучае вяршыню трохвугольніка з пунктам на процілеглай старане.

Тэарэма Сцюарта. *Калі a , b і c — стараны трохвугольніка і адрэзак d дзеліць старану c на адрэзкі, роўныя x і y (рыс. 194), то справядлівая формула*

$$d^2 = a^2 \cdot \frac{x}{x+y} + b^2 \cdot \frac{y}{x+y} - xy.$$



Рыс. 194

Доказ. Па тэарэме косінусаў з $\triangle ACD$ і $\triangle BCD$ (гл. рыс. 194) вынікае:

$$b^2 = d^2 + x^2 - 2dx \cos \alpha, \quad (1)$$

$$a^2 = d^2 + y^2 - 2dy \cos(180^\circ - \alpha) = d^2 + y^2 + 2dy \cos \alpha. \quad (2)$$

Памножым абедзве часткі роўнасці (1) на y , роўнасці (2) — на x : $yb^2 = yd^2 + yx^2 - 2ydx \cos \alpha$, $xa^2 = xd^2 + xy^2 + 2xdy \cos \alpha$.

Складзём пачленна атрыманыя роўнасці:

$$xa^2 + yb^2 = d^2(x+y) + xy(x+y).$$

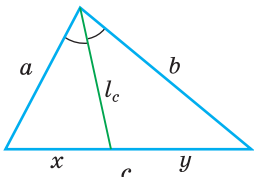
З апошняй роўнасці выразім d^2 :

$$d^2 = a^2 \cdot \frac{x}{x+y} + b^2 \cdot \frac{y}{x+y} - xy. \text{ Тэарэма даказана.}$$

Вынік.

Бісектрысу трохвугольніка можна знайсці па формуле (рыс. 195)

$$l_c^2 = ab - xy.$$



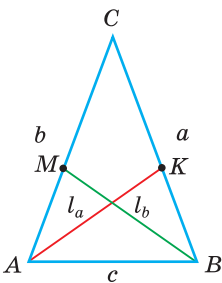
Рыс. 195

Доказ. Па ўласцівасці бісектрысы трохвугольніка $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Падзелім старану c у адносіне $a : b$ і атрыма-

ем: $x = \frac{c}{a+b} \cdot a$, $y = \frac{c}{a+b} \cdot b$. Па тэарэме Сцюарта

$$\begin{aligned} l_c^2 &= a^2 \cdot \frac{y}{c} + b^2 \cdot \frac{x}{c} - xy = a^2 \cdot \frac{b}{a+b} + b^2 \cdot \frac{a}{a+b} - xy = \\ &= \frac{ab}{a+b} \cdot (a+b) - xy = ab - xy. \end{aligned}$$

Задача 5. *Даказаць, што калі ў трохвугольніку дзве бісектрысы роўныя, то трохвугольнік — раўнабадраны (тэарэма Штэйнера — Лемуса).*



Рыс. 196

Доказ. Няхай дадзены трохвугольнік ABC , $AK = l_a$ і $BM = l_b$ — бісектрысы, праведзеныя да старон $BC = a$ і $AC = b$ адпаведна, і $l_a = l_b$ (рыс. 196). Трэба даказаць, што $a = b$. Выразім l_a і l_b праз a , b і c і прыраўняем атрыманыя выразы.

Бісектрыса дзеліць процілеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам. Таму

$$\frac{CK}{BK} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \text{ адкуль } CK = \frac{a}{b+c} \cdot b, \quad BK = \frac{a}{b+c} \cdot c;$$

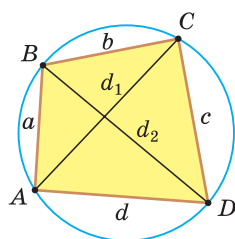
$$\frac{CM}{AM} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \text{ адкуль } CM = \frac{b}{a+c} \cdot a, \quad AM = \frac{b}{a+c} \cdot c.$$

Па формуле бісектрысы трохвугольніка $l_a^2 = bc - \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$,
 $l_b^2 = ac - \frac{ab}{a+c} \cdot \frac{bc}{a+c} = ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2}$.

З умовы $l_a = l_b$ вынікае: $ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$. Пасля пераносу складаемых у адну частку роўнасці, раскладання мнагачленаў на множнікі і скарачэння на c (зрабіце гэта самастойна) атрымаем:
 $(a-b) \cdot \left(1 + ab \cdot \frac{a^2 + ab + b^2 + 2c(a+b) + c^2}{(a+c)^2(b+c)^2}\right) = 0$. Адсюль $a - b = 0$, $a = b$ (другі множнік пры дадатных a , b і c большы за нуль). Сцверджанне даказана.

3. Тэарэма Пталемея аб упісаным чатырхвугольніку

Здабытак дыяганалей упісанага чатырхвугольніка роўны суме здабыткаў яго процілеглых старон, г. зн. $d_1 d_2 = ac + bd$ (рыс. 197).



Рыс. 197

Доказ. З $\triangle ABC$ і $\triangle ADC$ па тэарэме косінусаў
 $\cos B = \frac{a^2 + b^2 - d_1^2}{2ab}$, $\cos D = \frac{c^2 + d^2 - d_1^2}{2cd}$.

Паколькі $\angle D = 180^\circ - \angle B$ (па ўласцівасці ўпісанага чатырхвугольніка) і $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, то $\frac{a^2 + b^2 - d_1^2}{2ab} = -\frac{c^2 + d^2 - d_1^2}{2cd}$, адкуль $d_1^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$.

Аналагічна з $\triangle ABD$ і $\triangle CBD$ атрымаем $d_2^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$.

Тады $d_1^2 \cdot d_2^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd} \cdot \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} = (ac + bd)^2$,

$d_1 \cdot d_2 = ac + bd$.

Тэарэма даказана.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

233. Дакажыце, што калі m_a , m_b і m_c — медыяны трохвугольніка са старанамі a , b і c , то справядлівыя наступныя формулы:

а) $a = \frac{2}{3} \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$; б) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

234. Двума спосабамі (алгебраічным і геаметрычным) знайдзіце плошчу трохвугольніка з медыянамі, роўнымі 3 см, 4 см і 5 см.

235. У трохвугольнік упісана акружнасць радыусам 2, якая пунктам дотыку дзеліць адну з яго сторон на адрэзкі, роўныя 1 і 6. Знайдзіце перыметр трохвугольніка.

- 236.** Выкарыстаўшы тэарэму Пталемея, рашыце задачу: «Каля роўнастаронняга трохвугольніка ABC апісана акружнасць, на дузе BC адзначаны пункт M . Дакажыце, што $AM = BM + CM$ ».
- 237.** У трохвугольніку ABC праведзены адрэзак AK , дзе $K \in BC$. Выкарыстаўшы тэарэму Сцюарта, выразіце даўжыню адрэзка AK праз адрэзкі AB , AC , BK і CK . Вылічыце даўжыню адрэзка AK , калі $AB = 6$, $AC = 9$, $BK = 2$, $CK = 4$.
- 238.** Пры дапамозе тэарэмы Сцюарта выведзіце формулу для медыяны m_a трохвугольніка са старанамі a , b і c : $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.
- 239.** Медыяна трохвугольніка роўна m_a і ўтварае з суседнімі старанамі b і c вуглы β_1 і γ_1 адпаведна. Знайдзіце стараны b і c .
- 240.** Вуглы трохвугольніка роўны α , β і γ . Знайдзіце старану a трохвугольніка, калі:
- перыметр трохвугольніка роўны P ;
 - плошча трохвугольніка роўна S .
- 241.** а) Знайдзіце бісектрысу AK трохвугольніка ABC , калі $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 7$.
б) Знайдзіце бісектрысу раўнабедранага трохвугольніка з асновай 5 і бакавой стараной 20, праведзеную да бакавой стараны.
- 242.** Стараны паралелаграма роўны a , b , дыяганалі — d_1 і d_2 . Дакажыце, што $a^4 + b^4 = d_1^2 d_2^2$ тады і толькі тады, калі вугал паралелаграма роўны 45° .
- 243.** а) Стараны трохвугольніка роўны a , b і c . Дакажыце, што медыяны m_a і m_b трохвугольніка перпендыкулярныя тады і толькі тады, калі $a^2 + b^2 = 5c^2$.
б) Дакажыце, што медыяны m_a і m_b трохвугольніка перпендыкулярныя тады і толькі тады, калі $m_c = \frac{3}{2}c$.
- 244.** У паралелаграме $ABCD$ вядома: $AD = a$, $AB = b$, $\angle A = \alpha$.
а) Знайдзіце дыяганалі $BD = d_1$ і $AC = d_2$ паралелаграма ($d_1 < d_2$) і сінус вугла ϕ паміж дыяганалямі.
б) Рашыце задачу а) пры ўмове, што $a = 2$, $b = 1$, $\angle A = 60^\circ$.
- 245.** Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудуйце па дадзеных адрэзках a і b адрэзак x , калі:
- $x = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$;
 - $x = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$.

ЗАПАМІНАЕМ

1. Тэарэма сінусаў. Стораны трохвугольніка прапарцыянальны сінусам процілеглых вуглоў. Адносіна стараны трохвугольніка да сінуса процілеглага вугла роўна падвоенаму радыусу яго апісанай акружнасці:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

2. Радыус апісанай акружнасці трохвугольніка можна знайсці, выкарыстаўшы формулы: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, $S = \frac{abc}{4R}$.

3. Тэарэма косінусаў. Квадрат любой стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон мінус падвоены здабытак гэтых старон на косінус вугла паміж імі: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

4. Няхай a, b, c — стараны трохвугольніка і c — найбольшая старана. Калі $a^2 + b^2 < c^2$, то трохвугольнік тупавугольны, калі $a^2 + b^2 > c^2$, то трохвугольнік востравугольны, калі $a^2 + b^2 = c^2$, то трохвугольнік прамавугольны.

5. Сума квадратаў дыяганалей паралелаграма роўна суме квадратаў усіх яго старон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.

6. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.



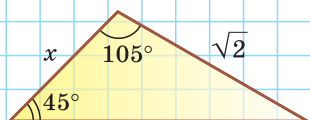
7. Формула медыяны: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

ПРАВЯРАЕМ СЯБЕ

Тэст 1

Даўжыня адрэзка x роўна:

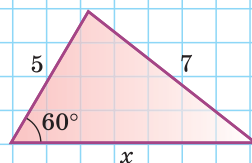
а) $\sqrt{2}$; б) 1; в) $\sqrt{3}$; г) 2.



Тэст 2

Даўжыня адрэзка x роўна:

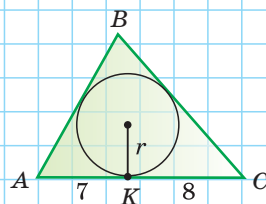
а) 6; б) 8; в) 7; г) $5\sqrt{3}$.



Тэст 3

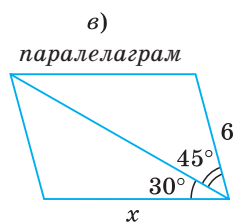
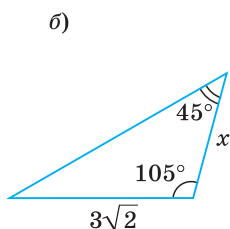
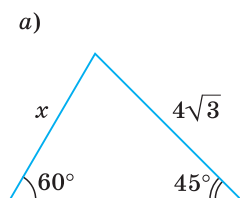
Знайдзіце радыус r упісанай акружнасці трохвугольніка ABC , калі яго перыметр роўны 42 і $AK = 7$, $KC = 8$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 1,5.

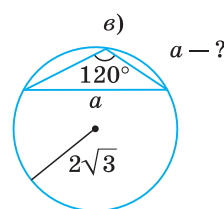
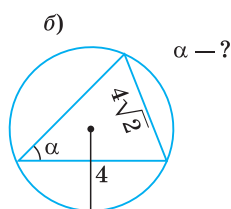
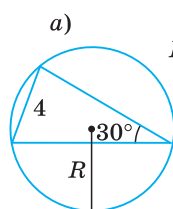


ПАДРЫХОЎКА ДА КАНТРОЛЬНАЙ РАБОТЫ 3

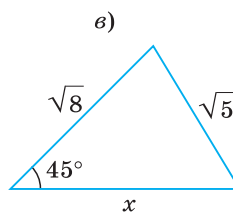
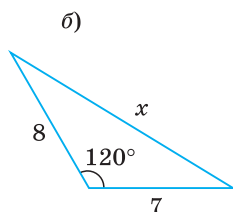
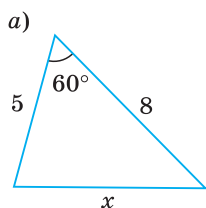
1. Знайдзіце даўжыню стараны x .



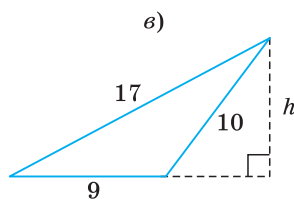
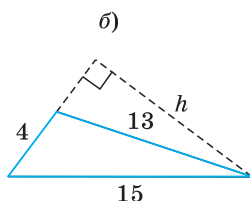
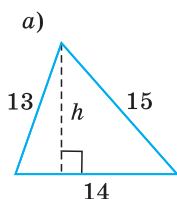
2. Знайдзіце радыус R (рыс. а), вугал α (рыс. б) і старану a (рыс. в).



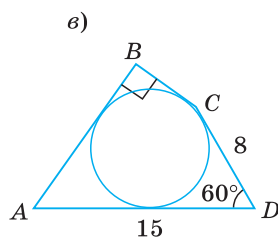
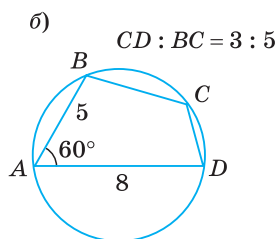
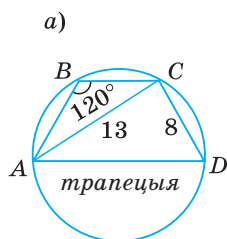
3. Знайдзіце даўжыню стараны x .



4. Ведаючы тры стараны трохвугольніка, знайдзіце S , h і R .



5. Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $ABCD$.



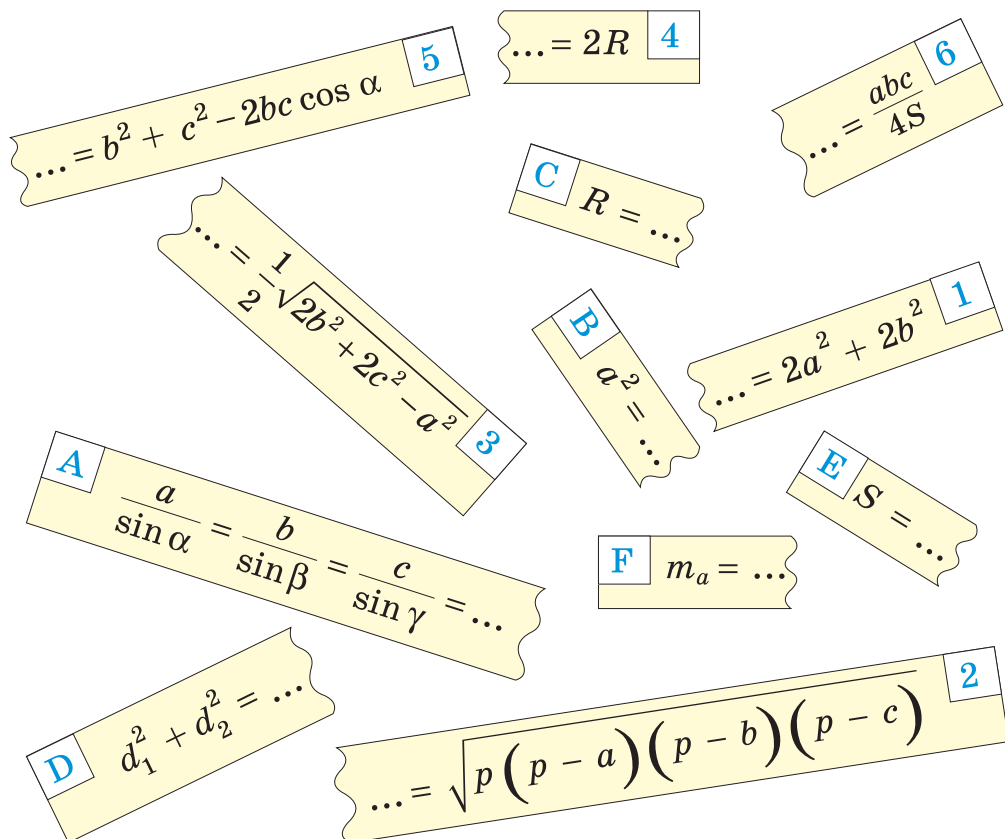
ТЭМЫ ПРАЕКТАЎ



1. Тэарэма Брэтшнайдэра (тэарэма косінусаў для чатырохвугольніка).
2. Тэарэма Сцюарта і яе дадаткі.
3. Тэарэма Апалонія.
4. Формула Браhmaгупты.

Экспрэс-паўтарэнне главы III

Злучыце падзеленыя палавінкі формул па ўзоры: A4 і г. д. Растлумачце, што азначае кожная формула.

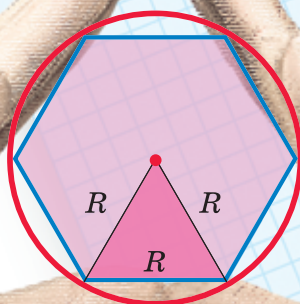


Глава IV

Правільныя многавугольнікі

У гэтай главе вы даведаецеся:

- Аб азначэнні і ўласцівасцях правільных многавугольнікаў
- Аб тым, што правільны чатырохвугольнік — гэта квадрат
- Чаму плошча круга роўна πR^2



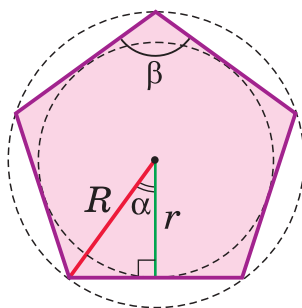
$$C_{\text{кр}} = 2\pi R$$

$$S_{\text{кр}} = \pi R^2$$

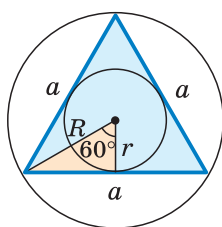
Правільныя многавугольнікі

УСЕ СТОРАНЫ РОЎНЫЯ І ЎСЕ ВУГЛЫ РОЎНЫЯ

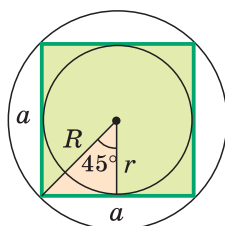
акружнасць
можна
апісаць,
унісаць,
цэнтры
супадаюць



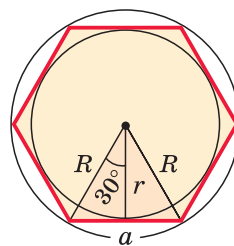
$$\beta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$



$n = 3$

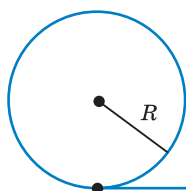


$n = 4$



$n = 6$

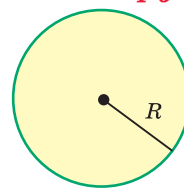
ДАЎЖЫНЯ АКРУЖНАСЦІ І ПЛОШЧА КРУГА



$$C = 2\pi R$$

даўжыня акружнасці

плошча круга

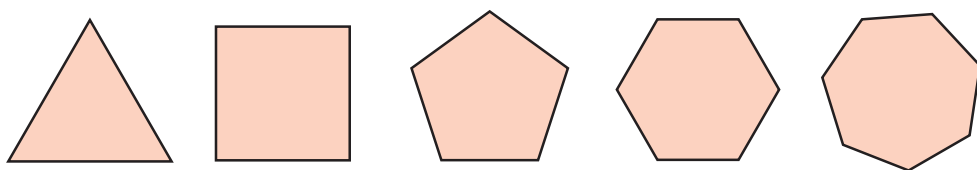


$$S = \pi R^2$$

§ 16. Правільныя многавугольнікі

Азначэнне. Правільным многавугольнікам называецца выпуклы многавугольнік, у якога ўсе стораны роўныя і ўсе вуглы роўныя.

На рысунку 198 паказаны правільныя трохвугольнік, чатырохвугольнік, пяцівугольнік, шасцівугольнік, сямівугольнік. Правільны трохвугольнік — гэта роўнастаронні трохвугольнік, а правільны чатырохвугольнік — гэта квадрат.



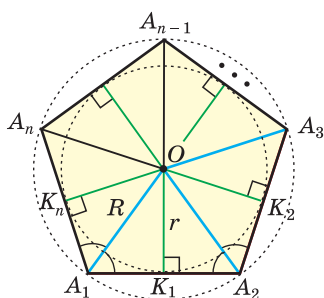
Рыс. 198

Адной з найбольш простых задач з'яўляецца задача знаходжання велічыні ўнутранага вугла правільнага многавугольніка. Паколькі ўсе вуглы правільнага n -вугольніка роўныя паміж сабой, а сума вуглоў любога n -вугольніка роўна $180^\circ(n - 2)$, то вугал β правільнага n -вугольніка можна знайсці па формуле

$$\beta = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}.$$

Напрыклад, для правільнага шасцівугольніка $\beta = \frac{180^\circ \cdot (6 - 2)}{6} = 120^\circ$.

Тэарэма. Каля любога правільнага многавугольніка можна апісаць акружнасць, у любы правільны многавугольнік можна ўпісаць акружнасць; цэнтры гэтых акружнасцей супадаюць.



Рыс. 199

Доказ. У правільным многавугольніку $A_1A_2A_3\dots A_n$ правядзём бісектрысы ўнутраных вуглоў A_1 і A_2 . Няхай O — пункт перасячэння гэтых бісектрыс (рыс. 199). Паколькі $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1$ як палавіны роўных вуглоў, то $\triangle A_1OA_2$ — раўнабедраны з асновай A_1A_2 . Правёўшы адрэзак OA_3 , атрымаем $\triangle A_2OA_3$, роўны $\triangle A_1OA_2$ па дзвюх старанах і вугле паміж імі ($A_1A_2 = A_2A_3$, старана OA_2 — агульная, $\angle OA_2A_1 = \angle OA_2A_3$). Злучыўшы пункт O адрэзкамі з астатнімі вершынямі, атрымаем мноства роўных раўнабедраных трохвугольнікаў. Адсюль $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_n$. Таму акружнасць

з цэнтрам O і радыусам $R = OA_1$ пройдзе праз усе вяршыні многавугольніка $A_1A_2A_3\dots A_n$, г. зн. будзе яго апісанай акружнасцю. А паколькі вышыні названых роўных раўнабедраных трохвугольнікаў, праведзеныя да іх асноў, роўныя, г. зн. $OK_1 = OK_2 = OK_3 = \dots = OK_n$, то пункт O — таксама і цэнтр упісанай акружнасці многавугольніка $A_1A_2A_3\dots A_n$, радыус якой $r = OK_1$. Тэарэма даказана.

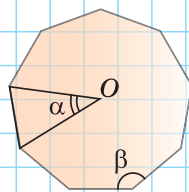
Пункт O называецца цэнтрам правільнага n -вугольніка.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

На рысунку паказаны правільны дзевяцівугольнік і яго цэнтр O . Знайдзіце велічыню вугла α і велічыню вугла β .

а) 36° , 144° ; б) 40° , 120° ; в) 30° , 120° ; г) 40° , 140° .



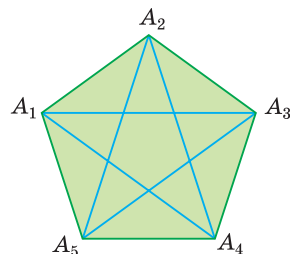
Заданні да § 16

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 246.** Сума даўжынь дзвюх старон правільнага шасцівугольніка роўна 20 см. Знайдзіце перыметр гэтага многавугольніка.
- 247.** Пакажыце відарыс правільнага васьмівугольніка $A_1A_2A_3\dots A_8$, «адрэзаўшы» ў квадрата вугалкі. Адзначце цэнтр O гэтага многавугольніка. Знайдзіце $\angle A_1OA_2$, $\angle A_1A_2O$, $\angle A_1A_2A_3$. У адказ запішыце градусную меру вугла $A_1A_2A_3$.
- 248.** Выкарыстаўшы формулу сумы вуглоў многавугольніка, знайдзіце градусную меру вугла правільнага n -вугольніка, калі n роўна:
 - а) 5; б) 10; в) 18.
- 249.** Унутраны вугал правільнага n -вугольніка роўны 150° . Знайдзіце колькасць старон гэтага n -вугольніка.
- 250.** Сума градусных мер двух вуглоў правільнага многавугольніка роўна 324° , а яго перыметр роўны 280 см. Знайдзіце даўжыню стараны гэтага многавугольніка.
- 251.** Дадзены правільны n -вугольнік $A_1A_2A_3\dots A_n$, пункт O — яго цэнтр, $\angle OA_1A_2 = 85^\circ 30'$, $A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 = 6$ см. Знайдзіце перыметр гэтага n -вугольніка.
- 252.** Знешні вугал правільнага n -вугольніка $A_1A_2A_3\dots A_n$ роўны 60° , перыметр — 72 см. Знайдзіце $S_{A_1OA_2}$, дзе O — цэнтр n -вугольніка.

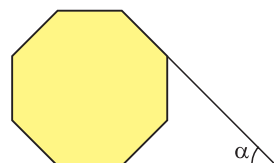
253. Дадзены правільны пяцівугольнік $A_1A_2A_3A_4A_5$ (рыс. 200).

- Знайдзіце вуглы трохвугольніка $A_1A_2A_3$.
- Знайдзіце вуглы трохвугольніка $A_1A_3A_5$.
- Дакажыце, што ўсе дыяганалі пяцівугольніка роўныя.
- Дакажыце, што дыяганаль A_1A_3 паралельна старане A_4A_5 .
- Дакажыце, што пяцівугольнік, утвораны пры перасячэнні ўсіх дыяганалей дадзенага правільнага пяцівугольніка, таксама з'яўляецца правільным.



Рыс. 200

254. На рысунку 201 паказаны правільны васьмі-вугольнік. Знайдзіце велічыню вугла α .



Рыс. 201

255. Дадзены правільны 12-вугольнік $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$. Знайдзіце вугал паміж прамымі:

- A_2A_7 і A_4A_{12} ;
- A_1A_3 і A_6A_{10} .

(Для пабудовы правільнага 12-вугольніка схематычна намалюйце круглы цыферблат гадзінніка, разбіце яго акружнасць на 12 роўных дуг, адзначыўшы пункты, якія адпавядаюць 1 г, 2 г, 3 г і г. д., і злучыце суседнія пункты адрэзкамі.)

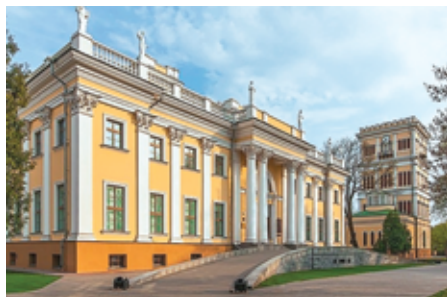
Гімнастыка розуму



Паверхня футбольнага мяча шыта з правільных чорных 5-вугольнікаў і правільных белых 6-вугольнікаў, якія злучаюць іх.

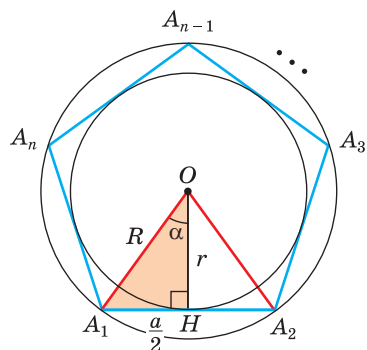
Заданне. Вядома, што ўсяго чорных 5-вугольнікаў 12. Вызначце матэматычным шляхам колькасць белых 6-вугольнікаў на паверхні мяча, а затым пераканайцеся ў сваёй праваце на ўроку фізкультуры.

(Для самакантролю. Адказ: колькасць белых 6-вугольнікаў на паверхні мяча роўна наміналу купюры Рэспублікі Беларусь, на правым баку якой размешчаны відарыс Дварца Румянцавых і Паскевічаў у г. Гомелі.)



Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, у якіх краінах свету некаторыя манеты маюць форму правільнага многавугольніка.

§ 17. Формулы радыусаў апісанай і ўпісанай акружнасцей правільнага многовугольніка



Рыс. 202

Няхай $A_1A_2A_3\dots A_n$ — правільны n -вугольнік са стараной a , дзе O — яго цэнтр, $OA_1 = R$ — радыус апісанай акружнасці, $OH = r$ — радыус упісанай акружнасці (рыс. 202).

Паколькі $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{n}$, а вышыня OH раўнабедранага трохвугольніка A_1OA_2 з'яўляецца бісектрысай і медыянай, то вугал $\alpha = \angle A_1OH = \frac{180^\circ}{n}$, $A_1H = \frac{a}{2}$.

З прамавугольнага трохвугольніка A_1OH знаходзім:

а) $\sin \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, адкуль $a = 2R \sin \alpha = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$, $R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$;

б) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, адкуль $a = 2r \operatorname{tg} \alpha = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, $r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$.

Заўвага. Выведзеныя формулы запамінаць не абавязкова. Важна памятаць спосаб іх атрымання: рашэнне прамавугольнага трохвугольніка A_1OH .

Прыклады. 1) Для правільнага трохвугольніка (рыс. 203) атрымваем:

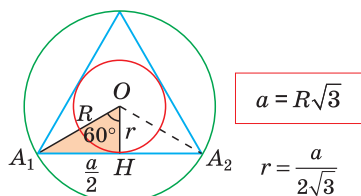
$$\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ, \quad \alpha = \angle A_1OH = 60^\circ, \quad \sin 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R}, \quad \text{адкуль} \quad R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2},$$

$$a = R\sqrt{3}, \quad \text{або} \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{r}, \quad r \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}, \quad a = 2\sqrt{3}r, \quad \text{або} \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

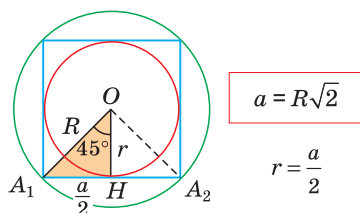
2) Для правільнага чатырохвугольніка (рыс. 204) атрымваем:

$$\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ, \quad \alpha = \angle A_1OH = 45^\circ, \quad \sin 45^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R}, \quad \text{адкуль} \quad R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2},$$

$$a = R\sqrt{2}, \quad \text{або} \quad R = \frac{a}{\sqrt{2}}; \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{r}, \quad r \cdot 1 = \frac{a}{2}, \quad a = 2r, \quad \text{або} \quad r = \frac{a}{2}.$$

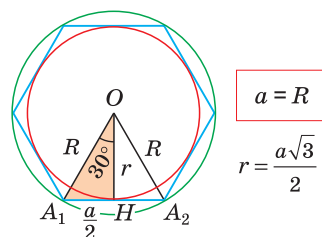


Рыс. 203



Рыс. 204

3) Для правільнага шасцівугольніка (рыс. 205) атрымаем $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, $\beta = \angle A_1OH = 30^\circ$, $\sin 30^\circ = \frac{a}{2R}$, адкуль $R \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$, $a = R$; $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{r}$, $r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{2}$, $a = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$, або $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Рыс. 205

Карысна запомніць формулы, якія выражаюць старану a_n правільнага n -вугольніка праз радыус R апісанай акружнасці пры $n = 3, 4, 6$:

$$a_3 = R\sqrt{3},$$

$$a_4 = R\sqrt{2},$$

$$a_6 = R.$$

Для знаходжання плошчы правільнага n -вугольніка $A_1A_2A_3\dots A_n$ з цэнтрам O і радыусам R апісанай акружнасці можна знайсці плошчу трохвугольніка A_1OA_2 па формуле $S = \frac{1}{2}absin\gamma$ і памножыць яе на колькасць такіх трохвугольнікаў, г. зн. на n .

Прыклад.

$$S_6 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin \frac{360^\circ}{6} \right) = 3R^2 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2};$$

$$S_8 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin \frac{360^\circ}{8} \right) = 4R^2 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}R^2;$$

$$S_{12} = 12 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin \frac{360^\circ}{12} \right) = 6R^2 \sin 30^\circ = 3R^2.$$

Для знаходжання радыуса r акружнасці, упісанай у правільны многавугольнік, можна карыстацца формулай плошчы апісанага многавугольніка $S = pr$.



Заданні да § 17

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

256. Дадзены правільны трохвугольнік. Выкарыстаўшы формулы $a = R\sqrt{3}$ і $r = \frac{1}{2}R$, запоўніце ў сшытку табліцу, дзе a — старана трохвугольніка, R — радыус апісанай акружнасці, r — радыус упісанай акружнасці.

a	6		
R		$4\sqrt{3}$	
r			1

257. а) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у правільны чатырхвугольнік са стараной, роўнай 8 см.
б) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля правільнага чатырхвугольніка, перыметр якога роўны 32 см.

- 258.** Дадзены правільны шасцівугольнік з перыметрам, роўным 30 см. Знайдзіце радыус апісанай і радыус упісанай акружнасцей гэтага шасцівугольніка.
- 259.** а) Вылічыце радыус апісанай акружнасці правільнага 10-вугольніка са стараной, роўнай 6 см. Адказ акругліце да 0,1 см.
б) Вылічыце радыус упісанай акружнасці правільнага 12-вугольніка са стараной, роўнай 24 см. Адказ акругліце да 0,1 см.
- 260.** Дадзены правільны пяцівугольнік $A_1A_2A_3A_4A_5$ з цэнтрам O і стараной $a = 20$ (рыс. 206). Знайдзіце вугал β і выразіце радыусы яго апісанай і ўпісанай акружнасцей праз a і β .
- 261.** а) Выразіце старану a правільнага дзевяцівугольніка праз радыус R яго апісанай акружнасці.
б) Выразіце радыус r акружнасці, упісанай у правільны 18-вугольнік, праз яго старану a .
- 262.** Знайдзіце плошчу правільнага 12-вугольніка, у якога радыус апісанай акружнасці роўны 6 см.
- 263.** Дадзены правільны васьмівугольнік $A_1A_2A_3\dots A_8$ (рыс. 207).
- а) Дакажыце, што $A_2A_5 \parallel A_3A_4$.
б) Дакажыце, што $A_1A_2A_5A_6$ — прамавугольнік.
в) Дакажыце, што дыяганаль A_1A_5 праходзіць праз цэнтр многавугольніка.
г) Знайдзіце вуглы трохвугольніка $A_1A_2A_5$.
д) Дакажыце, што плошча прамавугольніка $A_1A_2A_5A_6$ роўна $\frac{1}{2}$ плошчы дадзенага правільнага васьмівугольніка.

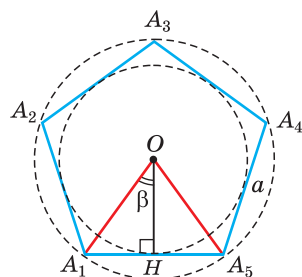


Рис. 206

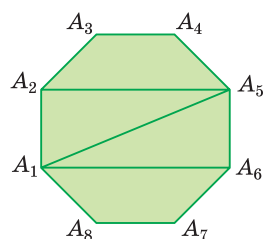


Рис. 207

Гімнастыка розуму

Прамавугольнік на рысунку 208 складаецца з шасці квадратаў. Старана жоўтага квадрата роўна 1. Знайдзіце даўжыню стараны чырвонага квадрата.

(Для самакантролю. Адказ: даўжыня стараны чырвонага квадрата роўна колькасці перыядаў у табліцы Мендзялеева.)

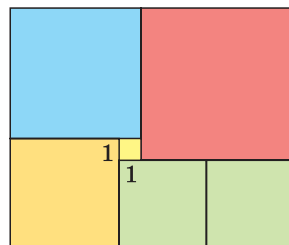


Рис. 208



Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, якую тэарэму адносна правільных многавугольнікаў даказаў вялікі матэматык Карл Гаўс і якую геаметрычную фігуру ён загадаў намаляваць на сваім помніку.

§ 18. Правільны трохвугольнік, чатырхвугольнік, шасцівугольнік

1. Правільны трохвугольнік

Абагульнім інфармацыю аб правільным (роўнастароннім) трохвугольніку.

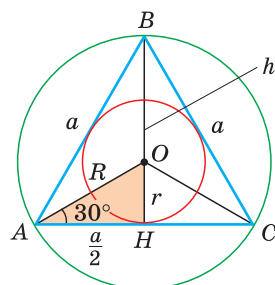
Запішам формулы вышыні h , плошчы S , радыуса R апісанай і радыуса r ўпісанай акружнасцей правільнага трохвугольніка ABC са старонай a (рыс. 209):

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$



Рыс. 209

Пры зададзенай старане a правільнага трохвугольніка яго можна пабудаваць пры дапамозе цыркуля і лінейкі, выкарыстаўшы алгарытм пабудовы трохвугольніка па трох старанах.

Паколькі $BO : OH = 2 : 1$, то $R = \frac{2}{3}h$, $r = \frac{1}{3}h$. Для пабудовы апісанай і ўпісанай акружнасцей правільнага трохвугольніка дастаткова пабудаваць яго медыяны (вышыні), пункт перасячэння якіх будзе цэнтрам шуканых акружнасцей.

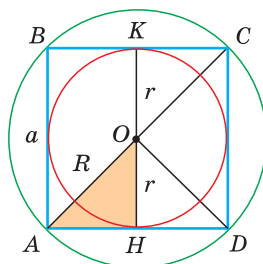
2. Правільны чатырхвугольнік

Няхай старана квадрата $ABCD$ роўна a , R — радыус апісанай, r — радыус ўпісанай акружнасці (рыс. 210). Дыяметр яго апісанай акружнасці роўны дыяганалі AC . У сваю чаргу, $AC = a\sqrt{2}$, адкуль

$$2R = a\sqrt{2}, \text{ або } R = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

З раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка AOD таксама вынікае, што $AD = AO\sqrt{2}$, $a = R\sqrt{2}$. Дыяметр KH акружнасці, ўпісанай у квадрат, роўны даўжыні стараны квадрата,

г. зн. $KH = AB = a$, адкуль $a = 2r$, $r = \frac{a}{2}$. З прамавугольнага раўнабедранага трохвугольніка AOH таксама вынікае, што $r = AH = \frac{a}{2}$.



Рыс. 210

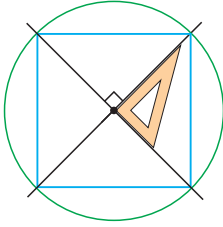


Рис. 211

Для пабудовы квадрата, ўпісанага ў дадзеную акружнасць з зададзеным цэнтрам, можна пабудаваць дзве ўзаемна перпендыкулярныя прамыя, якія праходзяць праз цэнтр акружнасці (рыс. 211). Гэтыя прамыя перасякуць акружнасць у вяршынях квадрата. Абгрунтуйце гэта сцверджанне. Выканайце гэту пабудову пры дапамозе чарчэжнага трохвугольніка.

3. Правільны шасцівугольнік

Разгледзім правільны шасцівугольнік $ABCDEF$ са стараной a , ўпісаны ў акружнасць з цэнтрам O і радыусам R (рыс. 212). Яго ўнутраныя вуглы роўныя па 120° . Трэхвугольнік AOF раўнабедраны, паколькі $OA = OF = R$, $\angle AOF = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Таму $\triangle AOF$ — роўнастаронні, адкуль

$$a = R.$$

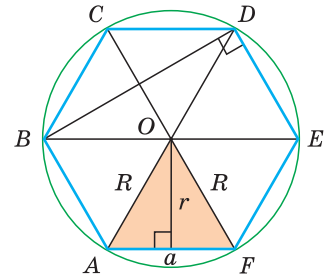


Рис. 212

Паколькі радыус r ўпісанай акружнасці з'яўляецца вышынёй роўнастаронняга трохвугольніка са стараной a , то

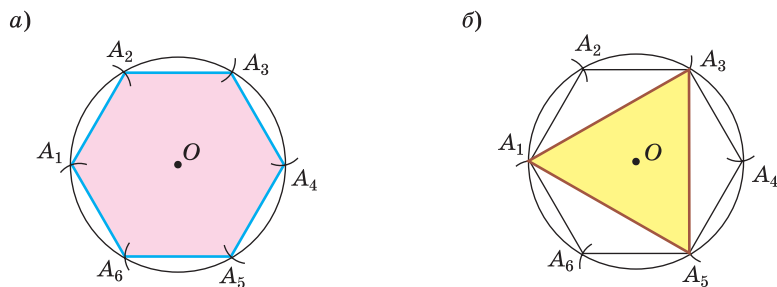
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Паколькі $\angle BOC + \angle COD + \angle DOE = 180^\circ$, то вялікая (галоўная) дыяганаль BE правільнага шасцівугольніка праходзіць праз яго цэнтр O , а ўсе тры вялікія дыяганалі AD , BE і CF разбіваюць яго на шэсць роўных роўнастаронніх трохвугольнікаў. Плошча правільнага шасцівугольніка

$$S_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2.$$

Малая (меншая) дыяганаль BD правільнага шасцівугольніка з'яўляецца дыяганаллю ромба $BCDO$ ($BC = CD = DO = BO = a$) з вугламі, роўнымі 60° і 120° . Адкуль $CD \parallel BE$. Трэхвугольнік BDE з'яўляецца прамавугольным ($\angle BDE = 90^\circ$ як вугал, які абাপіраецца на дыяметр), $\angle BED = 60^\circ$, $\angle DBE = 30^\circ$. Акрамя таго, $CD \parallel AF$, $BC \parallel FE$, $AB \parallel ED$, а адлегласці паміж названымі парамі паралельных прамых роўны $a\sqrt{3}$. Дакажыце гэта самастойна.

Пабудуем пры дапамозе цыркуля і лінейкі правільны шасцівугольнік, ўпісаны ў дадзеную акружнасць з радыусам R (рыс. 213, а). Выкарыста-



Рыс. 213

ем тое, што $a = R$, дзе a — старана правільнага шасцівугольніка. Адну вяршыню A_1 шасцівугольніка адзначаем на акружнасці адвольна. З яе як з цэнтра радыусам, роўным радыусу R , робім засечку на акружнасці і атрымліваем вяршыню A_2 . Затым аналагічна паслядоўна будзем астатнія вяршыні: A_3, A_4, A_5, A_6 — і злучаем іх адрэзкамі. З роўнасці роўнастаронніх трохвугольнікаў ($\triangle A_1OA_2 = \triangle A_2OA_3 = \triangle A_3OA_4 = \triangle A_4OA_5 = \triangle A_5OA_6 = \triangle A_6OA_1$) вынікае роўнасць вуглоў пабудаванага шасцівугольніка $A_1A_2A_3 \dots A_6$, адкуль заключаем, што ён — правільны.

Для пабудовы правільнага трохвугольніка, упісанага ў дадзеную акружнасць, дастаткова злучыць адрэзкамі праз адну вяршыню правільнага ўпісанага шасцівугольніка (рыс. 213, б). Для пабудовы правільнага 12-вугольніка трэба падзяліць дугі $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_5A_6, A_6A_1$ папалам (пабудоваўшы пасярэднія перпендыкуляры да старон правільнага шасцівугольніка) і кожны з пунктаў дзялення злучыць адрэзкамі з канцамі адпаведнай стараны.

Выкарыстаўшы дадзены спосаб дзялення дуг папалам, можна пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудоваць мноства правільных многавугольнікаў. Так, з правільнага чатырохвугольніка можна пабудоваць правільны васьмівугольнік, 16-вугольнік і наогул любы правільны 2^k -вугольнік, дзе k — цэлы лік, большы за два.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

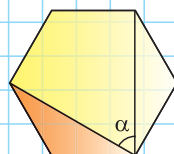
Тэст 1

На рысунку паказаны правільны шасцівугольнік, яго плошча роўна 120 см^2 . Знайдзіце велічыню вугла α і плошчу аранжавага трохвугольніка.

а) $60^\circ, 40 \text{ см}^2$;

б) $45^\circ, 20 \text{ см}^2$;

в) $60^\circ, 20 \text{ см}^2$.

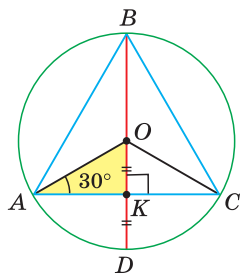




Заданні да § 18

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. У акружнасці з цэнтрам O праведзены дыяметр BD , праз сярэдзіну радыуса OD праведзена хорда AC , перпендыкулярная дыяметру BD (рыс. 214). Даказаць, што $\triangle ABC$ — правільны.

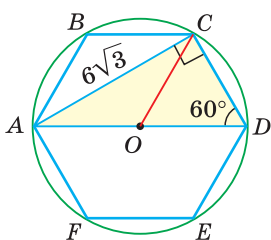


Рыс. 214

Доказ. Паколькі $OK = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}OA$, то ў прамавугольным трохвугольніку AOK $\angle OAK = 30^\circ$. У раўнабедраным трохвугольніку AOC ($OA = OC$) $\angle OCA = 30^\circ$, $\angle AOC = 120^\circ$. Упісаны вугал ABC роўны палавіне цэнтральнага вугла AOC , г. зн. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = 60^\circ$. Дыяметр, перпендыкулярны хордзе, дзеліць яе папалам. Таму $AK = KC$. Паколькі ў трохвугольніку ABC вышыня BK з'яўляецца і медыянай, то ён — раўнабедраны, $AB = BC$. Адсюль $\angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$ і $\triangle ABC$ — роўнастаронні, г. зн. правільны. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. З задачы вынікае другі спосаб пабудовы правільнага трохвугольніка, упісанага ў акружнасць: будуюцца дыяметр BD , праз сярэдзіну радыуса OD праводзіцца хорда AC , перпендыкулярная дыяметру. Трохвугольнік ABC — правільны.

Задача 2. Дадзены правільны шасцівугольнік $ABCDEF$, дыяганаль AC роўна $6\sqrt{3}$. Знайсці плошчу шасцівугольніка (рыс. 215).



Рыс. 215

Рашэнне. Упісаны вугал ACD абпіраецца на дыяметр AD , таму ён прамы. З прамавугольнага трохвугольніка ACD : $\angle D = 60^\circ$, $\operatorname{ctg} D = \frac{CD}{AC}$, $CD = AC \operatorname{ctg} 60^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6$. Паколькі $S_{COD} = \frac{CD^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, то $S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{COD} = 6 \cdot 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$.
Адказ: $54\sqrt{3}$.

РАШАЕМ
САМАСТОЙНА

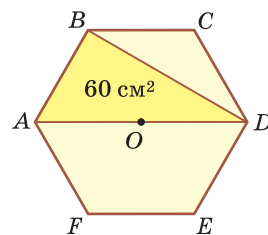
264. Дадзены правільны трохвугольнік, a — яго старана, R — радыус апісанай акружнасці, r — радыус упісанай акружнасці, h — вышыня, S — плошча. Перанясіце ў сшытак і запоўніце табліцу.

a	6				
h		$2\sqrt{3}$			
R			2		
r				$\sqrt{6}$	
S					$16\sqrt{3}$

- 265.** Дадзены правільны чатырохвугольнік, a — яго старана, R — радыус апісанай акружнасці, r — радыус упісанай акружнасці. Перамясціце ў сшытак і запоўніце табліцу.

a	4		
R		$8\sqrt{2}$	
r			$\sqrt{8}$

- 266.** а) З дроту выраблены правільны трохвугольнік са стараной, роўнай 12 см. Дрот разгнулі і зрабілі з яго правільны чатырохвугольнік. Знайдзіце даўжыню стараны гэтага чатырохвугольніка.
 б) З дроту выраблены правільны шасцівугольнік са стараной, роўнай 2 см. Дрот разгнулі і зрабілі з яго правільны трохвугольнік. Знайдзіце даўжыню яго стараны.
- 267.** а) Знайдзіце плошчу правільнага шасцівугольніка са стараной, роўнай 4 см.
 б) Знайдзіце перыметр правільнага шасцівугольніка, калі радыус упісанай у яго акружнасці роўны $6\sqrt{3}$ см.
- 268.** Знайдзіце плошчу правільнага шасцівугольніка $ABCDEF$ (рыс. 216), калі плошча трохвугольніка ABD роўна 60 см^2 .
- 269.** Дадзены правільны шасцівугольнік $A_1A_2A_3...A_6$.
 а) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля гэтага шасцівугольніка, і радыус акружнасці, упісанай у гэты шасцівугольнік, калі $A_2A_4 = 4\sqrt{3}$ см.
 б) Дакажыце, што адлегласць паміж прамымі A_2A_3 і A_6A_5 роўна даўжыні дыяганалі A_2A_4 .



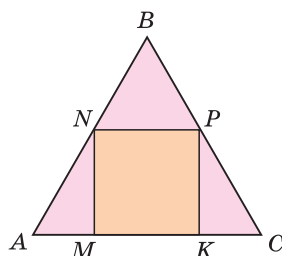
Рыс. 216

270. а) Прыдумайце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі правільнага трохвугольніка па яго вышыні h .

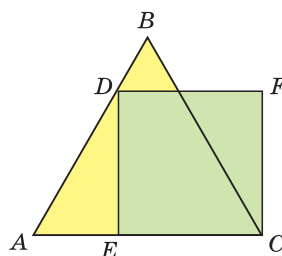
б) Прыдумайце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі правільнага чатырохвугольніка па яго дыяганалі d .

271. а) У правільны трохвугольнік ABC са стараной, роўнай 6, упісаны квадрат $MNPK$ (рыс. 217). Знайдзіце даўжыню стараны квадрата.

б) На рысунку 218 паказаны правільны трохвугольнік ABC і правільны чатырохвугольнік $EDFC$. Знайдзіце даўжыню стараны AB трохвугольніка, калі $FC = 3$.



Рыс. 217



Рыс. 218

272. Знайдзіце плошчу правільнага трохвугольніка, калі дадзены:

а) радыус R яго апісанай акружнасці;

б) радыус r яго ўпісанай акружнасці.

273. Прыдумайце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі квадрата па адрэзку, роўным суме стараны квадрата і яго дыяганалі.

274. Каля дадзенай акружнасці апішыце пры дапамозе цыркуля і лінейкі правільны:

а) трохвугольнік;

б) чатырохвугольнік;

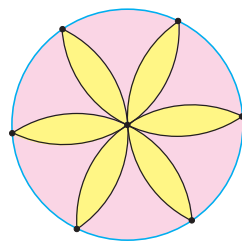
в) шасцівугольнік.

Мадэляванне

Дызайнер хоча вырабіць кветкі з паперы, выказаўшы іх з кругоў, як паказана на рысунку 219.

Заданне. Дапамажыце дызайнеру: складзіце алгарытм рашэння пастаўленай задачы з выкарыстаннем цыркуля, нажніц і паперы.

Абгрунтуйце вашу ідэю матэматычна і правярце яе на практыцы.



Рыс. 219

Цікава ведаць. Ячэйкі пчаліных сотаў у форме правільных шасцівугольнікаў (рыс. 220) заўсёды захаплялі людзей. Нездарма пчолы лічацца аднымі з найлепшых інжынераў у прыродзе. Як дакладна і суразмерна падганяюць яны адну ячэйку сотаў да другой!

Рэгулярны ячэйсты малюнак можна атрымаць з трохвугольных, квадратных або шасцівугольных ячэек. Шасцівугольныя ячэйкі з'яўляюцца найбольш эканамічнымі. На соты з такімі ячэйкамі ідзе найменшая колькасць воску. Упершыню такую асаблівасць заўважылі ў IV ст., тады ж было выказана меркаванне, што пчолы пры пабудове сотаў «кіруюцца матэматычным планам».



Рыс. 220

Гімнастыка розуму

З трох алоўкаў адной даўжыні можна скласці 1 правільны трохвугольнік. З пяці такіх алоўкаў можна скласці 2 правільныя трохвугольнікі (рыс. 221).

Паспрабуйце з шасці алоўкаў адной даўжыні атрымаць фігуру, якая складаецца з чатырох правільных трохвугольнікаў.



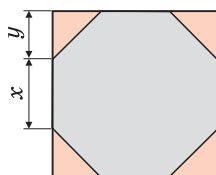
Рыс. 221

Рэальная геаметрыя

Заданне 1. Ёсць квадратны ліст гіпсакардону са стараной 1 м. З яго неабходна атрымаць правільны васьмівугольнік, абрэзаўшы вуглы (рыс. 222). Вызначце даўжыні адрэзкаў x і y . Адказ акругліце да 1 см.

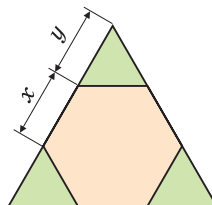
Заданне 2. З ліста фанеры, які мае форму правільнага трохвугольніка са стараной 1 м, неабходна вырабіць правільны шасцівугольнік, абрэзаўшы вуглы (рыс. 223). Вызначце даўжыні адрэзкаў x і y . Адказ акругліце да 1 см.

Заўвага. Пры выкананні заданняў 1 і 2 карыстайцеся трыганаметрычнымі табліцамі і калькулятарам.



1 м

Рыс. 222



1 м

Рыс. 223

§ 19. Знаходжанне даўжыні акружнасці і плошчы круга

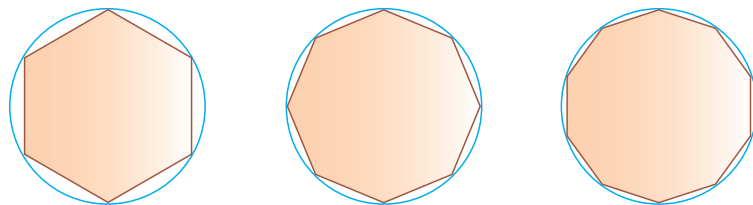
1. Даўжыня акружнасці і плошча круга

Даўжыню акружнасці, вырабленай з гнуткага дроту, можна вымераць, калі дрот выпрастаць у адрэзак. Яшчэ ў старажытнасці заўважылі, што адносіна даўжыні любой акружнасці да яе дыяметра ёсць велічыня пастаянная: даўжыня акружнасці прыкладна ў 3 разы большая за дыяметр. Вы можаце пераканацца ў гэтым пры дапамозе ніткі і лінейкі, выкарыстаўшы ў якасці акружнасці верхні кант кубка (рыс. 224).

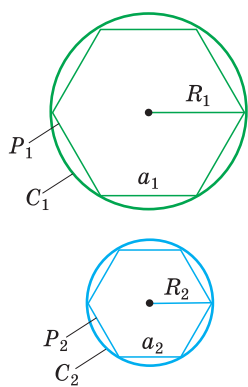


Рыс. 224

Зразумела, што перыметр правільнага многавугольніка, упісанага ў акружнасць, будзе імкнуцца да даўжыні акружнасці пры неабмежаваным павелічэнні колькасці яго старон, а плошча гэтага многавугольніка — да плошчы круга, абмежаванага дадзенай акружнасцю (рыс. 225).



Рыс. 225



Рыс. 226

Выкарыстаўшы гэты факт, выведзем ужо вядомыя вам формулы даўжыні акружнасці $C = 2\pi R$ і плошчы круга $S = \pi R^2$, дзе R — радыус акружнасці і круга.

Спачатку пакажам, што адносіна даўжыні акружнасці C да яе дыяметра $D = 2R$ ёсць велічыня пастаянная, адна і тая ж для ўсіх акружнасцей. Для гэтага разгледзім дзве акружнасці і два правільныя ўпісаныя ў іх многавугольнікі з аднолькавай колькасцю старон n , дзе a_1 — старана першага, a_2 — старана другога многавугольніка, P_1 і P_2 — іх адпаведныя перыметры, C_1 — даўжыня першай, а C_2 — даўжыня другой апісанай акружнасці (рыс. 226).

Знойдзем адносіну названых перыметраў:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{n} \cdot a_1}{\frac{1}{n} \cdot a_2} = \frac{2R_1 \sin \frac{180^\circ}{n}}{2R_2 \sin \frac{180^\circ}{n}} = \frac{2R_1}{2R_2}.$$

Пры неабмежаваным павелічэнні ліку n перыметр P_1 будзе імкнуцца да C_1 , перыметр P_2 — да C_2 , а адносіна $\frac{P_1}{P_2}$ — да адносіны $\frac{C_1}{C_2}$, і тады $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$, $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$. Значыць, адносіна $\frac{C}{2R}$ адна і тая ж для ўсіх акружнасцей.

Гэта адносіна абазначаецца літарай π . Паколькі $\frac{C}{2R} = \pi$, то даўжыня акружнасці $C = 2\pi R$. Такім чынам, намі даказана наступная тэарэма.

Тэарэма. Даўжыню акружнасці радыусам R знаходзяць па формуле

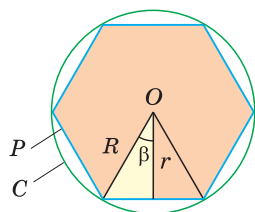
$$C = 2\pi R.$$

Цікава ведаць. Лік $\pi \approx 3,1415\dots$ — ірацыянальны і ў дзесятковым выглядзе ўяўляе сабой бясконцы перыядычны дроб. Ён быў вядомы ўжо старажытным грэкам. Яшчэ Архімед знайшоў дроб $\frac{22}{7}$, які даволі дакладна набліжаў лік π . Мы ж для прыбліжаных вылічэнняў будзем карыстацца ў асноўным значэннем $\pi \approx 3,14$.

А цяпер выведзем формулу плошчы круга.

Тэарэма. Плошчу круга радыусам R знаходзяць па формуле

$$S = \pi R^2.$$



Рыс. 227

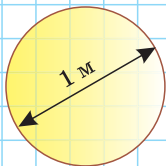
Доказ. Разгледзім некаторую акружнасць радыусам R і ўпісаны ў яе правільны n -вугольнік (рыс. 227), плошча якога $S_n = pr = \frac{1}{2}Pr$, дзе P — яго перыметр, r — радыус упісанай акружнасці. Пры неабмежаваным павелічэнні ліку n плошча S_n правільнага n -вугольніка будзе імкнуцца да плошчы $S_{\text{кр}}$ круга радыусам R , перыметр P — да даўжыні C апісанай акружнасці, а радыус r — да радыуса R (паколькі вугал β будзе імкнуцца да нуля). Тады $\frac{1}{2}Pr$ будзе імкнуцца да $\frac{1}{2}CR$, г. зн. да $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot R \cdot R$, што роўна πR^2 , адкуль $S_{\text{кр}} = \pi R^2$.

Тэарэма даказана.

А цяпер выканайце Тэст 1 і Тэст 2.

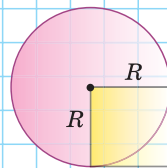
Тэст 1

Дыяметр круглага бярвяна 1 м. Ці хопіць вяроўкі даўжынёй 3 м, каб абвязаць бярвяно?



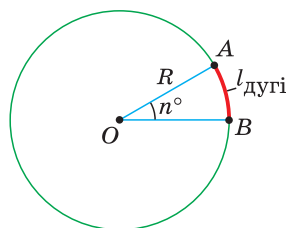
Тэст 2

Што большае: плошча круга або плошча трох жоўтых квадратаў са стараной, роўнай радыусу?



2. Даўжыня дугі акружнасці і плошча сектара круга

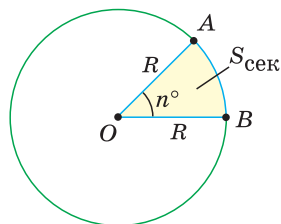
Паколькі даўжыня акружнасці $C = 2\pi R$, а яе градусная мера роўна 360° , то даўжыня дугі, якая змяшчае 1° , роўна $\frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{\pi R}{180^\circ}$. Тады даўжыня l дугі, якая змяшчае n° (рыс. 228), роўна $\frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$.



Рыс. 228

Напомнім, што *сектарам* называецца частка круга, абмежаваная двума радыусамі і дугой, якая злучае канцы радыусаў (рыс. 229). Радыус круга называецца *радыусам сектара*, названая дуга — *дугой сектара*, цэнтральны вугал паміж радыусамі, якія абмяжоўваюць сектар, — *вуглом сектара*.

Паколькі плошча круга $S = \pi R^2$, то плошча сектара з вуглом у 1° роўна $\frac{\pi R^2}{360^\circ}$, а з вуглом у n° — $\frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$.

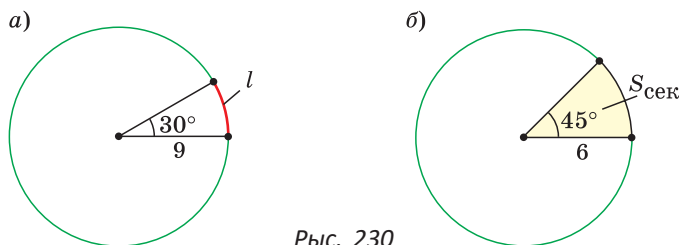


Рыс. 229

Заўважым, што $S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ \right) \cdot R = \frac{1}{2} \cdot l_{\text{дугі}} \cdot R$, г. зн. плошча сектара роўна палавіне здабытку даўжыні дугі сектара на яго радыус.

Прыклад 1. Няхай дадзена дуга акружнасці радыусам 9 см, якая змяшчае 30° (рыс. 230, а). Знайдзем даўжыню дугі:

$$l_{\text{дугі}} = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ = \frac{\pi \cdot 9}{180^\circ} \cdot 30^\circ = 1,5\pi \approx 1,5 \cdot 3,14 \approx 4,7 \text{ (см)}.$$



Рыс. 230

Прыклад 2. Няхай вугал сектара змяшчае 45° , а радыус роўны 6 см (рыс. 230, б). Знайдзем плошчу сектара:

$$S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ = \frac{\pi \cdot 6^2}{360^\circ} \cdot 45^\circ = 4,5 \cdot \pi \approx 4,5 \cdot 3,14 \approx 14,1 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Заўвага. Пры вылічэнні даўжыні дугі (плошчы сектара) дапушчальныя абодва наступныя запісы: $l_{\text{дугі}} = \frac{\pi R}{180} \cdot n$ і $l_{\text{дугі}} = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$ ($S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n$ і $S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$).

Даўжыня дугі і плошча сектара прама прапарцыянальны градуснай меры дугі і вугла сектара. Таму даўжыня дугі так адносіцца да даўжыні акружнасці, як градусная мера дугі адносіцца да градуснай меры акружнасці. Плошча сектара так адносіцца да плошчы круга, як градусная мера вугла сектара адносіцца да градуснай меры поўнага вугла, г. зн. справядлівыя прапорцыі:

$$\frac{l_{\text{дугі}}}{C} = \frac{n^\circ}{360^\circ},$$

$$\frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{кр}}} = \frac{n^\circ}{360^\circ},$$

$$\frac{l_{\text{дугі}}}{C} = \frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{кр}}}.$$

Гэтыя прапорцыі таксама дазваляюць знаходзіць даўжыню дугі і плошчу сектара. Так, калі даўжыня акружнасці роўна 10 см, а градусная мера яе дугі $n^\circ = 120^\circ$, то $\frac{l_{\text{дугі}}}{10} = \frac{120^\circ}{360^\circ}$, адкуль даўжыня дадзенай дугі $l_{\text{дугі}} = \frac{10 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = 3\frac{1}{3}$ (см).

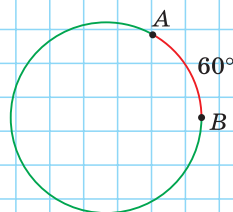
А калі плошча круга роўна 12 см^2 і вугал сектара роўны 80° , то $\frac{S_{\text{сек}}}{12} = \frac{80^\circ}{360^\circ}$, адкуль плошча дадзенага сектара $S_{\text{сек}} = \frac{12 \cdot 80^\circ}{360^\circ} = 2\frac{2}{3}$ (см²).

А цяпер выканайце **Тэст 3** і **Тэст 4**.

Тэст 3

Даўжыня акружнасці роўна 24 см. Знайдзіце даўжыню дугі AB , якая змяшчае 60° .

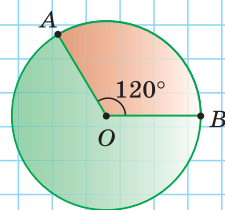
а) 6 см; б) 4 см; в) 12 см; г) 8 см.



Тэст 4

Плошча круга роўна 60 см^2 . Знайдзіце плошчу сектара AOB , вугал якога роўны 120° .

а) 24 см^2 ; б) 15 см^2 ; в) 20 см^2 ; г) 30 см^2 .

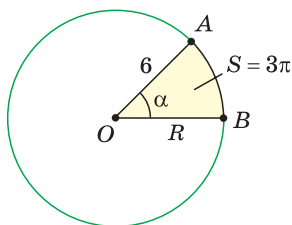


Заданні да § 19

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. Дадзены сектар AOB (рыс. 231), радыус якога роўны 6, а плошча — 3π . Знайсці даўжыню дугі гэтага сектара. Адказ акругліць да 0,1.



Рыс. 231

Рашэнне. *Спосаб 1.* Няхай $\angle AOB = \alpha$, адкуль

$$S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha. \text{ Паколькі па ўмове } S_{\text{сек}} = 3\pi, \text{ то}$$

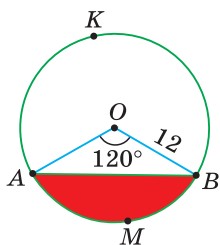
$$3\pi = \frac{\pi \cdot 6^2}{360^\circ} \cdot \alpha, \text{ адкуль } \alpha = 30^\circ. \text{ Знайдзем даўжыню ду-}$$

$$\text{гі } AB: \cup AB = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 6}{180^\circ} \cdot 30^\circ = \pi \approx 3,1.$$

Спосаб 2. Выкарыстаем прапарцыю $\frac{l_{\text{дугі}}}{C} = \frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{кр}}}$.
Тады $\frac{l_{\text{дугі}}}{2\pi R} = \frac{S_{\text{сек}}}{\pi R^2}, \frac{l_{\text{дугі}}}{2} = \frac{S_{\text{сек}}}{R}, \frac{l_{\text{дугі}}}{2} = \frac{3\pi}{6},$
 $l_{\text{дугі}} = \pi \approx 3,1.$

Спосаб 3. Паколькі $S_{\text{сек}} = \frac{1}{2} \cdot l_{\text{дугі}} \cdot R$, то $3\pi = \frac{1}{2} \cdot l_{\text{дугі}} \cdot 6, l_{\text{дугі}} = \pi \approx 3,1.$
Адказ: 3,1.

Задача 2. Знайсці плошчу сегмента круга, радыус якога роўны 12, калі градусная мера дугі гэтага сегмента роўна 120° .



Рыс. 232

Рашэнне. Напамнім, што *сегментам* называецца частка круга, абмежаваная хордай і дугой акружнасці, якая злучае канцы гэтай хорды.

Няхай O — цэнтр дадзенай акружнасці, $\cup AMB = 120^\circ$ (рыс. 232). Тады $\angle AOB = 120^\circ$, $OA = OB = 12$. Плошча сегмента AMB роўна рознасці плошчы сектара $AOBM$ і плошчы раўнабедранага трохвугольніка AOB . Паколькі $S_{AOBM} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot 120^\circ =$

$$= \frac{\pi \cdot 12^2}{3} = 48\pi, \text{ а } S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}, \text{ то}$$

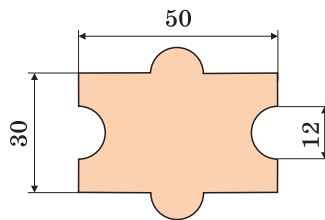
$$S_{AMB} = 48\pi - 36\sqrt{3}.$$

Адказ: $48\pi - 36\sqrt{3}$.

Заўвага. Плошчу сегмента AKB (гл. рыс. 232) можна знайсці як суму плошчаў сектара $OAKB$ і трохвугольніка AOB або як рознасць плошчы круга і плошчы сегмента AMB .

Гімнастыка розуму

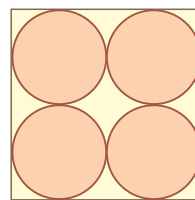
Фрагмент пазла ўяўляе сабой прамавугольнік памерам 30×50 (мм), у якім на процілеглых старанах ёсць два паўкруглыя выразы і на дзвюх іншых старанах — два паўкруглыя выступы. Выразы і выступы маюць аднолькавы дыяметр 12 мм (рыс. 233). Знайдзіце плошчу гэтага фрагмента пазла ў квадратных сантыметрах.



Рыс. 233

Рэальная геаметрыя

З квадратнага ліста металу неабходна выразаць 4 аднолькавыя кругі найбольшага дыяметра (рыс. 234). Вызначце, колькі працэнтаў складуць адходы.



Рыс. 234

Цікава ведаць. У 1987 г. было заснавана неафіцыйнае свята — дзень ліку π , які адзначаюць аматары матэматыкі 14 сакавіка (3-і месяц, 14-е чысло).

Доўгі час матэматыкі імкнуліся знайсці як мага большую колькасць знакаў ліку π пасля коскі. Лёгка запомніць дванаццаць першых знакаў ліку $\pi \approx 3,14159265358\dots$ пры дапамозе наступнай лічылкі: «*Это я знаю и помню прекрасно, но многие цифры мне лишни, напрасны*», — у якой колькасць літар у кожным слове адпавядае лічбе ліку π : «это» — 3, «я» — 1, «знаю» — 4 і г. д.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

275. Знайдзіце прыбліжана даўжыню акружнасці, калі яе радыус роўны:

- а) 10 см; б) 1,5 дм; в) 0,05 м; г) $3\frac{1}{2}$ км.

(Пры вылічэннях вазьміце $\pi \approx 3,14$.)

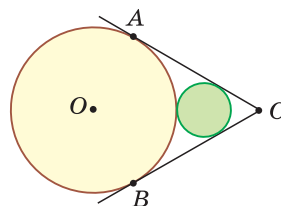
276. Знайдзіце, акругліўшы да дзясятых, радыус акружнасці, калі яе даўжыня роўна:

- а) 60 см; б) 300 мм; в) 6,28 дм; г) 1 м.

- 277.** Даўжыня акружнасці роўна 600 см. Знайдзіце даўжыню яе дугі, якая змяшчае:
а) 90° ; б) 60° ; в) 120° ; г) 24° .
- 278.** Даўжыня дугі акружнасці роўна 12 см. Вылічыце радыус акружнасці (акругліўшы вынік да 0,1 см), калі градусная мера дугі складае:
а) 45° ; б) 120° .
- 279.** Знайдзіце градусную меру дугі (акругліўшы адказ да 1°), калі дадзены яе радыус R і даўжыня l :
а) $R = 10$ см, $l = 15$ см; б) $R = 36$ м, $l = 12$ м.
- 280.** Вылічыце прыбліжана градусную меру дугі, даўжыня якой роўна радыусу акружнасці. Адказ акругліце да 1° .
- 281.** Даўжыня акружнасці большая за яе дыяметр на 12 см. Знайдзіце прыбліжана радыус акружнасці. Вынік акругліце да 0,1 см.
- 282.** Радыус закруглення чыгункі (рыс. 235) роўны 1800 м, даўжыня дугі закруглення роўна 900 м. Знайдзіце, колькі прыкладна градусаў змяшчае дуга закруглення (пры разліках вазьміце $\pi \approx 3$).
- 283.** а) Вызначце, на колькі павялічыцца даўжыня C акружнасці, калі яе радыус R павялічыць на 1 см.
б) У колькі разоў павялічыцца плошча круга, калі яго радыус павялічыць у 2 разы?
- 284.** Дуга AB акружнасці змяшчае 120° . Праз яе пункты A і B праведзены датычныя AC і BC (рыс. 236). Дакажыце, што даўжыня акружнасці, якая датыкаецца да дадзенай акружнасці і прамых AC і BC , роўна даўжыні дугі AB .
- 285.** Знайдзіце прыбліжана плошчу круга, узяўшы $\pi \approx 3,14$, калі радыус круга роўны:
а) 5 см; б) 10 м; в) 2,5 дм; г) 1 км.
- 286.** Знайдзіце прыбліжана радыус круга (акругліўшы адказ да 0,1), калі плошча круга роўна:
а) 4 см^2 ; б) 314 дм^2 .
- 287.** Плошча вечка люка роўна $0,5 \text{ м}^2$. Знайдзіце дыяметр вечка люка. Адказ запішыце ў сантыметрах.



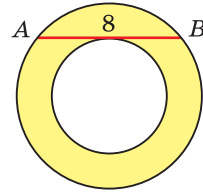
Рыс. 235



Рыс. 236

288. а) Вылічыце плошчу круга, калі даўжыня яго акружнасці роўна 6,28 см. Адказ акругліце да 0,01 см².
 б) Вылічыце даўжыню акружнасці, калі плошча круга, абмежаванага гэтай акружнасцю, роўна 15 см². Адказ акругліце да 0,01 см.

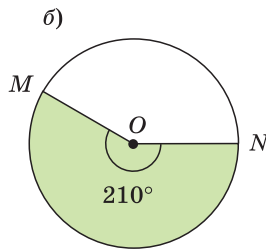
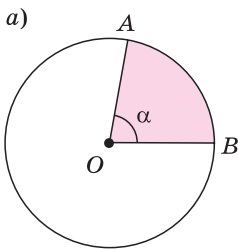
289. а) Знайдзіце плошчу кальца, утворанага двума канцэнтрычнымі акружнасцямі з радыусамі $R = 8$ см і $r = 5$ см.
 б) Дадзена кальцо (рыс. 237). Хорда AB большай акружнасці датыкаецца да меншай акружнасці і роўна 8 см. Знайдзіце плошчу кальца.



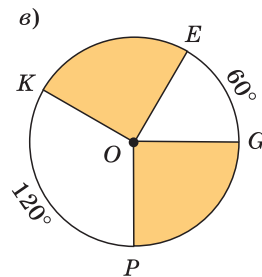
Рыс. 237

290. У акружнасць упісаны квадрат, у гэты квадрат упісана акружнасць. Знайдзіце адносіну плошчаў кругоў, абмежаваных гэтымі акружнасцямі.
291. Плошча круга роўна Q . Знайдзіце плошчу сектара з дугой, якая змяшчае:
 а) 30°; б) 60°; в) 120°; г) 270°.

292. а) На рысунку 238, а) плошча зафарбаванага сектара адносіцца да плошчы круга як 2 : 9. Знайдзіце градусную меру вугла сектара.
 б) На рысунку 238, б) плошча круга складае 120 см². Знайдзіце плошчу зафарбаванага сектара.
 в) На рысунку 238, в) дугі EG і KP змяшчаюць 60° і 120° адпаведна, плошча незафарбаванага сектара EOG роўна 90 см². Знайдзіце суму плошчаў зафарбаваных сектараў KOE і POG .



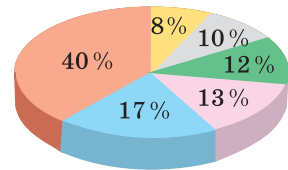
Рыс. 238



293. На рысунку 239 паказана кругавая дыяграма. Знайдзіце плошчу сектара, які складае 40 %, калі радыус круга роўны 10 см.

294. Знайдзіце адносіну плошчаў упісанага і апісанага кругоў:

- а) для правільнага трохвугольніка;
 б) для правільнага шасцівугольніка.



Рыс. 239

295. Знайдзіце плошчу сектара круга з вуглом α і радыусам R , калі:

а) $R = 4$ см, $\alpha = 15^\circ$;

б) $R = 2$ м, $\alpha = 135^\circ$.

296. а) Вылічыце радыус сектара, калі яго плошча роўна 16π , а дуга сектара змяшчае 40° .

б) Вылічыце плошчу сектара, калі плошча круга роўна 256π , а даўжыня дугі гэтага сектара роўна 4π .

 **297.** З тонкага металічнага круга выразалі правільны трохвугольнік найбольшай плошчы. Вызначце, колькі працэнтаў склалі адходы. Адказ акругліце да 1 %.

 **298.** Вызначце плошчу сегмента акружнасці радыусам R з дугой, роўнай α , калі:

а) $\alpha = 60^\circ$;

б) $\alpha = 270^\circ$.

 **299.** З канцоў дугі AB да акружнасці, радыус якой роўны R , праведзены датычныя, якія перасякаюцца ў пункце D . Вызначце плошчу фігуры, заключанай паміж гэтымі датычнымі і дугой, калі градусная мера дугі AB роўна:

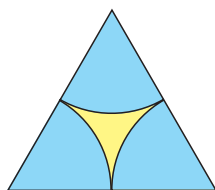
а) 90° ;

б) 120° .

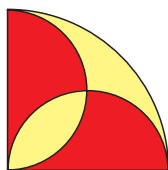
 **300.** а) Дадзены правільны трохвугольнік са стараной, роўнай 2. Пабудаваны тры сектары з цэнтрамі ў вяршынях трохвугольніка і радыусамі, роўнымі 1 (рыс. 240). Знайдзіце плошчу жоўтай часткі трохвугольніка.

б) Дадзены сектар з вуглом 90° і радыусам, роўным 4 (рыс. 241). На яго радыусах пабудаваны паўкругі. Знайдзіце плошчу чырвонай часткі сектара.

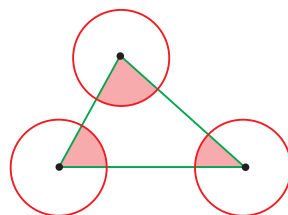
 **301.** На рысунку 242 паказаны тры кругі аднаго радыуса плошчай 12 см^2 кожны, цэнтры якіх знаходзяцца ў вяршынях адвольнага трохвугольніка. Знайдзіце суму плошчаў трох зафарбаваных сектараў гэтых кругоў.



Рыс. 240



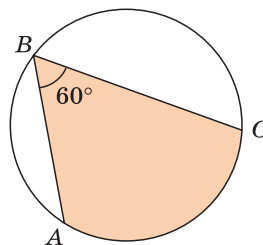
Рыс. 241



Рыс. 242

302. Два кругі радыусам R кожны размешчаны на плоскасці так, што акружнасць аднаго праходзіць праз цэнтр другога. Вызначце плошчу агульнай часткі кругоў.

303. Дадзены круг радыусам 1 і ўпісаны вугал ABC , роўны 60° (рыс. 243). Знайдзіце найбольшае значэнне плошчы зафарбаванай фігуры.



Рыс. 243

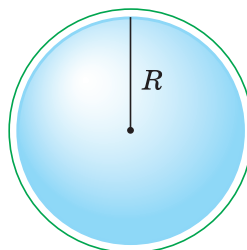


Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, чаму фразеалагізм «квadrатура круга» азначае «невырашальную задачу».

Гімнастыка розуму

Будзем меркаваць, што зямны шар уздоўж экватара (даўжыня экватара прыкладна роўна 40 000 км) абцягнулі ніткай. Затым гэту нітку падоўжылі на 20 см і раўнамерна (на аднолькавай адлегласці ад паверхні Зямлі) размясцілі па акружнасці над экватарам (рыс. 244). Ці зможа ў атрыманы зазор паміж ніткай і паверхняй Зямлі пралезці мышка?

Знайдзіце памер гэтага зазору.



Рыс. 244

Рэальная геаметрыя

Яблычны пірог дыяметрам 30 см каштуе 30 р. Колькі павінен каштаваць яблычны пірог такой жа таўшчыні дыяметрам 20 см (рыс. 245)?

Падказка: адказ 20 р. няправільны.



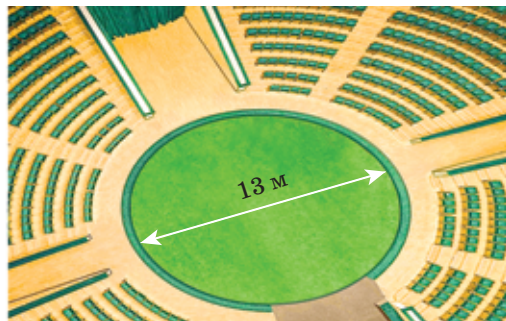
Рыс. 245



Цікава ведаць. Беларускі дзяржаўны цырк знаходзіцца на праспекце Незалежнасці ў Мінску. Першы паказ у ім адбыўся ў 1959 г. Мінскі цырк змяшчае 1580 месцаў для гледачоў. Дыяметр цыркавай арэны (манежа) роўны 13 м, як і ва ўсіх цырках свету.



Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, як цырк звязаны з геаметрыяй. У прыватнасці, што агульнае маюць словы «цырк» і «цыркль»? Чаму дыяметр манежа роўны менавіта 13 м?



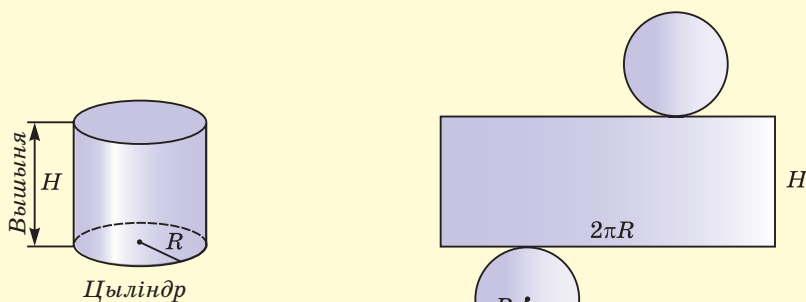
Заданне. а) Вызначце даўжыню акружнасці манежа. Падлічыце, за колькі секунд малпа можа аббегчы манеж па акружнасці са скорасцю 10 км/г.

б) Вызначце плошчу арэны ў квадратных метрах. Высветліце, колькі вёдраў пілавіння спатрэбіцца, каб засыпаць манеж, калі адным вядром можна засыпаць 9 дм².

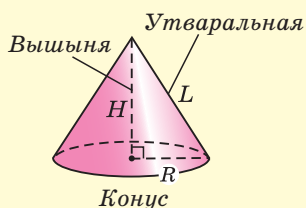
Геаметрыя 3D

Напомнім, што ў 8-м класе мы разгледзелі два целы вярчэння: цыліндр і конус. На рысунках 246 і 247 паказаны гэтыя целы і разгорткі іх паверхні на плоскасць.

Выканайце заданні 1 і 2, звязаныя з гэтымі прасторавымі фігурамі.



Рыс. 246

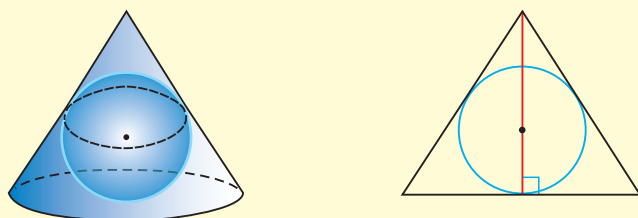


Рыс. 247

Заданне 1. Знайдзіце плошчу паверхні цыліндра, вышыня якога роўна 10 см, а радыус асновы — 4 см. Значэнне π вазьміце роўным 3.

Заданне 2. Знайдзіце плошчу паверхні конуса, вышыня якога роўна 4 см, а радыус асновы — 3 см. Значэнне π вазьміце роўным 3.

Заданне 3. Шар называецца ўпісаным у конус, калі ён датыкаецца да асновы конуса ў яго цэнтры і да бакавой паверхні па некаторай акружнасці (рыс. 248). Цэнтр шара пры гэтым ляжыць на вышыні конуса. Калі правесці плоскасць праз вышыню конуса, то ў сячэнні конуса атрымаецца раўнабедраны трохвугольнік, а ў сячэнні ўпісанага шара — яго вялікі круг, упісаны ў названы раўнабедраны трохвугольнік. Знайдзіце радыус шара, упісанага ў конус з радыусам асновы, роўным 6 см, і вышынёй, роўнай 4 см.



Рыс. 248



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Формулу даўжыні акружнасці.
2. Формулу плошчы круга.
3. Алгарытм знаходжання даўжыні дугі.
4. Алгарытм знаходжання плошчы сектара.
5. Алгарытм знаходжання плошчы сегмента.

Умеем

1. Знаходзіць даўжыню акружнасці па яе радыусе.
2. Знаходзіць плошчу круга па яго радыусе.
3. Вызначаць даўжыню дугі акружнасці па радыусе і градуснай меры дугі.
4. Вызначаць плошчу сектара па яго радыусе і вугле.
5. Вызначаць плошчу сегмента па радыусе акружнасці і градуснай меры дугі сегмента.
6. Выводзіць формулу даўжыні акружнасці.
7. Выводзіць формулу плошчы круга.

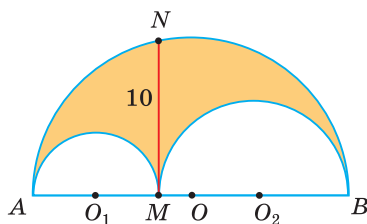


§ 20. Креатыўная геаметрыя

1. Сярпкі Гіпакрата

Сярпкі Гіпакрата называюць серпападобныя фігуры, абмежаваныя дугамі дзвюх акружнасцей.

Задача. На адрэзках AB , AM і MB пабудаваны паўкругі з цэнтрамі ў пунктах O , O_1 і O_2 . $NM \perp AB$, $NM = 10$ (рыс. 249). Знайсці плошчу зафарбаванай часткі вялікага паўкруга.



Рыс. 249

Рашэнне. Плошча зафарбаванай фігуры роўна рознасці плошчаў паўкруга з дыяметрам $AB = 2R$ і двух паўкругоў з дыяметрамі $AM = 2R_1$ і $MB = 2R_2$, г. зн.

$$\begin{aligned} S_{ANBM} &= \frac{\pi \cdot R^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot R_1^2}{2} + \frac{\pi \cdot R_2^2}{2} \right) = \\ &= \frac{\pi}{8} \left((2R)^2 - ((2R_1)^2 + (2R_2)^2) \right) = \\ &= \frac{\pi}{8} \left(AB^2 - (AM^2 + MB^2) \right) = \frac{\pi}{8} \left((AM + MB)^2 - (AM^2 + MB^2) \right) = \\ &= \frac{\pi}{8} \cdot 2AM \cdot MB = \frac{\pi}{4} \cdot AM \cdot MB. \end{aligned}$$

Паколькі $\angle ANB = 90^\circ$ як упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр AB , то NM — вышыня прамавугольнага трохвугольніка ANB , праведзеная да гіпатэнузы. А вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, — гэта сярэдняе прапарцыянальнае паміж праекцыямі катэтаў на гіпатэнузу, г. зн. $MN^2 = AM \cdot MB$. Такім чынам, $S_{ANBM} = \frac{\pi}{4} \cdot MN^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 = 25\pi$.

Адказ: 25π .

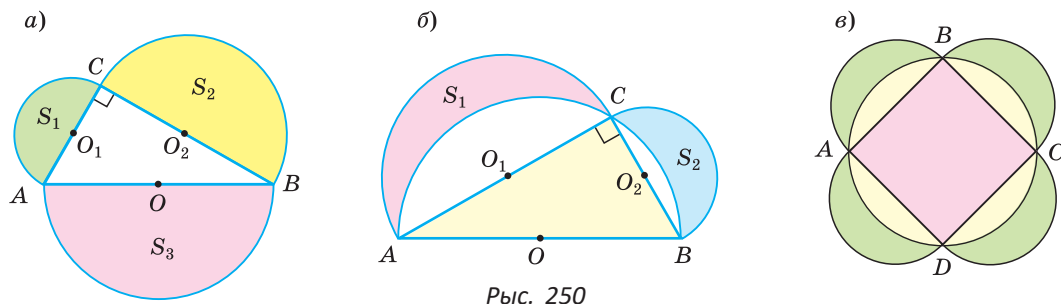


Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, ці адзін і той жа чалавек сфармуляваў клятву Гіпакрата і даследаваў гіпакратавы сярпкі.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 304.** На старанах прамавугольнага трохвугольніка ABC як на дыяметрах пабудаваны паўкругі (рыс. 250, а). Дакажыце, што $S_1 + S_2 = S_3$.
- 305.** На старанах прамавугольнага трохвугольніка ABC як на дыяметрах пабудаваны паўкругі (рыс. 250, б). Знайдзіце суму плошчаў сярпкоў Гіпакрата $S_1 + S_2$, калі $AC = 12$, $BC = 5$.



Рыс. 250

306. Каля квадрата $ABCD$ апісаны круг, а на яго старанах пабудаваны паўкругі як на дыяметрах (рыс. 250, в). Дакажыце, што сума плошчаў зялёных сярпкоў роўна плошчы квадрата.

2. Залатое сячэнне

«Залатое сячэнне», або «боская прапорцыя», — так называюць матэматыкі дзяленне адрэзка некаторым пунктам на часткі, пры якім большы з атрыманых адрэзкаў з'яўляецца сярэднім прапарцыянальным (сярэдным геаметрычным) паміж меншым адрэзкам і цэлым. Інакш кажучы, большы адрэзак павінен так адносіцца да меншага, як цэлы адрэзак адносіцца да большага. Калі на адрэзку AB адзначаны пункт M і $\frac{AM}{MB} = \frac{AB}{AM}$, то адрэзак AM — сярэдняе прапарцыянальнае адрэзкаў AB і MB . Таму пункт M дзеліць адрэзак AB у адносіне залатога сячэння.

Няхай $AB = 1$, $AM = x$, $MB = 1 - x$ (рыс. 251).

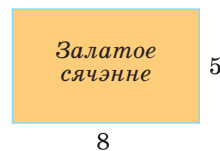
Тады $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$, адкуль $x^2 + x - 1 = 0$. Улічыўшы, што $x > 0$, атрымаем $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618033989\dots$

Такім чынам, большы адрэзак AM складае прыблізна 62 %, а меншы адрэзак MB — прыблізна 38 % усяго адрэзка AB .

Лік $\Phi = \frac{1}{x} = 1,618033989\dots$ — лічыцца адносінай залатога сячэння. Ён прыкладна роўны адносіне 8 : 5 (рыс. 252). Залатое сячэнне валодае пэўнай гармоніяй, якую чалавек знаходзіць прыгожай. Многія мастацкія, музычныя, паэтычныя творы, шэдэўры архітэктуры маюць у сваёй структуры залатое сячэнне. Доследным шляхам вызначана, што аптымальным чалавеку здаецца прамавугольнік, даўжыня і шырыня якога знаходзяцца ў адносіне залатога сячэння. Фізіёлагі тлумачаць гэта тым, што поле зроку чалавека, г. зн. тая частка навакольнага свету, якую бачыць чалавек,



Рыс. 251

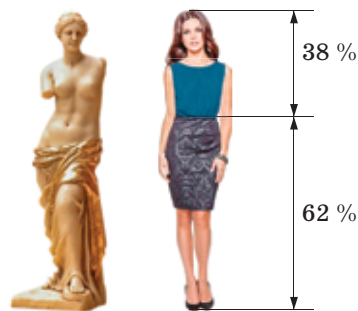


Рыс. 252

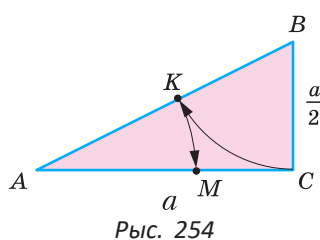
уяўляе сабой прамавугольнік са старанамі, якія знаходзяцца ў адносіне залатога сячэння.

Вядома, напрыклад, што ў знакамітай скульптуры Венеры Мілоскай (рыс. 253) — эталоне жаночай прыгажосці — талія дзеліць фігуру ў адносіне залатога сячэння.

Варты ўвагі наступны гістарычны факт. Калі інфармацыя аб Венеры Мілоскай і залатым сячэнні была апублікавана ў адным з папулярных часопісаў пачатку XX ст., то ў крамах паблізу жаночых гімназій зніклі кравецкія метры. Іх раскупілі дзяўчыны-гімназісткі, каб праверыць, наколькі іх фігура блізкая да ідэалу і якой вышыні абцас трэба насіць, каб да яго наблізіцца.



Рыс. 253



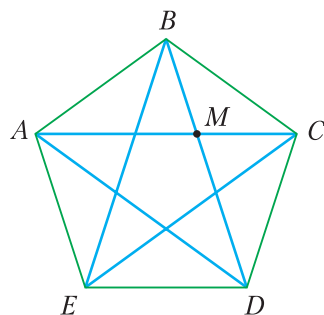
Рыс. 254

Пакажам спосаб дзялення адрэзка ў адносіне залатога сячэння пры дапамозе цыркуля і лінейкі. Няхай дадзены адрэзак, роўны a . Пабудуем прамавугольны трохвугольнік ABC з катэтамі $AC = a$ і $BC = \frac{a}{2}$ (рыс. 254). На гіпатэнузе AB адкладзём адрэзак BK , роўны адрэзку BC . Затым на катэце AC адкладзём адрэзак AM , роўны адрэзку AK . Пункт M дзеліць адрэзак AC у адносіне залатога сячэння, г. зн. $\frac{AM}{MC} = \frac{AC}{AM}$. Пераканайцеся ў гэтым самастойна.

3. Пабудова правільнага пяцівугольніка

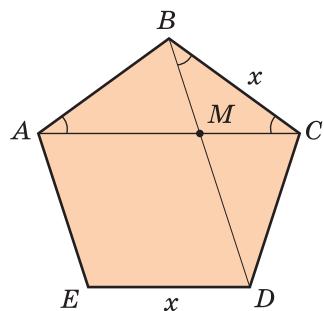
З даўніх часоў пабудове правільных многавугольнікаў пры дапамозе цыркуля і лінейкі матэматыкі надавалі вялікую ўвагу. Старажытныя грэкі ўмелі будаваць правільныя трохвугольнікі, чатырохвугольнікі, пяцівугольнікі, а таксама правільныя многавугольнікі, якія атрымліваюцца падваеннем колькасці іх старон: 6-вугольнікі, 8-вугольнікі, 10-вугольнікі і г. д. Далей справа зайшла ў тупік: яны не маглі знайсці спосаб пабудовы правільных 7-вугольнікаў, 9-вугольнікаў, 11-вугольнікаў. І толькі праз 2000 гадоў выдатны нямецкі матэматык XVII ст. Карл Гаўс рашыў гэту матэматычную праблему. Будучы 19-гадовым юнаком, ён даказаў, што можна пабудоваць правільны 17-вугольнік, а вось 7-вугольнік, 9-вугольнік, 11-вугольнік, 13-вугольнік цыркулем і лінейкай пабудоваць нельга. Задача аб пабудове правільнага 17-вугольніка была яго першым навуковым адкрыццём. Нягледзячы на выдатныя дасягненні Гаўса ў вобласці матэматыкі, гэтай першай сваёй рэшанай праблеме ён надаваў такое значэнне, што ў канцы жыцця наказаў намаляваць на магільным камяні правільны 17-вугольнік.

Разгледзім правільны пяцівугольнік. Калі ў ім правесці ўсе дыяганалі (рыс. 255), то атрымаецца зорка (зорчаты пяцівугольнік). Зорка была сімвалам школы Піфагора. Паказальна тое, што пункты перасячэння дыяганалей пяцівугольніка дзеляць іх у адносіне залатога сячэння: $\frac{AM}{MC} = \frac{AC}{AM}$. Дакажам гэта.



Рыс. 255

Паколькі $\triangle ABC$ і $\triangle BCD$ — роўныя раўнабедраныя трохвугольнікі (рыс. 256), то $\angle BAC = \angle ACB = \angle DBC$. Паколькі $AC \parallel ED$, $BD \parallel AE$ (дакажыце самастойна), то $AMDE$ — паралелаграм, таму $AM = ED = x$. Але $BC = ED = x$ як стораны пяцівугольніка. З падобнасці трохвугольнікаў ABC і BMC (па двух вуглах) вынікае $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{MC}$, або $\frac{AC}{AM} = \frac{AM}{MC}$. Значыць, пункт M дзеліць адрэзак AC у адносіне залатога сячэння.

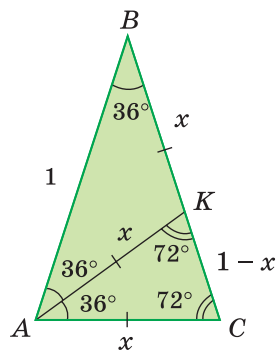


Рыс. 256

Разгледзім задачу аб пабудове правільнага пяцівугольніка пры дапамозе цыркуля і лінейкі. Для пабудовы правільнага пяцівугольніка можна ўзяць адвольны адрэзак d , роўны дыяганалі правільнага пяцівугольніка, і падзяліць яго ў адносіне залатога сячэння. Атрымаўшы адрэзак x , роўны старане правільнага пяцівугольніка, можна лёгка пабудаваць правільны пяцівугольнік. Працягніце пабудову самі.

Задача аб пабудове правільнага пяцівугольніка раўназначна пабудове вуглоў, роўных 36° , 72° , 108° , а таксама пабудове раўнабедранага трохвугольніка, бісектрыса вугла пры аснове якога разбівае дадзены трохвугольнік на два раўнабедраныя. Няхай у трохвугольніку ABC (рыс. 257) $\angle B = 36^\circ$, AK — бісектрыса і $AB = BC = 1$. Абазначым $AC = AK = KB = x$, $KC = 1 - x$. З уласцівасці бісектрысы вынікае $\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{KC}$, $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$, адкуль $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Такім чынам, пункт K дзеліць адрэзак BC у адносіне залатога сячэння. З трохвугольніка ABC па тэарэме косінусаў

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ &= \frac{1^2 + 1^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}{2} = \\ &= \frac{2 - \frac{6-2\sqrt{5}}{4}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$



Рыс. 257

Адзначым, што старана AC трохвугольніка ABC з'яўляецца стараной правільнага дзесяцівугольніка, упісанага ў акружнасць радыусам, роўным AB .



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 307.** Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудуйце:
- правільны пяцівугольнік па дадзенай яго старане a ;
 - правільны пяцівугольнік, упісаны ў дадзеную акружнасць.
- 308.** Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудуйце правільны дзесяцівугольнік з дадзенай стараной b .
- 309.** Знайдзіце дакладнае значэнне $\cos 72^\circ$, выкарыстаўшы рысунак 257.

Цікава ведаць. Карл Фрыдрых Гаўс — адзін з выдатных матэматыкаў свету, яго называлі «каралём матэматыкаў».

Сын печніка, які нарадзіўся ў Германіі, ён праявіў здольнасці да матэматыкі ў раннім дзяцінстве. Пасля заканчэння школы Гаўс паступіў у Гётtingенскі ўніверсітэт на аддзяленне філалогіі і хацеў стаць паэтам. Але пазней Гаўс захапіўся адной матэматычнай задачай і выбраў сваёй прафесіяй матэматыку.



ТЭМЫ ПРАЕКТАЎ



- Квадратура круга.
- Залатое сячэнне.
- Карл Гаўс і яго дасягненні.
- Задача Дыдоны.

ЗАПАМІНАЕМ

1. Для квадрата са стараной a справядліва: $R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{a}{2}$.

2. Для правільнага трохвугольніка са стараной a справядліва:

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

3. Для правільнага шасцівугольніка са стараной a справядліва:

$$R = a, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2.$$

4. Даўжыню акружнасці знаходзяць па формуле $C = 2\pi R$.

5. Плошчу круга знаходзяць па формуле $S = \pi R^2$.

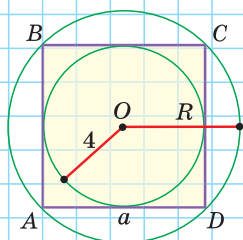
6. Даўжыню дугі, якая змяшчае n° , знаходзяць па формуле $l_{\text{дугі}} = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$.

7. Плошчу сектара з вуглом, роўным n° , знаходзяць па формуле $S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$.

ПРАВЯРАЕМ СЯБЕ

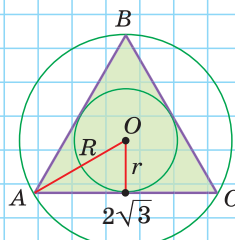
Тэст 1

$ABCD$ — квадрат. Знайдзіце a і R .



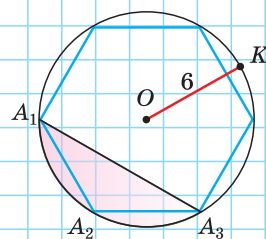
Тэст 2

$\triangle ABC$ правільны. Знайдзіце R і r .



Тэст 3

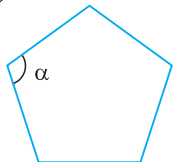
Дадзены правільны шасцівугольнік, радыус яго апісанай акружнасці $OK = 6$. Знайдзіце плошчу сегмента $A_1A_2A_3$.



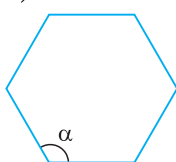
ПАДРЫХОТКА ДА КАНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 4

1. Знайдзіце вугал α правільнага n -вугольніка.

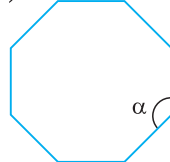
а)



б)

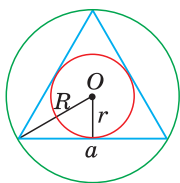


в)

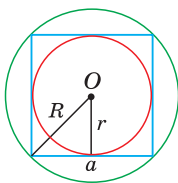


2. Знайдзіце пазначаныя элементы правільных многавугольнікаў.

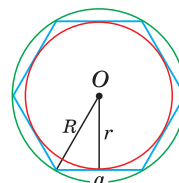
а) $a = 4\sqrt{3}$. $R = ?$ $r = ?$



б) $r = 6$. $a = ?$ $R = ?$

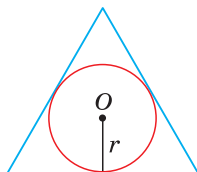


в) $R = 2\sqrt{3}$. $a = ?$ $r = ?$

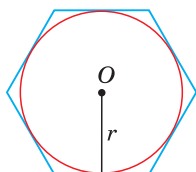


3. Знайдзіце пазначаную велічыню для правільнага многавугольніка.

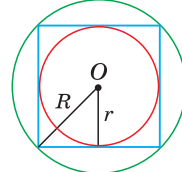
а) $S = 16\sqrt{3}$. $r = ?$



б) $r = 2\sqrt{3}$. $S_6 = ?$

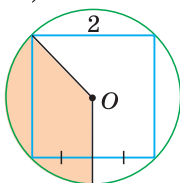


в) $R + r = 2 + \sqrt{2}$. $S_4 = ?$

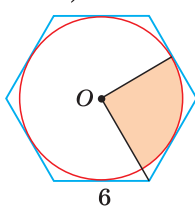


4. Дадзены правільны n -вугольнік. Знайдзіце плошчу і перыметр зафарбаванай фігуры, ведаючы старану n -вугольніка.

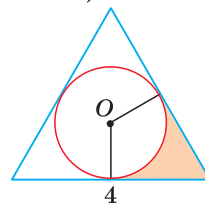
а)



б)

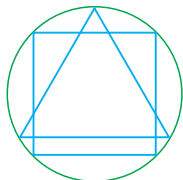


в)

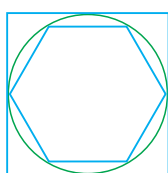


5. Знайдзіце адносіну плошчаў правільных многавугольнікаў.

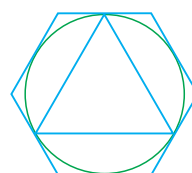
а) $S_3 : S_4 = ?$



б) $S_4 : S_6 = ?$



в) $S_3 : S_6 = ?$



Паўтарэнне главы III

1. Тэарэма сінусаў

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Задача. Знайсці:

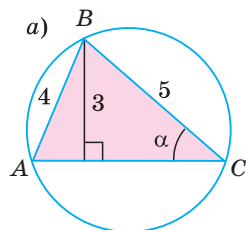
- а) радыус R апісанай акружнасці $\triangle ABC$;
 б) старану x паралелаграма $ABCD$.

Рашэнне.

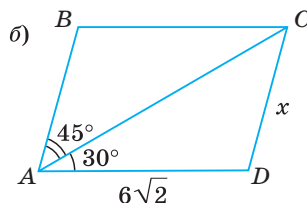
а) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{4}{\sin \alpha} = 2R$, $\frac{4}{\frac{3}{5}} = 2R$, $R = 3\frac{1}{3}$;

б) $\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$, $x = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{6\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6$.

Адказ: а) $3\frac{1}{3}$; б) 6.



$R = ?$



2. Тэарэма косінусаў

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

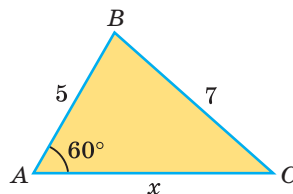
Задача. Знайсці старану x трохвугольніка ABC .

Рашэнне.

$$7^2 = 5^2 + x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x \cdot \cos 60^\circ, \quad 49 = 25 + x^2 - 10 \cdot x \cdot \frac{1}{2},$$

$$x^2 - 5x - 24 = 0, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 8.$$

Адказ: 8.



3. Уласцівасць дыяганалей паралелаграма

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

4. Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Задача. Знайсці плошчу трохвугольніка ABC .

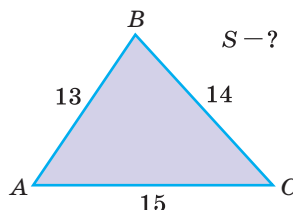
Рашэнне.

$$p = \frac{13+14+15}{2} = 21, \quad p-c = 21-13 = 8,$$

$$p-a = 21-14 = 7, \quad p-b = 21-15 = 6,$$

$$S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84.$$

Адказ: 84.



Паўтарэнне главы IV

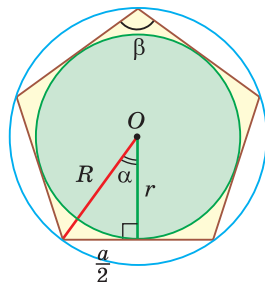
1. Правільны n -вугольнік

Усе стораны і ўсе вуглы роўныя.

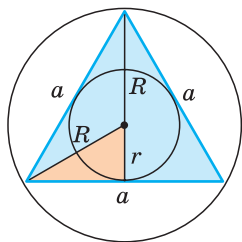
Можна апісаць і можна ўпісаць акружнасць, іх цэнтры супадаюць.

$$\beta = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \text{ — унутраны вугал.}$$

$$R = \frac{a}{2} : \sin \alpha = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \quad r = \frac{a}{2} : \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

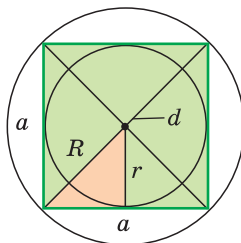


2. Правільны трохвугольнік, чатырхвугольнік, шасцівугольнік



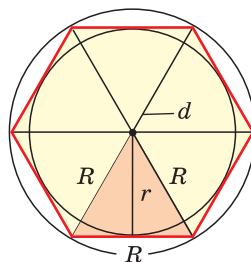
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



$$d = a\sqrt{2}, \quad a = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

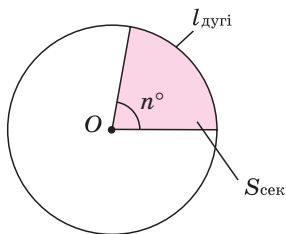
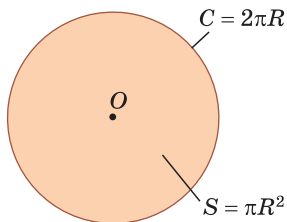
$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad r = \frac{a}{2}$$



$$a = R, \quad S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$d = 2a, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

3. Даўжыня акружнасці і плошча круга



4. Даўжыня дугі

$$\frac{l_{\text{дугі}}}{2\pi R} = \frac{n^\circ}{360^\circ}$$

5. Плошча сектара

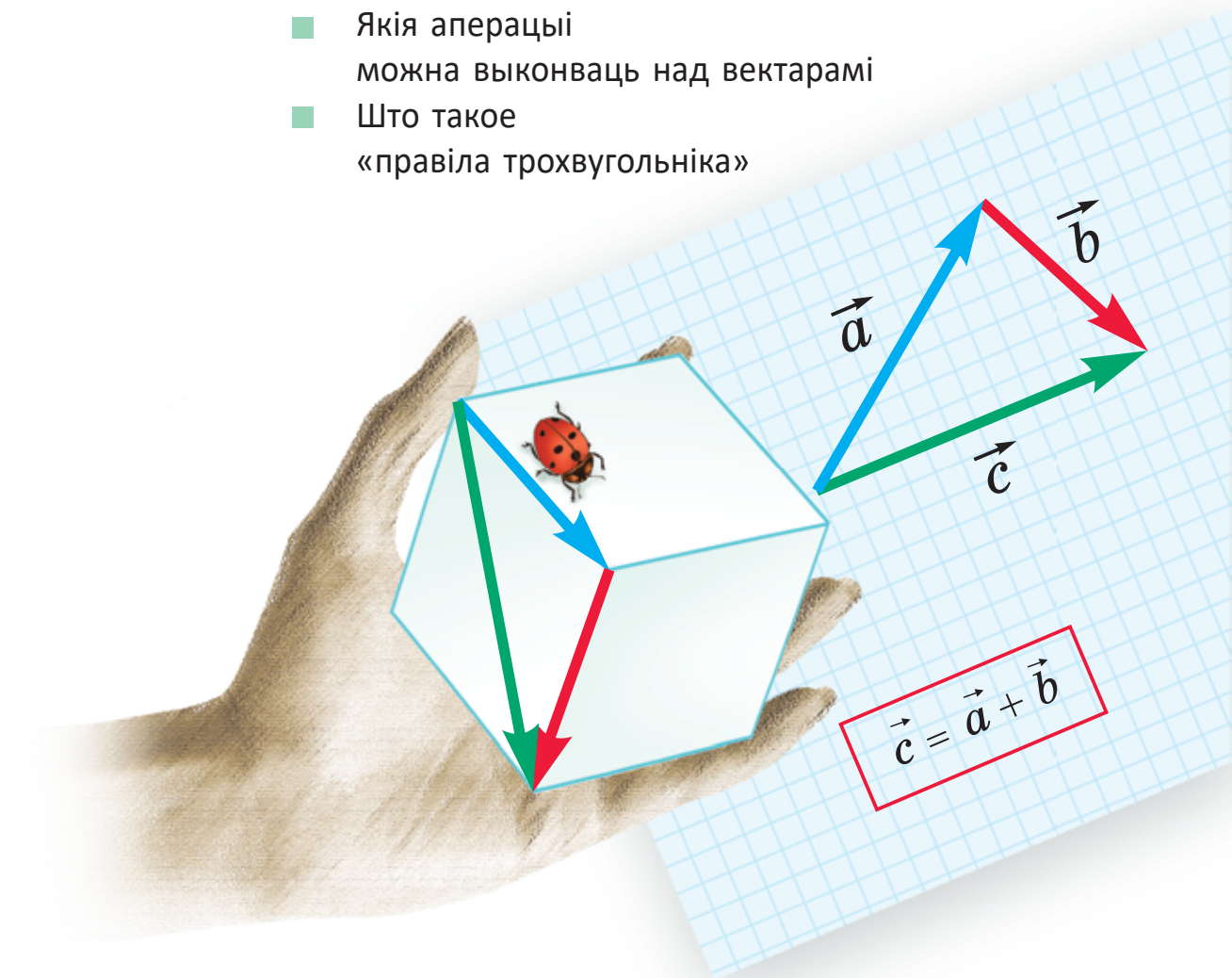
$$\frac{S_{\text{сек}}}{\pi R^2} = \frac{n^\circ}{360^\circ}$$

Глава V

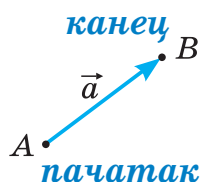
Вектары

У гэтай главе вы даведаецеся:

- Што такое вектар у геаметрыі
- Якія аперацыі
можна выконваць над вектарамі
- Што такое
«правіла трохвугольніка»



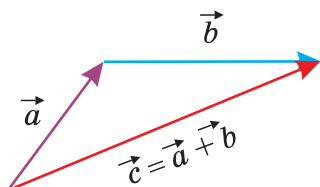
Вектор — накіраваны адрэзак



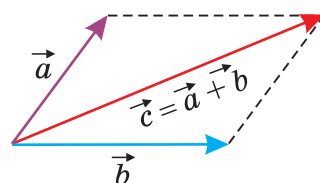
$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

$|\overrightarrow{AB}|$ — даўжыня вектара

СКЛАДАННЕ ВЕКТАРАЎ

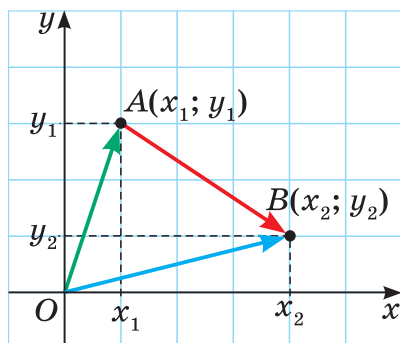


правіла трохвугольніка



правіла паралелаграма

КААРДЫНАТЫ ВЕКТАРА



$\overrightarrow{OA}(x_1; y_1), \overrightarrow{OB}(x_2; y_2)$ — радыус-вектары

$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ — ад каардынат канца
адняць каардынаты пачатку

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ — даўжыня вектара $\vec{a}(a_1; a_2)$

**Складанне (адніманне) вектараў,
зададзеных каардынатамі**

$$\vec{a}(a_1; a_2) \pm \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2)$$



§ 21. Вектар. Віды вектараў

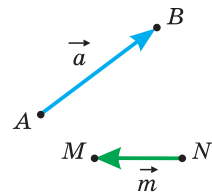
1. Што такое вектар

З курса фізікі вам вядома, што фізічныя велічыні, якія характарызуюцца не толькі лікавым значэннем, але і напрамкам, называюцца вектарнымі велічынямі або *вектарамі*. Напрыклад, скорасць, сіла, перамяшчэнне — вектарныя велічыні. На чарцяжы вектары паказваюць у выглядзе адрэзка са стрэлкай. Даўжыня гэтага адрэзка паказвае адноснае лікавае значэнне вектара, а стрэлка — напрамак велічыні. Дадзім матэматычнае азначэнне вектара.

Вектарам называецца накіраваны адрэзак, г. зн. адрэзак, адзін канец якога прымаюць за пачатак, а другі — за канец вектара.

Адрозніваюць вектары на плоскасці і ў прасторы. Мы разгледзім вектары на плоскасці.

Вектар абазначаецца дзвюма вялікімі лацінскімі літарамі (першай запісваецца пачатак, а другой — канец вектара) або адной малой лацінскай літарай, над якімі ставіцца стрэлка: $\overline{AB}$ або $\vec{a}$, $\overline{NM}$ або $\vec{m}$ (рыс. 258).



Рыс. 258

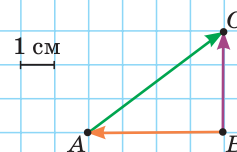
Вектары вызначаюцца *даўжынёй* і *напрамкам*. Даўжыня вектара, інакш кажучы, *модуль* вектара або *абсалютная велічыня* вектара, — гэта даўжыня адрэзка, якім зададзены вектар. У матэматыцы даўжыня вектара абазначаецца знакам модуля: $|\overline{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Нулявым вектарам (нуль-вектарам) называецца вектар, пачатак і канец якога супадаюць. Нулявы вектар абазначаецца сімвалам $\vec{0}$ або $\overline{AA}$, $\overline{BB}$ і г. д. Даўжыня нулявога вектара лічыцца роўнай нулю, з ім не звязваюць ніякага напрамку.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

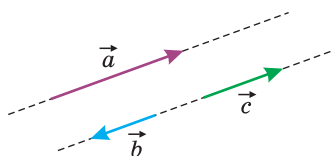
- Назавіце вектары, паказаныя на рысунку.
- Знайдзіце даўжыню кожнага з названых вектараў, калі старана клеткі роўна 1 см.



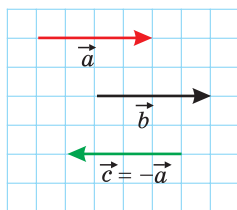
2. Калінеарныя вектары

Калінеарнымі вектарамі называюцца вектары, якія ляжаць на паралельных прамых або на адной прамой. Калі вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ калінеарныя, то пішуць $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Калінеарныя вектары, якія накіраваны аднолькава, называюцца *сунакіраванымі*, а калінеарныя вектары, накіраваныя ў процілеглыя бакі, — *процілеглы накіраванымі* вектарамі.



Рыс. 259



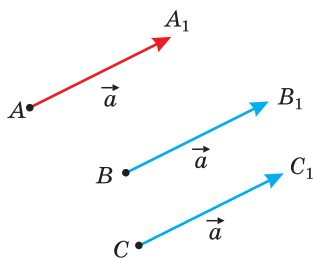
Рыс. 260

На рысунку 259 вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — калінеарныя, прычым вектары $\vec{a}$ і $\vec{c}$ сунакіраваныя, а вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ процілеглы накіраваныя. Гэта запісваюць так: $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{c}$, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow \downarrow \vec{c}$.

Роўнымі вектарамі называюцца два вектары, якія роўныя па даўжыні і супадаюць па напрамку. *Прцілеглымі* вектарамі называюцца два вектары, роўныя па даўжыні, але процілеглыя па напрамку. Вектар, процілеглы вектару $\vec{a}$, абазначаюць $-\vec{a}$. Вектар $\overrightarrow{BA}$ процілеглы вектару $\overrightarrow{AB}$, г.зн. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

На рысунку 260 вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўныя, а вектары $\vec{a}$ і $\vec{c}$ процілеглыя, г.зн. $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{c} = -\vec{a}$.

Заўвага. Трэба адрозніваць паняцці «роўныя вектары» і «вектары, роўныя па даўжыні». Роўныя па даўжыні вектары могуць адрознівацца па напрамку. Таксама трэба адрозніваць паняцці «процілеглыя вектары», роўныя па даўжыні, і «процілеглы накіраваныя вектары», якія могуць адрознівацца па даўжыні.



Рыс. 261

Калі пункт A — пачатак вектара, то гавораць, што вектар адкладзены ад пункта. Ад любога пункта можна адкласці вектар, роўны дадзенаму, і пры гэтым толькі адзін.

Роўныя вектары, адкладзеныя ад розных пунктаў, часта абазначаюць адной і той жа літарай. Таксама гавораць, што гэта адзін і той жа вектар, але адкладзены ад розных пунктаў. На рысунку 261 вектар $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$ адкладзены ад пунктаў B і C , г.зн. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = \vec{a}$.

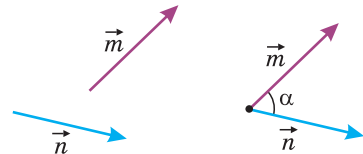
3. Вугал паміж вектарамі

Вугал паміж ненулявымі вектарамі, адкладзенымі ад аднаго пункта, роўны вуглу паміж прамянямі, якія выходзяць з агульнага пачатку вектараў у напрамках, задаваемых кожным вектарам, і мае велічыню ад 0° да 180° .

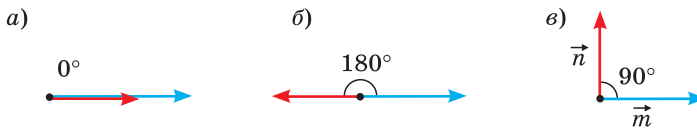
Вуглом паміж вектарамі называецца вугал паміж вектарамі, калінеарнымі дадзеным і адкладзенымі ад аднаго пункта.

На рысунку 262 вугал паміж вектарамі $\vec{m}$ і $\vec{n}$ роўны α . Гэта запісваюць так: $\angle(\vec{m}; \vec{n}) = \alpha$.

Калі вектары сунакіраваныя, то вугал паміж імі роўны 0° (рыс. 263, а). Калі вектары процілеглыя накіраваныя, то вугал паміж імі роўны 180° (рыс. 263, б). Калі вугал паміж вектарамі $\vec{m}$ і $\vec{n}$ роўны 90° (рыс. 263, в), то вектары $\vec{m}$ і $\vec{n}$ называюцца перпендыкулярнымі (або *артаганальнымі*). Гэта запісваюць так: $\vec{m} \perp \vec{n}$. Можна лічыць, што нулявы вектар перпендыкулярны і калінеарны любому вектару.



Рыс. 262



Рыс. 263

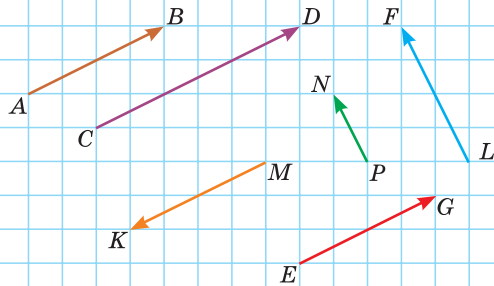
А цяпер выканайце **Тэст 2**.

Тэст 2

Па рысунку знайдзіце:

- калінеарныя вектары;
- сунакіраваныя вектары;
- процілеглыя накіраваныя вектары;
- роўныя вектары;
- процілеглыя вектары;
- вектары, роўныя па даўжыні;
- вугал паміж вектарамі:

$\vec{AB}$ і $\vec{MK}$; $\vec{EG}$ і $\vec{PN}$.



Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, што азначае слова «вектар» і хто з матэматыкаў увёў паняцце вектара.



Заданні да § 21

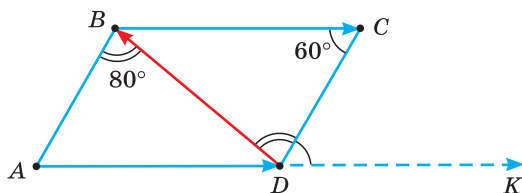
РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача. $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 264).

а) Даказаць, што вектары $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ роўныя.

б) Знайсці вугал паміж вектарамі $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{BC}$, калі $\angle ABD = 80^\circ$, $\angle C = 60^\circ$.



Рыс. 264

Рашэнне. а) Па ўласцівасці паралелаграма стораны AD і BC роўныя і паралельныя. Таму вектары $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ сунакіраваныя і роўныя па даўжыні. Такім чынам, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

б) Адкладзём ад пункта D вектар $\overrightarrow{DK}$, роўны вектару $\overrightarrow{BC}$ (гл. рыс. 264). Паколькі роўныя вектары калінеарныя, то $DK \parallel BC$. Вугал BDK — шуканы. Паколькі $\angle BDC = \angle ABD = 80^\circ$, $\angle CDK = \angle BCD = 60^\circ$ як накрывлеглыя вуглы пры адпаведных паралельных прамых, то $\angle BDK = 80^\circ + 60^\circ = 140^\circ$.

Адказ: 140° .

РАШАЕМ
САМАСТОЙНА

310. Адзначце тры пункты A , B і C , якія не ляжаць на адной прамой. Пабудуйце два вектары з пачаткам у пункце C і канцамі ў пунктах A і B . Пакажыце відарыс вектара з пачаткам у пункце B і канцом у пункце A . Запішыце атрыманыя вектары, выкарыстаўшы літары A , B і C .

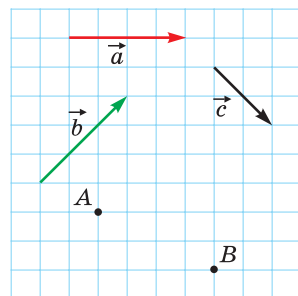
311. Перанясіце вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, а таксама пункты A і B у сшытак (рыс. 265).

а) Адкладзіце ад пункта A вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайдзіце вугал паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

б) Адкладзіце ад пункта B вектары $\vec{c}$ і $-\vec{a}$. Знайдзіце вугал паміж вектарамі $\vec{c}$ і $-\vec{a}$.

312. Начарціце вектары $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{EG}$ такія, каб выконваліся ўмовы:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{EG}$ калінеарныя, $|\overrightarrow{AB}| = 2$ см, $|\overrightarrow{CD}| = 3$ см, $|\overrightarrow{EG}| = 3,5$ см;



Рыс. 265

б) $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ сунакіраваныя, $\overline{CD}$ і $\overline{EG}$ некалінеарныя, $|\overline{AB}| = 1$ см, $|\overline{CD}| = 4$ см, $|\overline{EG}| = 4$ см.

313. Начарціце вектар $\vec{a}$. Пабудуйце:

- а) вектары $\vec{b}$ і $\vec{c}$, не роўныя вектару $\vec{a}$ і такія, што $\vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a}$, $\vec{c} \uparrow \downarrow \vec{a}$;
 б) вектары $\vec{m}$ і $\vec{n}$ такія, што $\vec{m} = \vec{a}$, а $\vec{n} = -\vec{a}$.

314. Начарціце вектары:

- а) $\overline{MK}$ і $\overline{NL}$, роўныя па даўжыні і некалінеарныя;
 б) $\overline{GE}$ і $\overline{FH}$, роўныя па даўжыні і процілеглыя накіраваныя.

315. а) Начарціце два некалінеарныя вектары $\overline{AB}$ і $\overline{MN}$ адвольнай даўжыні. Знайдзіце вугал паміж гэтымі вектарамі (карыстайцеся транспарцірам).

б) Начарціце два вектары $\overline{CD}$ і $\overline{EF}$ адвольнай даўжыні, вугал паміж якімі роўны:

- 1) 60° ; 2) 135° ; 3) 90° .

316. Начарціце квадрат $ABCD$. Выкарыстаўшы пункты A , B , C і D як пачатак або канец вектара, запішыце:

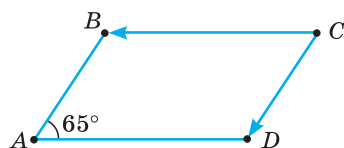
- а) вектар, роўны вектару $\overline{BC}$;
 б) вектары, процілеглыя вектару $\overline{DA}$;
 в) усе вектары, перпендыкулярныя вектару $\overline{AB}$;
 г) вектары, перпендыкулярныя вектару $\overline{AC}$.

317. Начарціце адвольны вектар $\overline{AB}$. На прамой AB адзначце пункт C і адкладзіце ад яго:

- а) вектар, роўны вектару $\overline{AB}$;
 б) вектар, процілеглы вектару $\overline{AB}$.

318. Дадзены паралелаграм $ABCD$ (рыс. 266).

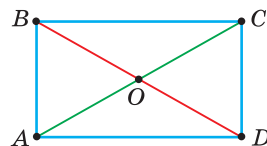
- а) Запішыце вектар, роўны вектару $\overline{CB}$, і вектары, процілеглыя вектару $\overline{CD}$.
 б) Выкарыстаўшы даныя рысунка 266, знайдзіце вугал паміж вектарамі: $\overline{CB}$ і $\overline{CD}$; $\overline{CB}$ і $\overline{BA}$; $\overline{AD}$ і $\overline{CD}$.



Рыс. 266

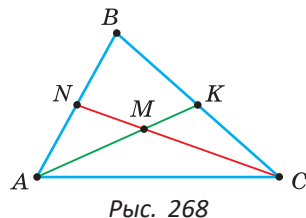
319. Дадзены прамавугольнік $ABCD$ (рыс. 267). Вызначце, якімі з'яўляюцца наступныя вектары, выкарыстаўшы толькі тэрміны «роўныя», «процілеглыя», «перпендыкулярныя»:

- а) $\overline{DA}$ і $\overline{BC}$; б) $\overline{AO}$ і $\overline{OC}$;
 в) $\overline{BO}$ і $\overline{DO}$; г) $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$.



Рыс. 267

- 320.** У трохвугольніку ABC праведзены медыяны AK і CN , якія перасякаюцца ў пункце M (рыс. 268). Выкарыстаўшы адзначаныя пункты, запішыце:



- а) дзве пары роўных вектараў;
- б) якія-небудзь тры сунакіраваныя вектары;
- в) якія-небудзь два процілеглыя вектары.

- 321.** а) У прамавугольніку $ABCD$ $AD = 8$ см, $AB = 6$ см, O — пункт перасячэння дыяганалей. Знайдзіце $|\overline{DO}|$.
 б) У прамавугольным трохвугольніку ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 7$ см, M — сярэдзіна гіпатэнузы. Знайдзіце $|\overline{CM}|$.

- 322.** AK — бісектрыса роўнастаронняга трохвугольніка ABC . Знайдзіце вугал паміж вектарамі:

- а) $\overline{AK}$ і $\overline{AC}$; б) $\overline{BA}$ і $\overline{KC}$; в) $\overline{AC}$ і $\overline{CB}$; г) $\overline{AK}$ і $\overline{BC}$.

- 323.** Дакажыце, што чатырохвугольнік $ABCD$ — паралелаграм, калі:

- а) вектары $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ роўныя і не ляжаць на адной прамой;
- б) вектары $\overline{BC}$ і $\overline{DA}$ процілеглыя і не ляжаць на адной прамой.

- 324.** Дакажыце, што вугал паміж дадзенымі вектарамі роўны вуглу паміж вектарамі, процілеглымі дадзеным.

-  **325.** а) Вектары $\overline{MN}$ і $\overline{PK}$ роўныя і пункты M , N і K не ляжаць на адной прамой. Дакажыце, што адрэзкі MK і NP пунктам перасячэння дзяляцца папалам.
 б) Вектары $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ роўныя па даўжыні, некалінеарныя і не маюць агульных пунктаў, вектары $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$ калінеарныя. Дакажыце, што $\angle BAD = \angle CDA$.



§ 22. Дзеянні над вектарамі

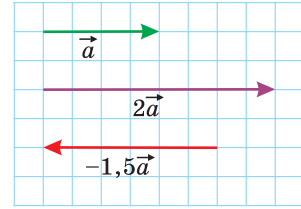
1. Множанне вектара на лік

Здабыткам ненулявога вектара $\vec{a}$ на лік $k \neq 0$ называецца вектар $\vec{b} = k\vec{a}$, які пры $k > 0$ сунакіраваны з вектарам $\vec{a}$, пры $k < 0$ процілеглы накіраваны вектару $\vec{a}$ і па даўжыні адрозніваецца ад вектара $\vec{a}$ ў $|k|$ разоў, г. зн. $|\vec{b}| = |k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.

Калі $k = 0$ або $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{b} = k\vec{a} = \vec{0}$.

Правільнае сцверджанне, што калі ненулявыя вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ калінеарныя, то існуе лік k такі, што $\vec{b} = k\vec{a}$.

На рысунку 269 паказаны калінеарныя вектары $\vec{a}$, $2\vec{a}$, $-1,5\vec{a}$.



Рыс. 269

Уласцівасці множання вектара на лік:

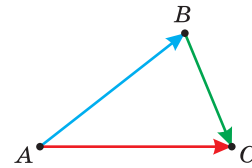
1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;

2) $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;

3) $k \cdot (m\vec{a}) = km \cdot \vec{a} = m \cdot (k\vec{a})$, дзе m і k — некаторыя лікі.

2. Складанне вектараў

Калі матэрыяльны пункт A перамясціўся ў пункт B (рыс. 270), а затым з пункта B у пункт C , то ў выніку ён перамясціўся з пункта A ў пункт C . Калі паказаць першыя два перамяшчэнні вектарамі $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$, то выніковае перамяшчэнне можна

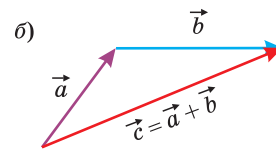
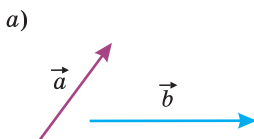


Рыс. 270

паказаць вектарам $\overrightarrow{AC}$. Тады вектар $\overrightarrow{AC}$ можна назваць сумай вектараў $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$, г. зн. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Заўважым, што пры такім разглядзе сумы вектараў утварыўся трохвугольнік ABC .

Сумай вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ называецца вектар $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, які атрымліваецца па правіле трохвугольніка або па правіле паралелаграма.

Правіла трохвугольніка. Для знаходжання сумы вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рыс. 271, а) трэба ад канца вектара $\vec{a}$ адкласці вектар $\vec{b}$ (рыс. 271, б). Вектар $\vec{c}$, праведзены ад пачатку вектара $\vec{a}$ да канца вектара $\vec{b}$, роўны $\vec{a} + \vec{b}$.



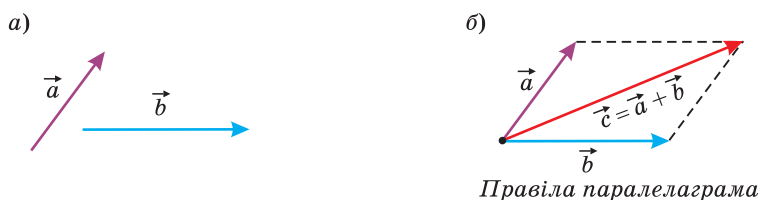
Правіла трохвугольніка

Рыс. 271

Пры складанні вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ па правіле трохвугольніка можна адкласці вектар $\vec{a}$ ад некаторага пункта, а затым выкарыстаць названае правіла.

Для некалінеарных вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ іх суму можна таксама знайсці па правіле паралелаграма.

Правіла паралелаграма. Для знаходжання сумы вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна ад пачатку вектара $\vec{a}$ адкласці вектар $\vec{b}$ (рыс. 272), пабудоваць на адрэзках a і b як на суседніх старанах паралелаграма. Вектар $\vec{c}$, які супадае з дыяганаллю паралелаграма і выходзіць з пачатку вектара $\vec{a}$, роўны $\vec{a} + \vec{b}$.



Рыс. 272

З дадзеных правілаў вынікае, што ў роўнасці $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ любы з вектараў можна замяніць на роўны яму, г. зн. калі $\vec{d} = \vec{b}$, то $\vec{a} + \vec{d} = \vec{c}$.

Сума процілеглых вектараў роўна нулявому вектару, г. зн. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$. Для любога вектара $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Для любых трох пунктаў A , B і C плоскасці справядлівая роўнасць $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Калі вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ сунакіраваныя або процілеглы накіраваныя, то па правіле трохвугольніка знаходзім вектар $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, як паказана на рысунках 273, а, б.



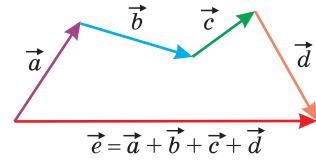
Рыс. 273

Калі неабходна скласці тры і больш вектараў, то трэба ад канца першага вектара адкласці другі, ад канца другога — трэці і г. д. да апошняга вектара. Затым трэба злучыць пачатак першага вектара з канцом апошняга адрэзкам і абазначыць напрамак выніковага вектара ад пачатку першага да канца апошняга вектара. Часам абазначаны спосаб называюць *правілам многавугольніка*.

Так, на рысунку 274 вектар $\vec{e}$ роўны суме вектараў $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$.

Для n пунктаў $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ і A_n плоскасці прамявольная роўнасць $\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \dots + \overline{A_{n-1} A_n} = \overline{A_1 A_n}$.

Напрыклад, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} = \overline{AF}$.

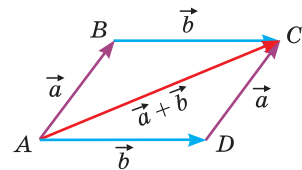


Рыс. 274

Справядлівыя наступныя ўласцівасці складання вектараў, дзе k і m — некаторыя лікі:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- 3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; 4) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$.

Дакажам уласцівасць 1). Няхай $\overline{AB} = \vec{a}$ і $\overline{AD} = \vec{b}$ (рыс. 275). Знойдзем суму вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ па правіле паралелаграма, пабудаваўшы паралелаграм $ABCD$. Паколькі $\overline{DC} = \overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \overline{AD} = \vec{b}$, то па правіле трохвугольніка, з аднаго боку, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, з другога боку, $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \vec{b} + \vec{a}$. Адкуль $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.



Рыс. 275

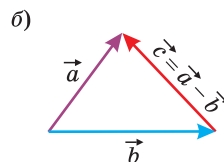
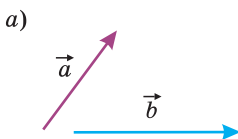
Доказ дадзенай уласцівасці для калінеарных вектараў разгледзьце самастойна. Уласцівасці 2)—4) дакажыце самастойна.

3. Адніманне вектараў

Рознасцю вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ называецца вектар $\vec{c}$, сума якога з вектарам $\vec{b}$ роўна вектару $\vec{a}$, г. зн. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$, калі $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

З дадзенага азначэння вынікае правіла аднімання вектараў.

Правіла аднімання. Для знаходжання рознасці вектара $\vec{a}$ і вектара $\vec{b}$ можна ад пачатку вектара $\vec{a}$ адкласці вектар $\vec{b}$ (рыс. 276), злучыць канцы гэтых вектараў адрэзкам і пазначыць на ім напрамак да канца памяншаемага вектара $\vec{a}$.



Рыс. 276

Рознасць калінейных вектараў знаходзяць па тым жа правіле. Разгледзьце гэты выпадак самастойна.

Лёгка паказаць, што $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Адсюль вынікае, па-першае, другі спосаб знаходжання рознасці вектараў як сумы вектара $\vec{a}$ і вектара $-\vec{b}$, а па-другое, што складаемыя вектары ў роўнасці можна пераносіць з адной часткі ў другую, памяняўшы знак перад вектарам на процілеглы. Напрыклад, з роўнасці $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ вынікае $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

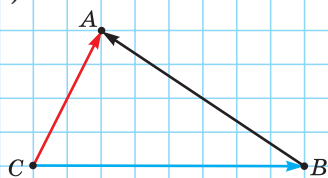
Для любых трох пунктаў A, B і C плоскасці справядліва $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

Тэст 1

Якое сцверджанне няправільнае для рысунка:

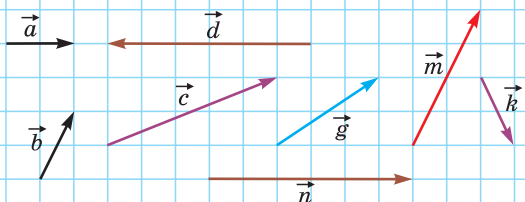
- 1) $\vec{CA} = \vec{CB} + \vec{BA}$;
- 2) $\vec{BA} = \vec{CA} - \vec{CB}$;
- 3) $\vec{CA} + \vec{CB} = \vec{BA}$;
- 4) $\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{CB}$?



Тэст 2

Дадзены вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Вызначце на рысунку вектар, роўны:

- 1) $-3\vec{a}$;
- 2) $2\vec{b}$;
- 3) $\vec{a} + \vec{b}$;
- 4) $\vec{a} - \vec{b}$;
- 5) $2\vec{a} + \vec{b}$.

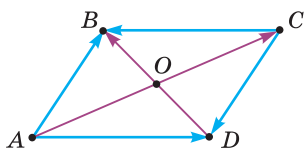


Заданні да § 22

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. Дадзены паралелаграм $ABCD$, $\vec{AC} = \vec{a}$, $\vec{DB} = \vec{b}$ (рыс. 277). Выразіць вектары $\vec{AB}$, $\vec{CB}$, $\vec{CD}$ і $\vec{AD}$ праз вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Рыс. 277

Рашэнне. Паколькі дыяганалі паралелаграма пунктам перасячэння дзяляцца папалам, то

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \vec{OB} = \frac{1}{2}\vec{DB} = \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{a}.$$

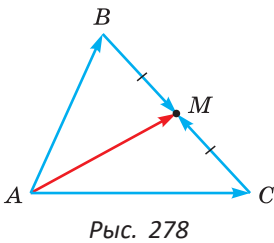
$$\text{Тады } \vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b});$$

$$\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a});$$

$$\vec{CD} = -\vec{AB} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}); \quad \vec{AD} = -\vec{CB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}).$$

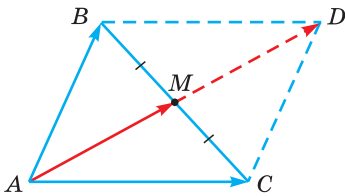
$$\text{Адказ: } \vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}); \quad \vec{CB} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}); \quad \vec{CD} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}); \quad \vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}).$$

Задача 2. Дадзены трохвугольнік ABC , AM — яго медыяна (рыс. 278). Дакажаць, што $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.



Рыс. 278

Доказ. Спосаб 1. Па правіле трохвугольніка $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$. Склаўшы па-членна левыя і правыя часткі дадзеных роўнасцей, атрымаем $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$. Паколькі вектары $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{CM}$ процілеглыя, то іх сума роўна нуль-вектару. Таму $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.



Рыс. 279

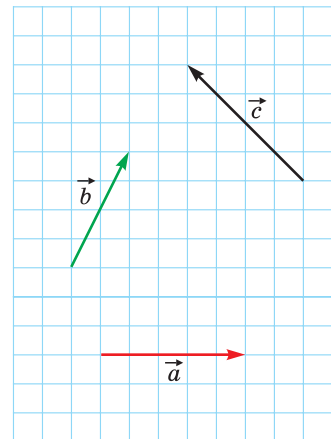
Спосаб 2. Прадоўжым вектар $\overrightarrow{AM}$ на яго даўжыню (рыс. 279). Атрымаем $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM}$. Чатырохвугольнік $ABDC$ — паралелаграм, паколькі яго дыяганалі пунктаў перасячэння дзеляцца папалам. Па правіле паралелаграма $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

326. Перанясіце вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, паказаныя на рысунку 280, у спытак. Пабудуйце вектар:

- | | |
|------------------------------------|--|
| а) $\vec{a} + \vec{b}$; | б) $\vec{b} + \vec{c}$; |
| в) $\vec{a} - \vec{b}$; | г) $\vec{c} - \vec{b}$; |
| д) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; | е) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; |
| ж) $-0,5\vec{c} - \vec{a}$; | з) $\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$. |



Рыс. 280

327. Намалуйце адвольны чатырохвугольнік $MNPK$. Дакажыце, што:

- а) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KP}$;
 б) $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MK}$.

328. A, B, C і D — адвольныя пункты. Дакажыце, што $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

329. Дадзены роўнастаронні трохвугольнік ABC са стараной, роўнай 4. Знайдзіце:

- | | |
|--|--|
| а) $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} $; | б) $ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} $; |
| в) $ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} $; | г) $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} $. |

330. Дадзены прамавугольны трохвугольнік ABC , $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$. Знайдзіце:

а) $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}|$; б) $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}|$; в) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$; г) $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$.

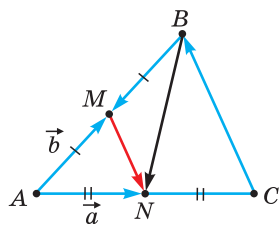
331. Выкарыстаўшы ўласцівасці дзеянняў над вектарамі, спрасціце выраз:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC}$; б) $(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) - (\overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KA})$.

332. Дадзены трохвугольнік ABC (рыс. 281), M і N — сярэдзіны старон AB і AC адпаведна, $\overrightarrow{AN} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{b}$.

Выразіце праз вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектар:

а) $\overrightarrow{BM}$; б) $\overrightarrow{MN}$; в) $\overrightarrow{AB}$;
г) $\overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{BN}$; е) $\overrightarrow{AC}$.

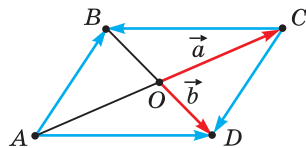


Рыс. 281

333. BM — медыяна трохвугольніка ABC , $\overrightarrow{BA} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$. Выразіце праз вектары $\vec{x}$ і $\vec{y}$ вектар $\overrightarrow{AM}$.

334. Дадзены паралелаграм $ABCD$ (рыс. 282), O — пункт перасячэння яго дыяганалей, $\overrightarrow{OC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{b}$. Выразіце праз вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектар:

а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{DB}$; в) $\overrightarrow{AB}$;
г) $\overrightarrow{AD}$; д) $\overrightarrow{CB}$; е) $\overrightarrow{CD}$.



Рыс. 282

335. Дадзены паралелаграм $ABCD$, O — пункт перасячэння яго дыяганалей, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразіце праз вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектар:

а) $\overrightarrow{OC}$; б) $\overrightarrow{BO}$; в) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{DA}$.

336. а) Дадзены паралелаграм $ABCD$, M — адвольны пункт плоскасці. Дакажыце, што $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

б) $ABCD$ — выпуклы чатырохвугольнік, M — сярэдзіна стараны AB , N — сярэдзіна стараны CD . Дакажыце, што $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

337. M — пункт перасячэння медыян трохвугольніка ABC . Дакажыце, што:

а) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$; б) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

338. Плывец пераплывае раку перпендыкулярна берагу са скорасцю $3\sqrt{3} \frac{\text{км}}{\text{г}}$, цячэнне адносіць яго са скорасцю $3 \frac{\text{км}}{\text{г}}$. З якой скорасцю і пад якім вуглом да берага плыве плывец?

339. Дакажыце, што:

а) модуль сумы вектараў меншы або роўны суме іх модуляў:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|;$$

б) модуль сумы вектараў большы або роўны рознасці іх модуляў:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \geq ||\vec{a}| - |\vec{b}||.$$

340. Дадзены трохвугольнік ABC , на старане BC адзначаны пункт K . Выразіце вектар $\overrightarrow{AK}$ праз вектары $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, калі:

а) $BK : KC = 2 : 1$;

б) $BK : KC = m : n$.

341. $A_1A_2A_3A_4A_5$ — правільны многавугольнік, O — яго цэнтр. Дакажыце, што $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} = \vec{0}$.



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне вектара.
2. Азначэнне калінеарных вектараў.
3. Азначэнне роўных і процілеглых вектараў.
4. Правілы трохвугольніка і паралелаграма для складання вектараў.
5. Правіла аднімання вектараў.
6. Правіла множання вектара на лік.

Умеем

1. Адкладваць вектар, роўны дадзенаму, ад дадзенага пункта.
2. Знаходзіць суму двух і больш вектараў.
3. Знаходзіць рознасць двух вектараў.
4. Выконваць множання вектара на лік.

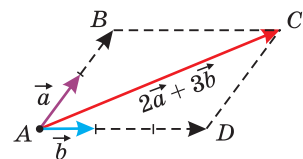


§ 23. Каардынаты вектара

1. Раскладанне вектара па двух некалінеарных вектарах

Калі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — некалінеарныя вектары і $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, дзе x і y — некаторыя лікі, то гавораць, што вектар $\vec{c}$ *раскладзены* па вектарах $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Лікі x і y — каэфіцыенты раскладання.

На рысунку 283 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{b}$, $ABCD$ — паралелаграм, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. Вектар $\overrightarrow{AC}$ раскладзены па вектарах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, каэфіцыенты раскладання $x = 2$, $y = 3$.



Рыс. 283

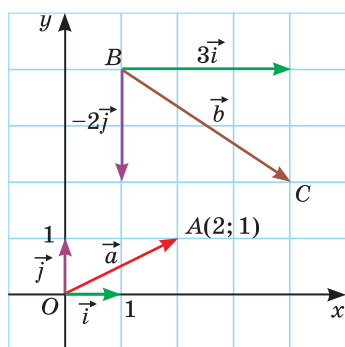
Справядлівая наступная тэарэма, якую мы прыем без доказу.

Тэарэма (аб раскладанні вектара па двух некалінеарных вектарах).

На плоскасці любы вектар можна раскласці па двух некалінеарных вектарах, прычым адзіным чынам.

2. Каардынаты вектара ў прамавугольнай сістэме каардынат

Разгледзім прамавугольную сістэму каардынат (рыс. 284). На каардынатных восях ад пачатку каардынат адкладзём адзінкавыя вектары (даўжыні якіх роўны адзінцы): на восі абсцыс вектар $\vec{i}$, сунакіраваны з воссю Ox , на восі ардынат вектар $\vec{j}$, сунакіраваны з воссю Oy .



Рыс. 284

Вектары $\vec{i}$ і $\vec{j}$ называюцца *каардынатнымі вектарамі*. Паколькі $\vec{i}$ і $\vec{j}$ некалінеарныя, то любы вектар $\vec{a}$ плоскасці можа быць раскладзены па вектарах $\vec{i}$ і $\vec{j}$, прычым адзіным чынам: $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$. Лікі x і y называюцца каардынатамі вектара $\vec{a}$ ў дадзенай сістэме каардынат. Дамовімся каардынаты вектара запісваць у круглых дужках любым з наступных спосабаў: $\vec{a}(x; y)$, $\vec{a} = (x; y)$, $(\vec{x}; \vec{y})$.

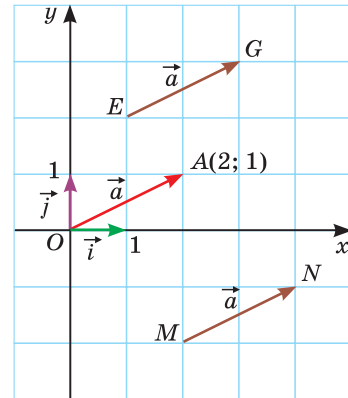
На рысунку 284 $\vec{OA} = 2\vec{i} + \vec{j} = (2; 1)$, $\vec{BC} = 3\vec{i} - 2\vec{j} = (3; -2)$. Відавочна, што $\vec{i} = (1; 0)$, $\vec{j} = (0; 1)$. Нулявы вектар можна запісаць у выглядзе $\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$, таму абедзве яго каардынаты роўны нулю: $\vec{0}(0; 0)$.

Вектар, пачатак якога знаходзіцца ў пачатку каардынат, а канец у дадзеным пункце, называецца *радыус-вектарам* гэтага пункта. Заўважым, што каардынаты вектара $\vec{OA}(2; 1)$ і каардынаты пункта $A(2; 1)$ супадаюць (гл. рыс. 284). Можна даказаць, што каардынаты любога пункта супадаюць з каардынатамі яго радыус-вектара, г. зн. супадаюць з каардынатамі канца вектара. Напрыклад, калі дадзены пункт $A(a_1; a_2)$, то $\vec{OA} = (a_1; a_2)$.

Яшчэ раз падкрэслім, што роўныя вектары маюць роўныя аднайменныя каардынаты, г. зн. роўныя першыя і роўныя другія каардынаты. Гэта тлумачыцца тым, што любы з мноства роўных вектараў, адкладзены ад пачатку каардынат, супадзе з роўным яму радыус-вектарам (ад пункта вектар, роўны дадзенаму, можна адкласці адзіным спосабам), г. зн. ён будзе мець такія самыя каардынаты, як і гэты радыус-вектар.

Правільнае і адваротнае сцверджанне: калі аднайменныя каардынаты вектараў роўныя, то і самі вектары роўныя паміж сабой. Сапраўды, калі дадзены вектары $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_1; y_1)$, то каардынаты роўных ім радыус-вектараў будуць $(x_1; y_1)$. А гэта значыць, што радыус-вектары супадаюць, г. зн. роўныя паміж сабой. Такім чынам, роўныя і самі вектары $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_1; y_1)$.

На рысунку 285 $\overline{EG} = \overline{MN} = \overline{OA} = \vec{a}$, а паколькі $\overline{OA} = (2; 1)$, то $\overline{EG} = (2; 1)$, $\overline{MN} = (2; 1)$.



Рыс. 285

Для знаходжання каардынат вектара, зададзенага на каардынатнай плоскасці, можна карыстацца двума падыходамі.

I. Ад пачатку дадзенага вектара адкласці каардынатныя вектары $\vec{i}$ і $\vec{j}$ і раскласці па іх дадзены вектар.

II. Адкласці ад пачатку каардынат радыус-вектар, роўны дадзенаму вектару, і знайсці каардынаты пункта, які з'яўляецца канцом гэтага радыус-вектара.

3. Дзеянні над вектарамі, зададзенымі каардынатамі

Запішам уласцівасці множання вектара на лік, складання і аднімання вектараў у выглядзе формул:

1) $k\vec{a}(a_1; a_2) = \vec{b}(ka_1; ka_2)$ — каардынаты здабытку вектара на лік роўны здабытку каардынат вектара на гэты лік;

2) $\vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$ — каардынаты сумы вектараў роўны суме аднайменных каардынат гэтых вектараў;

3) $\vec{a}(a_1; a_2) - \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$ — каардынаты рознасці вектараў роўны рознасці аднайменных каардынат гэтых вектараў.

Згодна з уласцівасцю 1) процілеглыя вектары маюць процілеглыя каардынаты, і наадварот. Напрыклад, вектары $\vec{m}(3; 5)$ і $\vec{n}(-3; -5)$ — процілеглыя.

Дакажам уласцівасць 2). Няхай дадзены вектары $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$ і $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Тады $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$, $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j}$. Такім чынам, каардынаты вектара $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ роўны $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

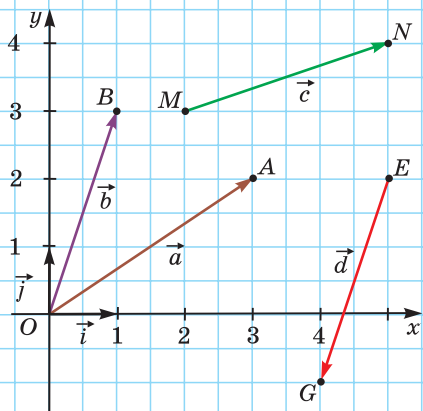
Прыклад 1. Няхай $\vec{a}(3; -2)$, $\vec{b}(-1; 6)$ і $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b}$. Знайдзем каардынаты вектараў $\vec{c}$ і $\vec{d}$: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (3; -2) + (-1; 6) = (3 - 1; -2 + 6) = (2; 4)$, $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2 \cdot (3; -2) - (-1; 6) = (6; -4) - (-1; 6) = (6 - (-1); -4 - 6) = (7; -10)$.

А цяпер выканайце Тэст 1.

Тэст 1

Па чарцяжы знайдзіце каардынаты:

- а) вектара $\vec{a}$;
- б) вектара $\vec{b}$;
- в) вектара $\vec{c}$;
- г) вектара $\vec{d}$;
- д) вектара $\vec{b} + \vec{d}$.



4. Калінеарнасць вектараў, зададзеных каардынатамі

Тэарэма (аб калінеарных вектарах).

Два вектары калінеарныя тады і толькі тады, калі каардынаты аднаго вектара прапарцыянальны каардынатам другога.

Доказ. Калі вектары $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ калінеарныя, то існуе лік k такі, што $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$. Паколькі $k\vec{b} = (kb_1; kb_2)$, то $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, г. зн. каардынаты калінеарных вектараў прапарцыянальныя. Калі ж для вектараў $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ выконваецца $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, то вектар $\vec{a}$ мае каардынаты kb_1 і kb_2 , г. зн. такія самыя, як вектар $k\vec{b}$. Таму $\vec{a} = k\vec{b}$, значыць, вектары $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ калінеарныя.

Інакш кажучы, калі для вектараў $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ справядліва, што $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$, то $\vec{a} \parallel \vec{b}$, а калі $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$.

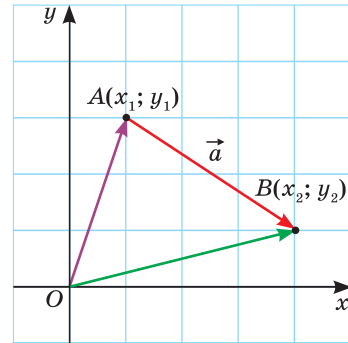
Заўвага. Калінеарнасць вектараў, якія не маюць нулявых каардынат, зручна вызначаць пры дапамозе прапорцыі $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

5. Каардынаты вектара, зададзенага каардынатамі яго пачатку і канца

Разгледзім пытанне знаходжання каардынат вектара па каардынатах яго пачатку і канца. Няхай дадзены вектар $\overrightarrow{AB}$. Пункты A і B маюць каар-

дынаты $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ (рыс. 286). Паколькі $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, а радыус-вектары $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ маюць каардынаты $\overrightarrow{OA} = (x_1; y_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2; y_2)$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Такім чынам, каб знайсці каардынаты вектара $\overrightarrow{AB}$, дзе $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, трэба ад каардынат канца вектара адняць адпаведныя каардынаты пачатку.



Рыс. 286

Каардынаты вектара $\overrightarrow{AB}$, дзе $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, роўны рознасці аднайменных каардынат яго канца і пачатку: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Напрыклад, калі дадзены пункты $A(4; 9)$, $B(5; 3)$, то $\overrightarrow{AB} = (5 - 4; 3 - 9) = (1; -6)$, $\overrightarrow{BA} = (4 - 5; 9 - 3) = (-1; 6)$.

6. Даўжыня вектара, зададзенага каардынатамі

Тэарэма. Даўжыня вектара $\vec{a}(a_1; a_2)$ роўна квадратнаму кораню з сумы квадратаў яго каардынат: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Доказ. Даўжыня вектара $\overrightarrow{AB}$ роўна адлегласці паміж пунктамі $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, якая, як вядома з курса алгебры, роўна квадратнаму кораню з сумы квадратаў рознасцей аднайменных каардынат: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Для $\vec{a}(a_1; a_2)$ атрымаем $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Прыклад 2. Няхай $\vec{a}(3; -4)$. Знойдзем даўжыню вектара $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.



Заданні да § 23

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. Даказаць, што каардынаты сярэдзіны $M(x; y)$ адрэзка AB , дзе $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, знаходзяць па формулах: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

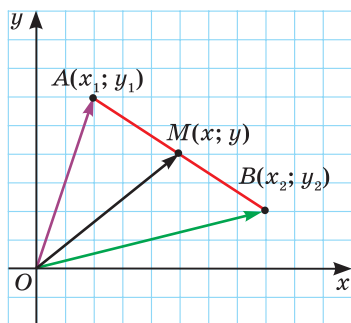


Рис. 287

Доказ. Няхай у прамавугольнай сістэме каардынат (рыс. 287) дадзены пункты $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Трэба знайсці каардынаты сярэдзіны адрэзка AB — пункта $M(x; y)$.

Абазначым радыус-вектары $\overrightarrow{OA}(x_1; y_1)$, $\overrightarrow{OB}(x_2; y_2)$, $\overrightarrow{OM}(x; y)$. Паколькі OM — медыяна трохвугольніка OAB , то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2; y_1 + y_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Паколькі каардынаты радыус-вектара $\overrightarrow{OM}$ роўны $\frac{x_1 + x_2}{2}$ і $\frac{y_1 + y_2}{2}$, то каардынаты пункта $M(x; y)$ такія: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Выпадак, калі пункты O , A і B ляжаць на адной прамой, разгледзьце самастойна.

Задача 2. Дадзены чатыры пункты: $A(2; 0)$, $B(3; 2)$, $C(-1; 4)$, $D(-2; 2)$. Дакажаць, што чатырохвугольнік $ABCD$:

а) паралелаграм;

б) прамавугольнік.

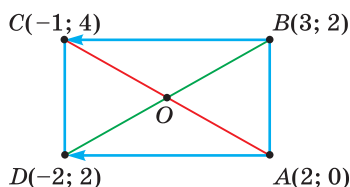


Рис. 288

Доказ. а) Зробім схематычны чарпёж (рыс. 288). Для таго каб чатырохвугольнік $ABCD$ быў паралелаграмам, дастаткова, каб вектары $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ былі роўнымі. Знойдзем каардынаты гэтых вектараў:

$$\overrightarrow{BC} = (-1 - 3; 4 - 2) = (-4; 2),$$

$$\overrightarrow{AD} = (-2 - 2; 2 - 0) = (-4; 2).$$

Паколькі каардынаты вектараў роўныя, то роўныя і самі вектары, г. зн. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ і $ABCD$ — паралелаграм.

б) Па формуле адлегласці паміж пунктамі знойдзем даўжыні дыяганалей паралелаграма $ABCD$:

$$AC = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (4 - 0)^2} = 5,$$

$$BD = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (2 - 2)^2} = 5.$$

Паколькі ў паралелаграма $ABCD$ дыяганалі роўныя, то ён — прамавугольнік (па прымеце прамавугольніка).

Задача 3. Дадзены каардынаты трох вяршынь паралелаграма $ABCD$: $A(-2; 2)$, $B(0; 6)$, $C(8; 7)$. Знайсці каардынаты вяршыні $D(x; y)$.

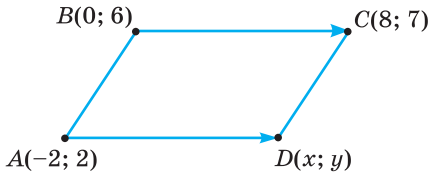


Рис. 289

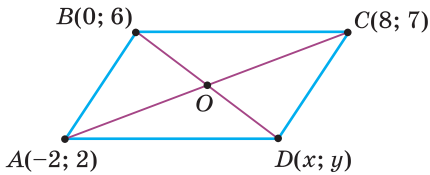


Рис. 290

Рашэнне. Спосаб 1. Зробім схематычны чарцёж (рыс. 289). Для таго каб чатырохвугольнік $ABCD$ быў паралелаграмам, дастаткова, каб вектары $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ былі роўнымі. Знойдзем каардынаты названых вектараў: $\overrightarrow{AD} = (x - (-2); y - 2) = (x + 2; y - 2)$, $\overrightarrow{BC} = (8 - 0; 7 - 6) = (8; 1)$. Вектары роўныя, калі роўныя іх каардынаты. Складзём і рэшым сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} x + 2 = 8, \\ y - 2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 6, \\ y = 3. \end{cases}$$

Спосаб 2. Паколькі дыяганалі паралелаграма пунктам перасячэння дзеляцца папалам, то сярэдзіны адрэзкаў AC і BD павінны супадаць.

На падставе ключавой задачы 1 да параграфу 23 каардынаты сярэдзіны адрэзка AC (рыс. 290) роўны $\left(\frac{-2+8}{2}; \frac{2+7}{2}\right) = (3; 4,5)$, каардынаты сярэдзіны

адрэзка BD роўны $\left(\frac{x+0}{2}; \frac{y+6}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}; \frac{y+6}{2}\right)$. Маем сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = 3, \\ \frac{y+6}{2} = 4,5; \end{cases} \begin{cases} x = 6, \\ y + 6 = 9; \end{cases} \begin{cases} x = 6, \\ y = 3. \end{cases}$$

Адказ: $D(6; 3)$.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

342. На рисунку 291 вектары $\vec{i}$ і $\vec{j}$ — каардынатныя. Знайдзіце каардынаты вектараў $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{EF}$.

343. Начарціце прамавугольную сістэму каардынат Oxy і каардынатныя вектары $\vec{i}$ і $\vec{j}$. Пабудуйце вектары з пачаткам у пункце O , зададзеныя каардынатамі: $\vec{a}(3; 2)$, $\vec{b}(-1; 2)$, $\vec{c}(-4; 0)$, $\vec{d}(0; 5)$.

344. а) Запішыце каардынаты вектараў: $\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{e} = -\vec{i}$, $\vec{f} = 2\vec{j}$.

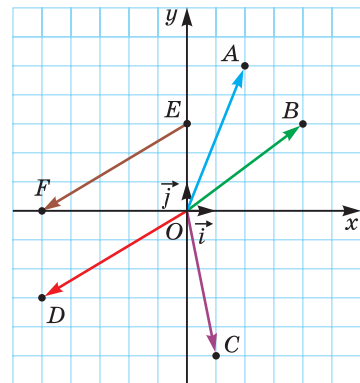


Рис. 291

б) Запишітьте раскладанне па каардынатных вектарах $\vec{i}$ і $\vec{j}$ вектараў:
 $\vec{m}(-1; 2)$, $\vec{n}(\frac{1}{2}; -3)$, $\vec{k}(4\frac{1}{3}; -5\frac{4}{5})$, $\vec{l}(\sqrt{2}; 0)$, $\vec{t}(0; -0,2)$.

345. Дадзены вектары $\vec{a}(-3; 2)$, $\vec{b}(5; 1)$. Знайдзіце каардынаты вектара, роўнага:

а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $2\vec{a} + 5\vec{b}$; г) $-\vec{a} + 0,2\vec{b}$.

346. Знайдзіце сярод вектараў $\vec{a}(-2; 1)$, $\vec{b}(5; 10)$, $\vec{c}(-6; 3)$, $\vec{d}(\frac{1}{2}; 1)$, $\vec{e}(10; -5)$ пары калінеарных вектараў.

347. а) Дакажыце, што вектары $\vec{a}(4; -8)$ і $\vec{b}(1; -2)$ сунакіраваныя.

б) Дакажыце, што вектары $\vec{c}(-1; 2)$ і $\vec{d}(6; -12)$ процілеглы накіраваныя.

348. а) Вядома, што вектары $\vec{a}(2; -1)$ і $\vec{b}(-4; m)$ калінеарныя. Знайдзіце лік m .

б) Вядома, што вектары $\vec{c}(9; n)$ і $\vec{d}(n; 4)$ калінеарныя. Знайдзіце лік n .

349. Дадзены тры пункты $A(-3; 1)$, $B(2; 0)$, $C(1; -2)$. Знайдзіце каардынаты:

а) вектараў $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; б) вектара $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

350. Дадзены трохвугольнік ABC , дзе $A(2; -1)$, $B(-1; 1)$, $C(4; 2)$. Знайдзіце каардынаты вектара:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$.

351. Знайдзіце даўжыню вектара $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, калі:

а) $\vec{a}(-2; 7)$, $\vec{b}(4; -1)$; б) $\vec{a}(-4; 8)$, $\vec{b}(1; -4)$.

352. Дадзены вектары $\vec{a}(3; 4)$, $\vec{b}(-1; 2)$. Знайдзіце:

а) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$; б) $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.

353. Даўжыня вектара $k\vec{a}$, дзе $k > 0$, роўна 5. Знайдзіце лік k , калі:

а) $\vec{a}(8; -6)$; б) $\vec{a}(-3; 4)$; в) $\vec{a}(7; 24)$; г) $\vec{a}(1; 1)$.

354. Дадзены трохвугольнік ABC , дзе $A(4; -6)$, $B(-2; 0)$, $C(8; 2)$. Знайдзіце:

а) каардынаты пункта K , ведаючы, што K — сярэдзіна стараны AB ;

б) каардынаты і даўжыню вектара $\overrightarrow{BM}$, ведаючы, што M — сярэдзіна стараны AC .

 **355.** Знайдзіце каардынаты пункта $M(x; y)$ перасячэння медыян трохвугольніка ABC , ведаючы, што $A(-1; 1)$, $B(7; 2)$, $C(3; 0)$.

-  **356.** Знайдзіце каардынаты пункта $N(x; y)$, які дзеліць адрэзак AB у адносіне $AN : NB = 2 : 3$, ведаючы, што $A(-5; 10)$, $B(0; 15)$.
-  **357.** Дакажыце, што пункты $A(4; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(-6; 4)$ ляжаць на адной прамой.



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Тэарэму аб раскладанні вектара па двух некалінеарных вектарах.
2. Якія вектары называюцца каардынатымі.
3. Што такое радыус-вектар і чаму роўны яго каардынаты.
4. Як знайсці каардынаты вектара, зададзенага каардынатамі яго пачатку і канца.
5. Як знайсці даўжыню вектара, зададзенага каардынатамі.
6. Як знайсці каардынаты здабытку вектара на лік, каардынаты сумы і рознасці вектараў, зададзеных каардынатамі.

Умеем

1. Раскладаць вектар па двух некалінеарных вектарах.
2. Знаходзіць каардынаты радыус-вектара, каардынаты вектара, зададзенага каардынатамі яго пачатку і канца, даўжыню вектара, зададзенага каардынатамі.
3. Выконваць дзеянні множання вектара на лік, складання і аднімання вектараў, зададзеных каардынатамі.



§ 24. Скалярны здабытак вектараў

1. Скалярны здабытак вектараў, зададзеных накіраванымі адрэзкамі

Вядома, што ў фізіцы *вектарнымі* называюцца велічыні, якія характарызуюцца лікавым значэннем і напрамкам, а *скалярнымі* — тыя, што характарызуюцца толькі лікавым значэннем.

Пры множэнні вектара на лік, складанні і адніманні вектараў мы атрымліваем вектар. Разгледзім яшчэ адну аперацыю над двума вектарамі, у выніку якой мы атрымліваем не вектар, а лік: *скалярны здабытак вектараў*, які для вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ абазначаецца $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Скалярным здабыткам двух ненулявых вектараў называецца лік, роўны здабытку даўжынь вектараў на косінус вугла паміж імі, г. зн. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$. Калі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўны нулю, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

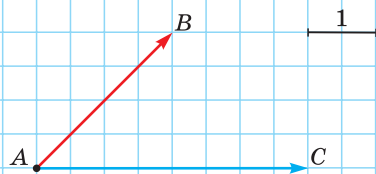
Наприклад, калі $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$ і вугал паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўны 60° , то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12$.

Скалярны здабытак ненулявога вектара $\vec{a}$ на сябе называецца скалярным квадратам вектара і абазначаецца $\vec{a}^2$, г. зн. $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$. З азначэння скалярнага здабытку вектараў $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 \cdot 1 = |\vec{a}|^2$. Гавораць, што *скалярны квадрат вектара роўны квадрату яго даўжыні*.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

Знайдзіце скалярны здабытак вектараў, паказаных на рысунку.



Запішам некаторыя ўласцівасці скалярнага здабытку вектараў:

- 1) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$;
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;
- 4) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Можна паказаць, што размеркавальны закон множання правільны і для большай колькасці складаемых: $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d}$.

Тэарэма (аб перпендыкулярнасці вектараў).

Ненулявыя вектары перпендыкулярныя тады і толькі тады, калі іх скалярны здабытак роўны нулю.

Доказ. Калі $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ і вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ненулявыя, то $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = 0$. Адсюль $\cos \alpha = 0$, $\alpha = 90^\circ$, г. зн. вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендыкулярныя. І наадварот, калі вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендыкулярныя, то вугал α паміж імі роўны 90° , і паколькі $\cos 90^\circ = 0$, то $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = 0$, г. зн. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Такім чынам, намі даказана, што калі $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, а калі $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ і $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2. Скалярны здабытак вектараў, зададзеных каардынатамі

Тэарэма. Скалярны здабытак вектараў $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ роўны суме здабыткаў аднайменных каардынат, г. зн. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Доказ. Няхай дадзены вектары $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$.

Тады $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j})(b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}) = a_1 b_1 \vec{i}^2 + a_1 b_2 \vec{i} \vec{j} + a_2 b_1 \vec{j} \vec{i} + a_2 b_2 \vec{j}^2$.

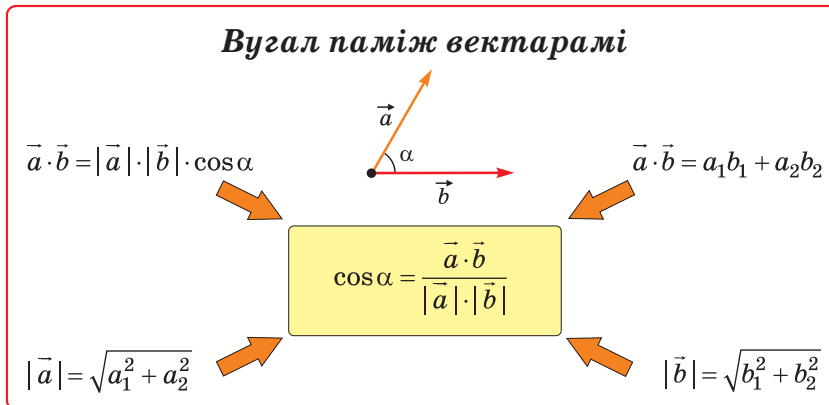
Улічыўшы, што $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$, дзе α — вугал паміж вектарамі, атрымаем: $\vec{i}^2 = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{i}|^2 = 1$, $\vec{j}^2 = |\vec{j}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{j}|^2 = 1$,

$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 90^\circ = 0$. Тады $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Прыклад 1. Вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зададзены каардынатамі $\vec{a}(2; 3)$, $\vec{b}(-1; 4)$.

Знойдзем скалярны здабытак вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 10$.

Выведзем формулу знаходжання вугла паміж вектарамі, зададзенымі каардынатамі (рыс. 292).



Рыс. 292

З формулы $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ вынікае, што $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. Паколькі

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, то $\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

Прыклад 2. Вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зададзены каардынатамі $\vec{a}(4\sqrt{2}; 0)$, $\vec{b}(-4; 4)$. Знойдзем вугал паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \frac{4\sqrt{2} \cdot (-4) + 0 \cdot 4}{\sqrt{(4\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 4^2}} = \frac{-16\sqrt{2}}{(4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Па формуле прывядзення $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

Адкуль $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Такім чынам, $\alpha = 135^\circ$.

Калі дадзены ненулявыя вектары $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$ і $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$. Правільнае і адваротнае сцверджанне: калі $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

Прыклад 3. Няхай дадзены два вектары $\vec{m}(-2; 5)$, $\vec{n}(10; 4)$. Вызначым, ці перпендыкулярныя яны. Паколькі $\vec{m} \cdot \vec{n} = -2 \cdot 10 + 5 \cdot 4 = 0$, то $\vec{m} \perp \vec{n}$. А цяпер выканайце **Тэст 2**.

Тэст 2

Не будуючы вектары $\vec{a}(-3; 4)$, $\vec{b}(6; 8)$, $\vec{c}(-8; 6)$, $\vec{d}(3; 4)$, знайдзіце сярод іх:
а) калінеарныя вектары; б) перпендыкулярныя вектары.



Заданні да § 24

РАШАЕМ РАЗАМ ключавыя задачы

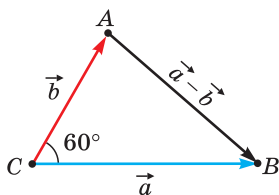
Задача. Дадзены вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$, прычым $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, вугал паміж вектарамі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўны 60° . Знайсці даўжыню вектара, роўнага:

а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$.

Рашэнне. а) Паколькі $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, то $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$. Узвядзём суму $\vec{a} + \vec{b}$ у квадрат, выкарыстаўшы ўласцівасці скалярнага здабытку вектараў:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ + |\vec{b}|^2 = \\ = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 = 19. \text{ Тады } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 19, |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}.$$

$$\text{б) } (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ + |\vec{b}|^2 = \\ = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 = 7, |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = 7, \\ |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}.$$



Рыс. 293

Заўвага. Для рашэння гэтай задачы можна карыстацца тэарэмай косінусаў. Рэшым, напрыклад, задачу б). Разгледзім трохвугольнік ABC (рыс. 293), дзе $\overline{CB} = \vec{a}$, $\overline{CA} = \vec{b}$ і $\overline{AB} = \vec{a} - \vec{b}$.

Па тэарэме косінусаў $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos C$. Паколькі $AB^2 = |\overline{AB}|^2$, $CA^2 = |\overline{CA}|^2$, $CB^2 = |\overline{CB}|^2$, то $|\overline{AB}|^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 7$, $|\overline{AB}| = \sqrt{7}$.

Адказ: а) $\sqrt{19}$; б) $\sqrt{7}$.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 358.** а) Дадзены вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $|\vec{a}| = 2,5$, $|\vec{b}| = 4\sqrt{3}$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$. Знайдзіце $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
 б) Дадзены вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$. Знайдзіце $|\vec{b}|$.
- 359.** У прамавугольным трохвугольніку ABC катэт $AC = 5$, гіпатэнуза $AB = 13$. Знайдзіце:
 а) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$; б) $\overline{CB} \cdot \overline{AB}$.
- 360.** У роўнастароннім трохвугольніку ABC са стараной, роўнай 4, праведзена бісектрыса AK . Знайдзіце скалярны здабытак вектараў:
 а) $\overline{AB} \cdot \overline{AK}$; б) $\overline{BC} \cdot \overline{AK}$;
 в) $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$; г) $\overline{CK} \cdot \overline{BA}$.
- 361.** Вектары $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ перпендыкулярныя. Дакажыце, што $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.
- 362.** а) Дадзены вектары $\vec{m}$ і $\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}; \vec{n}) = 60^\circ$. Знайдзіце $|\vec{m} + 2\vec{n}|$.
 б) Дадзены вектары $\vec{m}$ і $\vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 5$, $\angle(\vec{m}; \vec{n}) = 120^\circ$. Знайдзіце $|2\vec{m} - \vec{n}|$.
- 363.** Дакажыце, што модуль скалярнага здабытку вектараў меншы або роўны здабытку модуляў гэтых вектараў: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
- 364.** Знайдзіце скалярны здабытак вектараў, калі:
 а) $\vec{a}(3; 5)$, $\vec{b}(1; 8)$; б) $\vec{c}(-3; 1)$, $\vec{d}(0; 2)$;
 в) $\vec{m}(-2,5; 4)$, $\vec{n}(4; -1)$; г) $\vec{p}(\frac{1}{2}; -5)$, $\vec{k}(6; -2)$.
- 365.** Знайдзіце вугал паміж вектарамі:
 а) $\vec{a}(6; 2)$, $\vec{b}(2; 4)$; б) $\vec{c}(1; 2)$, $\vec{d}(1; -\frac{1}{2})$.

366. Знайдзіце, пры якім значэнні ліку k перпендыкулярныя вектары:

- а) $\vec{a}(-4; 2)$ і $\vec{b}(6; k)$; б) $\vec{c}(k; 3)$ і $\vec{d}(k; -12)$.

367. Дакажыце, што плошчу трохвугольніка ABC можна знайсці па фор-

$$\text{муле } S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 \cdot |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}.$$



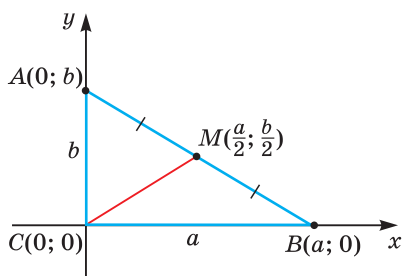
§ 25. Каардынатна-вектарны метад рашэння задач

1. Каардынатны метад

Увядзенне сістэмы каардынат пры рашэнні геаметрычных задач дазваляе перакласці гэтыя задачы на мову алгебры і прывесці іх рашэнне да дзеянняў з алгебраічнымі выразамі, ураўненнямі, сістэмамі ўраўненняў. Такі метада называецца *каардынатным*.

Каардынатны метада дазваляе значна скарачаць рашэнне многіх задач, выкарыстоўваючы пры рашэнні магутны алгебраічны апарат.

Прыклад 1. Дакажам, што ў прамавугольным трохвугольніку медыяна, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палавіне гіпатэнузы.



Рыс. 294

Рашэнне. Разгледзім прамавугольны трохвугольнік ABC з прамым вуглом C , дзе пункт M — сярэдзіна гіпатэнузы. Дакажам, што медыяна $CM = \frac{1}{2} AB$.

Увядзём прамавугольную сістэму каардынат з пачаткам у пункце C (рыс. 294). Калі $AC = b$, $BC = a$, то вяршыні трохвугольніка маюць каардынаты $A(0; b)$, $B(a; 0)$, $C(0; 0)$. Па формулах каардынат сярэдзіны адрэзка пункт M мае наступныя каардынаты:

$M = \left(\frac{a+0}{2}; \frac{b+0}{2} \right) = \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2} \right)$. Па формуле адлегласці паміж пунктамі

$$AB = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad CM = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{b}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} AB.$$

Пры вывучэнні датычнай да акружнасці ў 8-м класе мы сцвярджалі, што існуюць толькі тры магчымыя варыянты ўзаемага размяшчэння прамой і акружнасці: а) яны могуць мець два агульныя пункты; б) адзін агульны пункт; в) яны могуць не мець агульных пунктаў. Дакажам гэта.

Прыклад 2. Дакажам, што калі адлегласць ад прамой да цэнтра акружнасці меншая за яе радыус, то прамая мае з акружнасцю два агульныя пункты, калі гэта адлегласць роўна радыусу, то — адзін агульны пункт, калі большая за радыус — ні аднаго.

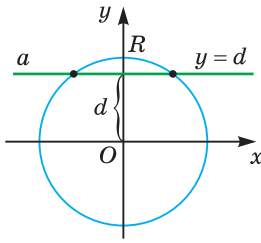


Рис. 295

Доказ. Няхай дадзена акружнасць радыусам R , прамая a і адлегласць ад цэнтра акружнасці да прамой роўна d . Сумесцім пачатак каардынат з цэнтрам акружнасці і размесцім вось Ox паралельна дадзенай прамой a (рыс. 295). Вядома, што ўраўненне акружнасці з цэнтрам у пачатку каардынат мае выгляд $x^2 + y^2 = R^2$, ураўненне прамой a , паралельнай восі Ox , мае выгляд $y = d$. Аб'яднаем гэтыя ўраўненні ў сістэму і рэ-

шым яе:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ y = d; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + d^2 = R^2, \\ y = d; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm \sqrt{R^2 - d^2}, \\ y = d. \end{cases}$$

Калі $d < R$, то сістэма ўраўненняў мае роўна два рашэнні: $\begin{cases} x = \sqrt{R^2 - d^2}, \\ y = d \end{cases}$ і $\begin{cases} x = -\sqrt{R^2 - d^2}, \\ y = d. \end{cases}$ У гэтым выпадку прамая мае з акружнасцю роўна два

агульныя пункты.

Калі $d = R$, то рашэнне сістэмы адно: $\begin{cases} x = 0, \\ y = d, \end{cases}$ а значыць, прамая і акружнасць маюць адзін агульны пункт.

Калі $d > R$, то падкарэнны выраз меншы за нуль і сістэма рашэнняў не мае, а значыць, прамая і акружнасць не маюць агульных пунктаў.

Вынік.

Паколькі дадзеная сістэма не можа мець трох і больш рашэнняў, то прамая і акружнасць маюць не больш за два агульныя пункты.

2. Вектарны метад

Увядзенне вектараў пры рашэнні геаметрычных задач дазваляе перакласці іх рашэнне на мову дзеянняў з вектарамі. Такі метад рашэння задач называецца *вектарным*. Часам вектарны метад значна спрашчае рашэнне задачы. Напрыклад, доказ таго, што некаторыя тры пункты A , B і C ляжаць на адной прамой, традыцыйным спосабам даволі працаёмкі. Аднак яго можна прывесці да доказу таго, што вектары $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ калінеарныя, г. зн. што $\overline{AB} = k \cdot \overline{BC}$.

Прыклад 3. Дакажам, што сярэдняя лінія трохвугольніка паралельна аснове і роўна яе палавіне.

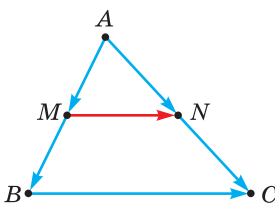


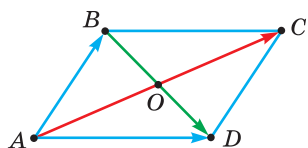
Рис. 296

Доказ. Няхай MN — сярэдняя лінія трохвугольніка ABC (рыс. 296). $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$, $\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AB}) = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Мы атрымалі, што $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

Гэта значыць, што вектары $\overline{MN}$ і $\overline{BC}$ калінеарныя.

Таму $MN \parallel BC$. Акрамя гэтага, $|\overline{MN}| = \frac{1}{2} |\overline{BC}|$, а значыць, $MN = \frac{1}{2} BC$. Сцверджанне даказана.

Прыклад 4. Дакажам, што сума квадратаў дыяганалей паралелаграма роўна суме квадратаў усіх яго старон.



Рыс. 297

Доказ. Няхай дадзены паралелаграм $ABCD$. Дакажам, што $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$. Увядзём вектары $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ (рыс. 297). Тады $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{AB}$, $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$. Узвёўшы ў квадрат гэтыя роўнасці, атрымаем:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + 2\overline{AD} \cdot \overline{AB} + \overline{AB}^2,$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{AB} + \overline{AB}^2.$$

Склаўшы пачленна апошнія роўнасці, атрымаем:

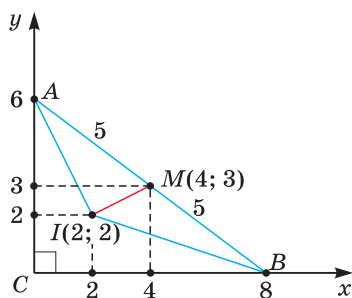
$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{AB}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2)$, адкуль $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$. Сцверджанне даказана.



Заданні да § 25

РАШАЕМ РАЗАМ ключавыя задачы

Задача. Дадзены трохвугольнік ABC са старанамі 6, 8 і 10. Знайсці адлегласць паміж цэнтрам апісанай і цэнтрам упісанай акружнасцей гэтага трохвугольніка.



Рыс. 298

Рашэнне. Выкарыстаем каардынатны метад. Увядзём прамавугольную сістэму каардынат з пачаткам у пункце C і восямі, накіраванымі ўздоўж катэтаў трохвугольніка: прамень CB — вось абсцыс, прамень CA — вось ардынаты (рыс. 298).

Знойдзем каардынаты цэнтраў нашых акружнасцей: $I(2; 2)$, $M(4; 3)$. Выкарыстаем формулу адлегласці паміж пунктамі $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$: $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Атрымаем $IM = \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{5}$.

Адказ: $\sqrt{5}$.

Заўвага. Вядома формула Эйлера адлегласці d паміж цэнтрамі апісанай і ўпісанай акружнасцей трохвугольніка: $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ (гл. с. 91). Паколькі ў нас $R = 5$, $r = 2$, то $d = \sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2} = \sqrt{5}$.



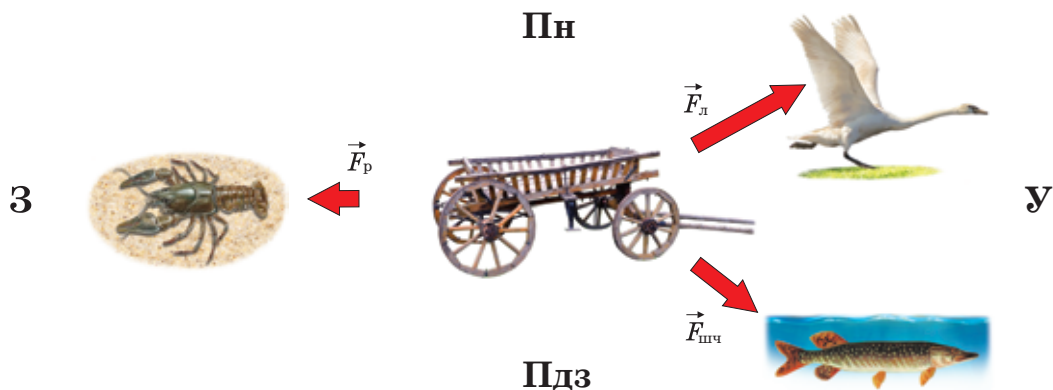
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

- 368.** Дакажыце пры дапамозе вектараў, што сярэдняя лінія трапецыі паралельна асновам і роўна іх паўсуме.
- 369.** Дакажыце пры дапамозе вектараў, што адрэзак, які злучае сярэдзіны дыяганалей трапецыі, паралельны асновам трапецыі і роўны іх паўрознасці.
- 370.** У востравугольным трохвугольніку ABC праведзена вышыня $BH = 4$, $AH = 4$, $HC = 6$. Выкарыстаўшы каардынаты метада, знайдзіце медыяну AM трохвугольніка ABC .
- 371.** Дакажыце каардынатна-вектарным метадам, што калі дыяганалі паралелаграма роўныя, то ён з'яўляецца прамавугольным.
- 372.** Няхай дадзены прамавугольнік $ABCD$ і адвольны пункт M плоскасці. Дакажыце, што $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.

Мадэляванне

Задача. Няхай у байцы Д. І. Крылова пра лебедзя, рака і шчупака сілы персанажаў утвараюць адна з адной вуглы ў 120° і вядома, што сіла, з якой цягне воз лебедзь, у 2 разы большая за сілу шчупака, а сіла шчупака ў 2 разы большая за сілу рака. Прычым усе тры сілы накіраваны ў адной гарызантальнай плоскасці (лебедзь, узмахваючы крыламі, бяжыць па зямлі, шчупак плыве па паверхні вады, рак паўзе па зямлі). У якім напрамку будзе рухацца воз (рыс. 299)?

Складзіце матэматычную мадэль і выкарыстайце для рашэння задачы правіла складання вектараў.



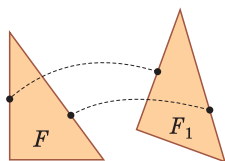
Рыс. 299



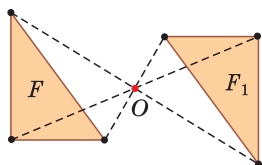
§ 26. Пераўтварэнне фігур на плоскасці

1. Віды рухаў

Калі кожны пункт фігуры F перамясціць па якімсьці агульным алгарытме, то атрымаецца новая фігура F_1 . Гавораць, што фігура F_1 атрымана пераўтварэннем з фігуры F (рыс. 300).

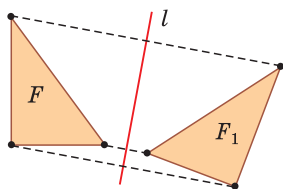


Рыс. 300



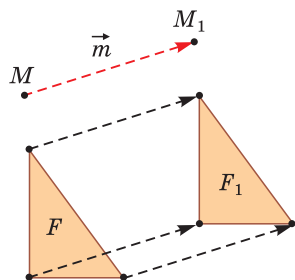
Цэнтральная сіметрыя

Рыс. 301



Восевая сіметрыя

Рыс. 302



Паралельны перанос

Рыс. 303

У якасці фігуры F можна разглядаць і ўсю плоскасць. Тады кожны пункт плоскасці будзе падлягаць зададзенаму на плоскасці пераўтварэнню, і размова будзе ісці аб пераўтварэнні плоскасці.

Вы ўжо ведаеце некаторыя пераўтварэнні фігур. Гэта цэнтральная і восевая сіметрыя.

Цэнтральная сіметрыя адносна некаторага пункта O (цэнтра сіметрыі) — гэта такое пераўтварэнне, пры якім усе пункты фігуры F пераходзяць у сіметрычныя ім адносна пункта O . У выніку фігура F пераходзіць у сіметрычную ёй фігуру F_1 адносна пункта O (рыс. 301).

Восевая сіметрыя адносна некаторай прамой l (восі сіметрыі) — гэта такое пераўтварэнне, пры якім усе пункты фігуры F пераходзяць у сіметрычныя ім адносна прамой l . У выніку фігура F пераходзіць у сіметрычную ёй фігуру F_1 адносна прамой l (рыс. 302).

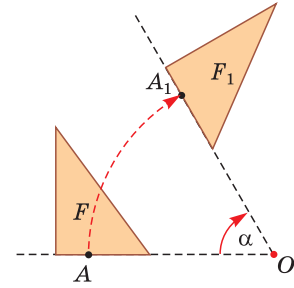
Прыведзём яшчэ некалькі прыкладаў пераўтварэнняў.

Паралельны перанос — гэта такое пераўтварэнне, пры якім усе пункты фігуры перамяшчаюцца ў адным і тым жа напрамку на адну і тую ж адлегласць. Задаецца або парай пунктаў M і M_1 , або вектарам $\vec{m}$. На рысунку 303 фігура F_1 атрымана з фігуры F шляхам паралельнага пераносу на вектар $\vec{m}$.

Паварот адносна некаторага цэнтра павароту O на зададзены вугал α — гэта такое пераўтварэнне, пры якім усе пункты фігуры F паварочваюцца вакол пункта O (цэнтра павароту) у адным і тым жа напрамку на адзін і той жа

вугал α . У выніку фігура F пераходзіць у фігуру F_1 , якая павернута вакол пункта O на вугал α (рыс. 304).

Пры павароце кожны пункт A перамяшчаецца па дузе акружнасці, цэнтр якой знаходзіцца ў пункце O , радыус якой роўны OA , да становішча A_1 , дзе $\angle AOA_1 = \alpha$. Усе пункты фігуры пры дадзеным пераўтварэнні перамяшчаюцца або па гадзіннікавай стрэлцы, або супраць гадзіннікавай стрэлкі ў залежнасці ад таго, што сказана ва ўмове.



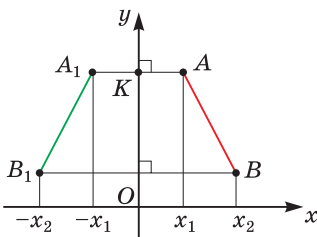
Паварот

Рыс. 304

Можна даказаць, што ўсе названыя пераўтварэнні захоўваюць адлегласці паміж пунктамі, г. зн. пераводзяць любыя два пункты A і B адной фігуры ў пункты A_1 і B_1 другой фігуры так, што $AB = A_1B_1$. Такія пераўтварэнні ў геаметрыі называюцца *рухам*. Інакш кажучы, рух захоўвае памеры фігуры, г. зн. пераводзіць фігуру ў роўную ёй фігуру.

У 8-м класе мы даказалі, што пры цэнтральнай сіметрыі адрэзак пераходзіць у роўны яму адрэзак. Такім чынам, цэнтральная сіметрыя з'яўляецца рухам. Дакажам, што восевая сіметрыя і паралельны перанос таксама з'яўляюцца рухам.

Тэарэма. Восевая сіметрыя захоўвае адлегласці паміж пунктамі.



Рыс. 305

Доказ. Няхай вось сіметрыі — гэта вось Oy . Возьмем два адвольныя пункты $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ і сіметрычныя ім адносна восі Oy пункты A_1 і B_1 (рыс. 305). Паколькі па азначэнні сіметрыі $AA_1 \perp Oy$ і $AK = KA_1$, то абсцысы пунктаў A і A_1 процілеглыя, а ардынаты роўныя. Тое ж датычыцца любых пунктаў, сіметрычных адносна восі Oy . Тады $A_1(-x_1; y_1)$, $B_1(-x_2; y_2)$.

Па формуле адлегласці паміж пунктамі

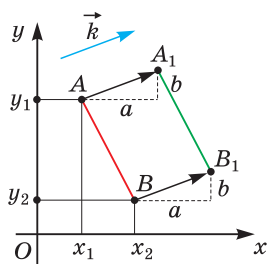
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Відавочна, што $AB = A_1B_1$.

Такім чынам, восевая сіметрыя ёсць рух.

Тэарэма. Паралельны перанос захоўвае адлегласці паміж пунктамі.



Рыс. 306

Доказ. Няхай паралельны перанос зададзены вектарам $\vec{k}(a; b)$. Разгледзім два адвольныя пункты $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ і вектары $\overrightarrow{AA_1} = \vec{k}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{k}$ (рыс. 306). Пры дадзеным паралельным пераносе пункты A і B пераходзяць у пункты $A_1(x_1 + a; y_1 + b)$ і $B_1(x_2 + a; y_2 + b)$.

Па формуле адлегласці паміж пунктамі

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Атрымалі, што $AB = A_1B_1$.

Такім чынам, паралельны перанос ёсць рух.

Вынікі.

1. Паралельны перанос, пры якім пункт $A(x; y)$ пераходзіць у пункт $A_1(x_1; y_1)$, можна задаць сістэмай
$$\begin{cases} x_1 = x + a, \\ y_1 = y + b. \end{cases}$$

2. Улічыўшы, што $\vec{k}(a; b) = \vec{m}(a; 0) + \vec{n}(0; b)$, любы паралельны перанос на вектар $\vec{k}(a; b)$ можна задаць як вынік паслядоўнага выканання двух паралельных пераносаў уздоўж восей каардынат: аднаго — уздоўж восі Ox , другога — уздоўж восі Oy .

2. Уласцівасці рухаў

1) Пры руху пункты прамой пераходзяць у пункты прамой у тым жа парадку.

Доказ. Калі пункты A, B, C , што ляжаць на адной прамой, прычым пункт B ляжыць паміж A і C , пераходзяць пры некаторым руху адпаведна ў пункты A_1, B_1, C_1 , што не ляжаць на адной прамой, або пункт B_1 ляжыць не паміж A_1 і C_1 , то парушаецца роўнасць $AB + BC = AC$.

Вынік.

Пры руху прамая пераходзіць у прамую, прамень — у прамень, адрэзак — у роўны адрэзак.

2) Два рухі, выкананыя паслядоўна (кампазіцыя рухаў), даюць зноў рух.

Напрыклад, калі мы выканаем цэнтральную сіметрыю фігуры F адносна пункта O , то атрымаем фігуру F_1 . А калі затым выканаем паралельны перанос фігуры F_1 на вектар $\vec{a}$, то атрымаем фігуру F_2 , якая будзе роўна зыходнай фігуры F .

3) Пераўтварэнне, адваротнае руху, з'яўляецца рухам.

Калі пераўтварэнне фігуры F у фігуру F_1 пераводзіць розныя пункты фігуры F у розныя пункты фігуры F_1 , то адвольны пункт X фігуры F перайдзе ў пункт X_1 фігуры F_1 . Пераўтварэнне фігуры F_1 у фігуру F , пры якім пункт X_1 пераходзіць у пункт X , — гэта пераўтварэнне, адваротнае дадзенаму.

Паколькі пры руху адрэзак пераходзіць у роўны яму адрэзак, трохвугольнік — у роўны яму трохвугольнік і, наогул, любая фігура пераходзіць у роўную ёй, то мы можам удакладніць паняцце роўнасці фігур, якое сфармулявалі ў 7-м класе. Дзве фігуры называюцца *роўнымі*, калі яны сумяшчаюцца рухам.

3. Гаматэтыя і падобнасць

Разгледзім пераўтварэнні, якія не захоўваюць адлегласці паміж пунктамі, а змяняюць іх у адну і тую ж колькасць разоў.

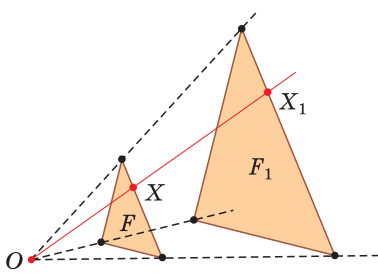


Рис. 307

Няхай F — дадзеная фігура, O — фіксаваны пункт. Пераўтварэнне фігуры F , пры якім кожны пункт X фігуры F пераходзіць у пункт X_1 фігуры F_1 так, што пункт X_1 ляжыць на прамені OX і $OX_1 = k \cdot OX$, дзе $k > 0$ (рыс. 307), называецца **гаматэтыяй** адносна цэнтра O . Лік k называецца **каэфіцыентам гаматэтыі**, а фігуры F і F_1 — **гаматэтычнымі**.

Тэарэма. Пры гаматэтыі адлегласці паміж пунктамі змяняюцца ў k разоў.

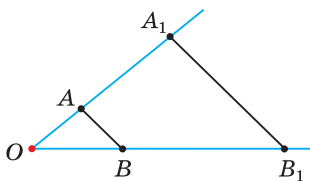


Рис. 308

Доказ. Разгледзім два адвольныя пункты A і B , якія не ляжаць на адной прамой, выканаем гаматэтыю з цэнтрам у пункце O і некаторым каэфіцыентам k (рыс. 308). Пункт A перайдзе ў гаматэтычны яму пункт A_1 , пункт B — у пункт B_1 . Па азначэнні гаматэтыі $OA_1 = k \cdot OA$, $OB_1 = k \cdot OB$, адкуль

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = k.$$

Тады $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OAB$ па 2-й прымеце падобнасці. Адсюль вынікае, што $\frac{A_1B_1}{AB} = k$.

Выпадак, калі пункты O , A і B ляжаць на адной прамой, разгледзьце самастойна.

Вынік.

Гаматэтыя пераводзіць прамыя ў паралельныя ім прамыя.

Падобнасць — гэта такое пераўтварэнне, пры якім адлегласці паміж пунктамі змяняюцца ў адну і тую ж колькасць разоў. Інакш кажучы, калі A і B — адвольныя пункты фігуры F — пераходзяць у пункты A_1 і B_1

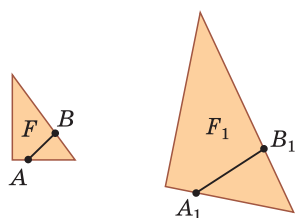


Рис. 309

фігуры F_1 , то $A_1B_1 = k \cdot AB$, дзе $k > 0$ — адзін і той жа лік для ўсіх пар пунктаў A і B (рис. 309). Лік k называецца каэфіцыентам падобнасці. Пры $k = 1$ пераўтварэнне падобнасці з'яўляецца рухам.

Гаматэтыя з'яўляецца прыватным выпадкам падобнасці. Кампазіцыя руху і падобнасці з'яўляецца падобнасцю.

Пераўтварэнне падобнасці пераводзіць прамыя ў прамыя, прамені ў прамені, адрэзкі ў адрэзкі.

Тэарэма. Пераўтварэнне падобнасці захоўвае вуглы паміж прамымі.

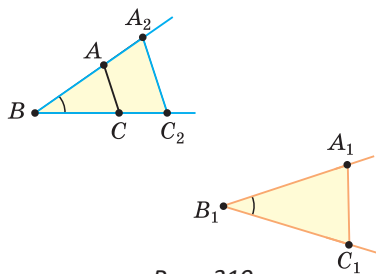


Рис. 310

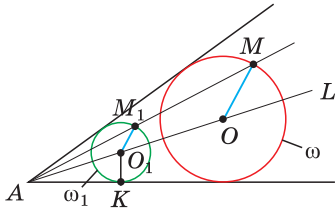
Доказ. Няхай вугал B пераўтварэннем падобнасці з каэфіцыентам k пераводзіцца ў вугал B_1 , і пункты A і C пераводзяцца ў пункты A_1 і C_1 (рис. 310). Прыменім да вугла B пераўтварэнне гаматэтыі з цэнтрам у пункце B і каэфіцыентам k , пры якім пункты A і C пераходзяць у пункты A_2 і C_2 . Паколькі $\triangle A_2BC_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$ па 3-й прымеце (пры гаматэтыі і падобнасці ўсе адлегласці змяніліся ў k разоў), то $\angle B = \angle B_1$, што і трэба было даказаць.



Заданні да § 26

РАШАЕМ РАЗАМ ключавыя задачы

Задача. Упісаць у вугал A акружнасць, якая датыкаецца да старон вугла і праходзіць праз пункт M , узяты ўнутры вугла.



Рыс. 311

Рашэнне. Ідэя пабудовы заключаецца ў тым, каб пабудаваць адвольную акружнасць, упісаную ў дадзены вугал, а затым пабудаваць гаматэтычную ёй адносна вяршыні вугла акружнасць, якая пройдзе праз пункт M .

1) Будзем бісектрысу AL вугла A . З адвольнага пункта O_1 , адзначанага на гэтай бісектрысе, апускаем перпендыкуляр O_1K на старану вугла A . Радыусам, роўным O_1K , будзем акружнасць ω_1 , упісаную ў вугал A (рыс. 311).

2) Праводзім прамень AM і знаходзім пункт M_1 (што адпавядае пункту M), у якім гэты прамень перасякае пабудаваную акружнасць ω_1 .

3) Будзем адрэзак O_1M_1 . Будзем прамую, якая праходзіць праз пункт M і паралельна прамой M_1O_1 , да перасячэння з бісектрысай AL у пункце O .

4) Радыусам, роўным OM , будзем шуканую акружнасць ω .

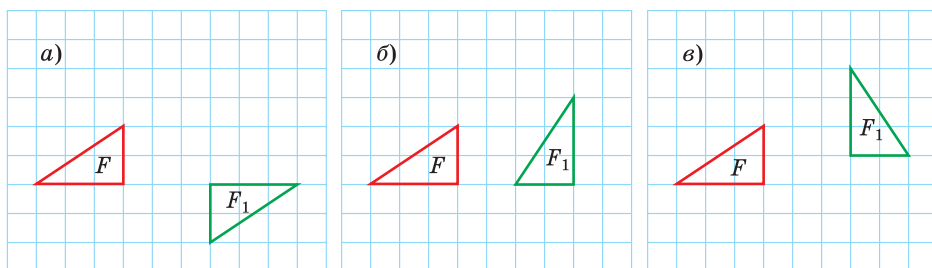
Тое, што пабудаваная акружнасць ω сапраўды шуканая, вынікае з таго, што яна гаматэтычна акружнасці ω_1 пры гаматэтыі з цэнтрам у пункце A і каэфіцыентам $k = \frac{AM}{AM_1}$.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

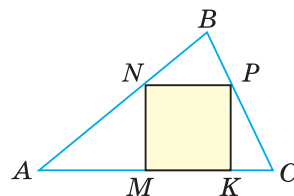
373. Дакажыце, што пры сіметрыі адносна некаторага пункта — цэнтра сіметрыі — трохвугольнік пераходзіць у роўны яму трохвугольнік.
374. Дакажыце, што пры сіметрыі адносна некаторай прамой — восі сіметрыі — трохвугольнік пераходзіць у роўны яму трохвугольнік.
375. Дакажыце, што пры руху вугал пераходзіць у роўны яму вугал.

- 376.** Дакажыце, што пры руху паралелаграм пераходзіць у роўны яму паралелаграм.
- 377.** Дакажыце, што пры руху акружнасць пераходзіць у роўную ёй акружнасць.
- 378.** Вызначце, у выніку якога пераўтварэння або камбінацыі пераўтварэнняў фігура F перайшла ў фігуру F_1 (рыс. 312).



Рыс. 312

- 379.** Начарціце трохвугольнік ABC і некаторы вектар $\overrightarrow{MM_1}$. Пабудуйце фігуру, у якую пяройдзе трохвугольнік ABC пры паралельным пераносе на вектар $\overrightarrow{MM_1}$.
- 380.** Начарціце квадрат $ABCD$ і фігуру, у якую пяройдзе квадрат пры паралельным пераносе на вектар $\overrightarrow{AC}$.
- 381.** Начарціце прамую a , адзначце на ёй пункт O . Пабудуйце фігуру, у якую пяройдзе прамая a пры павароце яе на 45° супраць гадзіннікавай стрэлкі вакол пункта O .
- 382.** Начарціце роўнастаронні трохвугольнік ABC . Пабудуйце фігуру, у якую пяройдзе гэты трохвугольнік пры павароце яго на 60° па гадзіннікавай стрэлцы вакол пункта A .
- 383.** Дакажыце, што пры павароце квадрата вакол пункта перасячэння дыяганалей на 90° ён пяройдзе сам у сябе.
- 384.** Дакажыце, што пры павароце роўнастаронняга трохвугольніка вакол пункта перасячэння медыян на 120° ён пяройдзе сам у сябе.
- 385.** Складзіце алгарытм, які дазваляе пры дапамозе цыркуля і лінейкі ўпісаць у дадзены трохвугольнік квадрат, як паказана на рысунку 313.



Рыс. 313

ЗАПАМІНАЕМ

1. Калінеарныя вектары — вектары, якія ляжаць на паралельных прамых або на адной прамой.
2. Роўныя вектары — вектары, якія роўныя па даўжыні і супадаюць па напрамку.
3. Працiлеглыя вектары — вектары, роўныя па даўжыні і процiлеглыя па напрамку.
4. Складанне вектараў: правіла трохвугольніка і правіла паралелаграма.
5. Адніманне вектараў: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$, дзе вектар $\vec{c}$ накіроўваюць ад канца вектара $\vec{b}$ да канца вектара $\vec{a}$.
6. Множанне вектара на лік k : $\vec{a}$ і $k \cdot \vec{a}$ — калінеарныя вектары.
7. Скалярны здабытак вектараў:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha.$$
8. Каардынаты радыус-вектара $\overrightarrow{OA}$ супадаюць з каардынатамі пункта A .
9. Знаходжанне каардынат вектара па каардынатах яго канца і пачатку: трэба ад каардынат канца вектара адняць каардынаты пачатку.
10. Даўжыню вектара $\vec{a}(a_1; a_2)$ знаходзяць па формуле $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
11. Множанне вектара на лік:

$$k \cdot \vec{a}(a_1; a_2) = \vec{b}(ka_1; ka_2), \quad \vec{a} \parallel \vec{b}.$$
12. Складанне і адніманне вектараў:

$$\vec{a}(a_1; a_2) \pm \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2).$$
13. Скалярны здабытак вектараў $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$:

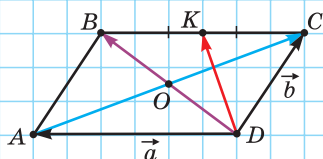
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$
14. Вугал паміж вектарамі:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$
15. Прымета калінеарнасці вектараў:
адпаведныя каардынаты вектараў прапарцыянальныя.
16. Прымета перпендыкулярнасці вектараў:
скалярны здабытак вектараў роўны нулю.

ПРАВЯРАЕМ СЯБЕ

Тэст 1

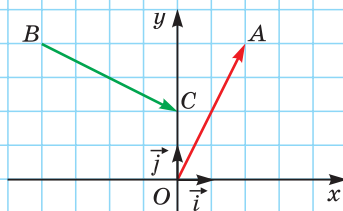
Выкарыстаўшы рысунак, выразіце вектары $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{DK}$ праз вектары $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$.



Тэст 2

Знайдзіце:

- каардынаты $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{BC}$;
- $|\overrightarrow{BC}|$;
- $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC})$.



Тэст 3

Для $\vec{a}(-3; 4)$ і $\vec{b}(0; -1)$ знайдзіце:

- $|\vec{a}|$; $|\vec{b}|$;
- $-2\vec{a}$;
- $\vec{a} + \vec{b}$;
- $2\vec{a} - 3\vec{b}$;
- $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
- $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Паўтарэнне геаметрыі 7–9 класаў

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

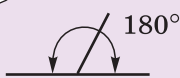
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

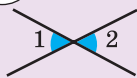
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

7 клас

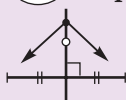
1 Сумежныя



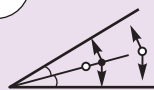
2 Вертыкальныя



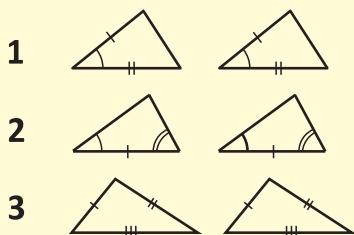
3 Пасярэдні перпендыкуляр



4 Бісектрыса

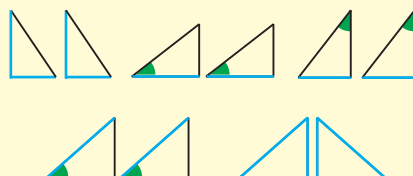


5 Прыметы роўнасці трохвугольнікаў



6 Раўнабедраны

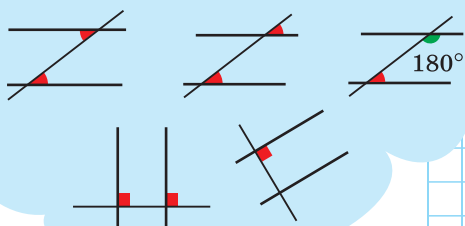
Уласцівасці Прыметы



7 Паралельныя прамыя



Прыметы-ўласцівасці

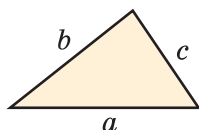


8 Сума вуглоў трохвугольніка

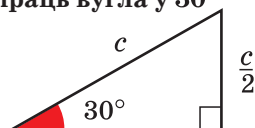


9 Няроўнасць трохвугольніка

$$\begin{aligned} a &< b + c \\ b &< a + c \\ c &< a + b \end{aligned}$$



10 Катэт, які ляжыць насупраць вугла ў 30°



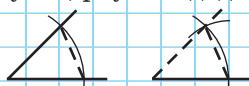
11 Задачы на пабудову

Трохвугольніка

Бісектрысы

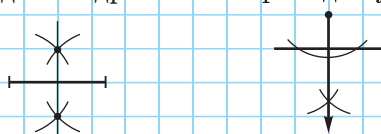


Вугла, роўнага дадзенаму



Сярэдзіны адрэзка

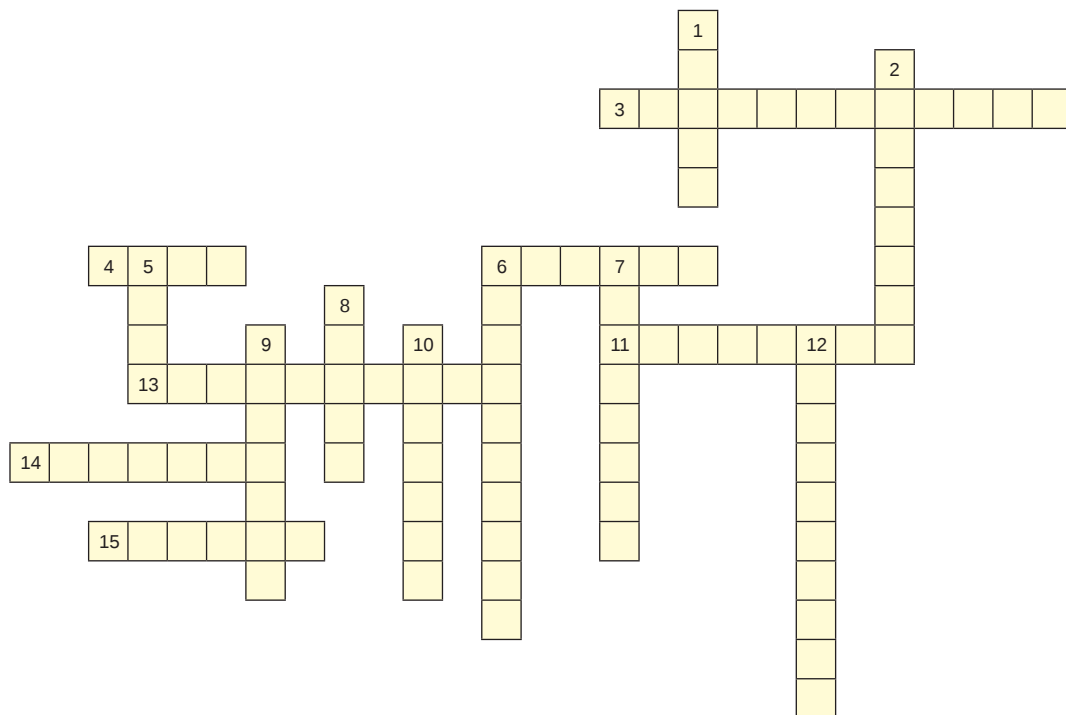
Перпендыкуляра



Дапоўніце сказы, вымавіўшы ўголос прапушчаныя фрагменты

1. Сума сумежных вуглоў роўна
2. Вертыкальныя вуглы
3. Любы пункт пасярэдняга перпендыкуляра да адрэзка роўнааддалены ад канцоў
4. Любы пункт бісектрысы вугла роўнааддалены ад старон
5. Прыметы роўнасці трохвугольнікаў:
 - 1) па дзвюх старанах і ...;
 - 2) па старане і двух ... вуглах;
 - 3) па трохПрыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў:
 - 1) па двух ...;
 - 2) па катэце і прылеглым ...;
 - 3) па катэце і процілеглым ...;
 - 4) па гіпатэнузе і ... вугле;
 - 5) па катэце і
6. У раўнабедраным трохвугольніку вуглы пры аснове ..., а бісектрыса, праведзеная з вяршыні да асновы, з'яўляецца яго ... і
7. Калі дзве прамыя перасечаны трэцяй і накрыжлеглыя вуглы роўныя, або адпаведныя вуглы роўныя, або сума аднастаронніх вуглоў роўна 180° , то прамыя І наадварот, калі ..., то
8. На плоскасці дзве прамыя, перпендыкулярныя трэцяй,
9. Прамая, перпендыкулярная адной з паралельных прамых, ... і другой прамой.
10. Сума вуглоў трохвугольніка роўна
11. Знешні вугал трохвугольніка — гэта вугал, сумежны з яго
12. Знешні вугал трохвугольніка роўны суме двух ... вуглоў, не ... з ім.
13. Няроўнасць трохвугольніка: любая старана трохвугольніка меншая за суму
14. Катэт прамавугольнага трохвугольніка, які ляжыць насупраць вугла ў 30° , роўны палавіне
15. У трохвугольніку насупраць найбольшай стараны ляжыць найбольшы ..., а насупраць найбольшага вугла ляжыць

-  **16.** Бісектрысы сумежных вуглоў узаемна
-  **17.** Любы пункт плоскасці, роўнаадалены ад канцоў адрэзка, ляжыць на
-  **18.** Геаметрычнае месца пунктаў, роўнаадаленых ад канцоў адрэзка, — гэта
-  **19.** Геаметрычнае месца пунктаў плоскасці, роўнаадаленых ад старон вугла (якія знаходзяцца ўнутры вугла), — гэта
-  **20.** Знешні вугал трохвугольніка большы за любы ... вугал трохвугольніка, не сумежны з ім.
-  **21.** Пасярэднія перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ў цэнтры ... акружнасці.
-  **22.** Калі ў трохвугольніка вышыня з'яўляецца бісектрысай, або вышыня з'яўляецца медыянай, або медыяна з'яўляецца бісектрысай, то трохвугольнік
-  **23.** Бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца
-  **24.** Катэт прававугольнага трохвугольніка меншы за
-  **25.** Для перпендыкуляра і дзвюх нахіленых, праведзеных з аднаго пункта да дадзенай прамой, і праекцый нахіленых на гэту прамую справядліва: «Перпендыкуляр меншы за нахіленую. Праекцыя нахіленай меншая за саму Большай нахіленай адпавядае большая ..., роўным ... — роўныя ...».
-  **26.** У прававугольным трохвугольніку медыяна, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палавіне Калі медыяна трохвугольніка роўна палавіне стараны, да якой яна праведзена, то гэты трохвугольнік —
-  **27.** Асноўныя задачы на пабудову пры дапамозе цыркуля і лінейкі:
- 1) пабудова трохвугольніка па трох старанах;
 - 2) пабудова бісектрысы вугла;
 - 3) пабудова вугла, роўнага дадзенаму;
 - 4) дзяленне адрэзка папалам;
 - 5) пабудова прамой, перпендыкулярнай дадзенай.

Ваш выдатны красворд

Перанясіце красворд у сшытак і рашыце яго.

Па гарызанталі:

3. Чатырохвугольнік, процілеглыя стораны якога паралельныя.
4. Частка плоскасці, абмежаваная акружнасцю.
6. Адзінка вымярэння вуглоў.
11. Чатырохвугольнік, дзве стараны якога паралельныя, а дзве іншыя — не.
13. Прамень, які выходзіць з вяршыні вугла і дзеліць яго папалам.
14. Вугал з вяршыняй на акружнасці, стораны якога перасякаюць акружнасць.
15. Перпендыкуляр, праведзены з вяршыні трохвугольніка да процілеглай стараны трохвугольніка або да яе прадаўжэння.

Па вертыкалі:

1. Адрэзак, які злучае два пункты акружнасці.
2. Два трохвугольнікі, вуглы якіх адпаведна роўныя, а адпаведныя стораны прапарцыянальныя.
5. Паралелаграм, у якога дыяганалі перпендыкулярныя.
6. Старана прамавугольнага трохвугольніка, якая ляжыць насупраць яго прамога вугла.
7. Прамая, якая мае толькі адзін агульны пункт з акружнасцю.
8. Старана прамавугольнага трохвугольніка, якая ляжыць насупраць яго вострага вугла.
9. Адрэзак, які злучае вяршыню трохвугольніка з сярэдзінай процілеглай стараны.
10. Хорда акружнасці, якая праходзіць праз яе цэнтр.
12. Вугал з вяршыняй у цэнтры акружнасці.

Дапоўніце сказы, вымавіўшы ўголос прапушчаныя фрагменты

1. Сума ўнутраных вуглоў n -вугольніка роўна
2. Уласцівасці паралелаграма.
У паралелаграме:
 - 1) сума суседніх вуглоў роўна ...;
 - 2) дыяганаль дзеліць яго на ...;
 - 3)—4) процілеглыя стораны ... і процілеглыя вуглы ...;
 - 5) дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца
3. Прыметы паралелаграма.
Чатырохвугольнік з'яўляецца паралелаграмам, калі ў яго:
 - 1) дзве стараны ... і ...;
 - 2) процілеглыя стораны ...;
 - 3) дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца
4. Дыяганалі прамавугольніка
5. Прыметы прамавугольніка:
 - 1) калі ў паралелаграма дыяганалі ..., то гэта прамавугольнік;
 - 2) калі ў паралелаграма адзін вугал прамы, то гэта ...;
 - 3) калі ў чатырохвугольніка ўсе вуглы прамыя, то гэта
6. Дыяганалі ромба ўзаемна ... і ляжаць на бісектрысах яго вуглоў.
7. Прыметы ромба:
 - 1) калі ў паралелаграма дыяганалі ..., то гэта ромб;
 - 2) калі ў паралелаграма дыяганаль ляжыць на бісектрысе яго вугла, то гэта
8. Тэарэма Фалеса: калі на адной старане вугла адкласці роўныя адрэзкі і праз іх канцы правесці паралельныя прамыя, якія перасякаюць другую старану, то на другой старане вугла адкладуцца
9. Сярэдняя лінія трохвугольніка ... аснове і роўна
10. Сярэдняя лінія трапецыі ... асновам і роўна іх
11. Медыяны трохвугольніка перасякаюцца ... і дзеляцца гэтым пунктам у адносіне 2 : 1, лічачы ад вяршыні.
12. Плошча квадрата $S = a^2$; прамавугольніка $S = ab$; паралелаграма $S = ah$; трохвугольніка $S = \frac{1}{2}ah$; трапецыі $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; ромба $S = \frac{d_1 d_2}{2}$; ... трохвугольніка $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.
13. Тэарэма Піфагора: сума квадратаў катэтаў роўна квадрату ...: $a^2 + b^2 = c^2$.

14. Адваротная тэарэма Піфагора: калі сума квадратаў дзвюх старон трохвугольніка роўна квадрату трэцяй стараны, то гэты трохвугольнік
15. Медыяна дзеліць трохвугольнік на два роўнавялікія
16. Адносіна плошчаў падобных трохвугольнікаў роўна адносіне квадратаў адпаведных старон і роўна квадрату каэфіцыента
17. Трохвугольнікі называюцца падобнымі, калі ў іх адпаведныя ... роўныя, а ... прапарцыянальныя.

18. Тры прыметы падобнасці трохвугольнікаў.

Трохвугольнікі падобныя, калі:

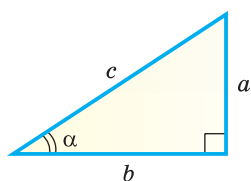
- 1) два ... аднаго трохвугольніка адпаведна роўны двум ... другога трохвугольніка;
- 2) дзве ... аднаго трохвугольніка адпаведна прапарцыянальны дзвюм ... другога трохвугольніка, а вуглы паміж імі роўныя;
- 3) тры ... аднаго трохвугольніка адпаведна прапарцыянальны тром ... другога трохвугольніка.

19. Бісектрыса вугла трохвугольніка дзеліць процілеглую старану на часткі, ... прылеглым старанам.
20. Тэарэма Фалеса абагульненая: паралельныя прамыя адсякаюць на старанах вугла ... адрэзкі.
21. Датычная ... радыусу, праведзенаму ў пункт
22. Упісаны вугал роўны ... адпаведнага цэнтральнага вугла.
23. Упісаныя вуглы, якія абапіраюцца на адну і тую ж дугу,
24. Упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр, —
25. Вугал паміж перасякальнымі хордамі роўны ... градусных мер дуг, адна з якіх змешчана ўнутры дадзенага вугла, а другая — унутры яму вертыкальнага.
26. Вугал паміж сякучымі, якія выходзяць з пункта па-за акружнасцю, роўны ... градусных мер дуг, змешчаных унутры вугла.
27. Здабыткі адрэзкаў перасякальных хорд

-  28. Вугал паміж хордай і датычнай, якія маюць агульны пункт на акружнасці, роўны ... градуснай меры дугі, змешчанай унутры вугла.
-  29. Для датычнай і сякучай, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, квадрат адрэзка датычнай роўны здабытку большага адрэзка сякучай на яго ... частку.

-  **30.** Сума знешніх вуглоў выпуклага многавугольніка, узятых па адным пры кожнай вяршыні, роўна
-  **31.** Бісектрыса вугла паралелаграма адсякае ад яго раўнабедраны
-  **32.** Бісектрысы суседніх вуглоў паралелаграма ўзаемна
-  **33.** Бісектрысы процілеглых вуглоў паралелаграма
-  **34.** Вугал паміж вышынямі паралелаграма, праведзенымі з адной вяршыні, роўны вуглу пры суседняй
-  **35.** Сярэдзіны старон чатырохвугольніка з'яўляюцца вяршынямі
-  **36.** Плошча трапецыі роўна здабытку сярэдняй лініі на ..., г. зн. $S_{\text{тр}} = mh$.
-  **37.** Дыяганалі трапецыі дзеляць яе на чатыры трохвугольнікі; трохвугольнікі, прылеглыя да бакавых старон, ..., а прылеглыя да асноў —
-  **38.** Вышыня раўнабедранай трапецыі, праведзеная з вяршыні меншай асновы, дзеліць большую аснову на часткі, роўныя паўсуме і ... асноў.
-  **39.** Сярэдзіны асноў трапецыі, пункт перасячэння яе дыяганалей і пункт перасячэння прадаўжэнняў бакавых старон трапецыі ляжаць на адной
-  **40.** Плошчы трохвугольнікаў з агульнай вышынёй адносяцца як адпаведныя

9 клас



$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{b}{a}\end{aligned}$$

	30°	60°	45°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1

Асноўная трыганаметрычная тоеснасць

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

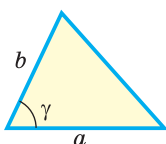
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

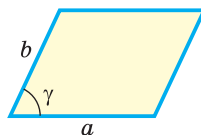
$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$$



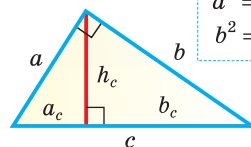
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$S_{\text{пар}} = ab \sin \gamma$$

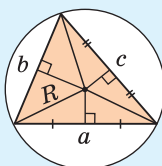


сярэдняе геаметрычнае

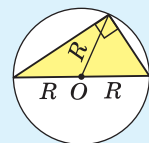
$$\begin{aligned}h_c^2 &= a_c \cdot b_c \\ a^2 &= c \cdot a_c \\ b^2 &= c \cdot b_c\end{aligned}$$



Апісаная

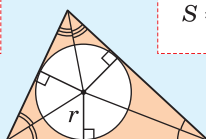


$$S = \frac{abc}{4R}$$

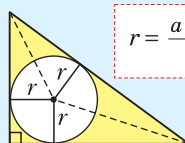


$$R = \frac{c}{2}$$

Упісаная

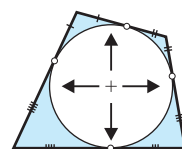
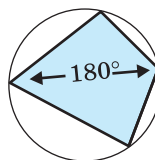


$$S = pr$$



$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

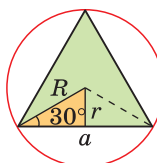
Уласцівасці-прыметы



Тэарэма сінусаў

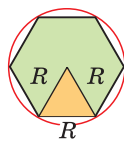
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Правільныя



$$a = R\sqrt{3}$$

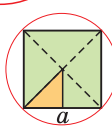
$$r = \frac{R}{2}$$



$$a = R$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



$$r = \frac{a}{2}$$

$$C = 2\pi R$$

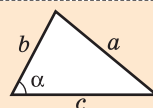
даўжыня акружнасці

$$S = \pi R^2$$

плошча круга

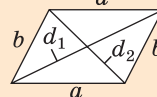
Тэарэма косінусаў

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



$$1. \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2. d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$



$$3. m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

$$4. S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Формула Герона

Дапоўніце сказы, вымавіўшы ўголас прапушчаныя фрагменты

1. Сінусам вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна процілеглага катэта да гіпатэнузы, косінусам — адносіна прылеглага катэта да гіпатэнузы, тангенсам — адносіна процілеглага катэта да прылеглага, катангенсам — адносіна прылеглага катэта да

2. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \dots$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$;
 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \dots$, $\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
 $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = \dots$.

3. Формулы для знаходжання значэнняў трыганаметрычных функцый тупога вугла:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha, \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \dots, \quad \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = \dots.$$

4. Сінус тупога вугла роўны сінусу сумежнага з ім вострага вугла, косінус тупога вугла роўны косінусу сумежнага з ім вострага вугла, узятаму са знакам

5. Асноўная трыганаметрычная тоеснасць: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \dots$.

6. Тангенс і катангенс вугла α роўны:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

7. Плошчу трохвугольніка і плошчу паралелаграма можна знайсці па формулах:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma, \quad S_{\text{пар}} = ab \sin \gamma.$$

8. Вышыня прамавугольнага трохвугольніка — ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж ... катэтаў на гіпатэнузу:

$$h_c = \sqrt{a_c b_c}.$$

Катэт — ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж гіпатэнузай і праекцыяй гэтага катэта на ...:

$$a = \sqrt{c \cdot a_c}, \quad b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

9. Цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, ляжыць у пункце перасячэння ..., праведзеных да яго старон.

10. Цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік, ляжыць у пункце перасячэння яго

11. Плошчу трохвугольніка (апісанага многавугольніка) можна знайсці па формуле $S = pr$, дзе r — радыус ... акружнасці, p — паўперыметр.

12. Цэнтр акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, ляжыць на ..., а радыус роўны палавіне

13. Радыус акружнасці, упісанай у ... трохвугольнік, знаходзяць па формуле

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

14. У чатырохвугольніка, упісанага ў акружнасць, сума яго процілеглых вуглоў роўна І наадварот, калі

15. У чатырохвугольніка, апісанага каля акружнасці, сумы процілеглых ... роўныя паміж сабой. І наадварот, калі

16. Тэарэма сінусаў. Стораны трохвугольніка прапарцыянальны Адносіна стараны трохвугольніка да сінуса процілеглага вугла роўна падвоенаму радыусу ... акружнасці трохвугольніка:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

17. Тэарэма косінусаў. Квадрат любой стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон мінус падвоены здабытак гэтых старон на ... паміж імі: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

18. Плошчу трохвугольніка можна знайсці па формуле ... :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

19. У правільным (роўнастароннім) трохвугольніку старана a , радыус R апісанай акружнасці, радыус r упісанай акружнасці, вышыня h і плошча S звязаны формуламі:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \dots, \quad a = R\sqrt{3}, \quad r = \frac{1}{2}R.$$

20. У правільным шасцівугольніку старана a роўна радыусу ... акружнасці.

21. Даўжыню акружнасці радыусам R знаходзяць па формуле $C = \dots$.

22. Плошчу круга радыусам R знаходзяць па формуле $S = \dots$.

 23. У правільным трохвугольніку старана a , радыус R апісанай акружнасці, радыус r упісанай акружнасці звязаны формуламі:

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

 24. Плошчу ... можна знайсці па формуле $S = \frac{abc}{4R}$.

 25. Косінус вугла ... са старанамі a , b і c можна знайсці па формуле

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

 26. Сума квадратаў дыяганалей ... роўна суме квадратаў усіх яго старон:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Адказы

Глава I

4. д) 1; е) 1.
7. а) $\alpha = 58^\circ$, $\beta = 32^\circ$; б) $\alpha = 38^\circ$, $\beta = 52^\circ$; в) $\alpha = 23^\circ$, $\beta = 67^\circ$.
8. а) $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$; б) $\cos \angle ACB = \frac{3}{5}$; в) $\operatorname{tg} \angle CBH = \frac{3}{4}$;
г) $AK = 9,6$ см; $\sin \angle ABK = 0,96$.
9. $\frac{5}{13}$.
12. $\frac{1}{2}$ і 60° .
13. а) 7,5; б) 1,5; в) 5.
14. 32 см^2 .
15. 20 см^2 .
16. 3,75.
17. 2 ; $-\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$.
19. Указанні. а) Выкарытайце ўласцівасць: сінус і косінус вострага вугла меншыя за 1; б) выкарытайце азначэнні $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\sin \beta = \frac{b}{c}$ і няроўнасць трохвугольніка.
20. а) 192 см^2 ; б) 75 см^2 .
21. а) Указанне. $\cos \angle BAA_1 = \frac{A_1B}{AB} = \frac{C_1B}{CB}$; б) 8; в) 36.
22. а) $\angle B = 90^\circ - \alpha$; б) $BC = c \sin \alpha$; в) $AC = c \cos \alpha$.
23. а) $BC = \frac{4}{\operatorname{tg} \beta}$ або $BC = 4 \operatorname{ctg} \beta$; б) $AB = \frac{4}{\sin \beta}$ або $AB = 4\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta}$;
в) $S = \frac{8}{\operatorname{tg} \beta}$ або $S = 8 \operatorname{ctg} \beta$.
24. а) 6,4; б) 13,5; в) 9,4.
25. а) $AC = 6$; $BC = 8$; б) $BC = 6$, $AC = 2\sqrt{7}$; в) $AB = 6$, $AC = 2\sqrt{5}$;
г) $BC = 3$, $AB = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.
26. а) $x = 6\sqrt{3}$, $S = 36\sqrt{3}$; б) $x = 8$, $S = 32$; в) $x = 3\sqrt{2}$, $S = 18$;
г) $x = 2\sqrt{3}$, $S = 3\sqrt{3}$.
27. 90 см^2 .
28. 14 см^2 .
29. 144 см^2 .
30. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

31. а) $S = a^2 \sin \alpha \cos \alpha$; б) $S = \frac{a^2 - b^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$.
32. Вугал $ABC = 90^\circ$. Указанне. Паколькі $\triangle ABM$ раўнабедраны (дакажыце), то $AH = HM = x$. Тады $MC = AM = 2x$. Да $\triangle HBC$ выкарыстайце ўласцівасць бісектрысы трохвугольніка і знайдзіце $\sin C$, затым $\angle C$, $\angle HBC$.
33. $a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$, $h_c = c \sin \alpha \cos \alpha$, $b_c = c \cos^2 \alpha$, $a_c = c \sin^2 \alpha$.
35. а) $\frac{3}{4}$; б) $2\sqrt{2}$.
37. а) 0,8; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$; б) $\frac{24}{25}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{24}{7}$.
38. 8 см.
39. а) $\alpha > \beta$. Указанне. Разгледзьце прамавугольныя трохвугольнікі з агульным катэтам, роўным 1; б) $\alpha < \beta$. Указанне. Разгледзьце прамавугольныя трохвугольнікі з агульнай гіпатэнузай, роўнай 5. Або выкарыстайце вынік *ключавой задачы 2* (с. 28).
40. $\operatorname{tg} \alpha > \sin \alpha$. Указанне. У прамавугольным трохвугольніку $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$. Параўнайце $\frac{a}{c}$ і $\frac{a}{b}$, улічыўшы, што c — гіпатэнуза, a і b — катэты.
43. $\frac{3}{5}$. Указанне. Выкарыстайце формулу $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ (гл. папярэднюю задачу) або разгледзьце прамавугольны трохвугольнік з катэтамі 3 і 4.
46. а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-0,8$; в) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
47. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.
48. а) 6 см і 30 см²; б) 4 см і 24 см².
49. а) 0,9848; б) $-0,9962$; в) $-2,1445$; г) $-1,1918$.
50. а) 0,3; б) $1\frac{1}{3}$.
51. а) 1; б) 1; в) -1 .
54. а) 10; б) 8; в) $75\sqrt{3}$.
55. а) 39 см²; б) 80 см².
56. а) 16,8 см²; б) 55 см².
57. а) 26 см; б) 32 см.
58. а) 18 см²; б) 8 см.
61. а) 12 см; б) 36 см².
62. а) $\frac{ab}{2}$; б) $\frac{d_1 d_2}{2}$.
64. а) 15; б) 2; в) 8.
65. а) 10; б) 10; в) 7.

66. 16 см.
 67. 6.
 68. 4 см.
 69. $7,2 \text{ см}^2$.
 70. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
 71. 60° .
 73. 24.
 74. 48.
 75. Указание. $\frac{S_{ABO}}{S_{DCO}} = \frac{BO \cdot AO}{CO \cdot DO} = \frac{BO}{DO} \cdot \frac{AO}{CO}$. Далее выкарыстайце тое, што $\triangle BOC \sim \triangle DOA$.
 76. а) Указание. $\frac{S_{ABC}}{S_{AMK}} = \frac{9 \cdot (12+8)}{(9+6) \cdot 12}$.
 78. 27.
 79. 16,8.
 80. а) $\frac{KO}{OB} = \frac{1}{5}$; б) $\frac{MO}{OC} = 1$; в) $\frac{S_{KOC}}{S_{MOB}} = \frac{1}{5}$.
 81. 10.
 82. $\frac{1}{16}$.

Глава II

86. а) 5; б) 24; в) $2\sqrt{5}$.
 87. а) 7; б) 6; в) 8.
 88. а) 7,2 см; б) 25 см.
 89. 32 см^2 .
 90. а) 6; б) 12; в) 8.
 91. а) 125° ; б) 28° ; в) 90° .
 92. а) 1,5 см; б) $3\frac{1}{3}$ см.
 93. а) 4 см; б) 2 см. Указание. Выкарыстайце *ключавую задачу 3* (с. 62).
 94. а) 8 см і 4 см; б) $3\sqrt{3} \text{ см}^2$.
 96. а) 8 см; б) $(8\sqrt{3} - 12)$ см.
 97. а) 24 см^2 ; б) 3 см. Указание. Выкарыстайце формулу $S = pr$.
 98. 2,5 см.
 99. а) 3 см; б) 192 см^2 .
 100. а) 4 см; б) 12,5 см. Указание. Выкарыстайце для задання а) формулу $S = pr$, для задання б) формулу $R = \frac{b^2}{2h_a}$.

101. а) 55° ; б) 116° .
103. а) 12 см. Указанне. Правядзіце дыяметр BK і разгледзьце $\triangle BCK$;
 б) 10 см. Указанне. Гл. п. а) або выкарыстайце формулу $R = \frac{ab}{2h_c}$.
104. а) 2; б) 10.
105. 6.
106. 8. Указанне. Знайдзіце каэфіцыент падобнасці трохвугольнікаў MBK і ABC , для чаго правядзіце вышыню BH , якая перасякае адрэзак MK у пункце N , і знайдзіце адносіну $\frac{BN}{BH}$.
109. 60° .
110. а) 6; б) 2,5; в) 4.
111. а) 9; б) 5; в) 8,5.
112. а) 10 см; б) 15 м; в) 25 дм; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ км.
113. а) 24 см^2 ; б) 6 см.
114. а) 1 см; б) 2 дм; в) 3 см; г) $(4 - 2\sqrt{2})$ м.
115. а) 3; б) 2; в) $2\sqrt{3} - 2$; г) 5.
116. $6\sqrt{2}$ см.
117. 8 см і 15 см. Указанне. Гл. *ключавую задачу 1* (с. 70).
118. 60 см і 120 см^2 .
119. а) 10 см; б) 2 см.
120. 30 см.
121. $2\sqrt{5}$ см.
122. 5 см.
123. а) 12 см^2 . б) Указанне. З *ключавой задачы 2* (с. 70—71) $S = (r + c)r$. З другога боку, катэты трохвугольніка роўны $m + r$, $n + r$ і $S = \frac{(m+r)(n+r)}{2}$. Адсюль $S = mn$.
125. а) 95° ; б) 100° ; в) 125° .
126. а) 80° ; б) 108° ; в) 104° ; г) 80° .
127. а) 130° ; б) 30° .
128. а) 31° ; б) 115° .
129. а) 136° ; б) 26 см.
131. 8 см. Указанне. Выкарыстайце ўласцівасць: здабыткі адрэзкаў перасякальных хорд роўныя паміж сабой.
132. а) 48 см^2 ; б) 240 см^2 .
133. а) 32 см^2 ; б) 16 см. Указанне. У $\triangle BOC$ правядзіце вышыню OH .
134. а) 7; б) 8; в) 11.

135. а) 24 см; б) 8 см.
136. а) 20 см^2 ; б) 6 см.
137. 45 см^2 . Указанне. Выкарыстайце формулу $S = pr$.
138. а) 10 і 15; б) 80. Указанне. Гл. с. 86.
139. 6 см.
140. 124° .
141. а) 72 см; б) 12 см.
142. 15 см. Указанне. Знайдзіце дыяметр упісанай акружнасці, вышыню $\triangle MBN$, праведзеную да MN , і выкарыстайце падобнасць трохвугольнікаў MBN і ABC .
143. 25 см. Указанне. Правядзіце вышыні BH і CK , знайдзіце даўжыні адрэзкаў AK , KD , CK , CD . Дакажыце, што $\triangle ACD$ — прамавугольны.
144. а) 6 см; 10 см; 12 см; б) 588 см^2 .
145. 10 см. Указанне. Разгледзьце дзве паралельныя хорды даўжынямі 6 см і 8 см з адлегласцю 7 см паміж імі. З цэнтра апісанай акружнасці правядзіце перпендыкуляры да гэтых хорд.
146. $2\sqrt{6}$ см. Указанне. Паколькі $AB + CD = BC + AD$, то трапецыя апісаная, цэнтр K упісанай акружнасці знаходзіцца ў пункце перасячэння бісектрыс і $r = \frac{S}{p}$. Далей разгледзьце $\triangle AKB$.
148. 60° .
149. 3 : 5.
150. 28.
151. 6.
152. а) 20 см^2 ; б) 156 см^2 .
153. 2 см.
155. 3 см.
157. а) 138° ; б) 40° .
158. 24.
159. а) 65° ; б) 52° .
161. 70° .
162. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.
166. а) 1; б) $5\sqrt{2}$.
167. 5 см.
169. б) 5.
170. $2\sqrt{5}$.

Глава III

173. $b = 4\sqrt{2}$; $a = 2\sqrt{6}$; $\beta = 45^\circ$.
174. а) 10,4; б) 8,9; в) 7,3.
175. а) 55° ; б) 46° ; в) 44° .
176. а) 4,9; б) 21,8.
177. а) 26° ; б) 24° .
178. 12 см і 16 см.
179. а) 105° ; б) 8; в) 6.
180. 30 см.
181. а) 12; б) 5; в) $2\sqrt{3}$.
182. а) 9 см; б) 6 см; в) 45° .
183. 16 см.
184. а) 6. Указанне. Знайдзіце $\sin A$ і выкарыстайце тое, што $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, або выкарыстайце заўвагу да *ключавой задачы 3* (с. 102); б) 7,8; в) $3\frac{1}{3}$.
185. а) 6 см; б) 8 см. в) Указанне. Выкарыстайце формулу $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.
186. а) 6,25 см; б) 5 см. Указанне. Выкарыстайце формулу $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.
187. $b = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}$, $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$.
188. $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
189. $\frac{5\sqrt{13}}{3}$ см.
190. а) 8 см; б) $10\frac{5}{6}$ см. Указанне. Можна знайсці радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ACD .
192. а) $\sqrt{5}$; б) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.
194. Указанне. З $\triangle ABM$ і $\triangle CBM$ выразіце $\sin \angle ABM$ і $\sin \angle CBM$ адпаведна і дакажыце, што $\angle ABM > \angle CBM$.
195. Указанне. $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, $\sin \alpha \leq 1$, $2R \sin \alpha \leq 2R$, $a \leq 2R$. Таксама можна выкарыстаць тое, што дыяметр — найбольшая хорда.
196. а) 7; б) 14.
197. а) 7,8 см; б) 4,6 см.
198. $2\sqrt{5}$ см.
199. $3\sqrt{2}$ см.

200. а) $2\sqrt{19}$ см; б) $\sqrt{21}$ см.
201. 32 см.
202. $2\sqrt{19}$ см.
203. а) $AB = 7$ см, $BC = 11$ см; б) $AB = 2$ см, $AC = 4$ см. Указанне. Выразіце невядомыя стораны трохвугольніка праз x і выкарыстайце тэарэму косінусаў.
204. 1 см. Указанне. Прыміце невядомую старану за x і выкарыстайце тэарэму косінусаў да $\triangle ABC$.
205. а) $\sqrt{17}$; б) $\sqrt{37}$.
206. а) 60° ; б) 120° .
207. а) $\frac{7}{8}$; б) $\frac{1}{5}$.
208. а) Востравугольны; б) прамавугольны; в) тупавугольны.
209. а) $6\sqrt{3}$; б) 16.
210. а) $\sqrt{14}$ см; б) 4 см.
211. а) 8 см і 14 см; б) 16 см і 18 см.
212. а) $\sqrt{10}$ см; б) $\sqrt{7,5} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ см.
213. 36 см. Указанне. Выкарыстайце ўласцівасць датычных да акружнасці, праведзеных з аднаго пункта, і тэарэму косінусаў да $\triangle ABC$.
214. 7 см.
215. а) 6 см. Указанне. Правядзіце адрэзак CK , паралельны BD ($K \in AD$), і разгледзьце $\triangle ACK$; б) 25 см.
216. 18 см.
217. $\sqrt{7}$.
218. $\sqrt{7}$, $\sqrt{19}$.
220. Тупавугольным. Указанне. Паколькі $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, то $ah_a = bh_b$, $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$, г. зн. стораны трохвугольніка адваротна прапарцыянальны вышыням: $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 20 : 15 : 12$, $a = 20x$, $b = 15x$, $c = 12x$.
223. а) 42 см^2 ; б) $8\sqrt{6} \text{ м}^2$.
224. а) 96 см^2 ; б) 72 см^2 .
225. а) 12 см; б) 12 см.
226. а) 72 см^2 ; б) 84 см^2 .
227. 24 см^2 і 8,125 см.
228. а) $c \approx 2,5$, $\alpha \approx 53^\circ$, $\beta \approx 97^\circ$; б) $c \approx 1,5$, $\alpha \approx 29^\circ$, $\beta \approx 106^\circ$; в) $\alpha \approx 70^\circ$, $b \approx 7,4$, $c \approx 6,5$; г) $\alpha \approx 48^\circ$, $a \approx 7,5$, $c \approx 5,4$; д) $\alpha \approx 41^\circ$, $\beta \approx 56^\circ$, $\gamma \approx 83^\circ$; е) $\alpha \approx 108^\circ$, $\beta \approx 50^\circ$, $\gamma \approx 22^\circ$.

229. $24\sqrt{5}$ см².
230. а) 2 см; б) 12,5 см.
231. 6. Указанне. Злучыце цэнтр акружнасці з процілеглай вяршыняй. Знайдзіце суму плошчаў атрыманых пры гэтым трохвугольнікаў $\left(\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot r\right)$ і плошчу дадзенага трохвугольніка па формуле Герона.
232. 7 см, 15 см, 20 см. Указанне. Гл. ключавую задачу 4 да § 15 (с. 124).
234. 8 см².
235. 42.
237. $\sqrt{43}$.
239. $b = \frac{2m_a \sin \gamma_1}{\sin(\beta_1 + \gamma_1)}$, $c = \frac{2m_a \sin \beta_1}{\sin(\beta_1 + \gamma_1)}$.
240. а) $a = \frac{P \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$; б) $a = \sqrt{\frac{2S \sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}}$.
241. а) 6; б) 6.
244. а) $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$; $d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$;
 $\sin \varphi = \frac{2ab \sin \alpha}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 \alpha}}$; б) $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.
245. Указанне. Разгледзьце вуглы са старанамі 60° і 120° і тэарэму косінусаў.

Глава IV

246. 60 см.
247. 135°.
248. а) 108°; б) 144°; в) 160°.
249. 12.
250. 14 см.
251. 80 см.
252. $36\sqrt{3}$ см².
253. а) 108°, 36°, 36°; б) 36°, 72°, 72°.
254. 45°.
255. а) 75°; б) 0°.
257. а) 4 см; б) $4\sqrt{2}$ см.
258. $R = 5$ см, $r = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ см.
259. а) 9,7 см; б) 44,8 см.

260. $\beta = 36^\circ$; $R = \frac{10}{\sin 36^\circ}$; $r = \frac{10}{\operatorname{tg} 36^\circ}$.
261. а) $a = 2R \sin 20^\circ$; б) $r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 10^\circ} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} 10^\circ$.
262. 108 см^2 .
263. г) $22,5^\circ$; $67,5^\circ$; 90° . д) Указание. Правядзіце дыяганалі прамавугольніка $A_1A_2A_5A_6$ і высветліце, якую частку плошчы прамавугольніка і якую частку плошчы васьмівугольніка займае плошча трохвугольніка A_1OA_2 , дзе O — цэнтр многавугольніка.
266. а) 9 см; б) 4 см.
267. а) $24\sqrt{3} \text{ см}^2$; б) 72 см.
268. 180 см^2 .
269. а) 4 см і $2\sqrt{3} \text{ см}$.
271. а) $12\sqrt{3} - 18$; б) $3 + \sqrt{3}$.
272. а) $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$; б) $3\sqrt{3}r^2$.
275. а) 62,8 см; б) 9,42 дм; в) 0,314 м; г) 21,98 км.
276. а) 9,6 см; б) 47,8 мм; в) 1,0 дм; г) 0,2 м.
277. а) 150 см; б) 100 см; в) 200 см; г) 40 см.
278. а) 15,3 см; б) 5,7 см.
279. а) 86° ; б) 19° .
280. 57° .
281. 2,8 см.
282. 30° .
283. а) На 6,28 см; б) у 4 разы.
285. а) $78,5 \text{ см}^2$; б) 314 м^2 ; в) $19,625 \text{ дм}^2$; г) $3,14 \text{ км}^2$.
286. а) 1,1 см; б) 10 дм.
287. 80 см.
288. а) $3,14 \text{ см}^2$; б) 13,73 см.
289. а) $39\pi \text{ см}^2$; б) $16\pi \text{ см}^2$.
290. 2 : 1.
291. а) $\frac{Q}{12}$; б) $\frac{Q}{6}$; в) $\frac{Q}{3}$; г) $\frac{3Q}{4}$.
292. а) 80° ; б) 70 см^2 ; в) 270 см^2 .
293. $40\pi \text{ см}^2$.
294. а) 1 : 4; б) 3 : 4.
295. а) $\frac{2\pi}{3} \text{ см}^2$; б) $\frac{3\pi}{2} \text{ м}^2$.
296. а) 12; б) 32π .

297. 59 %.

298. а) $\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$; б) $\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\right)R^2$.

299. а) $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)R^2$; б) $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)R^2$.

300. а) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$; б) 8. Указанне. Злучыце канцы радыусаў і правядзіце бісектрысу вугла сектара, памяняйце жоўтыя і чырвоныя сегменты месцамі.

301. 6 см².

302. $R^2\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

303. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

305. 30.

309. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Глава V

311. а) 45°; б) 135°.

316. а) $\overline{AD}$; б) $\overline{AD}$ і $\overline{BC}$; в) $\overline{BC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DA}$; г) $\overline{DB}$ і $\overline{BD}$.

318. а) $\overline{DA} = \overline{CB}$, $\overline{AB} = -\overline{CD}$ і $\overline{DC} = -\overline{CD}$;

б) $(\overline{CB}; \overline{CD}) = 65^\circ$, $\angle(\overline{CB}; \overline{BA}) = 65^\circ$, $\angle(\overline{AD}; \overline{CD}) = 115^\circ$.

319. а) Процiлеглыя; б) роўныя; в) процiлеглыя; г) перпендыкулярныя.

320. а) $\overline{AN}$ і $\overline{NB}$, $\overline{BK}$ і $\overline{KC}$; б) напрыклад, $\overline{AM}$, $\overline{MK}$, $\overline{AK}$;

в) $\overline{AN}$ і $\overline{BN}$ або $\overline{KC}$ і $\overline{KB}$.

321. а) 5 см; б) 7 см.

322. а) 30°; б) 60°; в) 120°; г) 90°.

329. а) 4; б) 4; в) 0; г) $4\sqrt{3}$.

330. а) 10; б) 10; в) 6; г) 10.

331. а) $\overline{AM}$; б) $\overline{0}$.

332. а) $-\vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $2\vec{b}$; г) $2\vec{b} - 2\vec{a}$; д) $\vec{a} - 2\vec{b}$; е) $2\vec{a}$.

333. $\frac{1}{2}\vec{y} - \frac{1}{2}\vec{x}$.

334. а) $2\vec{a}$; б) $-2\vec{b}$; в) $\vec{a} - \vec{b}$; г) $\vec{a} + \vec{b}$; д) $-\vec{a} - \vec{b}$; е) $\vec{b} - \vec{a}$.
335. а) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$; в) $\vec{b} - \vec{a}$; г) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.
338. $6\frac{\text{KM}}{\text{r}}$; 60° .
340. а) $\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$; б) $\frac{n}{m+n}\vec{AB} + \frac{m}{m+n}\vec{AC}$.
342. $\vec{OA}(2; 5)$; $\vec{OB}(4; 3)$; $\vec{OC}(1; -5)$; $\vec{OD}(-5; -3)$; $\vec{EF}(-5; -3)$.
344. а) $\vec{a}(4; -5)$; $\vec{b}(-3; 1)$; $\vec{d}(1; -1)$; $\vec{e}(-1; 0)$; $\vec{f}(0; 2)$;
б) $\vec{m} = -\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{k} = 4\frac{1}{3}\vec{i} - 5\frac{4}{5}\vec{j}$; $\vec{l} = \sqrt{2}\vec{i}$; $\vec{t} = -0,2\vec{j}$.
345. а) $\vec{a} + \vec{b} = (2; 3)$; б) $\vec{a} - \vec{b} = (-8; 1)$; в) $2\vec{a} + 5\vec{b} = (19; 9)$;
г) $-\vec{a} + 0,2\vec{b} = (4; -1,8)$.
346. $\vec{a}$ i $\vec{c}$; $\vec{a}$ i $\vec{e}$; $\vec{c}$ i $\vec{e}$; $\vec{b}$ i $\vec{d}$.
348. а) $m = 2$; б) $n = \pm 6$.
349. а) $\vec{AB}(5; -1)$; $\vec{AC}(4; -3)$; б) $\vec{AB} - \vec{AC} = (1; 2)$.
350. а) $\vec{AB} + \vec{BC} = (2; 3)$; б) $\vec{BA} - \vec{BC} = (-2; -3)$.
351. а) 10; б) 13.
352. а) $|\vec{a}| = 5$; $|\vec{b}| = \sqrt{5}$; б) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{10}$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{5}$.
353. а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $\frac{1}{5}$; г) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.
354. а) $K(1; -3)$; б) $\vec{BM}(8; -2)$; $|\vec{BM}| = 2\sqrt{17}$.
355. $M(3; 1)$.
356. $N(-3; 12)$.
358. а) 15; б) 6.
359. а) 25; б) 144.
360. а) 12; б) 0; в) -8; г) -4.
362. а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{91}$.
365. а) 45° ; б) 90° .
366. а) 12; б) ± 6 .
370. $\sqrt{53}$.

ЗМЕСТ

Прадмова	3
Глава I. Суадносіны ў прамавугольным трохвугольніку	
§ 1. Сінус, косінус, тангенс і катангенс вострага вугла	11
§ 2. Рашэнне прамавугольнага трохвугольніка	20
§ 3. Трыганаметрычныя формулы	26
§ 4. Сінус, косінус, тангенс і катангенс тупога вугла	31
§ 5. Формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма	36
§ 6. Сярэдняе прапарцыянальнае (сярэдняе геаметрычнае) у прамавугольным трохвугольніку	40
 § 7. Крэатыўная геаметрыя	45
Глава II. Упісаныя і апісаныя акружнасці	
§ 8. Апісаная і ўпісаная акружнасці трохвугольніка	57
§ 9. Прамавугольны трохвугольнік і яго апісаная і ўпісаная акружнасці	68
§ 10. Упісаныя і апісаныя чатырохвугольнікі	74
 § 11. Крэатыўная геаметрыя	85
Паўтарэнне главы I	95
Паўтарэнне главы II	96
Глава III. Тэарэма сінусаў, тэарэма косінусаў	
§ 12. Тэарэма сінусаў	99
§ 13. Тэарэма косінусаў	107
§ 14. Формула Герона. Рашэнне трохвугольнікаў	117
 § 15. Крэатыўная геаметрыя	122
Глава IV. Правільныя многавугольнікі	
§ 16. Правільныя многавугольнікі	133
§ 17. Формулы радыусаў апісанай і ўпісанай акружнасцей правільнага многавугольніка	136
§ 18. Правільны трохвугольнік, чатырохвугольнік, шасцівугольнік	139
§ 19. Знаходжанне даўжыні акружнасці і плошчы круга ...	146
 § 20. Крэатыўная геаметрыя	158
Паўтарэнне главы III	165
Паўтарэнне главы IV	166

Глава V. Вектары

 § 21. Вектар. Віды вектараў	169
 § 22. Дзеянні над вектарамі	174
 § 23. Каардынаты вектара	181
 § 24. Скалярны здабытак вектараў	189
 § 25. Каардынатна-вектарны метады рашэння задач	194
 § 26. Пераўтварэнне фігур на плоскасці	198
Паўтарэнне геаметрыі 7—9-х класаў	207
Адказы	219

(Назва ўстановы адукацыі)

Навучальны год	Імя і прозвішча вучня	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака вучню за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Вучэбнае выданне

Казакоў Валерый Уладзіміравіч
Казакова Вольга Алегаўна

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для **9** класа
ўстаноў адукацыі, якія рэалізуюць
адукацыйныя праграмы
агульнай сярэдняй адукацыі,
з беларускай мовай навучання і выхавання

2-е выданне, выпраўленае і дапоўненае

Заг. рэдакцыі *Г. А. Бабаева*. Рэдактар *Г. М. Гаўрылава*.
Мастак *А. А. Жданоўская*.

Мастацкі рэдактар *А. А. Жданоўская*.
Тэхнічнае рэдагаванне і камп'ютарная вёрстка *Г. А. Дудко*.
Карэктар *В. С. Казіцкая*.

Падпісана да друку 18.03.2025. Фармат $70 \times 100^{1/16}$. Папера афсетная. Друк афсетны.
Ум. друк. арк. 18,85 + 0,33 форз. Ул.-выд. арк. 13,5 + 0,5 форз.
Тыраж 11 650 экз. Заказ .

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецтва “Адукацыя і выхаванне”».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка
друкаваных выданняў № 1/19 ад 02.08.2013.
Вул. Будзённага, 21, 220070, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

Адкрытае акцыянернае таварыства «Паліграфкамбінат імя Якуба Коласа».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка
друкаваных выданняў № 2/3 ад 04.10.2013.
Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, Мінск, Рэспубліка Беларусь.